

Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Entrega 1 - Ejercicio 7

Fausto Juárez Yélamos

5 de Mayo del 2024

1 Enunciado

7. Mostrar que

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A B^H)$$

define un producto interno en $(\mathbb{C})^{n \times m}$. A este p.i. se lo conoce como producto interno de Frobenius. (La operación A^H representa A transpuesta y conjugada).

Para mostrar dicha igualdad se va a verificar que se cumplan las condiciones de la definición de Producto Interno:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) $u, v, w \in \mathbb{V}$

(a) $\phi(u + v, w) = \phi(u, w) + \phi(v, w)$

(b) $\phi(\alpha \cdot u, v) = \alpha \cdot \phi(u, v)$

2. $\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)}$

3. $\phi(v, v) \geq 0$ y $\phi(v, v) = 0$ sii $v = 0$

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Analizo la condición 1 a)

$$\begin{aligned} \langle A + C, B \rangle &= \text{Tr}((A + C)B^H) \\ &= \text{Tr}(AB^H + CB^H) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr}(AB^H) + \text{Tr}(CB^H) \\ &= \langle A, B \rangle + \langle C, B \rangle \end{aligned} \tag{2}$$

1) Por propiedad distributiva de matrices.

2) Por propiedad distributiva respecto a la suma de la traza de matrices.

Analizo la condición 1 b)

$$\begin{aligned} \langle \alpha A, B \rangle &= \text{Tr}((\alpha A)B^H) \\ &= \text{Tr}(\alpha(AB^H)) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \cdot \text{Tr}(AB^H) \\ &= \alpha \langle A, B \rangle \end{aligned} \tag{4}$$

3) Por propiedad asociativa respecto al producto de matrices.

4) Por propiedad distributiva respecto a la traza de matrices.

Analizo la condición 2

$$\begin{aligned}\overline{\langle B, A \rangle} &= \overline{\text{Tr}(BA^H)} \\ &= \text{Tr}(B^H A)\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&= \text{Tr}(AB^H) \\ &= \langle A, B \rangle\end{aligned}\tag{6}$$

- 5) Por propiedad del conjugado de la traza, y por propiedad de matriz transpuesta conjugada de que la transposición conjugada es igual a la transpuesta hermitiana para matrices complejas.

2.1

- 6) Por propiedad de Traza de una matriz.

2.2

Analizo la condición 3

$$\begin{aligned}\langle A, A \rangle &= \text{Tr}(AA^H) \\ &= \sum_{k=1}^n (AA^H)_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (A)_{kj} (A^H)_{jk} \right)\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |A_{jk}|^2 \right) \\ &= \text{Tr}(AA^H) \geq 0\end{aligned}\tag{8}$$

- 7) Podemos observar que el producto de $A A^H$ es el modulo al cuadrado de A, que es siempre no negativo para cualquier j,k.
- 8) Cada termino de la sumatoria es no negativo, por lo que la suma total también es no negativa.

Además, obsérvese que AA^H es una matriz hermitiana definida positiva, por lo que sus valores propios son reales y positivos o cero. Esto implica que $\langle A, A \rangle = \text{Tr}(AA^H)$ es no negativa, y es cero si y solo si todos los valores de AA^H son cero, lo que implicaría que $A = 0$.

Cumpléndose las condiciones 1,2 y 3 podemos concluir que el enunciado define un producto interno.

Índice de comentarios

- 2.1 pero si traspones (BA^H) te queda $\text{conj}(A) \cdot B^T$, no $B^H \cdot A$. Ahí hay un mini error en la trasposición o algo que yo no estoy viendo.
- 2.2 cuál de todas?