

Relatório - Experimento 08 - Parte II

Fausto Emrich Brenner - 17/0009777

I. INTRODUÇÃO

Neste experimento, trabalharemos com a transmissão digital de sinais. Nesta segunda parte, continuaremos nossos estudos sobre formatação de pulsos e codificação de linha.

Podemos provar, por meio da autocorrelação de um sinal PAM aleatório, que sua DEP será

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-jn2\pi f T_b} \quad (1)$$

Onde $P(f)$ é a transformada de Fourier do pulso e

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n}, \quad N = \frac{T}{T_b} \quad (2)$$

$$= E[a_k a_{k+n}] \quad (3)$$

Logo, a DEP de um código de linha é totalmente caracterizada pelo correspondente R_n (medida da correlação entre pulsos consecutivos) e pela seleção da forma de pulso de $P(f)$ [1]. Como a eq. (1) foi derivada de forma genérica, podemos, a partir dela, encontrar a DEP de diferentes codificações de linha e formas de pulso.

Sabemos que sinais limitados no tempo não podem ser limitados na frequência. Assim, todos os sinais práticos possuirão espectro infinito. Podemos delimitar um sinal em sua largura de banda B , que possui a maior parte de sua potência, porém, sua DEP para $f > B$ é pequena mas não nula. Portanto, quando um sinal com essas características é transmitido por um canal de largura de banda $R_b = B$, uma porção significativa de seu espectro é transmitida enquanto que uma parcela pequena é suprimida. Esse tipo de distorção espectral tenderá a espalhar o pulso (dispersão). Espalhamento de um pulso além de sua janela de tempo T_b causará interferência entre pulsos vizinhos. Essa é a **interferência inter-simbólica**, ou **ISI**.

É possível tentar contornar esse problema com a utilização de **Critérios de Nyquist para ISI Nula**. O primeiro critério nos diz que obtém-se ISI zero ao escolher uma forma de pulso que tenha amplitude não nula em seu centro ($t = 0$) e amplitudes nulas em $t = nT_b$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), ou seja

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = \pm nT_b \end{cases} \quad (4)$$

É fácil notar que um pulso *sinc* atenderia a essa condição

$$\text{sinc}(\pi R_b t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = \pm nT_b \end{cases} \quad (5)$$

Lamentavelmente, esse pulso é impraticável, pois tem início em $t \rightarrow -\infty$. E ainda que fosse realizável, esse pulso decai de modo demasiadamente lento ($1/t$), o que significaria que qualquer desvio de R_b na amostragem de pulsos futuros, amostraria porções grandes dos pulsos anteriores.

Uma família de pulsos que satisfaz a condição e decai mais rapidamente são pulsos chamados de **coseno levantado**. Esse pulso deve ter um espectro vestigial como o da Figura 1. Ou seja, sua largura de banda é $f_x + R_b/2$. Um parâmetro relevante desta família de pulsos é o chamado fator de roll-off (r) que é definido por

