

# Relatório - Experimento 07

Fausto Emrich Brenner - 17/0009777

## I. INTRODUÇÃO

Neste experimento, passaremos para o estudo de sistemas digitais. Começamos com a conversão de um sinal analógico em um digital, mais especificamente a modulação por código de pulsos (PCM) [1]. Esse processo é composto por três etapas: Amostragem, Quantização e Codificação. A operação de amostragem toma amostras do sinal analógico  $x(t)$  a intervalos regulares de  $T_s$  segundos. A operação de quantização substitui a amplitude analógica do sinal amostrado  $x(kT_s)$ , por uma amplitude discretizada (quantizada)  $\hat{x}(kT_s)$ , pertencente a um conjunto finito de  $L$  valores (níveis de quantização). A operação de codificação traduz os níveis de  $\hat{x}(kT_s)$  em palavras binárias de  $n$  bits.

Em uma quantização uniforme, os  $L$  níveis de quantização são igualmente espaçados em um intervalo  $[X_{Q,min}, X_{Q,max}]$ . O intervalo entre os níveis é

$$\Delta q = \frac{X_{Q,max} - X_{Q,min}}{L} \quad (1)$$

Ou ainda

$$\Delta q = \frac{2X_{Q,max}}{L}, \quad \text{se } X_{Q,max} = -X_{Q,min} \quad (2)$$

Dessa forma, o erro de quantização é dado por

$$q(kT_s) = \hat{x}(kT_s) - x(kT_s) \quad (3)$$

Nota-se que

$$-\frac{\Delta q}{2} \leq q(kT_s) \leq \frac{\Delta q}{2} \quad (4)$$

Assim, a potência média de ruído de quantização será dada por

$$P_q = \frac{\Delta q^2}{12} \quad (5)$$

Ou seja, a  $RSR$  do sinal após a quantização,  $\hat{x}(kT_s)$ , é

$$RSR_q = \frac{P_x}{P_q} = \frac{P_x}{\Delta q^2/12} \quad (6)$$

Em que  $P_x$  é a potência média do sinal  $x(t)$ . Se  $L = 2^n$  e  $X_{Q,max} = -X_{Q,min}$ , temos ainda

$$RSR_q = 3 \cdot 2^{2n} \frac{P_x}{X_{Q,max}^2} \quad (7)$$

$$RSR_q|_{dB} = 6.02n + 4.77 + 10 \log_{10} \left( \frac{P_x}{X_{Q,max}^2} \right) \quad (8)$$

Na **AR02**, veremos a quantização não uniforme. Nesse caso, além do mesmo quantizador uniforme discutido acima, utiliza-se a operação não linear de compressão. Mais especificamente, trabalharemos com a lei- $\mu$ , dada por

$$C(x) = \text{sgn}(x) \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)}, \quad \text{para } -1 < x < 1 \quad (9)$$

Assim, sua operação inversa (expansão) é

$$C^{-1}(y) = \text{sgn}(y) \frac{(1 + \mu)^{|y|} - 1}{\mu}, \quad \text{para } -1 < y < 1 \quad (10)$$

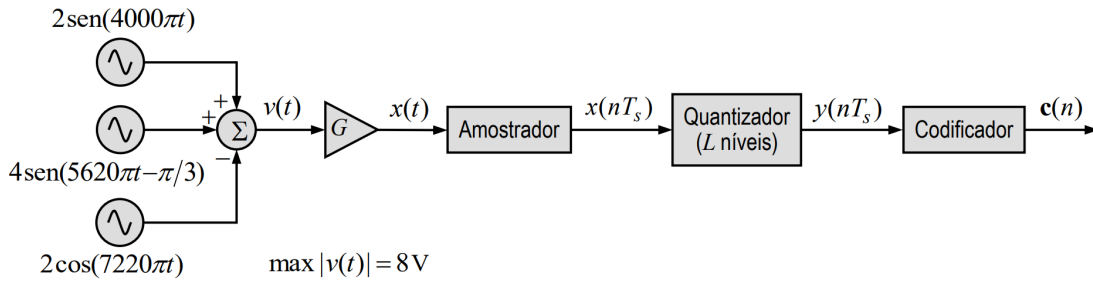
A RSR de um sistema PCM com compransão lei- $\mu$  é

$$RSR_\mu = 6.02n + 4.77 - 20 \log_{10} [\ln(1 + \mu)] - 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{X_{Q,max}^2}{\mu^2 P_x} + \sqrt{2} \frac{X_{Q,max}}{\mu \sqrt{P_x}} \right) \quad (11)$$

Quando  $\mu \gg \frac{X_{Q,max}}{\sqrt{P_x}}$ , podemos fazer a seguinte aproximação

$$RSR_\mu = 6.02n + 4.77 - 20 \log_{10} [\ln(1 + \mu)] \quad (12)$$

A. AR00



Vamos analisar a CAD de uma soma de senoides representada na figura acima. O sinal  $v(t)$  tem amplitude máxima  $\max[v(t)] = 8 \text{ V}$ . Considerando  $L = 8$ ,  $X_{Q,max} = -X_{Q,min} = 8 \text{ V}$  e  $G = 1$ .

[T0.a] Pela eq. (2), temos

$$\Delta q = \frac{2 \cdot 8}{8} = 2 \text{ V} \quad (13)$$

Dessa forma, os limites dos intervalos de quantização serão

$$\{[-8, -6]; [-6, -4]; [-4, -2]; [-2, 0]; [0, +2]; [+2, +4]; [+4, +6]; [+6, +8]\} \quad (14)$$

Logo, os níveis de quantização são

$$[-7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7] \quad (15)$$

[T0.b] Como temos  $L = 8 = 2^n$ , precisaríamos de 3 bits para a representar as amostras quantizadas do sinal.

[T0.c] Como sabemos de (4), o valor máximo do erro de amostragem é

$$\max[q(kT_s)] = \frac{\Delta q}{2} = 1 \text{ V} \quad (16)$$

[T0.d]

$x(nT_s)$	-0.71 V	2.70 V	-3.25 V	-5.90 V	7.40 V
$\hat{x}(nT_s)$	-1.00 V	3.00 V	-3.00 V	-5.00 V	7.00 V
$q(nT_s)$	-0.29 V	0.30 V	0.25 V	0.90 V	-0.40 V

Considerando agora um quantizador não uniforme, lei- $\mu$  de compressão, com  $\mu = 255$ ,  $L = 32$  e  $X_{Q,max} = -X_{Q,min} = 8 \text{ V}$ .

[T0.e] Como os três sinais senoidais gerados são ortogonais entre si, a potência média de  $v(t)$  é

$$P_v = P_{s1} + P_{s2} + P_{s3} \quad (17)$$

$$P_v = 2 + 8 + 2 = 12 \text{ V}^2 \quad (18)$$

Assim, a potência média de  $x(t)$ , em função do ganho de tensão,  $G$ , é

$$P_x = G^2 \cdot P_v = 12G^2 \quad (19)$$

Com essa relação, podemos preencher a tabela abaixo com os valores referentes à quantização com lei- $\mu$ .

G		1/64	1/16	1/8	1/4	1	3/2	2
$X_{Q,max}/\sqrt{P_x}$		147.802	36.950	18.475	9.238	2.309	1.540	1.155
$RSR_q$ [dB]	eq. (11)	16.656	19.107	19.547	19.769	19.936	19.955	19.964
	eq. (12)	19.992	19.992	19.992	19.992	19.992	19.992	19.992

[T0.f] A equação (12) apenas é válida para  $\mu \gg \frac{X_{Q,max}}{\sqrt{P_x}}$ , assim, com valores de ganho muito pequenos, vemos que essa condição não é satisfeita pelos valores de  $\frac{X_{Q,max}}{\sqrt{P_x}}$  calculados na tabela. Nos primeiros 2 ou 3 valores de  $G$ , a equação (12) não nos deu boas estimativas.

