

Relatório - Experimento 00

Fausto Emrich Brenner - 17/0009777

I. INTRODUÇÃO

Neste experimento, trataremos de como sinais se relacionam pela adição e pela multiplicação, utilizaremos o espectro da frequência para fazer estimativas da potência de um sinal e testaremos o funcionamento de filtros no GRC.

II. ATIVIDADES

A. AR 01

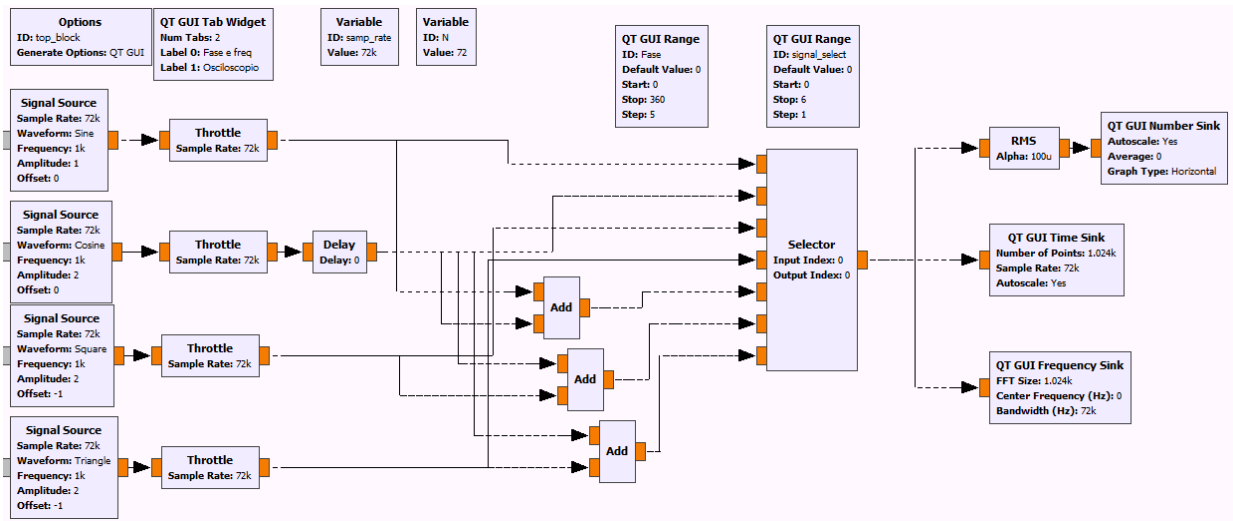


Figura 1: Configuração da AT para a AR 01.

Sinal	Descrição
(1)	Seno, frequência 1kHz, amplitude 1 V, offset 0 V
(2)	Cosseno, frequência 1kHz, amplitude 2 V, offset 0 V, fase variável
(3)	Onda quadrada de 1 kHz, VMAX = -VMIN = 1 V
(4)	Onda triangular de 1 kHz, VMAX = -VMIN = 1 V
(5)	Soma dos sinais (1) e (2)
(6)	Soma dos sinais (2) e (3)
(7)	Soma dos sinais (2) e (4)

Tabela I: Sinais analisados durante a AR01

Seguindo as orientações do roteiro, os 4 sinais iniciais foram configurado. Os sinais (5), (6) e (7) foram compostos pela adição do sinal (2) com os sinais (1), (2) e (3), respectivamente. Todos os 7 sinais construídos foram conectados a um bloco seletor. O seletor funciona como um multiplexador. Ele é controlado por uma variável, no caso *signal_select*, que seleciona qual das entradas (de 0 a 6) será repetida em sua saída. Esse bloco foi utilizado para que durante a mesma simulação fosse possível realizar medições sobre todos os 7 sinais, apenas mudando a variável *signal_select*. A saída desse seletor foi conectada a nossos blocos de medição: Osciloscópio, espectro de frequência e medidor de RMS. O resultado da AT para a AR01 pode ser visto na Figura 1.

Antes de realizar as medições é importante calcular o valor teórico esperado das grandezas de interesse.

1) *Cálculo da Potência:* A potência média de um sinal $g(t)$ é definida como [1]

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt = V_{RMS}^2 \quad (1)$$

para $g(t)$ periódico, pode-se utilizar também

$$P_g = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |g(t)|^2 dt$$

Para o sinal (1), temos

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\sin(2\pi f_0 t)|^2 dt$$
$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{8\pi f_0} \right] \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} - 2 \frac{\sin(4\pi f_0 T/2)}{8\pi f_0} \right]$$

Traçando o limite, quando $T \rightarrow \infty$, $\frac{1}{2} - \frac{\sin(4\pi f_0 T/2)}{8\pi f_0} \rightarrow \frac{1}{2}$, resultando em

$$P_1 = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ W} \quad V_{RMS1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071 \text{ V}$$

O mesmo cálculo pode ser feito para o sinal (2)

$$P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |2 \cos(2\pi f_0 t)|^2 dt$$
$$P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[2t + \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{8\pi f_0} \right] \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[2T + 2 \frac{\sin(4\pi f_0 T/2)}{8\pi f_0} \right]$$

Traçando o limite, quando $T \rightarrow \infty$, $2 + \frac{\sin(4\pi f_0 T/2)}{8\pi f_0} \rightarrow 2$, resultando em

$$P_2 = 2 \text{ W} \quad V_{RMS2} = \sqrt{2} \approx 1.4142 \text{ V}$$

Novamente, para o sinal (3)

$$P_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1^2 dt$$
$$P_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [t] \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} = 1$$

Temos então

$$P_3 = 1 \text{ W} \quad V_{RMS3} = 1 \text{ V}$$

Outra vez, para o sinal (4)

$$P_4 = \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0/2} \left| \frac{4}{T_0} t - 1 \right|^2 dt + \int_0^{T_0/2} \left| -\frac{4}{T_0} t + 1 \right|^2 dt \right]$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0/2} \frac{16}{T_0^2} t^2 - \frac{8}{T_0} t + 1 dt + \int_0^{T_0/2} \frac{16}{T_0^2} t^2 - \frac{8}{T_0} t + 1 dt \right] \\
P_4 &= \frac{1}{T_0} \left[\frac{16}{3T_0^2} t^3 - \frac{4}{T_0} t^2 + t + \frac{16}{3T_0^2} t^3 - \frac{4}{T_0} t^2 + t \right] \Bigg|_0^{T/2} \\
P_4 &= \frac{1}{T_0} \left[\frac{2}{3} T_0 - T_0 + \frac{T_0}{2} + \frac{2}{3} T_0 - T_0 + \frac{T_0}{2} \right] \\
P_4 &= \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Temos então

$$P_4 = \frac{1}{3} \approx 0.333 \text{ W} \quad V_{RMS_4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774 \text{ V}$$