$$r = 2f_x T_b \quad (6)$$

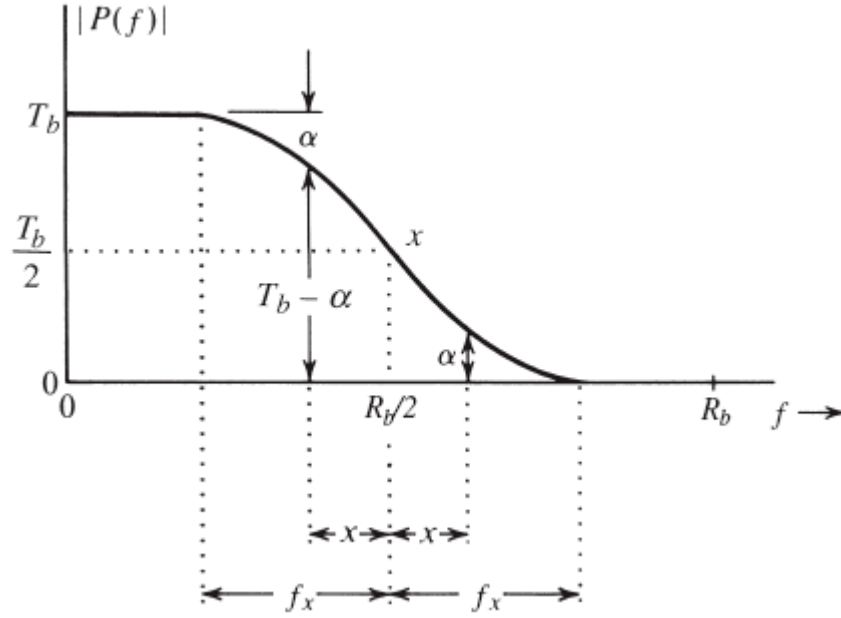


Figura 1: Espectro vestigial (cosseno levantado)

Ou seja, a largura de banda de $P(f)$ é

$$B_T = \frac{(1+r)R_b}{2} \quad (7)$$

Assim, o espectro de um pulso cosseno levantado é definida como

$$P(f) = \begin{cases} 1, & |f| < R_b/2 - f_x \\ \frac{1}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{f - R_b/2}{2f_x} \right) \right], & |f - R_b/2| < f_x \\ 0, & |f| > R_b/2 + f_x \end{cases} \quad (8)$$

Considere o sinal digital $c(t) = \sum_k a_k p(t - nT_b)$ banda básica com pulsos codificados de acordo com o valor do símbolo a_k , em que $p(t)$ dá forma aos pulsos. Calcule a largura de banda para os seguintes sinais em função da taxa de bits R_b

[T3.a] $c(t)$ composto por pulsos triangulares NRZ de sinalização polar.

Na sinalização polar, a_k pode assumir 1 ou -1, de forma que a_k^2 é sempre 1, ou seja

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2 \quad (9)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (N) \quad (10)$$

$$= 1 \quad (11)$$

Além disso, tanto a_k quanto a_{k+1} são 1 ou -1, de forma que seu produto será 1 ou -1. Considerando a mesma probabilidade entre os dois casos, temos que

$$R_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2} (1) + \frac{N}{2} (-1) \right] = 0 \quad (12)$$

O mesmo raciocínio se estende aos demais valores de n , de forma que

$$R_n = 0, \quad n \geq 1 \quad (13)$$

Portanto, da eq. (1), temos

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} R_0 \quad (14)$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \quad (15)$$

Considerando um pulso $p(t)$ triangular NRZ, temos

$$p(t) = \Delta\left(\frac{t}{T_b}\right) \quad (16)$$

De forma que

$$P(f) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}^2(\pi f T_b/2) \quad (17)$$

Substituindo em (15), temos

$$S_y(f) = \frac{T_b^2}{4T_b} \text{sinc}^4(\pi f T_b/2) \quad (18)$$

$$= \frac{T_b}{4} \text{sinc}^4(\pi f T_b/2) \quad (19)$$

Assim, temos que a banda do sinal é

$$B_T = \frac{2}{T_b} = 2R_b \quad (20)$$

[T3.b] $c(t)$ composto por pulsos retangulares RZ de sinalização polar.

Considerando um pulso $p(t)$ retangular RZ, temos

$$p(t) = \Pi\left(\frac{2t}{T_b}\right) \quad (21)$$

De forma que

$$P(f) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}(\pi f T_b/2) \quad (22)$$

Substituindo em (15), temos

$$S_y(f) = \frac{T_b^2}{4T_b} \text{sinc}^2(\pi f T_b/2) \quad (23)$$

$$= \frac{T_b}{4} \text{sinc}^2(\pi f T_b/2) \quad (24)$$

Novamente, a banda do sinal é

$$B_T = \frac{2}{T_b} = 2R_b \quad (25)$$

[T3.c] $c(t)$ composto por pulsos de espectro retangular entre $-B$ e B , com sinalização polar.