## II. ATIVIDADES

### A. ARO1

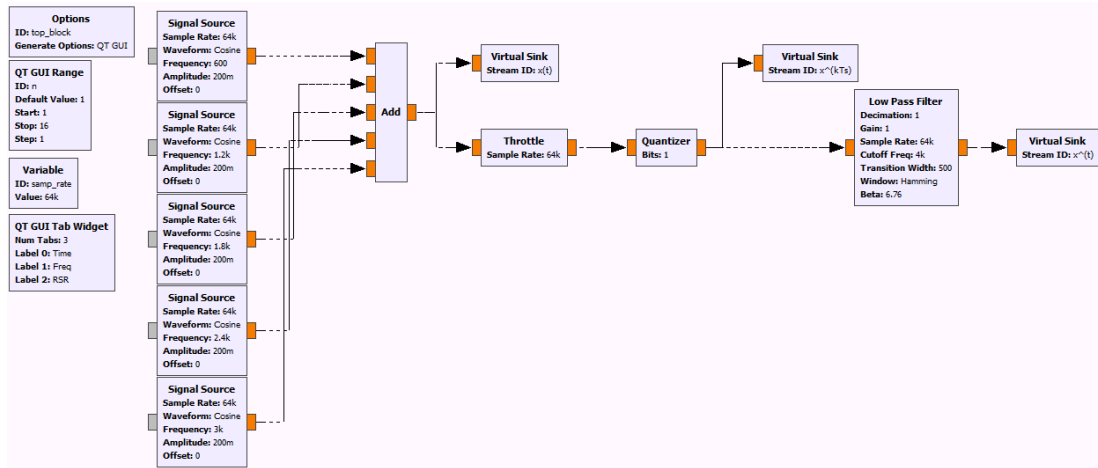


Figura 1: Configuração da AT para a quantização uniforme da soma de senóides

$$x_1(t) = 0.2 \cos 1200\pi t + 0.2 \cos 2400\pi t + 0.2 \cos 3600\pi t + 0.2 \cos 4800\pi t + 0.2 \cos 6000\pi t$$

$$x_2(t) = 1.12 \cos 2000\pi t + 0.12 \cos(6000\pi t + \pi)$$

Consideraremos inicialmente nosso sinal de entrada como  $x_1(t)$  no sistema de quantização do diagrama da Figura 1, cujas medidas são tiradas a partir dos esquemas da Figura 2. Os resultados obtidos para  $n = 3$  e  $n = 8$  se encontram nas Figuras 8 e 9, respectivamente.

[A1.a] Como podemos ver pelas Figuras 8 e 9 (c), o ruído de quantização foi muito menor para  $n = 8$  do que para  $n = 3$ , repare na diferença de escala entre os dois eixos y. Esse resultado já era esperado pela eq. (5), onde vemos que a potência desse ruído é proporcional ao quadrado de  $\Delta q$ . Como  $\Delta q$ , por

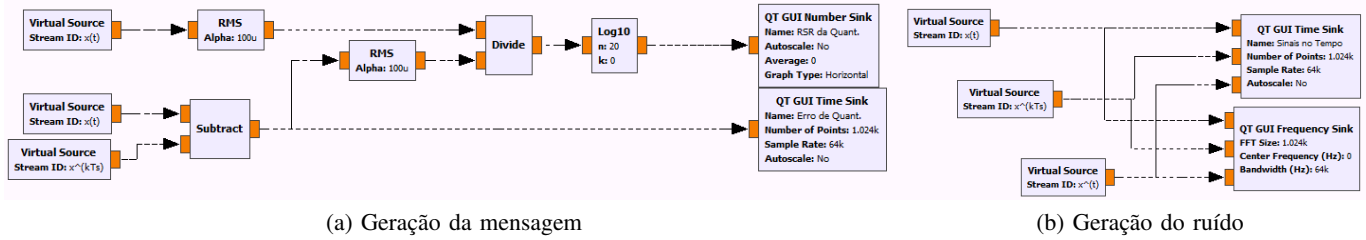


Figura 2: Geração do sinal mensagem, do ruído e das portadoras

sua vez, é inversamente proporcional a  $L$ , ao aumentarmos  $n$  de 3 para 8, estamos efetivamente dividindo a potência do ruído de quantização por  $2^{10}$ , uma atenuação de 30.1 dB.

Como todos as componentes de  $x_1(t)$  têm frequências múltiplas de 600 Hz, elas são ortogonais entre si, e sua potência média teórica é calculada por

$$P_{x_1} = 5 \cdot \frac{0.2^2}{2} = 0.1000 \text{ V}^2 = 20.000 \text{ dBm} \quad (20)$$

Da mesma forma, pode-se comprovar a ortogonalidade das componentes de  $x_2(t)$ . Assim, sua potência média teórica é

$$P_{x_1} = \frac{1.12^2}{2} + \frac{0.12^2}{2} = 0.6344 \text{ V}^2 = 28.024 \text{ dBm} \quad (21)$$

As potências dos dois sinais foram medidas experimentalmente para preencher a Tabela I

$P_{x_1}$ [dBm]		$P_{x_2}$ [dBm]	
teórico	experimental	teórico	experimental
20.000	20.000	28.024	28.022

Tabela I: Potências da onda original

**[T1.a]** Variando o valor de  $n$ , a Tabela II foi preenchida com os valores de  $RSR_q$  medidos para  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . Percebe-se, que para valores maiores de  $n$ , obteve-se sinais com menos ruído de quantização. Isso já era esperado, como já debatemos no item anterior. Considerando que são tomadas 64 mil amostras por segundo ( $f_s$ ) de  $x(t)$ , a representação digital PCM desse sinal depende de uma taxa de  $R_b = n f_s$  bits por segundos. De fato, o custo para a melhoria de  $RSR_q$  está em  $R_q$ . Valores mais altos de  $n$  demandam uma taxa de bits maior. Em uma rede de comunicação isso está relacionado com a necessidade de maiores velocidades de *clock* dos conversores A/D de microprocessadores que estejam convertendo o sinal analógico em digital. Como a frequência de amostragem, pelo Teorema da amostragem de Nyquist, deve satisfazer a desigualdade:

$$f_s > 2B$$

Isso significa que  $R_b$  pode se tornar um fator limitante, dependendo da largura de banda do sinal e do valor de  $n$ .

**[A1.b]** Para um mesmo espaço de quantização, nosso erro de quantização,  $\Delta q$ , será sempre o mesmo e, conseqüentemente, o ruído de quantização também é constante. Se temos sinais fortes, teremos valores altos de  $\Delta q$ . Isso significa que, para sinais mais fracos (baixa potência) presentes nesse espaço, a sua  $RSR_q$  será muito baixa, por conta da relação (6). O áudio possui uma grande variação de amplitude em seu sinal, que é resultado do fato de nosso da nossa percepção de volume ser logarítmica. Para contornarmos esse problema, utilizaremos a quantização não linear.

$n$	$L$	$R_b$ [kbps]	$RSR_q$ de $x_1(t)$ [dB]		$RSR_q$ de $x_2(t)$ [dB]	
			teórico	experimental	teórico	experimental
3	8	192	16.27	13.57	20.86	22.30
4	16	256	22.29	18.48	26.88	28.57
5	32	320	28.32	24.68	32.90	34.14
6	64	384	34.34	30.9	38.92	39.35
7	128	448	40.36	36.91	44.94	45.40
8	256	512	46.38	42.91	50.96	50.21