Para o sinal (5), vamos levar a defasagem de (2) em consideração, portanto

$$\begin{aligned}
P_5(\theta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |2 \cos(2\pi f_0 t + \theta) + \sin(2\pi f_0 t)|^2 dt \\
P_5(\theta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[- \frac{16\pi f_0 t \sin(\theta) - 4 \sin(2(\theta + 2\pi f_0 t)) + 4 \cos(\theta + 4\pi f_0 t) - 20\pi f_0 t + \sin(4\pi f_0 t)}{8\pi f_0} \right] \Bigg|_{-T/2}^{T/2}
\end{aligned}$$

Quando $T \rightarrow \infty$, $\frac{\sin(2\pi f_0 T)}{T} \rightarrow 0$, logo

$$P_5(\theta) = - \frac{16\pi f_0 \sin(\theta) - 20\pi f_0}{8\pi f_0} = -2 \sin(\theta) + 2.5$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P_5(0) &= 2.5 \text{ W} \quad V_{RMS_5} = \sqrt{2.5} \approx 1.5811 \text{ V} \\
P_{5_{min}} &= P_5(90^\circ) = 0.5 \text{ W} \quad \text{e} \quad P_{5_{max}} = P_5(270^\circ) = 4.5 \text{ W}
\end{aligned}$$

Para o sinal (6)

$$P_6(\theta) = \frac{1}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^0 |2 \cos(2\pi f_0 t + \theta) - 1|^2 dt + \int_0^{T_0/2} |2 \cos(2\pi f_0 t + \theta) + 1|^2 dt \right]$$

Como a conta ficaria muito longa, pulamos para os resultados das integrais, restando

$$\begin{aligned}
P_6(\theta) &= \frac{1}{T_0} \left[\frac{8 \sin(\theta) + 3\pi}{2\pi f_0} \right] + \frac{1}{T_0} \left[\frac{8 \sin(\theta) 3\pi}{2\pi f_0} \right] \\
P_6(\theta) &= \frac{8 \sin(\theta)}{\pi} + 3
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_6(0) &= 3 \text{ W} \quad V_{RMS_6} = \sqrt{3} \approx 1.7321 \text{ V} \\
P_{6_{min}} &= P_6(270^\circ) = 0.333 \text{ W} \quad \text{e} \quad P_{6_{max}} = P_6(90^\circ) = 5.546 \text{ W}
\end{aligned}$$

Enfim, para o sinal (7)

$$\begin{aligned}
 P_7(\theta) &= \frac{1}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^0 \left| 2 \cos(2\pi f_0 t + \theta) + \frac{4t}{T_0} + 1 \right|^2 dt + \int_0^{T_0/2} \left| 2 \cos(2\pi f_0 t + \theta) - \frac{4t}{T_0} + 1 \right|^2 dt \right] \\
 &= \frac{1}{T_0} \left[T_0 + \frac{8T_0 \cos(\theta) - 4\pi \sin(\theta)}{\pi^2} + \frac{4T_0 \sin(\theta)}{\pi} + \frac{T_0}{6} + T_0 + \frac{8T_0 \cos(\theta) + 4\pi \sin(\theta)}{\pi^2} - \frac{4T_0 \sin(\theta)}{\pi} + \frac{T_0}{6} \right] \\
 P_7(\theta) &= \frac{1}{T_0} \left[\frac{7}{3} T_0 + \frac{16T_0 \cos(\theta)}{\pi^2} \right] \\
 P_7(\theta) &= \frac{7}{3} + \frac{16 \cos(\theta)}{\pi^2}
 \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
 P_7(0) &\approx 3.954 \text{ W} & V_{RMS7} &= 1.9885 \text{ V} \\
 P_{7min} &= P_7(180^\circ) = 0.712 \text{ W} & \text{e} & P_{7max} = P_7(0^\circ) = 3.954 \text{ W}
 \end{aligned}$$

2) *Análise da Ortogonalidade:* Com todos os cálculos de potência finalizados, partiremos para os cálculos de ortogonalidade, necessários para o preenchimento da Tabela IV. Dois sinais são ditos ortogonais quando o resultado de seu produto interno é nulo [1]. Temos então que, para dois sinais $g(t)$ e $x(t)$, definidos em um intervalo de tempo contínuo $[t_1, t_2]$, serão ortogonais se

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t)dt = 0$$

Se $g(t)$ e $x(t)$ forem reais

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt = 0 \quad (2)$$

Para sinais definidos para todo t , temos ainda que

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)x(t)dt = 0 \quad (3)$$

Um conceito importante de destacar também é o da Série de Fourier. Um sinal $g(t)$ periódico de período $T_0 = 1/f_0$ pode ser expresso por uma série de Fourier [1]

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

ou ainda

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

Devemos então, para $x_1(t) = 2 \cos(2\pi 1000t + \theta)$, encontrar os valores de θ que o tornem ortogonais aos sinais 1, 2 e 3.

Para $x_2(t) = \sin(2\pi 1000t)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle x_1(t), x_2(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} 2 \cos(2\pi 1000t + \theta) \sin(2\pi 1000t) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{T/2}^{-T/2} \frac{e^{j(2\pi 1000t + \theta)} + e^{-j(2\pi 1000t + \theta)}}{2} \cdot \frac{e^{j(2\pi 1000t)} - e^{-j(2\pi 1000t)}}{2j} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} \frac{e^{j(4\pi 1000t + \theta)} - e^{-j(4\pi 1000t + \theta)}}{2j} + \frac{e^{-j\theta} - e^{j\theta}}{2j} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} \sin(4\pi 1000t + \theta) - \sin(\theta) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-\frac{\cos(4\pi 1000t + \theta)}{4\pi 1000} - \sin(\theta)t \right] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{\cos(2\pi 1000T - \theta) - \cos(2\pi 1000T + \theta)}{4\pi 1000} - \sin(\theta)T \right] = -\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Então, para que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam ortogonais, basta que

$$-\sin(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O menor θ que satisfaz a condição é $\theta = 0$

Nesse caso, a potência de $x_1(t) + x_2(t)$ para o caso ortogonal será a mesma da calculada para o sinal (5): 2.5 W.