Temos que

$$P(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (26)$$

Substituindo em (15), temos

$$S_y(f) = \frac{1}{T_b} \Pi^2\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (27)$$

$$= \frac{1}{T_b} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (28)$$

É fácil notar, então, que a banda do sinal será

$$B_T = B \quad (29)$$

[T3.d] $c(t) \cos(\omega_c t)$ composto por pulsos de espectro vestigial com $r = 0.5$ e sinalização polar. Temos que

$$f_x = \frac{1}{4T_b} = \frac{R_b}{4} \quad (30)$$

A partir de (7), podemos determinar a banda do sinal $c(t)$

$$B_c = \frac{(1+r)R_b}{2} = \frac{3}{4}R_b \quad (31)$$

A partir da propriedade da multiplicação no tempo da transformada de Fourier, temos que

$$y(t) = c(t) \cos(\omega_c t) \iff C(f) * \mathcal{F}[\cos(\omega_c t)] \quad (32)$$

Ou seja,

$$S_y(f) = S_c(f) * \left[\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right]^2 \quad (33)$$

$$= \frac{1}{4} S_c(f - f_c) + \frac{1}{4} S_c(f + f_c) \quad (34)$$

Assim, o espectro do sinal resultante é igual ao espectro de $c(t)$ deslocado para $\pm f_c$, fora um fator de escala. Dessa forma, a largura de banda resultante será o dobro da anterior. Ou seja,

$$B_T = 2B_c = \frac{3}{2}R_b \quad (35)$$

[T3.e] $A_c \cos(\omega_c t + k_\omega \int c(\tau) d\tau)$ em que $c(t)$ varie de +1 a -1 e $p(t)$ tenha espectro vestigial com $r = 1$. A frequência angular instantânea desse sinal é

$$\omega_i = \omega_c + k_\omega c(t) \quad (36)$$

Assim, o desvio de frequência pode ser definido como

$$\Delta f = \frac{k_\omega c_p}{2\pi} = \frac{1}{T_b} = R_b \quad (37)$$

Como os pulsos $p(t)$ possuem espectro vestigial, a banda de $c(t)$ será

$$B_c = \frac{2R_b}{2} = R_b \quad (38)$$

Assim, pode-se fazer uma estimativa da banda do sinal a partir da banda de Carson

$$B_{carson} = 2(\Delta f + B_c) = 4R_b \quad (39)$$

II. ATIVIDADES

A. AR03

[A3.a] Utilizando o diagrama já construído anteriormente para a transmissão em PCM, primeiramente, prepararemos o ambiente para permitir duas codificações de linha: polar e ON-OFF. A codificação polar já foi implementada no diagrama anterior. Para implementar a codificação ON-OFF teremos que fazer algumas alterações. Primeiramente, na etapa de codificação de linha, ao invés de utilizar os blocos *Add Const* e *Multiply Const*, podemos alimentar os blocos de sincronismo de pulso e formatação de pulso diretamente com a saída da serialização dos bits, pois essa já sai com valor 1 para bit 1 e 0 para bit 0. Na recepção, deveremos fazer a decisão sobre o valor do bit com relação ao limiar 0.5 V, para isso precisaremos fazer um deslocamento da função *SGN*, para que a decisão seja tomada em 0.5 ao invés de em 0.0.

A Tabela I foi preenchida com as larguras de banda observadas para cada uma das configurações. Os espectros de cada caso podem ser visualizados na Figura 2.

[A3.b] Comparando os cenários 1 e 2, nota-se que a principal mudança na DEP foi a presença de componente DC no caso ON-OFF. Isso já era esperado, pois como a codificação ON-OFF gera valores de amplitude 1 ou 0, o valor médio das amostras será 0,5.

[A3.c] Entre os cenários 1 e 3, as principais diferenças notadas foram a maior largura do espectro do sinal do cenário 3 e a presença de componentes discretas nos picos dos lóbulos. O primeiro fato é explicado pelo sinal ser mais estreito no tempo, o que gera um alargamento na frequência. O segundo fato é explicado pela característica da DEP de sinais ON-OFF

$$S_y = \frac{|P(f)|^2}{4T_b} \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nR_b) \right] \quad (40)$$

Essas componentes não aparecem no cenário 1 pois, naquele caso,

$$P(nR_b) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (41)$$

o que não é verdade no cenário 3, por isso as componentes surgem.

[A3.d] É possível mostrar que o sinal ON-OFF pode ser expresso como a soma de um sinal periódico (na frequência do relógio) e um sinal polar ou randômico. Por conta disso, podemos extrair a informação de temporização desse sinal com o uso de um circuito ressonante sintonizado na frequência do relógio. Assim, os dois cenários de codificação ON-OFF (1 e 3) podem ser usados para o sincronismo de pulsos no receptor.