Tabela II: Parâmetros da quantização linear

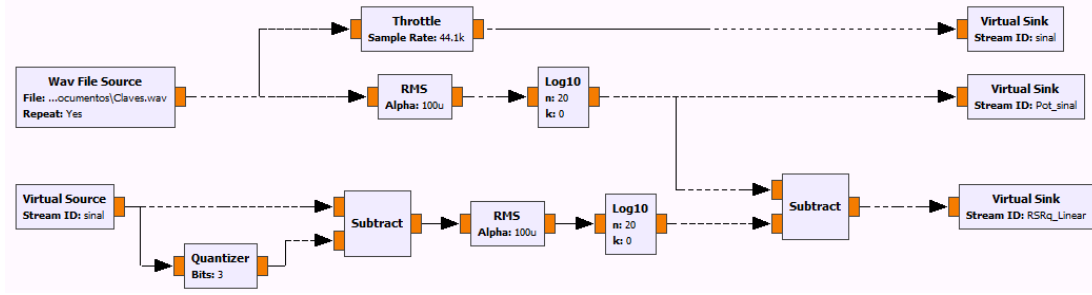
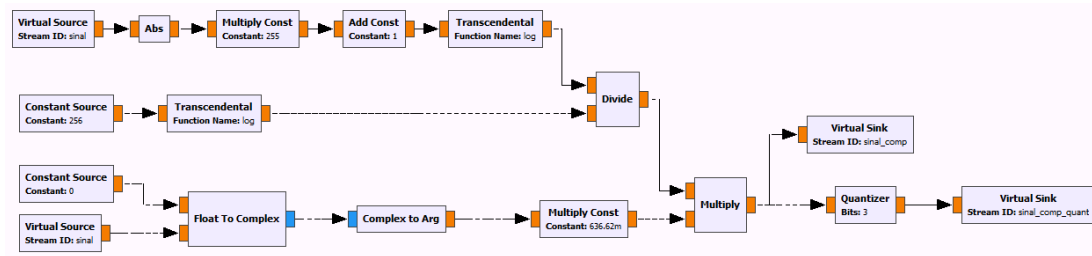
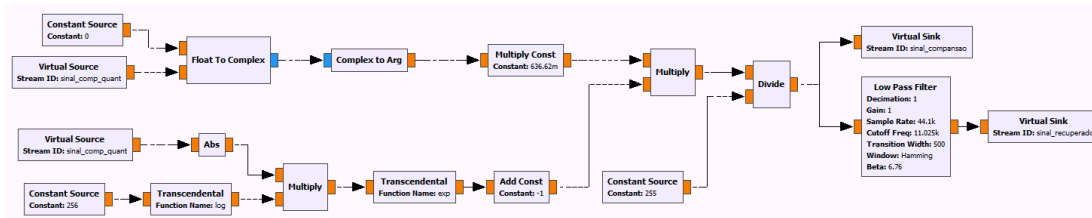


Figura 3: Geração do sinal original e suas medidas de potência e  $RSR$  de quantização linear



(a) Compressão seguida de quantização linear



(b) Expansão

Figura 4: Quantização por compensação do sinal de áudio

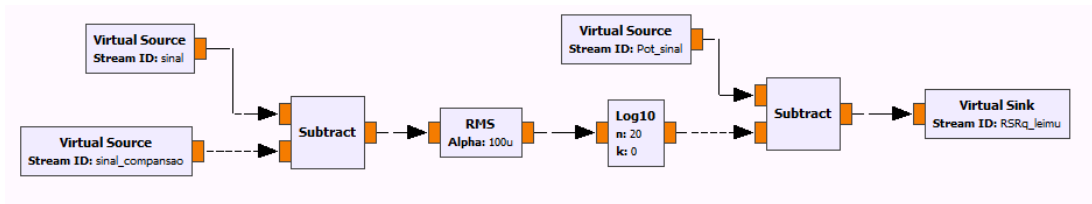


Figura 5: Medida de  $RSR_{q,leiu}$

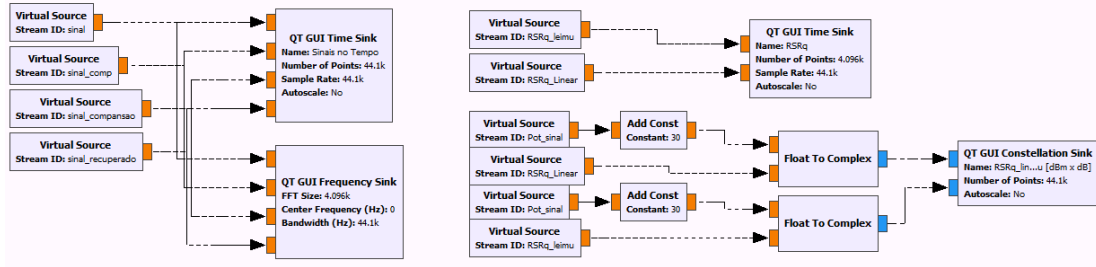


Figura 6: Instrumentos de observação

Potência [dBm]	Frequência de maior DEP [Hz]	Largura de Banda [Hz]
2.3	2140	3100

Tabela III: Potência, frequência de maior DEP e LB do sinal original

### B. AR02

Para resolver o problema exposto no item anterior, trataremos da quantização não linear de um sinal de áudio. Os diagramas da geração do sinal original (Fig. 3), quantização não linear (Fig. 4) e medições (Figs. 5 e 6) foram montados no GRC. O resultado para  $n = 3$  e  $n = 8$  podem ser visualizados nas Figuras 10 e 11. A relação sinal/ruído dos dois casos no tempo estão na Figura 12. Utilizando um filtro passa baixas de banda variável, a tabela III foi preenchida com valores da potência média do sinal de áudio, sua largura de banda que contém 99.9% da potência original e a frequência do espectro com maior DEP.

[A2.a] Utilizando o *Audio Sink*, analisou-se o sinal qualitativamente em diferentes pontos do nosso sistema. Comparando o sinal original ao sinal comprimido, nota-se claramente que aquelas regiões do sinal da "cauda" do sinal, de menor potência, foram amplificadas. O sinal inteiro parece mais plano, com menos contraste. Ao escutar o sinal expandido e filtrado e variar o  $n$ , para  $n$  baixo, nota-se claramente a presença do ruído de quantização no sinal, diminuindo muito sua qualidade. Ao aumentar  $n$ , o efeito contrário ocorre. Podemos perceber que nosso sinal ganha profundidade. Variando a frequência de corte do filtro passa baixas, pode-se notar as particularidades das suas componentes de frequência. Nota-se que frequências mais baixas estão presentes apenas no início do sinal, no momento do "estouro" (maior amplitude), enquanto que as frequências mais altas estão muito relacionadas com a "cauda" do sinal (reverberações de menor potência). A frequência de maior DEP, indicada na Tabela III, parece ser a frequência responsável pelo pulso de maior amplitude. Logo, o valor da largura de banda observado nos mostra que a maior parte da energia do sinal está concentrada nesse pulso.

Utilizando o bloco *Moving Average*, mediu-se o valor médio da  $RSR_q$  para cada um dos casos descritos na Tabela IV. A partir do valor de potência média de  $x(t)$  da Tabela III, considerando  $X_{Q,max} = 1$  temos

$$\frac{X_{Q,max}}{\sqrt{P_x}} = \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{2.3-30}{10}}}} = 24.27 \quad (22)$$

Assim, consideraremos que a condição  $\mu \gg \frac{X_{Q,max}}{\sqrt{P_x}}$  não foi atingida (T0.f). Então, utilizaremos a eq. (11) nos cálculos de  $RSR_q$  teóricos para preenchimento das tabelas.

Para comparar as  $RSR_q$  das duas quantizações, utilizou-se o *Constellation Sink* conforme indicado no roteiro. O resultado, para os dois valores de  $n$  pode ser visto na Figura 14. Note como a  $RSR_q$  da quantização linear é dependente da potência instantânea do sinal  $x(t)$ , enquanto que a  $RSR_q$  da quantização não linear permanece praticamente constante.

Variando o valor de  $\mu$  entre 20 e 1000, a Tabela V foi preenchida com os valores de  $RSR_q$  médio teórico e experimental.

$n$	$RSR_q$ de $x(t)$ [dB]	
	teórico	experimental
3	7.37	6.58
4	13.39	12.90
5	19.41	19.55
6	25.43	25.12
7	31.45	31.51
8	37.47	37.42

Tabela IV:  $RSR_q$  média da quantização não linear para lei- $\mu$  ( $\mu = 255$ )

$\mu$	$n$	$RSR_q$ de $x(t)$ [dB]	
		teórico	experimental
20	3	6.94	8.02
	8	37.04	35.13
1000	3	5.89	4.37
	8	35.99	36.1

Tabela V:  $RSR_q$  média da quantização não linear para  $\mu = 20$  e  $\mu = 1000$

**[A2.b]** Em todas as nossas medidas de  $RSR_q$  para valores pequenos de  $n$ , os valores experimentais foram um pouco inconsistentes com o respectivo valor teórico calculado. Isso pode estar relacionado com a forma pela qual estamos calculando esse valor no GNU Radio (Fig. 5). Por isso, faremos uma análise a partir de valores teóricos. As curvas de  $RSR_q$  teórico em função de  $n$  para diferentes valores de  $\mu$  estão na Figura 7. De fato, entre os 3 valores observados,  $\mu = 255$  foi o mais otimizado para nosso sinal de áudio. Nenhum outro valor de  $\mu$  testado alcançou melhores resultados que ele.