Para $x_3(t)$ igual à onda quadrada, sabemos que $x_3(t)$, no GRC, é uma função ímpar. Dessa forma, sua série de Fourier apenas possui componentes $\sin(2n\pi 1000t)$. Como sabemos pela definição da série de Fourier, todas essas componentes serão ortogonais entre si, e, como já vimos no exemplo anterior, $\cos(2n\pi 1000t)$ também é ortogonal a elas. Dessa forma, podemos concluir que, para $\theta = 0$ os dois sinais serão ortogonais.

A potência de $x_1(t) + x_3(t)$ nesse caso será igual à do sinal (6): 3.0 W.

Para $x_4(t)$ igual à onda triangular, no GRC $x_4(t)$ é uma função par. Assim, sua série de Fourier será composta apenas de componentes $\cos(2\pi n 1000t)$. Se tomarmos $x_1(t) = 2 \cos(2\pi 1000t + \theta)$, com $\theta = 0$ percebe-se que $x_1(t)$ será igual à primeira harmônica da série de Fourier de x_4 , ou seja, as funções não serão ortogonais. Porém, como vimos anteriormente, $\cos(2\pi n 1000t)$ e $\sin(2\pi n 1000t)$ formam um par ortogonal. Dessa forma, se defasarmos $x_1(t)$ em 90° teremos que

$$x_1(t) = 2 \cos(2\pi 1000t + 90^\circ) = 2 \sin(2\pi 1000t)$$

Assim, da mesma forma que no caso anterior, $x_1(t)$ se torna ortogonal a todas as componentes da série de Fourier de $x_4(t)$, ou seja, $x_1(t)$ e $x_4(t)$ são ortogonais se $\theta = 90^\circ$.

A potência de $x_1(t) + x_4(t)$ nesse caso pode ser calculada por

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t) + x_4(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t)|^2 + |x_4(t)|^2 + x_1(t)x_2^*(t) + x_1^*(t)x_2(t) dt$$

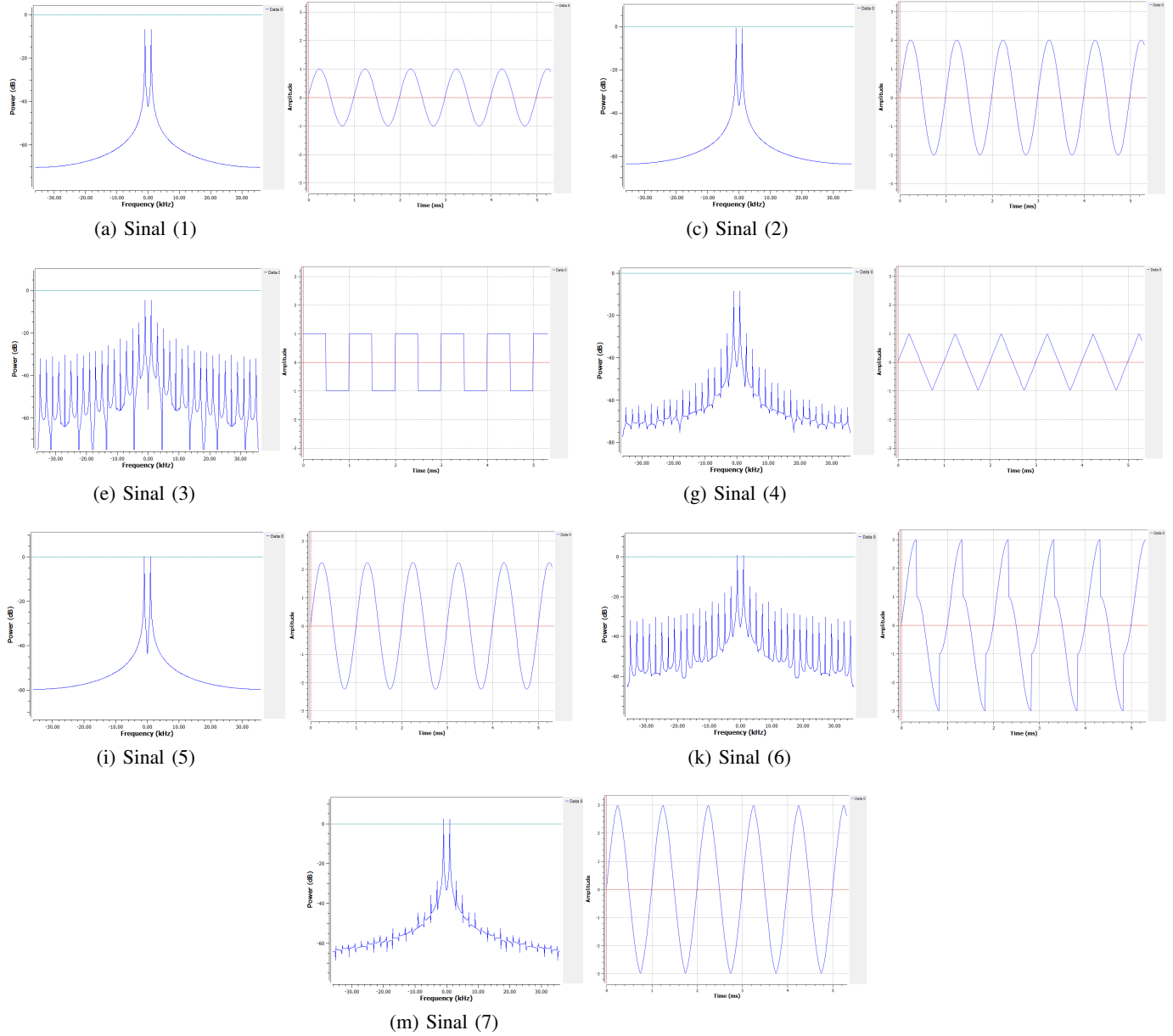


Figura 2: Espectro de frequências e forma de onda de cada um dos 7 sinais analisados

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t)|^2 + |x_4(t)|^2 dt = P_1 + P_4$$

$$P = 2 + 1/3 = \frac{7}{3} \approx 2.333 \text{ W}$$

3) *Medições no GNURadio*: Como já dito, a AT para as medições pode ser vista na Figura 1. As respostas de cada sinal no domínio do tempo e da frequência podem ser visualizados na Figura 2.

Para todos os sinais, seus valores de RMS e a intensidade das 9 primeiras harmônicas, (em dB), no espectro de frequências, foram medidos (Tabela II). A partir dos valores RMS encontrados (*Number Sink*), com base na Equação 1, os valores de $P_{s,t} = RMS^2$ foram calculados.