[A3.e] A partir da eq. (7), podemos estimar o valor de r a partir das bandas medidas. Para o cenário 5, temos

$$B_T = 74.47 = \frac{(1 + r_1)80}{2} \quad (42)$$

$$r_1 = 0.86175 \quad (43)$$

Para o cenário 6, temos

$$B_T = 57.78 = \frac{(1 + r_2)80}{2} \quad (44)$$

$$r_2 = 0.4445 \quad (45)$$

Finalmente, para o cenário 7

$$B_T = 45,63 = \frac{(1 + r_3)80}{2} \quad (46)$$

$$r_3 = 0.14075 \quad (47)$$

[A3.f] Observando o comportamento dos pulsos dos cenários de 5 a 7, também é possível estimar qual teria maior fator de *roll-off* pela velocidade com a qual o pulso decai. Quanto mais rápido o decaimento, maior o r . Essa análise rápida confirma nossos cálculos acima. Para melhor visualização um diagrama de olho foi implementado, o resultado pode ser visto na Figura 3. Os diagramas de olho obtidos comprovam nossas suspeitas e nosso cálculo, C1 deve ter o maior r enquanto que C3 deve ter o menor.

[A3.g] O cenário 1 tem maior sensibilidade ao ruído por ser codificado em ON-OFF. Nessa codificação, no receptor, a decisão do valor do bit é tomada se ele estiver acima ou abaixo de 0.5 V. Isso significa que o limiar da decisão está apenas a 0.5 V dos valores originais transmitidos (1 ou 0). No caso da codificação polar, o limiar ocorre em 0 V, mantendo-se a 1 V dos valores transmitidos (1 ou -1), o dobro do anterior. Na prática, isso quer dizer que o ruído em ON-OFF tem mais facilidade de inverter a decisão do receptor.

[A3.h] O cenário 4 (Retangular RZ Polar) suporta erros de amostragem menores que $T_b/4$, pois dentro desse intervalo o pulso ainda está em 1, erros maiores que isso fazem o receptor amostrar apenas 0.

III. TABELAS

Cenário	Pulso	Sinalização	B_T [kHz]
1	Retangular NRZ	ON-OFF	80
2	Retangular NRZ	POLAR	80
3	Retangular RZ	ON-OFF	160
4	Retangular RZ	POLAR	160
5	C1	POLAR	74,47
6	C2	POLAR	57,78
7	C3	POLAR	45,63

Tabela I: Largura de banda para diversos sinais digitais [Tabela 3.1]

IV. IMAGENS

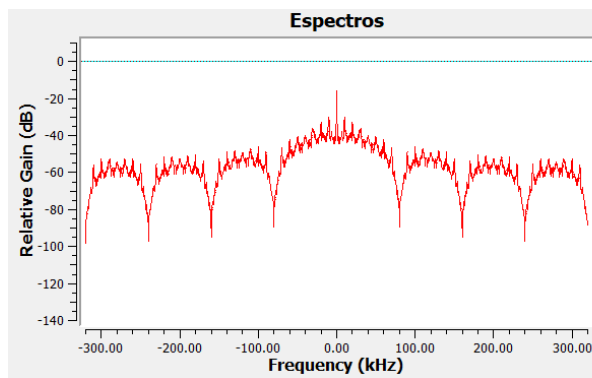
As imagens de oscilografia e espectrais se encontram ao final do documento, em uma página reservada.

V. CONCLUSÃO

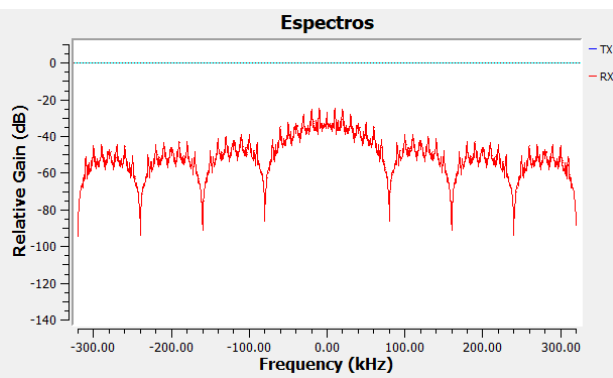
Foi possível aprender os fundamentos de um sinal do tipo cosseno levantado, e como sua performance se compara com os demais pulsos retangulares.