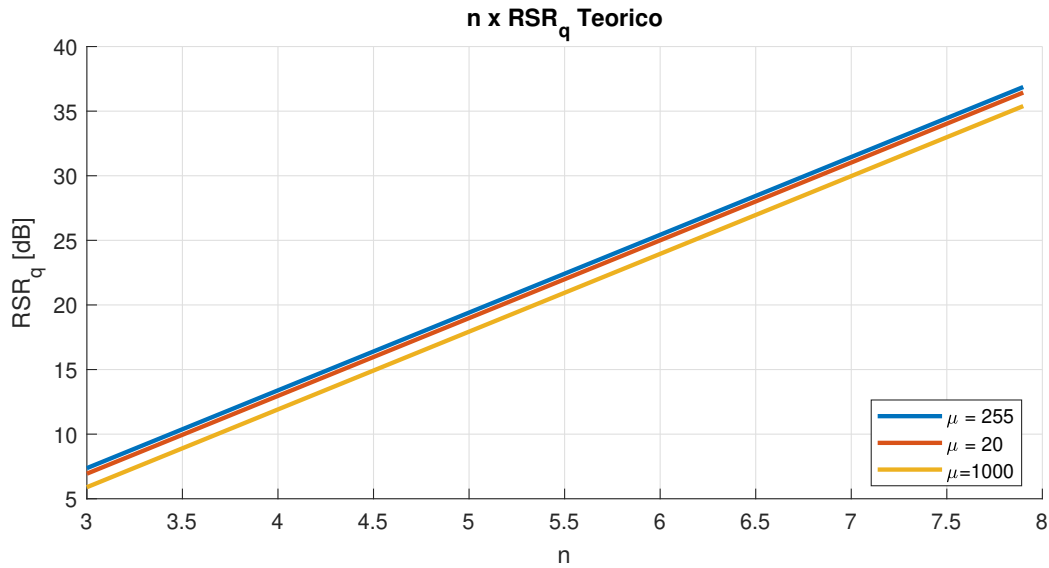


Figura 7:  $RSR_q$  teórico em função de  $n$  para diferentes valores de  $\mu$

### III. IMAGENS

As imagens de oscilografia e espectrais se encontram ao final do documento, em uma página reservada.

### IV. CONCLUSÃO

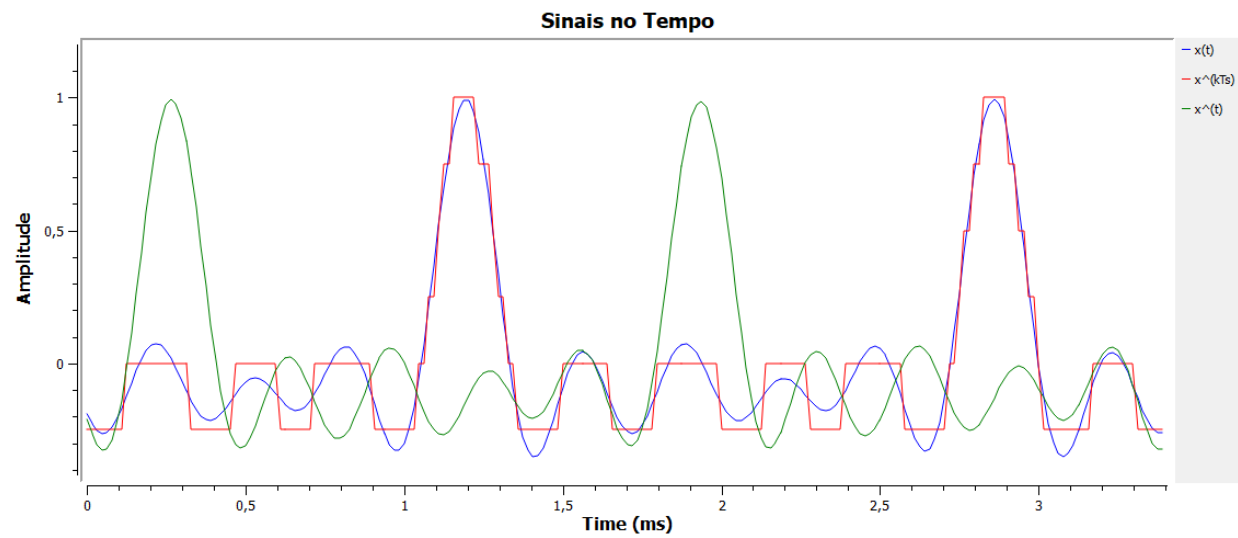
Este experimento foi capaz de demonstrar o funcionamento da quantização de sinais analógicos. Vimos, primeiramente, os fundamentos dessa operação por meio da quantização linear. Nesse momento foi possível

perceber claras fraquezas dessa abordagem no tratamento de sinais com grande variação de amplitude, como sinais de áudio. Introduzimos o conceito da quantização não linear como solução para esse problema. De fato, foi possível comprovar que a combinação das operações de compressão e expansão foi capaz de compensar pelo problema exposto e entregar uma quantização de regiões de baixa potência do sinal com muito mais qualidade do que a quantização linear havia conseguido. Esse comportamento fica evidente com nossa comparação no *Constellation Sink*, onde observamos como a  $RSR_q$  da quantização não linear era pouco dependente de variações na potência instantânea do sinal.

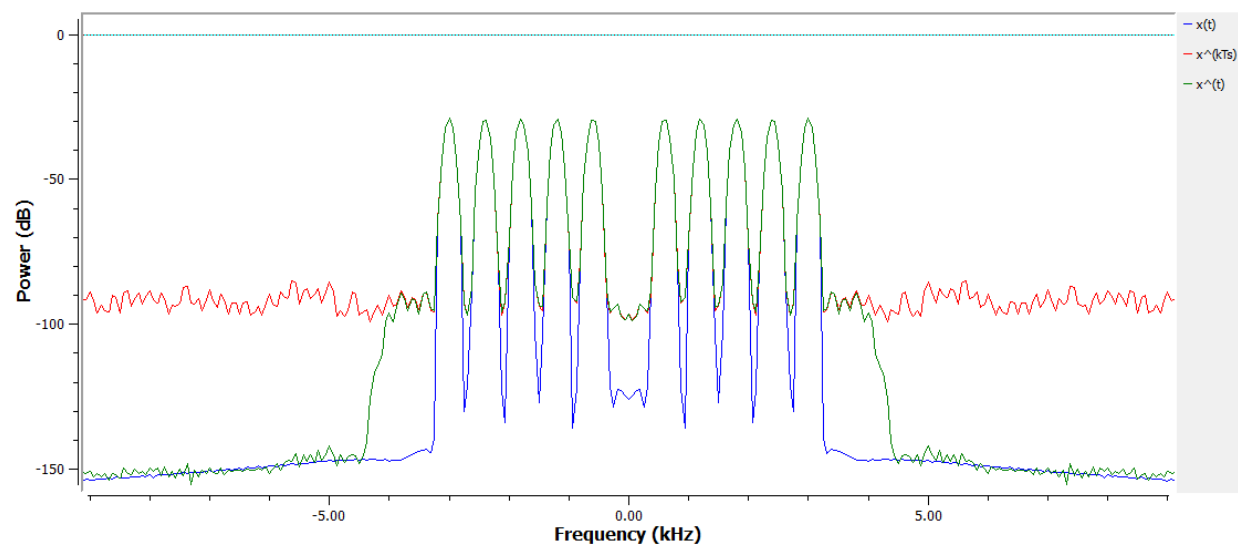
#### REFERÊNCIAS

- [1] B. P Lathi and Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicas e Digitais Modernos*, 4th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