Com todos as magnitudes dos 9 primeiros harmônicos, é possível fazer uma aproximação da potência do sinal. Para isso, primeiramente, é necessário converter os valores medidos de dB para W. Lembrando da definição da escala decibel, temos que

$$G_{dB} = 10 \log(P/1)$$

onde P é a potência de dado sinal. A partir dessa expressão podemos encontrar sua inversa, de forma a definir P em função de G_{dB}

$$P = 10^{G_{dB}/10} \quad (4)$$

Pelo Teorema de Parseval, temos que, dado um sinal periódico $g(t)$, sua potência pode ser calculada pela soma das potências de suas componentes de Fourier

$$P_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Para o caso de $g(t)$ real, temos que $|D_n| = |D_{-n}|$, logo

$$P_g = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2$$

,ou ainda

$$P_g = P_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |P_n|^2 \quad (5)$$

Para o nosso caso, podemos juntar as equações 4 e 5 para criarmos uma fórmula de aproximação do valor de $P_{s,f}$

$$P_{s,f} \approx 10^{G_0/10} + 2 \sum_{n=1}^9 10^{G_n/10} \quad (6)$$

, onde G_n corresponde aos valores, em dB, medidos no espectro de frequências para as 9 primeiras harmônicas. Como todos os sinais estudados possuem simetria de meia onda, suas séries de Fourier apresentam apenas harmônicos ímpares. Dessa forma teremos apenas $n = 1, 3, 5, 7, 9$.

A Equação 6 foi aplicada em cada um dos sinais com base nos valores apresentados na Tabela II. É importante notar que harmônicos que apresentavam magnitude desprezível foram desconsiderados do cálculo e marcados com —.

Sinal	G_1	G_3	G_5	G_7	G_9	$P_{s,f}$
(1)	−6.74 dB	—	—	—	—	0.424 W
(2)	−0.64 dB	—	—	—	—	1.726 W
(3)	−4.61 dB	−15.23 dB	−18.13 dB	−24.07 dB	−22.40 dB	0.802 W
(4)	−8.61 dB	−28.10 dB	−35.37 dB	−44.60 dB	−46.58 dB	0.279 W
(5)	0.25 dB	—	—	—	—	2.119 W
(6)	0.79 dB	−15.22 dB	−17.91 dB	−23.61 dB	−22.67 dB	2.511 W
(7)	2.18 dB	−27.14 dB	−34.28 dB	−44.90 dB	−47.41 dB	3.309 W

Tabela II: Medida das 9 primeiras harmônicas de cada sinal e sua estimativa de potência baseada na Eq.6

Para completar os valores da Tabela IV, para cada um dos sinais, variou-se a defasagem do sinal 2, observando o valor de RMS registrado. Ao encontrar pontos de máximo ou mínimo, seus valores de RMS e fase foram anotados. Então, a potência em cada caso foi calculada pela relação $P = RMS^2$. Nos casos de ortogonalidade, a fase foi ajustada conforme calculado na secção II-A.2, então o valor RMS foi anotado e a potência calculada.

Sinal	Valor RMS		Potência				
	Calculado	Medido	Calculado	$P_{s,t} (RMS^2)$	DEP	$P_{s,f}$	$ P_{s,f} - P_{s,t} $
(1)	0.7071 V _{RMS}	0.707 V _{RMS}	0.500 W	0.500 W	-3.43 dB	0.424 W	0.076 W
(2)	1.4142 V _{RMS}	1.414 V _{RMS}	2.000 W	2.000 W	2.37 dB	1.726 W	0.274 W
(3)	1.0000 V _{RMS}	1.000 V _{RMS}	1.000 W	1.000 W	-0.96 dB	0.802 W	0.198 W
(4)	0.5774 V _{RMS}	0.577 V _{RMS}	0.333 W	0.333 W	-5.54 dB	0.279 W	0.054 W
(5)	1.5811 V _{RMS}	1.581 V _{RMS}	2.500 W	2.500 W	3.26 dB	2.119 W	0.381 W
(6)	1.7321 V _{RMS}	1.733 V _{RMS}	3.000 W	3.003 W	4.00 dB	2.511 W	0.492 W
(7)	1.9885 V _{RMS}	1.988 V _{RMS}	3.954 W	3.952 W	5.20 dB	3.309 W	0.643 W

Tabela III: Valores de RMS e Potência encontrados para cada um dos sinais propostos

Sinal	Potência Máxima		Potência Mínima		Ortogonalidade	
	$\theta(\text{rad})$	P_{max}	$\theta(\text{rad})$	P_{min}	$\theta(\text{rad})$	P_s
(5)	$\pi/2$	4.500	$3\pi/2$	0.500	0	2.500
(6)	$3\pi/2$	5.546	$\pi/2$	0.453	0	3.003
(7)	0	3.952	π	0.712	$\pi/2$	2.331

Tabela IV

4) *Análise dos Resultados:* Começaremos nossa análise com os valores registrados na Tabela III. Os valores medidos de RMS foram conforme os esperados, calculados na secção II-A. Consequentemente, os valores de $P_{s,t}$ também seguiram os calculados anteriormente.

As primeiras discrepâncias surgem nos valores calculados de $P_{s,f}$. Já era de se esperar que, em casos de sinais compostos por infinitas componentes de Fourier, a $P_{s,f}$ seria menor que a $P_{s,t}$, pois apenas consideramos as 9 primeiras harmônicas, deixando de fora de nossos cálculos frequências maiores que 9 kHz. Porém, esperava-se obter resultados mais próximos, uma vez que a maior parte da potência dos sinais se encontram nos primeiros harmônicos. Um caso que demonstra essa divergência inesperada é o caso do sinal (1).

Sabemos que $x_1(t) = \sin(2\pi 1000t)$ possui apenas 1 harmônica em sua série de Fourier: ela mesma. Assim, como já vimos no Experimento 00, o valor registrado em 1 kHz e -1 kHz deveria ser -6.02 dB, de forma que sua potência $P = 2(10^{-6.02/10}) = 0.5 \text{ W}$. Porém, isso não foi o observado neste experimento. No caso da Figura 2 (a), o valor registrado foi de -6.74 dB, que resultou em uma potencia de 0.42 W.

