Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Clase 1

Administrativo

TODO el material excepto las grabaciones de las clases está disponible en el aula virtual del campus!

$V_i \to$ llega

$V_i \to$ último día 100%

Sá-$V_i \to$ score $= 0.9 \cdot$ nota

Sá-$V_i \to$ score $= 0.9^2 \cdot$ nota

Forma de evaluación:

1. Entrega 1 (individual): ejercicio de la guía 1
2. Entrega 2 (individual): ejercicio de la guía 2
3. Trabajo Final (grupos de 5 integrantes)
    - Componente de programación
    - Componente de interpretación de código
    - Componente de matemática

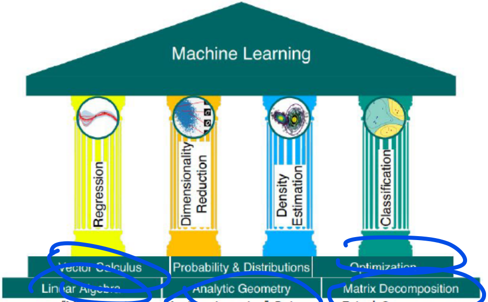
La nota final es un promedio ponderado de las notas individuales de cada entrega. Las dos entregas individuales tienen un límite de entrega *soft*.

Los ~~trabajos se entregan en la carpeta de drive individual compartida a cada alumno posterior a la primera clase.~~ → CAMPUS

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.



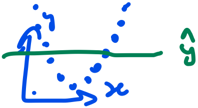
"Mathematics for Machine Learning", Deisenroth, Faisal, Ong

Bibliografía Recomendada: **Mathematics for Machine Learning**
Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.
Published by Cambridge University Press (2020).
Está disponible gratis en `http://mml-book.github.io/`

Motivación (I): performance

Operaciones vectorizadas y GPUs: Early colab!

Motivación (II): Más tipos de error



- Error de programación: error de sintaxis → compilador
- Error de programación: el código está mal pensado → debug código

Aparecen nuevos!

- Error de matemática: el modelo está mal planteado → debug lápiz y papel
- Error de planteo: no están dadas las condiciones para la aplicación del modelo seleccionado
- Error de traducción: el código no refleja el modelo planteado

  ↳ comparación

Motivación (III): entender los modelos

- Regresión logística asume superposición entre clases
- K-Means asume clusters esféricos
- Árboles de decisión tienen fronteras de decisión en forma de hiperplanos
- ¿Por qué las Redes Neuronales se entrenan más rápido usando GPUs?
- ¿Por qué en las redes neuronales importa la escala y en los árboles de decisión no?
- En kNN ¿Es lo mismo maximizar producto interno que minimizar distancia euclidea?

Empecemos considerando los vectores $\underbrace{u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})}_{\in \mathbb{R}^3}$ y $v = \underbrace{(2, -1)}_{\in \mathbb{R}^2}$, ¿podemos sumar los vectores?

$\left.\begin{array}{l}(1+2, \frac{1}{2}+-1, \frac{1}{3}+0) \\ (1+0, \frac{1}{2}+2, \frac{1}{3}+-1)\end{array}\right\}$ X $\longrightarrow$ $\nexists\ u+v$

¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$? $\in \mathbb{R}^2$

$\tilde{v} = (-1) \cdot (2, -1) = (-1) \cdot v$

$\therefore$ Para definir correctamente $u + v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos realizar estas operaciones:

1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \to x + y \in \mathbb{R}^n$
2. $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \to kx \in \mathbb{R}^n$

Algunas definiciones...

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una operación (o suma) a una función $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

$(a, b) \to a^b$

Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

$1+2=1$

$2+1=2$

1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{V}$.
2. Elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists e \in \mathbb{V}$ tal que $x + e = e + x = x$.
3. Opuesto: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists \tilde{x} \in \mathbb{V}$ tal que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$.
4. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{V}, x + y = y + x$.