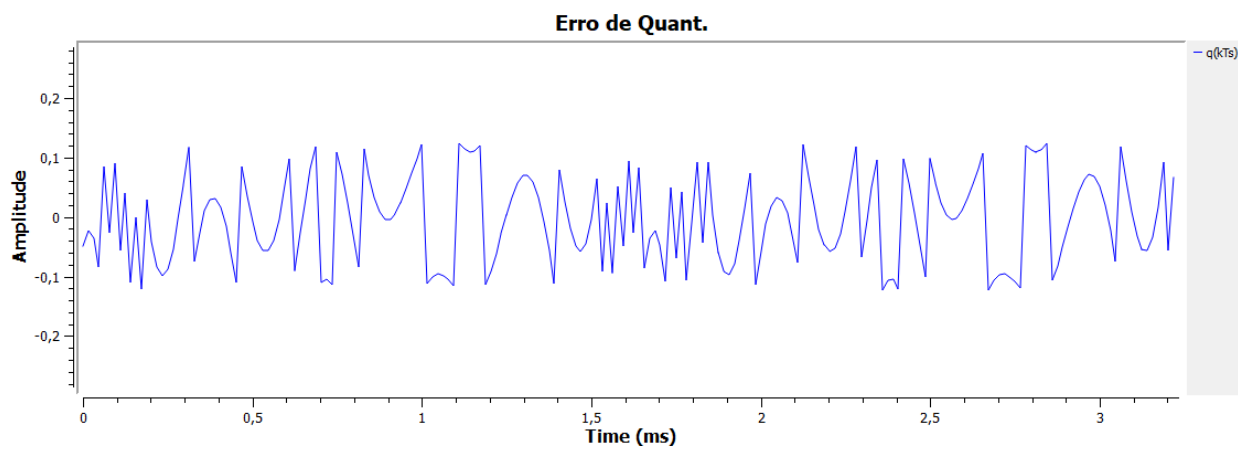




(a) Formas de onda

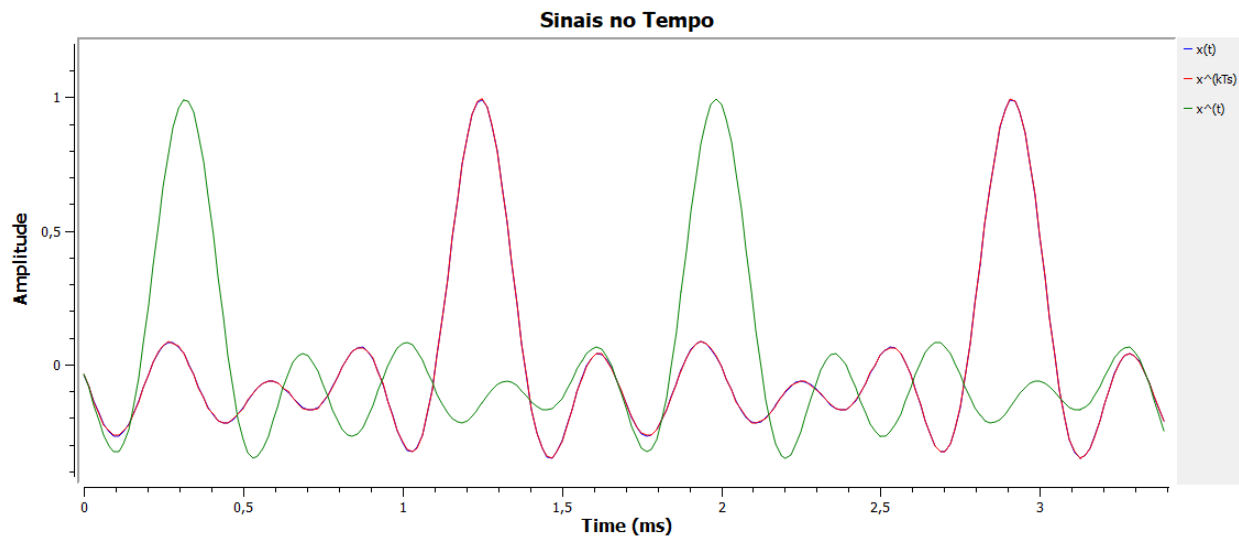


(b) Espectro

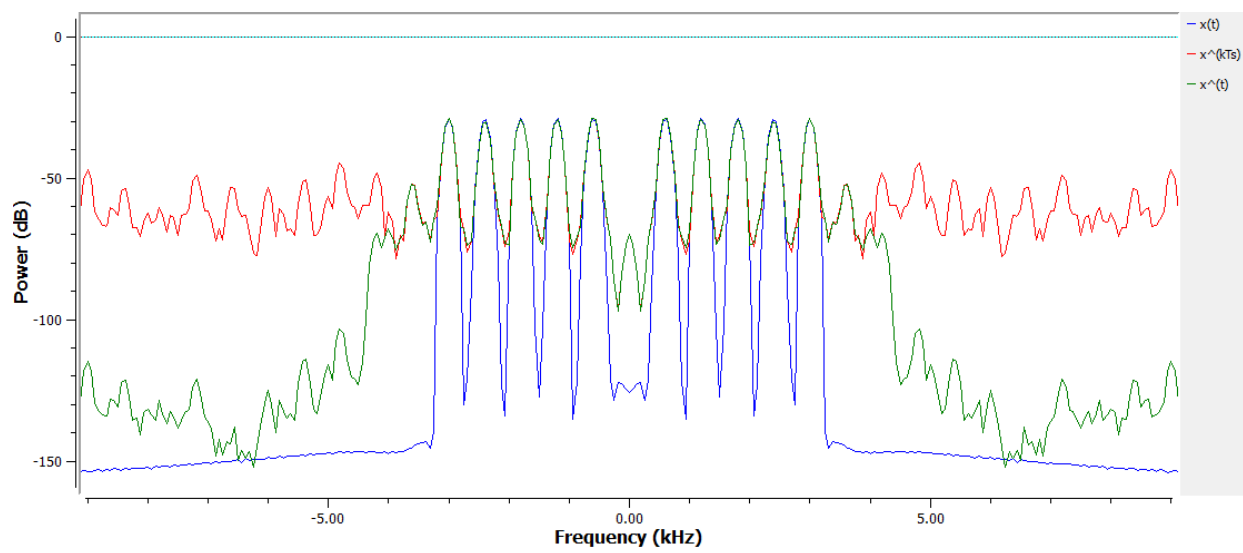


(c) Ruído de quantização

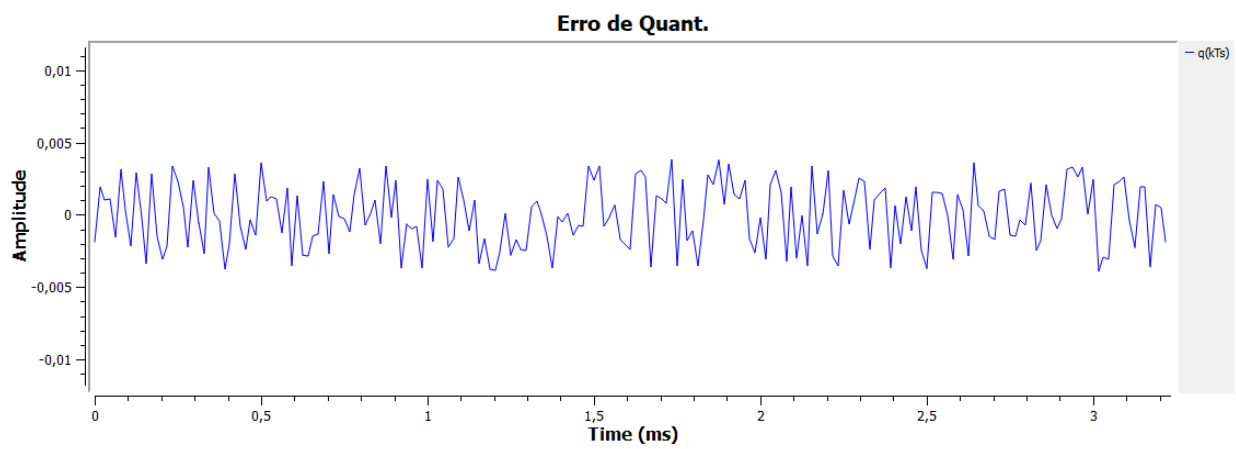
Figura 8: Resultados para quantização uniforme de  $x_1(t)$  com  $n = 3$  (a)