O que está ocorrendo aqui, de fato, não está relacionado a componentes não consideradas da série de Fourier, mas sim ao cálculo do software da FFT. A situação fica melhor ilustrada se aproximarmos muito do ponto de 1 kHz do espectro e ativarmos os marcadores no GRC, que nos mostram as amostras realizadas (Figura 3). Ao manter o mouse em cima do marcador mais elevado, percebemos que essa medida não foi realizada exatamente em 1 kHz, mas em 0.98 kHz. Isso ocorre por conta da relação

$$\Delta f = f_s / n_s$$

Onde f_s é a frequência de amostragem, n_s o número de amostras (*FFT Size*) e Δf é o passo de frequência. O passo de frequência determina de quantos em quantos Hz será feita uma amostra da FFT. Em nosso caso, $f_s = 72\,000 \text{ Hz}$ e $n_s = 1024$, de forma que

$$\Delta f = 70.31$$

Isso significa que o intervalo de amostragens, na frequência, é de 70.31 Hz. É fácil perceber que, com um intervalo como esse, não existirá uma amostra exatamente em 1 kHz

$$1000 / \Delta f = 14.22$$

Portante, a amostra mais próxima de 1 kHz será

$$14 \cdot \Delta f = 984.38 \text{ Hz}$$

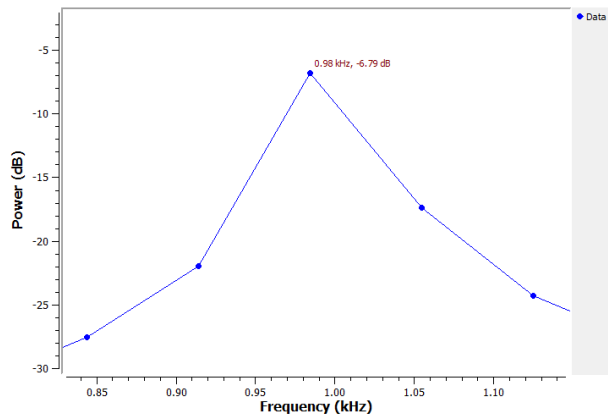


Figura 3: Ponto mais elevado do espectro da Figura 2 (a) ampliado

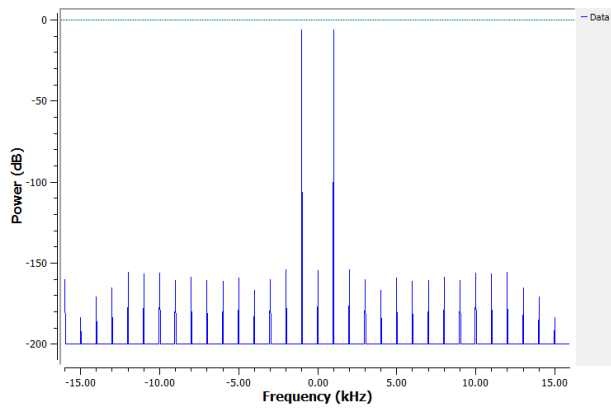


Figura 4: Espectro de frequências do sinal (1) caso a taxa de amostragem fosse 32k

Esse foi exatamente o valor encontrado na Figura 3. Nessa amostra, o valor da FFT não é nulo, mas também não é 6.02 dB, por isso do erro no cálculo de $P_{s,f}$.

Como exemplificação, se alterarmos nossa taxa de amostragem para 32 kHz, o espectro observado será o da Figura 4. O passo de frequência seria

$$\Delta f = 32000/1024 = 31.25$$

$$1000/\Delta f = 32$$

Ou seja, teríamos uma amostra em 1 kHz. De fato, ao medir esse valor no espectro, encontramos precisamente -6.02 dB, resultando em um potência $P = 0.5$ W.

Os valores encontrados para a Tabela IV foram todos de acordo com os calculados nas secções II-A.1 e II-A.2.

B. AR 02

Seguindo as orientações do roteiro, a fonte de ruído, os três filtros sugeridos e os instrumentos de medição/observação foram configurados conforme a Figura 5. Os respostas de cada filtro ao ruído branco nos domínios da frequência e do tempo podem ser visualizados nas Figuras 6 e 7, respectivamente. Percebe-se, a primeira vista, que o formato da resposta em frequência de todos os filtros foi como o esperado.

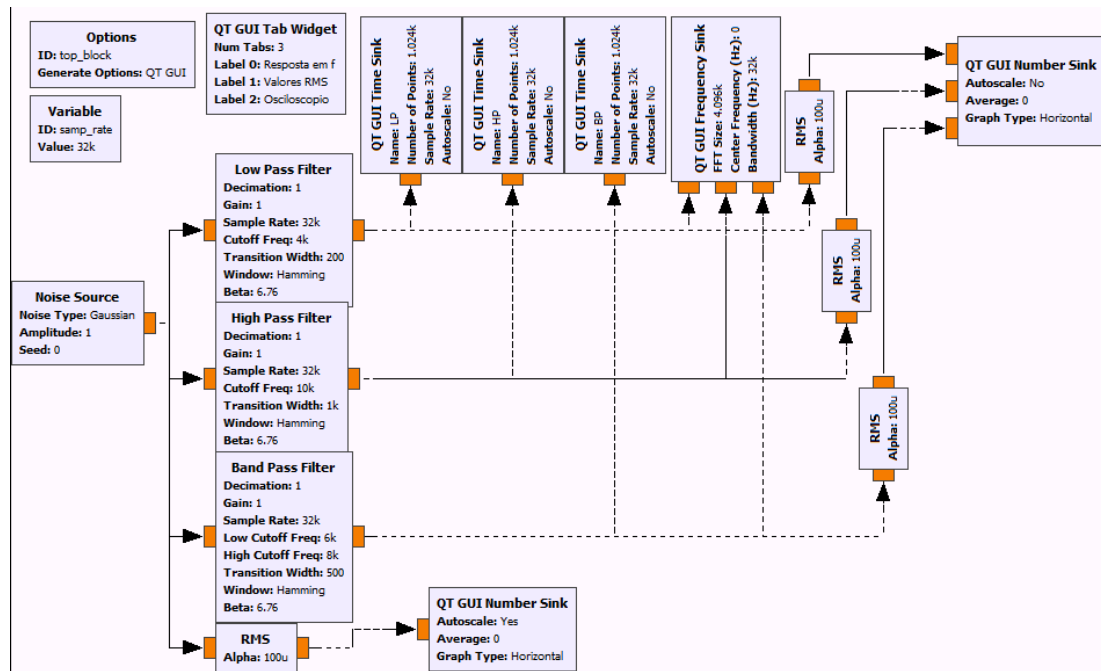


Figura 5: Configuração da AT para a AR 02.