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset, \mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una operación (o producto escalar) a una función $\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Este conjunto $\mathbb{K}$ es generalmente $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ es un cuerpo de escalares.

Comentario: *Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra* ***escalar****.*

¿Estudiar espacios vectoriales sólo sirve para vectores?

Sean $p(x) : 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ y $q(x) : 2 - x$ $(2, -1, 0)$, ¿valen 1 y 2?

1. $p(x) + q(x) = (p + q)(x) = (1+2) + (\frac{1}{2} - 1)x + (\frac{3}{4} + 0)x^2 \in \mathcal{P}_2$
2. $k \cdot p(x) = (kp)(x) = (k \cdot 1) + (k \cdot \frac{1}{2})x + (k \cdot \frac{3}{4})x^2 \in \mathcal{P}_2 \to \mathbb{V}$ d $\mathcal{P}_2$

hay una biyección con $\mathbb{R}^3$

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2)(2 - x) = 2 - x + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 \underbrace{- \frac{3}{4}x^3}_{\times}$

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ¿valen 1 y 2?

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\underbrace{\underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times n}{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n} \to$$ en mat. cuadradas el prod. tmb es cerrado!

$k \in \mathbb{R}$
$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Definición de **Espacio Vectorial**

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si $\mathbb{K}$ y $\mathbb{V}$ son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en $\mathbb{V}$, y la acción $\bullet$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{V}$ cumplen:

1. $+$ es asociativa $\quad \forall v, w, x \in \mathbb{V} \quad (v+w)+x = v+(w+x)$
2. $+$ tiene elemento neutro $\quad \exists e \in \mathbb{V} / \forall x \in \mathbb{V} \quad x+e = e+x = x$
3. $+$ tiene elemento inverso $\quad \forall x \in \mathbb{V} \ \exists \tilde{x} \in \mathbb{V} / \ x+\tilde{x} = \tilde{x}+x = e$
4. $+$ es conmutativa $\quad \forall v, w \in \mathbb{V} \quad v+w = w+v$
5. $\alpha \bullet (v+w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$ distrib. de $\bullet$ sobre $+$ de $\mathbb{V}$
6. $(\alpha \overset{+\mathbb{K}}{+} \beta) \bullet v = \underbrace{\alpha \bullet v}_{\mathbb{V}} \overset{+\mathbb{V}}{+} \underbrace{\beta \bullet v}_{\mathbb{V}}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$ distrib de $\bullet$ sobre $+$ de $\mathbb{K}$
7. $\bullet$ tiene elemento neutro: $1 \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
8. $\bullet$ es asociativa:

$$\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

$\mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \qquad \cdot$ en $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

⊛ grupo

⊛ grupo conmutativo

Subespacios Vectoriales: definición

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{V}$ si la suma y el producto por escalares de $\mathbb{V}$ son una operación y una acción en S que lo convierten en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. $\to (S, +, \mathbb{K}, \bullet)$

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sii:

1. $S \neq \emptyset \quad (0 \in S)$ $\to e \in S$
2. $v, w \in S \to v + w \in S$ $\to$ + ~~es~~ cerrada en S
3. $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \to \alpha \bullet v \in S$ $\to \bullet$ " " " S

Subespacios triviales

- $\{0\} \subseteq \mathbb{V}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

$e \in S$ ✓

$e + e = e \in S$ ✓

$k \cdot e = e \in S \quad \forall k \in K$ ✓

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea
$S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}\}$,
¿es un subespacio vectorial? sí

1) si $\alpha = 0$ $\alpha(a,b,c) = (0,0,0) \in S$

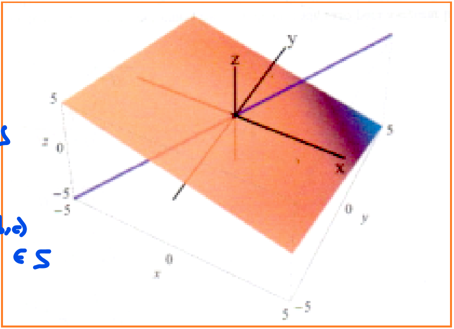
2) sea $v_1 = \alpha_1(a,b,c)$, $v_2 = \alpha_2(a,b,c) \in S$