(a) Formas de onda



(b) Espectro



(c) Ruído de quantização

Figura 9: Resultados para quantização uniforme de  $x_1(t)$  com  $n = 8$  (b)

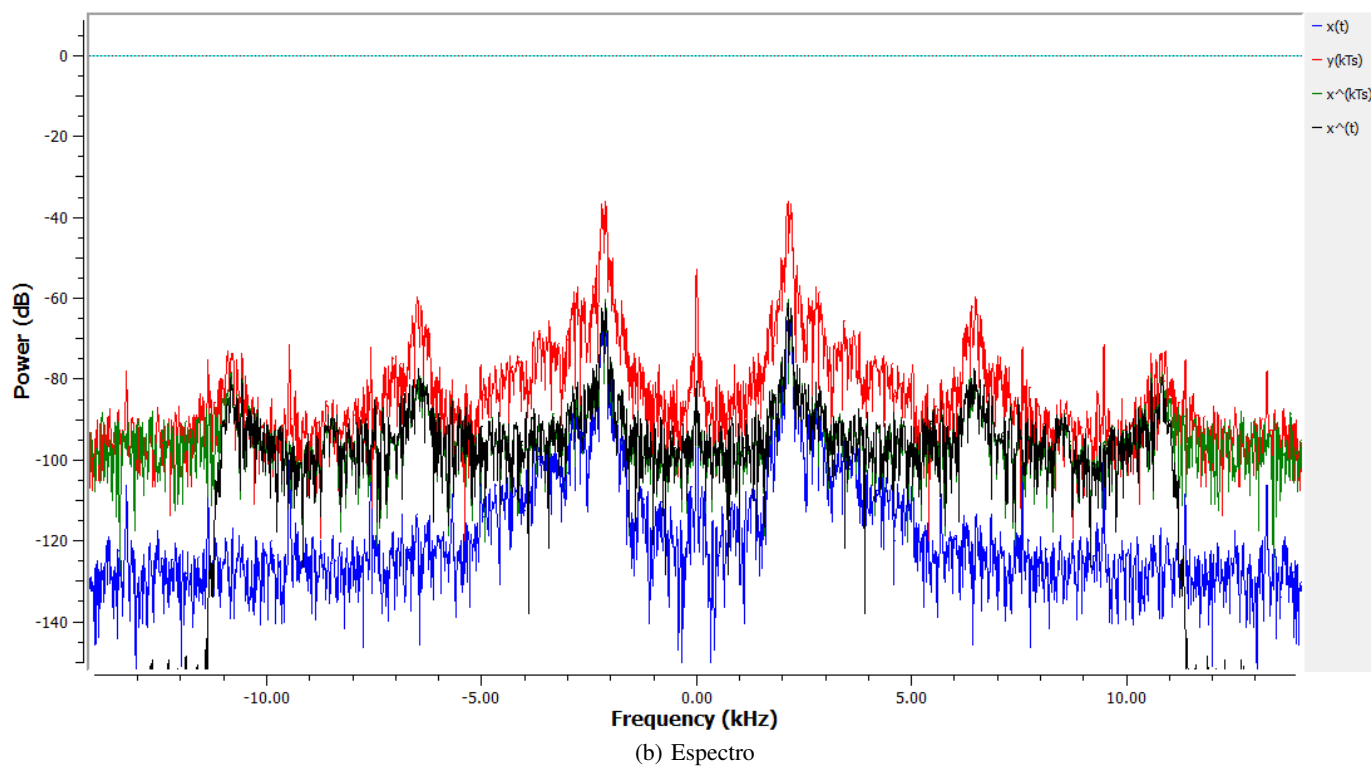
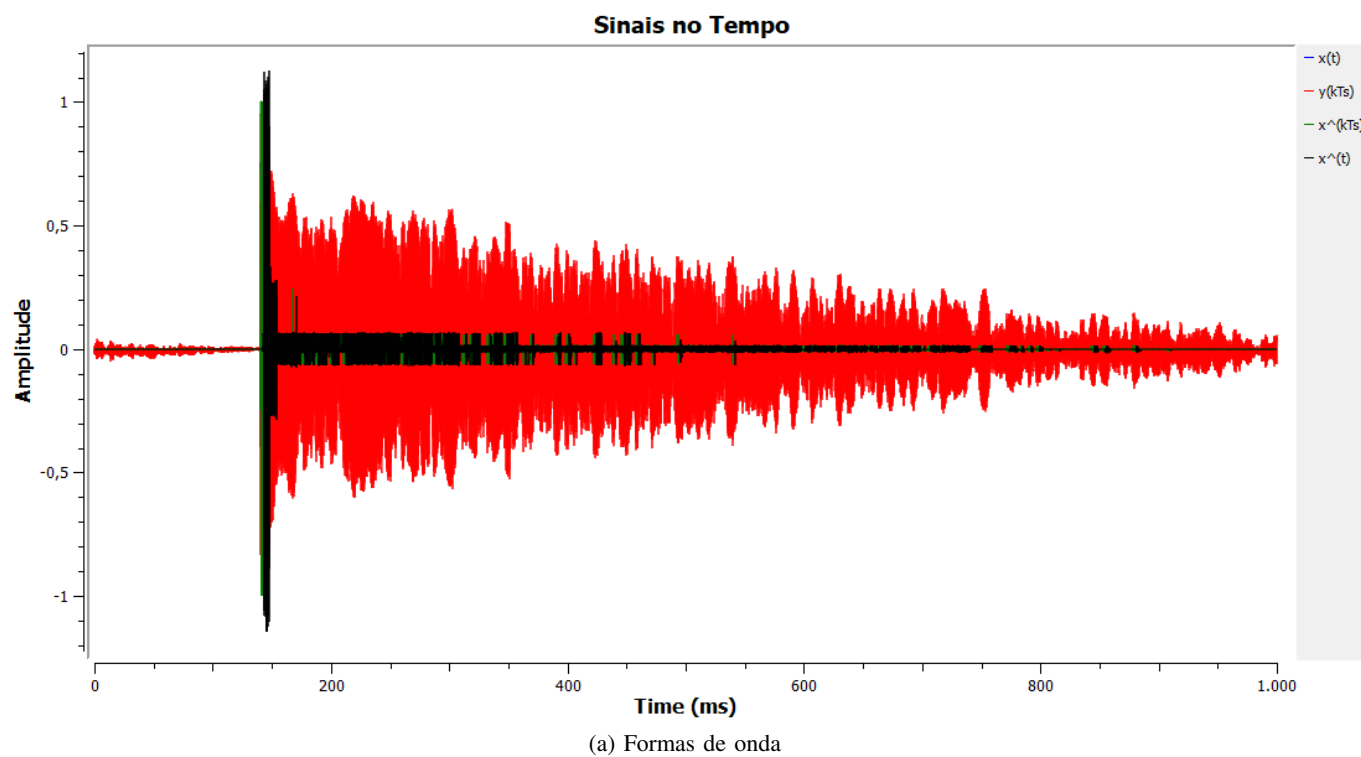


Figura 10: Resultados para quantização não linear com  $n = 3$  (a)