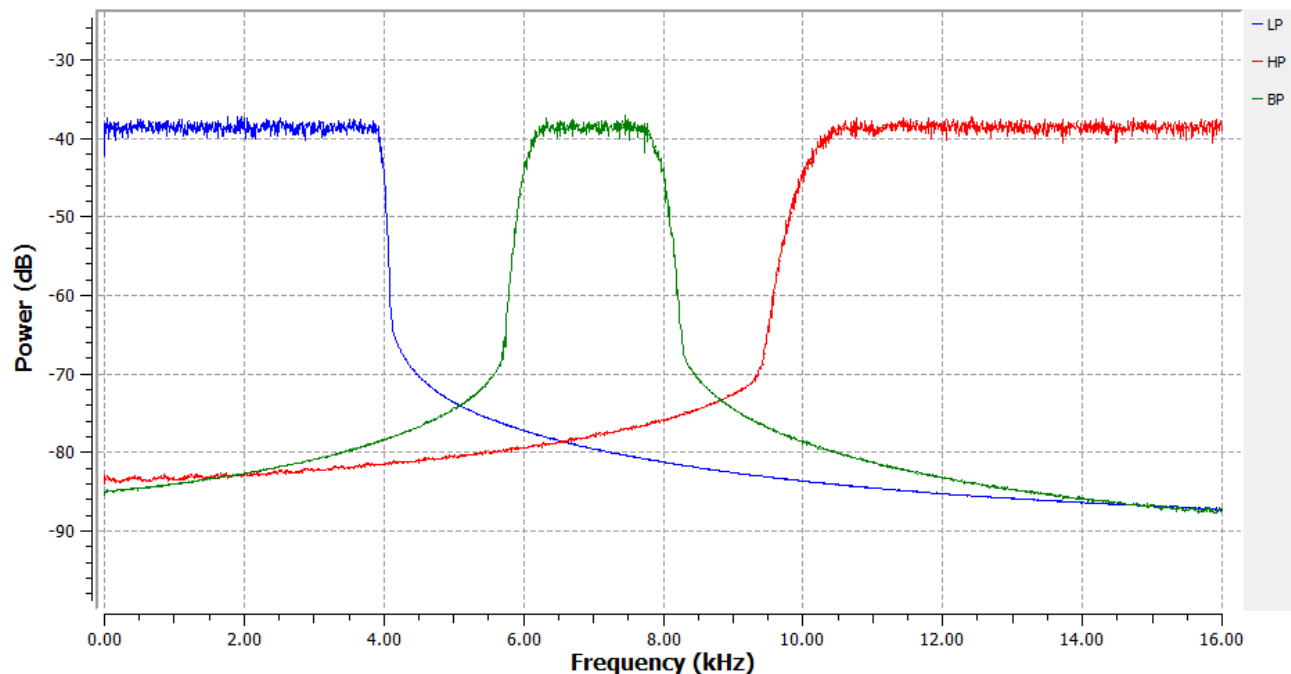


Figura 6: Resposta no domínio da frequência dos três filtros utilizados

Da mesma forma, o formato do ruído no domínio do tempo também apresenta as características esperadas. O filtro passa baixas rejeitou as frequências altas, resultando em um ruído de frequência menor. O filtro passa altas teve o efeito contrário, resultando em um ruído de frequências altas. Já o passa faixa foi o que mais reduziu a amplitude do ruído, como era esperado por possuir a menor largura de banda, e resultou em um ruído com um aspecto mais uniforme pela sua seletividade de frequências.

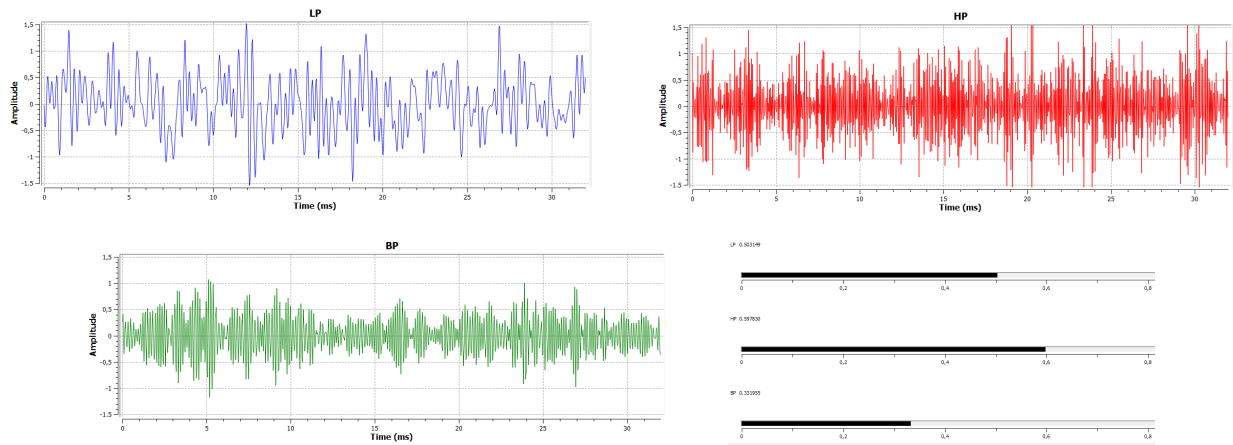


Figura 7: Resposta no domínio do tempo e o valor RMS medido dos três filtros utilizados

Sinal	Pot.	Largura de Banda	Razão P/B
$n(t)$	1.0000 W	16.00 kHz	$6.25 \times 10^{-2} \text{ V}^2\text{Hz}$
$n_{LP}(t)$	0.2531 W	3.97 kHz	$6.3753 \times 10^{-2} \text{ V}^2\text{Hz}$
$n_{HP}(t)$	0.3574 W	5.83 kHz	$6.1304 \times 10^{-2} \text{ V}^2\text{Hz}$
$n_{BP}(t)$	0.1102 W	1.84 kHz	$5.9891 \times 10^{-2} \text{ V}^2\text{Hz}$

Tabela V: Valores encontrados para a AR02

Para poder completar a Tabela V, é necessário realizar duas medidas: V_{RMS} e largura de banda de cada resposta. O valor RMS encontrado pra cada um dos filtros pode ser vista na Figura 7. Percebe-se que a maior atenuação ocorreu no filtro passa faixa, enquanto que a menor ocorreu no passa altas.

Para medir a largura de banda de cada filtro, voltou-se para o espectro de frequências. Em uma rápida análise, percebe-se que a magnitude média do ruído branco nas regiões não atenuadas é em torno de -38.60 dB . Dessa forma, para medirmos as larguras de banda, precisamos apenas encontrar as frequências onde esse sinal cai 3 dB, chegando em -41.60 dB . Para o filtro passa baixas, essa atenuação foi registrada em 3.97 kHz. Para o filtro passa altas, a atenuação em 3 dB ocorreu em 10.17 kHz. Finalmente, para o filtro passa faixa, ocorreu tanto em 6.08 kHz, quanto em 7.92 kHz.

