Análisis Matemático para Inteligencia Artificial
Entrega 2 - Ejercicio 5

Fausto Juárez Yélamos

19 de Mayo del 2024

1 Enunciado

5. Leonardo Fibonacci fue el primer matemático en estudiar la serie de números 0,1,1,2,3,5,8,... La secuencia de Fibonacci se puede expresar de forma recursiva como $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}, \quad f_0 = 0, f_1 = 1$.

   a) Sea $x^{(k)} = [f_{k+1}, f_k]^T$. Escribir la relación de las variables de forma matricial, es decir

   $$x^{(k)} = Ax^{(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots,\ x^{(0)} = [1, 0]^T$$

   b) Calcular los autovalores y autovectores de A. ¿Es A diagonalizable? En caso de serlo, hallar la diagonalización de la misma.

   c) Hallar una fórmula explícita para el k-ésimo elemento de la serie f_k. Sugerencia: usar los resultados del item anterior y hallar primero una expresión para $x^{(k)}$.

a) Primero defino el vector $x^{(k)}$ como: $x^{(k)} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix}$

Quiero encontrar una matriz A tal que: $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$

Sabiendo que la secuencia de Fibonacci se define por: $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$

De aquí obtengo que:

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} \\ f_k \end{pmatrix}$$

Quiero escribir esto en términos de $x^{(lk-1)}$. Sabemos que:

$$x^{(k-1)} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz A debe ser tal que al multiplicar x^{k-1}, obtengo x^k:

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$$

Observando la relación entre f_{k+1} y f_k con f_k y f_{k-1}, podemos escribir la matriz A como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifico que esta matriz A funcione correctamente:

$$A \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix}$$

Esto confirma que la matriz A correcta es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la relacion matricial es:

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}, \quad con \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y dado que

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

podemos iterar esta relación para obtener cualquier termino de la secuencia de Fibonacci en forma matricial.

b) Calcular los autovalores y autovectores de A. ¿Es A diagonalizable? En caso de serlo, hallar la diagonalizacion de la misma.

Para analizar los autovalores y autovectores de A, primero considero A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces sea

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(-\lambda) - 1 =$$

$$-\lambda + (\lambda)^2 - 1 =$$

$$(\lambda)^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ahora procedo a obtener los autovectores, primero considero $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$(A - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})I)X = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})x + y = 0 \\ x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y = 0 \end{cases}$$

De la primer ecuación obtengo:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$$

Tomando x = 1, entonces:

$$y = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

El autovector correspondiente a λ_1:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Luego considero $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$(A - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})I)X = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})x + y = 0 \\ x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}y = 0 \end{cases}$

De la primer ecuación obtengo:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

Tomando x = 1, entonces:

$$y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El autovector correspondiente a λ_1:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Para analizar si A es diagonalizable, por propiedad que el tamaño de A es 2x2 y se encontraron 2 autovalores distintos, sus autovectores correspondientes son l.i, si y solo si A es diagonalizable

La matriz P de autovectores es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal D es:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Para que A sea diagonalizable, P debe ser invertible. Por lo que calculo su determinante:

$$det(P) = 1 \cdot -\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \cdot -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$$

Ya que el determinate no es cero, P es invertible

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

La diagonalizacion de A es:

$$A = PDP^{-1}$$

c) Para hallar una formula explicita para el k-esimo elemento de la serie f_k, utilizaremos la diagonalizacion de la matriz A y la expresion de $x^{(k)}$. Puedo expresar $x^{(k)}$ en terminos de la diagonalizacion tal que:

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)}$$

Utilizando la diagonalizacion de A:

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$$

Por lo tanto:

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = PD^kP^{-1}x^{(0)}$$

La matriz D es diagonal por lo que:

$$D^k = \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \end{pmatrix}$$

Multiplico las matrices para obtener x^k:

$$x^{(k)} = PD^kP^{-1}x^{(0)}$$

Primero analizo el producto de $P^{-1}x^{(0)}$:

$$P^{-1}x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$x^{(k)} = PD^k \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Luego procedo a multiplicar P y D^k:

$$PD^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k & -\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \end{pmatrix}$$

Luego multiplicando por:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k \right)$$