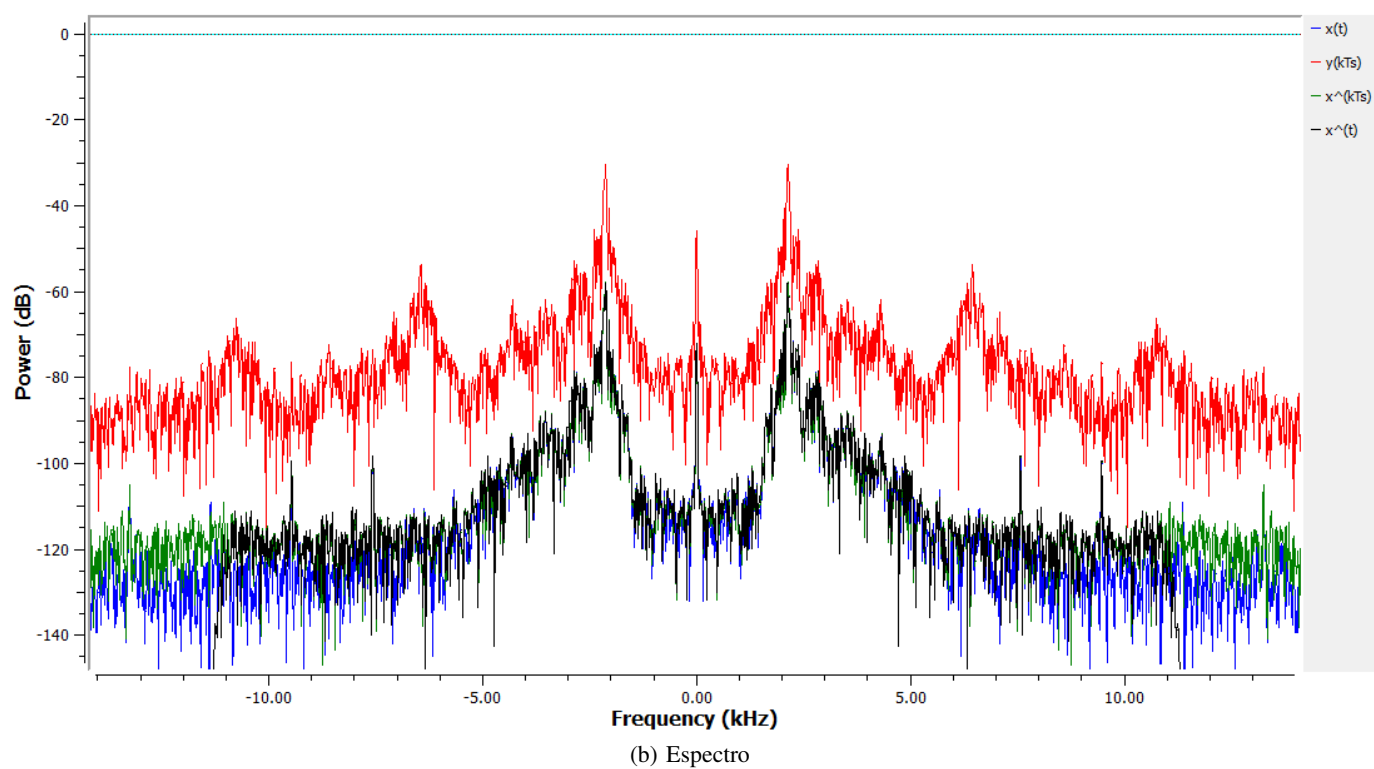
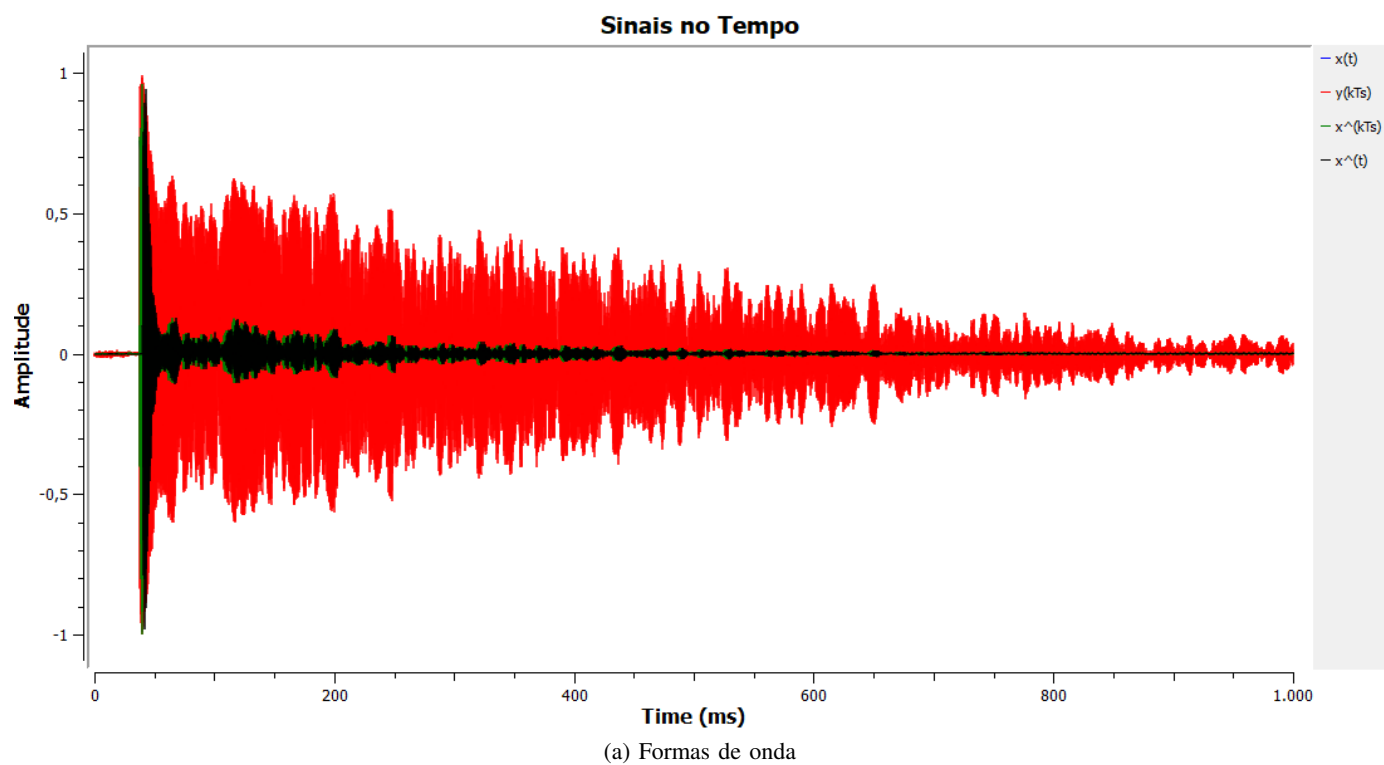
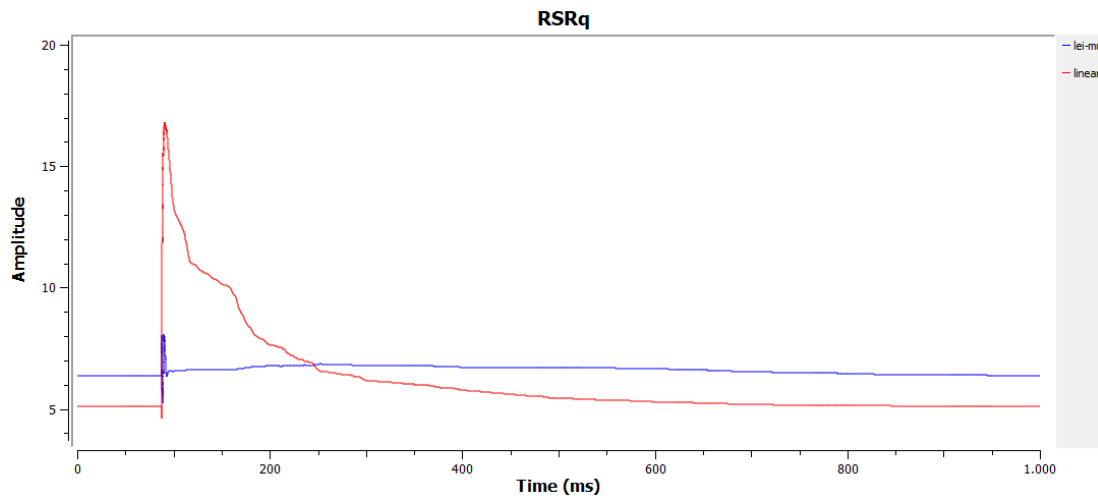
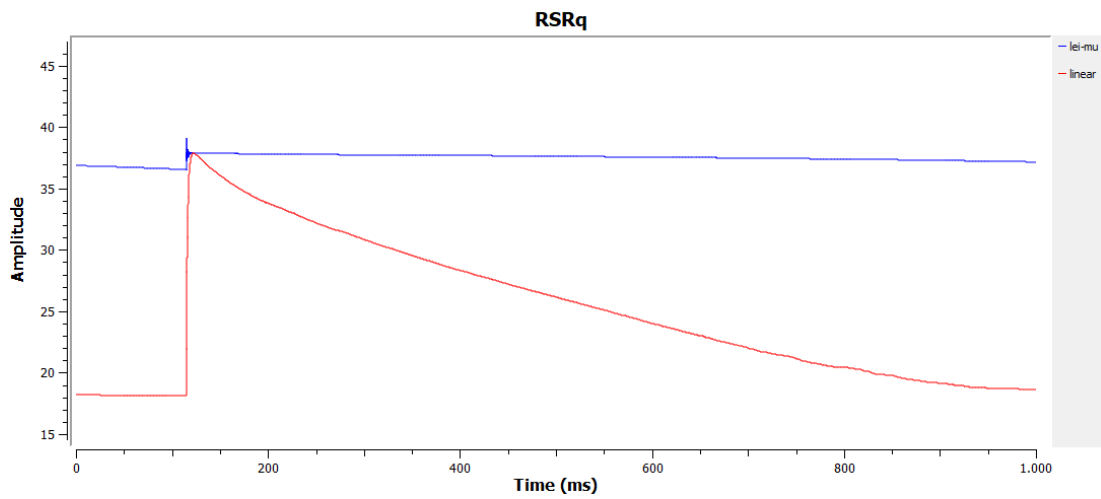