Com esses valores em mãos, podemos então definir a largura de banda de cada filtro. O filtro passa baixas passa todas as frequências de $[0.00; 3.97]$, ou seja, sua largura de banda é de 3.97 kHz. O filtro passa faixa, permite a passagem de frequências dentro do intervalo $[6.08; 7.92]$, assim, sua largura de banda é de 1.84 kHz. Para o ruído sem filtro, sua largura de banda foi considerada igual a banda de amostragem, ou seja 16 kHz. Para o caso do filtro passa altas, sua banda foi considerada de $[10.17; 16.00]$, resultando em uma largura de banda de 5.83 kHz. Já de posse das potências e das larguras de banda, a Tabela V foi completada.

C. AR 03

O diagrama indicado no roteiro foi construído do GNURadio e pode ser visto na Figura 8. A saída (ponto I) foi ligada aos instrumentos de medição: Osciloscópio, medidor de RMS e Espectro de frequências. Na Figura 8 o ponto H também está conectado nos mesmos instrumentos, porém, durante as medições esses blocos foram conectados de ponto em ponto em repetidas simulações, para obtermos todas as formas de onda e medições.

1) *Análise do Diagrama:* Antes de mostrar os resultados, faremos uma análise sobre o que esperamos que aconteça em cada etapa do diagrama.

No ponto A, será gerada uma onda triangular de frequência 0.1 kHz com $V_{min} = -1$ e $V_{max} = 1$. Esse sinal será multiplicado pelo sinal senoidal gerado em B, que possui frequência de 6 kHz. O resultado

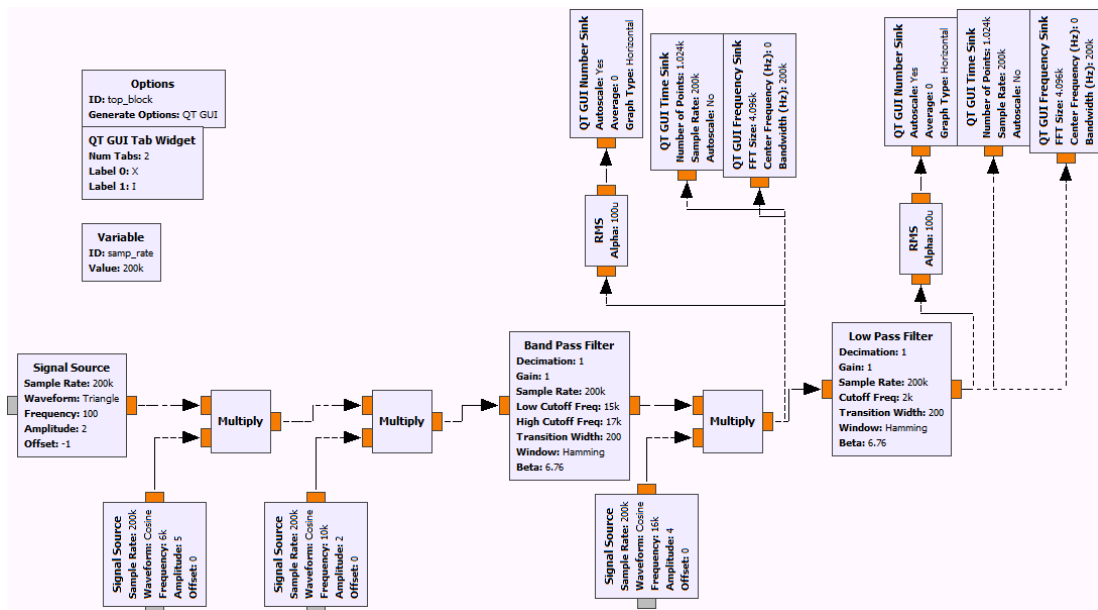


Figura 8: Configuração da AT para a AR 03.

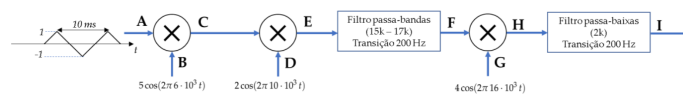


Figura 9: Diagrama do sistema

esperado é a multiplicação gere sinais nas somas e diferenças das frequências originais. Assim, espera-se que surjam componentes de frequência em 5.9 kHz e 6.1 kHz, principalmente, porém o mesmo efeito deve ocorrer em todas as componentes de frequência da onda gerada em A.

A partir de agora trataremos em questões de frequência apenas. O sinal de 5.9 kHz e 6.1 kHz é combinado com outro de 10 kHz em E, gerando um sinal de 4 frequências principais: 13.9 kHz, 14.1 kHz, 15.9 kHz e 16.1 kHz. Esse sinal passa por um filtro passa faixa ([15 kHz; 17 kHz]), restando, em F, apenas as componentes de 15.9 kHz e 16.1 kHz. Esse sinal então é misturado com um de 16 kHz, resultando em 3 frequências em H: 0.1 kHz, 31.9 kHz e 32.1 kHz. De H para I, o sinal passa por um filtro passa baixas (2 kHz), filtrando as frequências elevadas, restando apenas componentes em 0.1 kHz em I.

Nessa análise não levamos em conta as demais componentes de frequência do sinal original, que também passarão pelo mesmo processo, o que pode gerar diferenças.

2) *Resultados Obtidos:* As formas de onda e espectros de frequência de todos os pontos podem ser visualizados na Figura 11. Para os pontos de A a G, os valores RMS medidos estão registrados nas Figuras 10. A partir de cada valor RMS, as respectivas potências foram calculadas (Tabela VI).

Ao analisar os espectros de frequência obtidos, percebe-se que o padrão descrito na seção II-C.1 foi seguido. Como previsto, no ponto I, a frequência restante do sinal foi de 100 Hz. A cada etapa de multiplicação, nota-se que a operação parece incorporar um sinal dentro do outro, como pode ser exemplificado comparando o resultado do ponto com C com as formas de onda de A e B.

Para os pontos H e I, foi notado que a amplitude das duas ondas, que a princípio pareciam constantes, estavam variando lentamente com o tempo. Dessa forma não existiu um único valor RMS medido. Esse comportamento desses sinais pode ser explicado pela existência de componentes de frequência muito baixa no sinal. Essas componentes podem ser originadas de componentes de frequência do sinal original que não foram levadas em consideração em nossa análise inicial.