REFERÊNCIAS

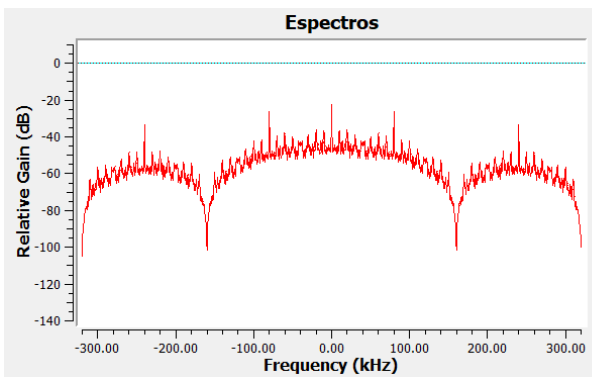
- [1] B. P Lathi and Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos*, 4th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.



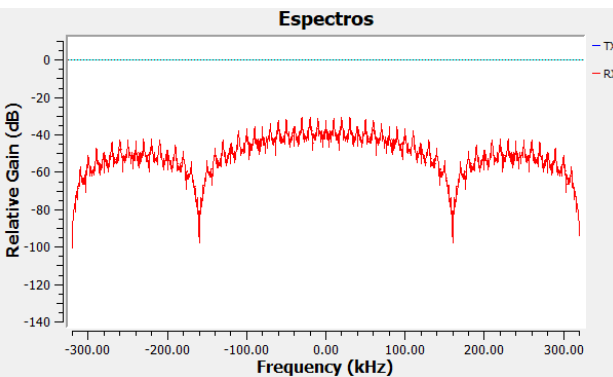
(a) Retangular NRZ ON-OFF



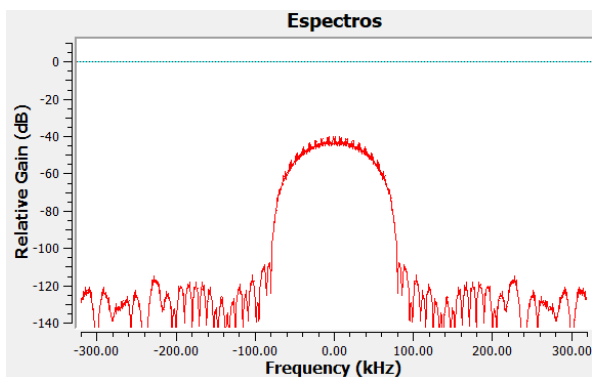
(b) Retangular NRZ POLAR



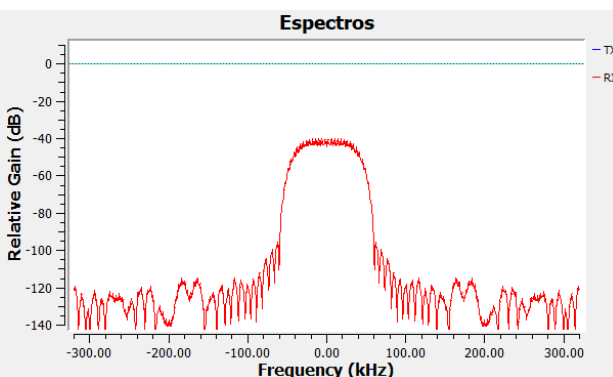
(c) Retangular RZ ON-OFF



