Probabilidad y Estadística para Inteligencia Artificial
Examen 1

Fausto Juárez Yélamos

20 de Mayo del 2024

Resolución

1

Tres dados cargados, tienen las siguientes probabilidades de obtener un seis: 0,96, 0,87 y 0,76, respectivamente. Se elije uno de estos dados al azar, se lanza y se obtiene un seis. Determine la probabilidad de haber elegido el primer dado. Defino inicialmente D_1, D_2 y D_3 como los eventos de elegir el primer, el segundo y el tercer dado respectivamente. También sea S el evento de obtener un seis.

Lo que se busca calcular, por medio del teorema de Bayes, es encontrar $P(D_1|S)$, la probabilidad de haber elegido el primer dado y que se haya obtenido un seis.

Planteo en términos de la formula de Bayes:

$$P(D_1|S) = \frac{P(S|D_1)P(D_1)}{P(S)}$$

Informacion:

$$P(S|D_1) = 0,96$$
$$P(S|D_2) = 0,87$$
$$P(S|D_3) = 0,76$$
$$P(S|D_1) = P(S|D_2) = P(S|D_3) = \frac{1}{3}$$

Ahora analizo la $P(S)$:

$$P(S) = P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2) + P(S|D_3)P(D_3)$$
$$P(S) = \frac{0,96 + 0,87 + 0,76}{3}$$
$$P(S) = \frac{2,59}{3}$$
$$P(S) = 0,8633$$

Luego aplicando la formula de Bayes:

$$P(D_1|S) = \frac{0,96\frac{1}{3}}{0,8633}$$
$$P(D_1|S) = \frac{0,32}{0,8633}$$
$$P(D_1|S) = 0,3706$$

Entonces la probabilidad de haber elegido el primer dado y que se haya obtenido un seis es aproximadamente 0,3706.

2

Sea $f_{X,Y}(x,y) = \frac{6(2-2x-y)}{4}$ la función de densidad conjunta definida en el triángulo delimitado por el eje x, el eje y, y la recta $y = 2-2x$ (la densidad es 0 fuera de esa región). Determine la función marginal de densidad para la variable X.

La funcion de densidad marginal de X se obtiene integrando la funcion de densidad conjunta sobre todos los valores de y:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{y=2-2x} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Dada $f_{X,Y}(x,y) = \frac{6(2-2x-y)}{4}$:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{y=2-2x} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3(2-2x-y)}{2}$$

Integrando sobre y:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{y=2-2x} \frac{3(2-2x-y)}{2}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{2-2x} (2-2x-y)\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\left[\int_0^{2-2x} 2\,dy - \int_0^{2-2x} 2x\,dy - \int_0^{2-2x} y\,dy\right]$$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\left[2(-2x+2) - 2x(-2x+2) - \frac{(-2x+2)^2}{2}\right]$$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\left[-4x+4+4x^2-4-\frac{(4x^2-8x+4)}{2}\right]$$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\left[-4x+4+4x^2-4-2x^2+4x-2\right]$$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\left[2x^2-2\right]$$

$$f_X(x) = 3x^2-3$$

3

La variable aleatoria discreta X puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Las probabilidades para cada valor posible están dadas por la siguiente tabla en función de θ:

X	0	1	2	3
p	$\frac{3\theta}{3}$	$\frac{6\theta}{3}$	$\frac{1-3\theta}{3}$	$\frac{2(1-3\theta)}{3}$

Si experimentalmente se obtienen los siguientes datos: (2,0,1,0,2,2,0,0,2,0), determina el valor de θ usando el método de máxima verosimilitud.

Observando los datos analizo cuantas veces se presenta cada valor para comenzar a aplicar el metodo de maxima verosimilitud:

$$N^o0 = 5, \quad N^o1 = 1, \quad N^o2 = 4, \quad N^o3 = 0$$

$$L(\theta) = \left(\frac{3\theta}{3}\right)^5 \left(\frac{6\theta}{3}\right)^1 \left(\frac{1-3\theta}{3}\right)^4 \left(\frac{2(1-3\theta)}{3}\right)^0$$

$$L(\theta) = \left(\frac{(3\theta)^5 \cdot 6\theta \cdot (1-3\theta)^4 \cdot 1}{3^{10}} \right)$$

$$\ln\left(L(\theta)\right) = \ln\left(\frac{(3\theta)^5 \cdot 6\theta \cdot (1-3\theta)^4 \cdot 1}{3^{10}} \right)$$

$$ln(3\theta)^5 + ln6\theta + ln(1-3\theta)^4 - ln3^{10})$$

$$5 \cdot ln(3\theta) + ln(6\theta) + 4 \cdot ln(1-3\theta) - 10 \cdot ln(3)$$

$$5 \cdot ln(3) + 5 \cdot ln(\theta) + ln(6) + ln(\theta) + 4 \cdot ln(1-3\theta) - 10 \cdot ln(3)$$

$$\ln\left(L(\theta)\right) = -5 \cdot ln(3) + 6 \cdot ln(\theta) + ln(6) + 4 \cdot ln(1-3\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\ln\left(L(\theta)\right)\right] = 0 + \frac{6}{\theta} + 0 + \left(\frac{4}{(1-3\theta)} \cdot (-3) \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\ln\left(L(\theta)\right)\right] = \frac{6}{\theta} - \frac{12}{(1-3\theta)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\ln\left(L(\theta)\right)\right] = 0$$

$$\frac{6}{\theta} - \frac{12}{(1-3\theta)} = 0$$

$$\frac{6}{\theta} = \frac{12}{(1-3\theta)}$$

$$6 \cdot (1-3\theta) = 12\theta$$

$$6 - 18\theta = 12\theta$$

$$6 = 30\theta$$

$$\frac{6}{30} = \theta$$

$$\frac{1}{5} = \theta$$