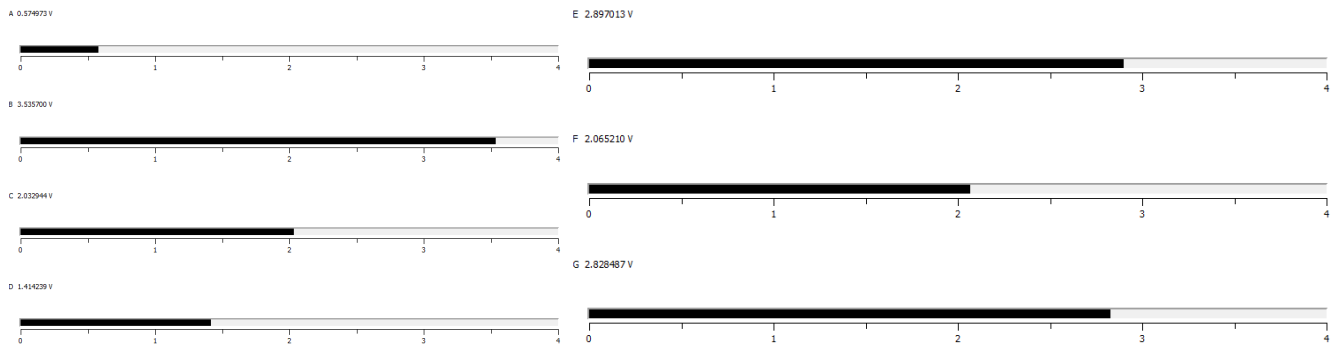


Figura 10: Valores RMS encontrados em cada ponto de A a G

Ponto	RMS	Potência
A	0.575 V	0.330 W
B	3.536 V	12.503 W
C	2.033 V	4.133 W
D	1.414 V	1.999 W
E	2.897 V	8.393 W
F	2.065 V	4.264 W
G	2.823 V	7.969 W

Tabela VI: Valores de RMS e potência de cada ponto de A a G

Analisando os resultados de potência nota-se também que a potência da multiplicação de dois sinais seguiu a lógica da multiplicação da potência dos sinais.

III. CONCLUSÃO

Durante o experimento, testamos a forma com que dois sinais podem se relacionar. Aprendemos algumas implicações da ortogonalidade na adição de dois sinais e a estimar a potência de um sinal com base em suas componentes no domínio da frequência. Testamos o funcionamento de filtros em amenizar ruído branco e os efeitos da multiplicação entre sinais.

REFERÊNCIAS

- [1] B. P Lathi and Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos*, 4th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

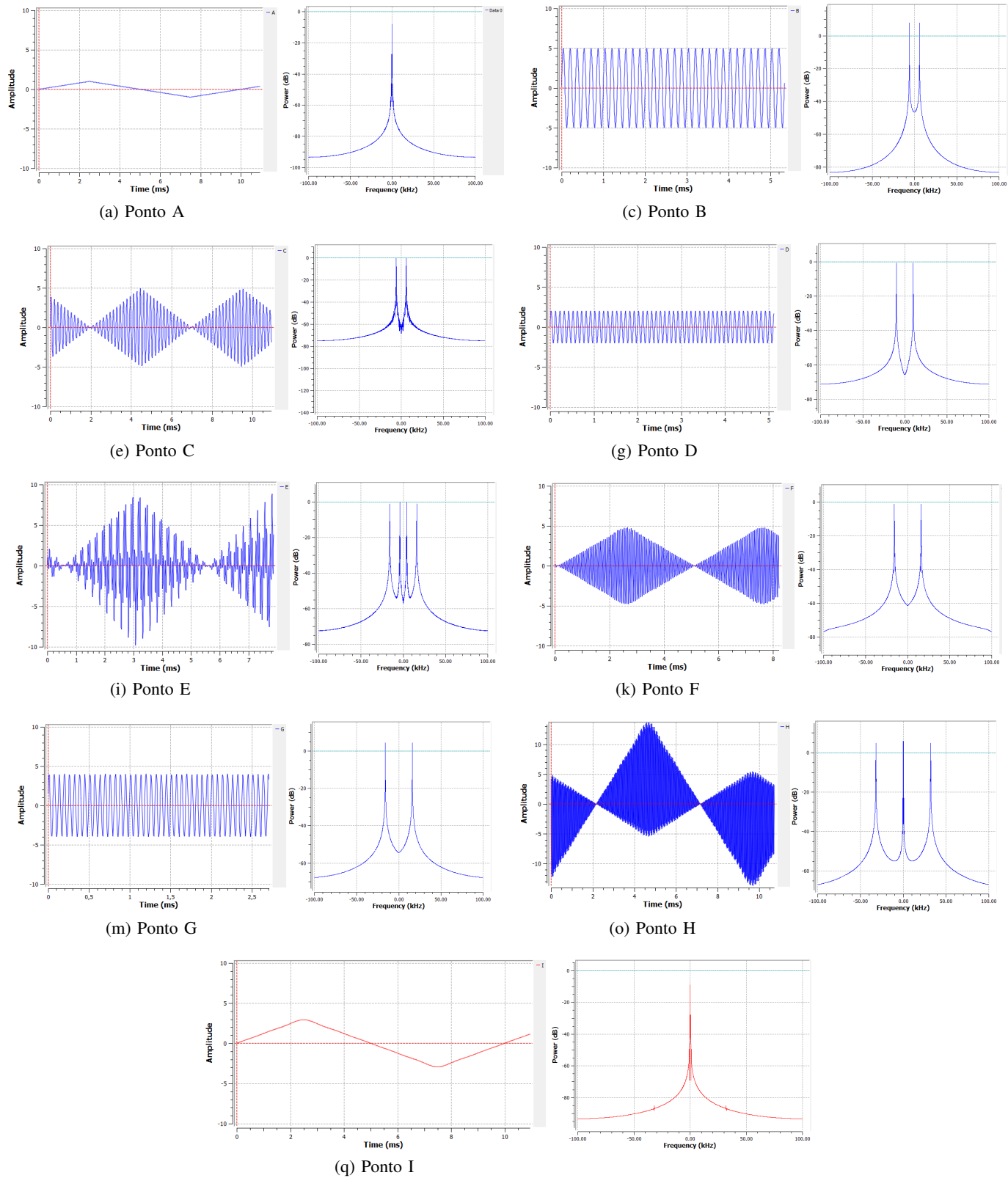


Figura 11: Espectro de frequências e forma de onda de cada um dos 7 sinais analisados