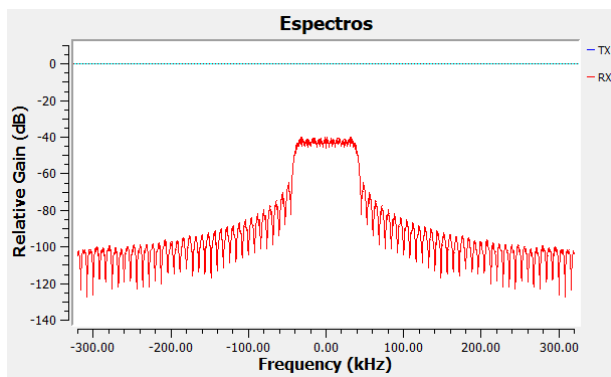
(d) Retangular RZ POLAR



(e) C1 POLAR

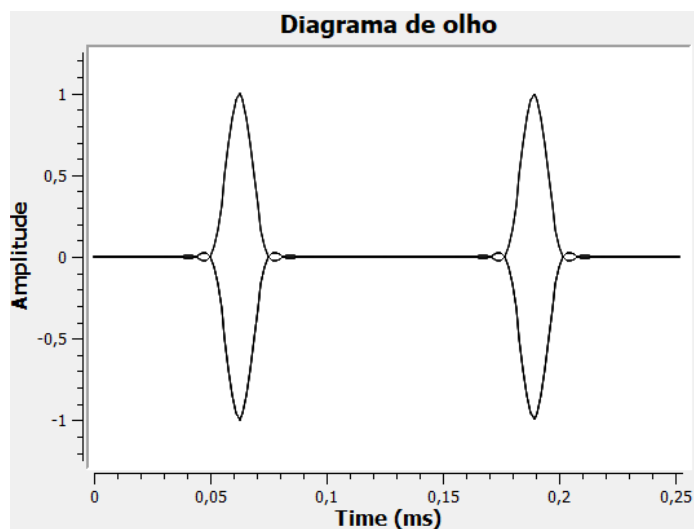


(f) C2 POLAR

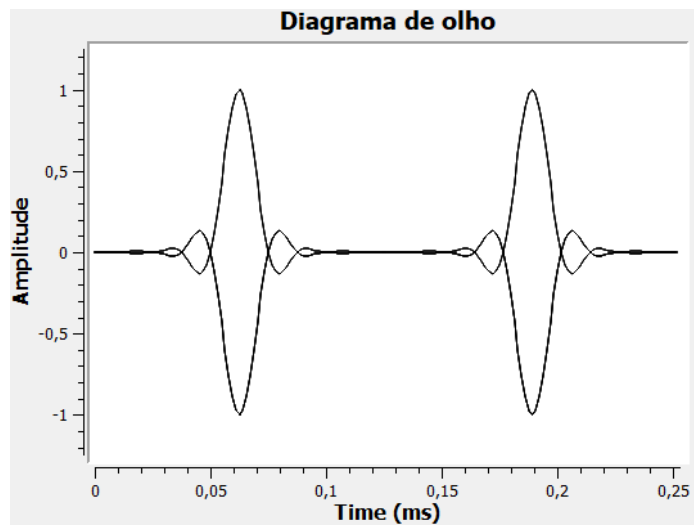


(g) C3 POLAR

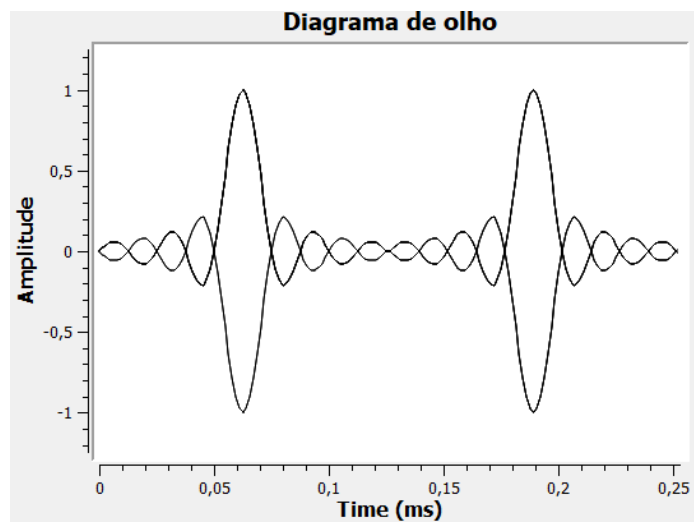
Figura 2: Espectros dos diferentes cenários [Fig. 3.1a-g]



(a) C1



(b) C2



(c) C3

Figura 3: Diagrama de olho para os três cenários de cosseno levantado