Análisis Matemático para Inteligencia Artificial
Entrega 1 - Ejercicio 7

Fausto Juárez Yélamos

5 de Mayo del 2024

1 Enunciado

7. Mostrar que
$$\langle A, B\rangle = Tr(A\,B^H)$$
define un producto interno en $(C)^{n\times m}$. A este p.i. se lo conoce como producto interno de Frobenius. (La operación A^H representa A transpuesta y conjugada).

Para mostrar dicha igualdad se va a verificar que se cumplan las condiciones de la definición de Producto Interno:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) u,v,w $\in \mathbb{V}$
   (a) $\phi(u+v,w) = \phi(u,w) + \phi(v,w)$
   (b) $\phi(\alpha \cdot u, v) = \alpha \cdot \phi(u,v)$
2. $\phi(u,v) = \overline{\phi(v,u)}$
3. $\phi(v,v) \geqslant 0$ y $\phi(v,v) = 0$ sii $v = 0$

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{mxn}$ $(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Analizo la condición 1 a)

$$\begin{aligned}\langle A+C, B\rangle &= Tr((A+C)B^H)\\ &= Tr(AB^H + CB^H) && (1)\\ &= Tr(AB^H) + Tr(CB^H) && (2)\\ &= \langle A,B\rangle + \langle C,B\rangle\end{aligned}$$

1) Por propiedad distributiva de matrices.

2) Por propiedad distributiva respecto a la suma de la traza de matrices.

Analizo la condición 1 b)

$$\begin{aligned}\langle \alpha A, B\rangle &= Tr((\alpha A)B^H)\\ &= Tr(\alpha(AB^H)) && (3)\\ &= \alpha \cdot Tr(AB^H) && (4)\\ &= \alpha\langle A,B\rangle\end{aligned}$$

3) Por propiedad asociativa respecto al producto de matrices.

4) Por propiedad distributiva respecto a la traza de matrices.

Analizo la condición 2

$$\begin{aligned}
\overline{\langle B, A\rangle} &= \overline{Tr(BA^H)} \\
&= Tr(B^H A) && (5) \\
&= Tr(AB^H) && (6) \\
&= \langle A, B\rangle
\end{aligned}$$

5) Por propiedad del conjugado de la traza, y por propiedad de matriz transpuesta conjugada de que la transposición conjugada es igual a la transpuesta hermitiana para matrices complejas.

6) Por propiedad de Traza de una matriz.

Analizo la condición 3

$$\begin{aligned}
\langle A, A\rangle &= Tr(AA^H) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (AA^H)_{kxk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} (A)_{kj} (A^H)_{jk}) && (7) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} (|A_{jk}|^2) && (8) \\
&= Tr(AA^H) \geq 0
\end{aligned}$$

7) Podemos observar que el producto de A A^{H} es el modulo al cuadrado de A, que es siempre no negativo para cualquier j,k.

8) Cada termino de la sumatoria es no negativo, por lo que la suma total también es no negativa.

Además, obsérvese que AA^H es una matriz hermitiana definida positiva, por lo que sus valores propios son reales y positivos o cero. Esto implica que $\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}(AA^H)$ es no negativa, y es cero si y solo si todos los valores de AA^H son cero, lo que implicaría que $A = 0$.

Cumpliéndose las condiciones 1,2 y 3 podemos concluir que el enunciado define un producto interno.