Figura 11: Resultados para quantização não linear com  $n = 8$  **(b)**



(a)  $n = 3$



(b)  $n = 8$

Figura 12: Variação das RSRs de quantização no tempo para os dois valores de  $n$

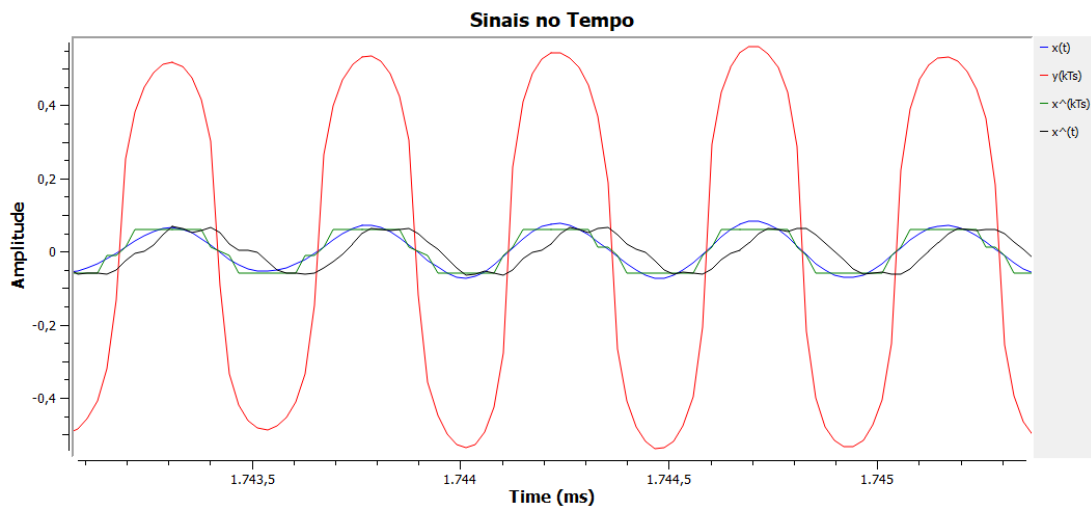


Figura 13: Efeito da quantização não linear sobre regiões de baixa potência do sinal

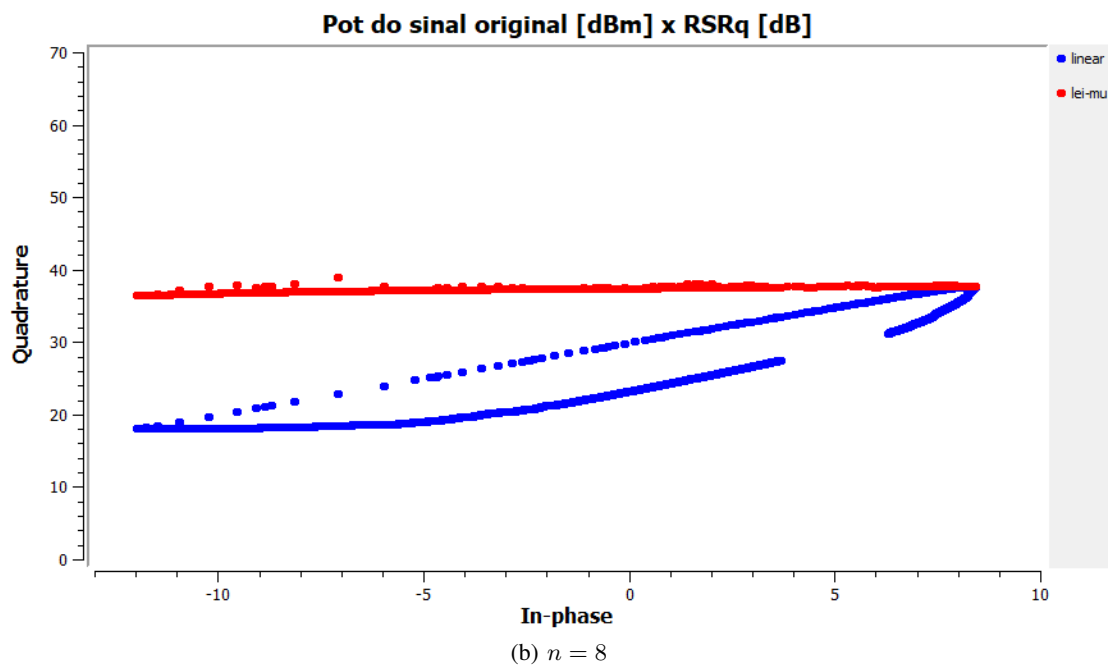
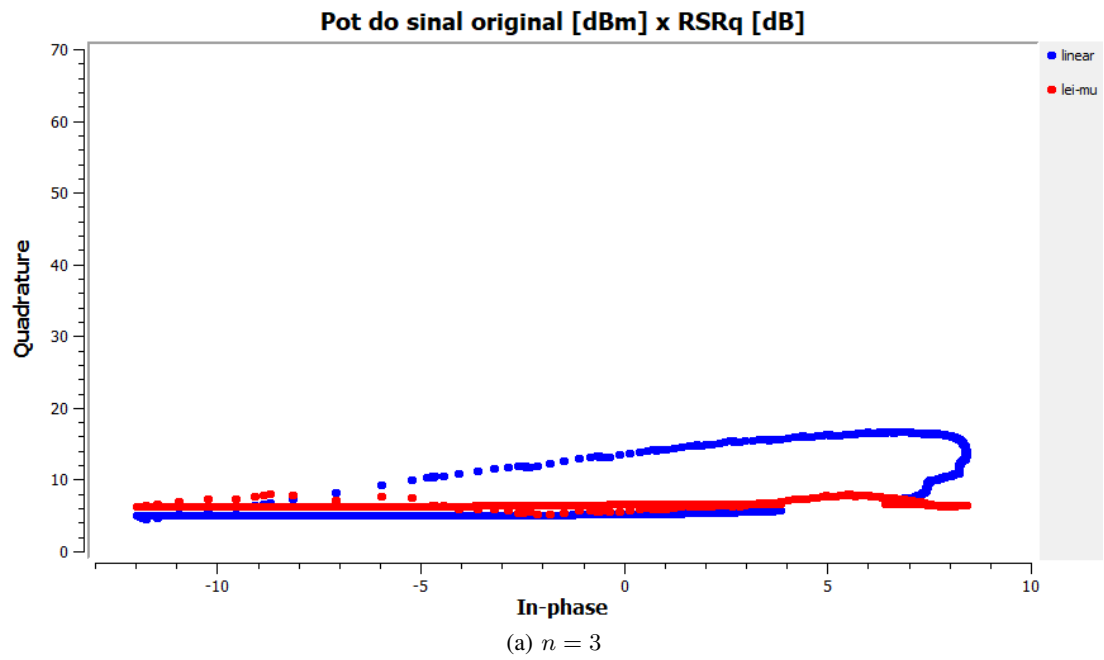


Figura 14: Comparação das  $RSR_q$  para as quantizações linear e lei- $\mu$  para os dois valores de  $n$