$v_1 + v_2 = (\alpha_1 a + \alpha_2 a, \alpha_1 b + \alpha_2 b, \alpha_1 c + \alpha_2 c) =$

$((\alpha_1+\alpha_2)a, (\alpha_1+\alpha_2)b, (\alpha_1+\alpha_2)c) = \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{\mathbb{R}}(a,b,c) \in S$

3) sea $k \in \mathbb{R}$,

$k \cdot \alpha(a,b,c) = \underbrace{(k\alpha)}_{\mathbb{R}}(a,b,c) \in S$



Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.

$S = \{0,1,2\}$
$T = \{0,3\}$
$S+T = \{0,1,2,3,4,5\}$

Demostremos el caso 2

$S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$

1) ¿$e \in S+T$? como S, T son subesp. de $\mathbb{V} \Rightarrow e \in S, e \in T$

$\Rightarrow e = \underset{S}{e} + \underset{T}{e} \in S+T$ ✓

$\boxed{S+T \text{ es subesp. de } \mathbb{V}}$

2) ¿$v_1, v_2 \in S+T \Rightarrow v_1+v_2 \in S+T$?

si $v_1, v_2 \in S+T$ $\exists s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in T /$

$v_1 = s_1 + t_1$

$v_2 = s_2 + t_2$

$v_1 + v_2 = \underbrace{s_1 + s_2}_{s'} + \underbrace{t_1 + t_2}_{t'} = s' + t' \in S+T$ ✓

pues operada es S y T son subesp.

3) ¿$\forall k \in \mathbb{K}$, $v \in S+T \Rightarrow k \cdot v \in S+T$?

$\exists s \in S, t \in T / v = s+t$

$k \cdot v = k.(s+t) = \underbrace{k \cdot s}_{s'} + \underbrace{k.t}_{t'} = s' + t' \in S+T$ ✓

. es cerrado en S, T x subesp.

sea $G \subseteq \mathbb{V}$

Sistemas generadores

$\langle G \rangle = \{ v \in \mathbb{V} / v$ es c.l. de $G \}$

$\subseteq \mathbb{V}$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \ldots, r$.

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un sistema de generadores de $\mathcal{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de G.
Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$.

Ejemplo

¿ + 1 =

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$, ¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G?

$\exists a, b, c \,/\ a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = x & (1) \\ a + b + 3c = y & (2) \\ a + 2c = z & (3) \end{cases}$$

de (3) $a = z - 2c$

en (2) $z - 2c + b + 3c = y$

$b = y - c - z$

en (1) $z - 2c + 2y - 2c - 2z + 4c = x$

$2y - z = x$

tiene sol $\Leftrightarrow x = 2y - z$

$\Downarrow$

NO tiene sol $\forall x, y, z$

$\Leftarrow$ NO genera $\mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

$\langle G \rangle \neq \mathbb{R}^3$

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S, \ \forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, ..., v_n, \rangle$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en $\mathbb{V}$; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \rightarrow k_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in I$$

$G = \{v_1, ..., v_n, v'\}$

si v' es C.L. de $v_1, ..., v_n$

$\Rightarrow v' = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n$

$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n + (-1) \cdot v' = 0$

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.)
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i.
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d. $k \cdot v_1$
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama base de $\mathcal{V}$ si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que satisface $\langle v_\alpha\rangle_{\alpha\in I} = \mathbb{V}$.

no falta nada

no sobra nada

Definición: Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Diremos que n es la dimensión de $\mathcal{V}$, donde $n < \infty$.
Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

$E = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ base canónica

$B' = \left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$ BON

$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ BOG

$B'' = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ base

Variedad lineal

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, M es una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v,\ donde\ s \in S\}$, siendo S subespacio de $\mathcal{V}$, y $v \in \mathbb{V}$.