

**STU FIIT**  
**Umela Inteligencia**

**“MNIST klasifikator  
Backpropagation Algoritmus”**

**Zadanie č. 3a**

**Made by: Meredov Nazar**  
**Cvičiaci: Bc. Jakub František Setnický**  
**AIS ID: 122092**

# Anotácia:

## Podúloha: MNIST klasifikátor

Cieľom tohto projektu je vyvinúť model neurónovej siete schopný klasifikovať ručne písané číslice pomocou súboru údajov MNIST (Modifikovaný národný inštitút pre štandardy a technológie).

Cieľom je presne identifikovať jednociferné celé čísla od 0 do 9 na základe obrázkov poskytnutých v súbore údajov.

Táto úloha slúži ako referenčný problém v oblasti strojového učenia a počítačového videnia a umožňuje posúdiť rôzne architektúry modelov a techniky trénovania

## Podúloha: Backpropagation algoritmus

Táto úloha sa zameriava na implementáciu plne funkčného algoritmu spätného šírenia (**Backpropagation**), ktorý slúži ako základný komponent pri trénovaní neurónových sietí.

Algoritmus spätného šírenia umožňuje neurónovým sietiam učiť sa optimalizáciou nákladovej funkcie spojennej s ich predikciami.

Implementácia musí zahŕňať priamy aj spätný prechod pre rôzne operácie a funkcie spolu s aktualizáciami parametrov potrebnými pre proces trénovania

# Opis úlohy:

**MNIST klasifikátor** - Vytvoriť doprednú neurónovú sieť (viacvrstvový perceptrón) na klasifikáciu ručne písaných čísl z dátového súboru MNIST.

- Dátový súbor obsahuje 60 000 obrázkov na tréning a 10 000 obrázkov na testovanie.
- Každý obrázok je v odtieňoch sivej, veľkosti 28 x 28 pixelov a reprezentuje jednu číslicu od 0 do 9.

**Backpropagation algoritmus** - Implementovať plne funkčný algoritmus backpropagation. Učiť sa pomocou minimalizácie zadanej chybovej funkcie.

- Implementovať doprednú aj spätnú časť pre jednotlivé operátory a funkcie, ako aj aktualizácie parametrov siete.
- Algoritmus overiť natrénovaním jednoduchšej neurónovej siete

# Obsah:

<b>ANOTÁCIA:</b>	<b>2</b>
<b>OPIS ÚLOHY:</b>	<b>3</b>
<b>OBSAH:</b>	<b>4</b>
<b>AKO MÔŽEME ŠARTOVAŤ PROGRAM? MNIST</b>	<b>5</b>
<b>AKO FUNGUJE PROGRAM? MNIST</b>	<b>7</b>
<b>CONFUSION MATRIX PRE NAJLEPŠÍ MODEL MNIST:</b>	<b>11</b>
<b>STRUČNE ZHODNOTENIE MNIST</b>	<b>13</b>
<b>BACKPROPAGATION ALGORITMUS FORWARD/BACKWARD</b>	<b>14</b>
<b>SIGMOIDMETHOD</b>	<b>14</b>
<b>TANHMETHOD</b>	<b>14</b>
<b>RELUMETHOD</b>	<b>15</b>
<b>LOSSMETHOD</b>	<b>16</b>
<b>LAYERCONTAINER</b>	<b>17</b>
<b>LINEARLAYER</b>	<b>17</b>
<b>METODA TRENEROVANIA MODELU</b>	<b>19</b>
<b>VYPYSY A TESTOVANIE</b>	<b>20</b>
<b>STRUČNE ZHODNOTENIE BACKPROPAGATION</b>	<b>21</b>
<b>ZHODNOTENIE</b>	<b>23</b>

# Ako môžeme štartovať program? MNIST

- Nainstalovať všetky knižnice zo suboru requirements.txt

*“pip install -r requirements.txt”*

```
1 # For start, you need to install libraries in the requirements.txt
2 # pip install -r requirements.txt
3
4
5 numpy
6 pandas
7 torch
8 matplotlib
9 sklearn
```

- Spustiť klasifikátor MNIST s optimalizátormi Adam, SGD a SGD s momentum

1) Pred spustením môžete upraviť hyperparametre v subore init\_config.py

```
import torch

# Hyperparameters
DEVICE = torch.device("cuda" if torch.cuda.is_available() else "cpu")
INPUT_SIZE = 784 # 28x28
HIDDEN_SIZES = [256, 128]
NUM_CLASSES = 10
BATCH_SIZE = 64

LEARNING_RATE = 0.001
DROPOUT_RATE = 0.2
NUM_LAYERS = 3
EPOCHS = 50
```

2) Spustíme subor main.py v prečinku MNIST

*“python MNIST/main.py”*

Mame logované vystupy a konečné výsledky v subore (mnist.log) tak-to:

1	[2024-11-29 14:21:28,511] SGD - Epoch 1: Train Loss = 2.1726, Test Loss = 1.9683, Accuracy = 62.35%
2	[2024-11-29 14:21:31,735] SGD - Epoch 2: Train Loss = 1.6810, Test Loss = 1.2482, Accuracy = 78.11%
3	[2024-11-29 14:21:35,280] SGD - Epoch 3: Train Loss = 1.0624, Test Loss = 0.7594, Accuracy = 83.56%
4	[2024-11-29 14:21:38,948] SGD - Epoch 4: Train Loss = 0.7651, Test Loss = 0.5748, Accuracy = 86.12%
5	[2024-11-29 14:21:42,928] SGD - Epoch 5: Train Loss = 0.6347, Test Loss = 0.4856, Accuracy = 87.87%
6	[2024-11-29 14:21:46,957] SGD - Epoch 6: Train Loss = 0.5589, Test Loss = 0.4337, Accuracy = 88.73%
7	[2024-11-29 14:21:50,835] SGD - Epoch 7: Train Loss = 0.5149, Test Loss = 0.3989, Accuracy = 89.34%

```

51 [2024-11-29 14:24:49,981] SGD_Momentum - Epoch 1: Train Loss = 0.9425, Test Loss = 0.3442, Accuracy = 90.32%
52 [2024-11-29 14:24:54,436] SGD_Momentum - Epoch 2: Train Loss = 0.3740, Test Loss = 0.2585, Accuracy = 92.21%
53 [2024-11-29 14:24:58,638] SGD_Momentum - Epoch 3: Train Loss = 0.2979, Test Loss = 0.2131, Accuracy = 93.73%
54 [2024-11-29 14:25:02,797] SGD_Momentum - Epoch 4: Train Loss = 0.2509, Test Loss = 0.1861, Accuracy = 94.36%
55 [2024-11-29 14:25:06,889] SGD_Momentum - Epoch 5: Train Loss = 0.2192, Test Loss = 0.1610, Accuracy = 95.23%
56 [2024-11-29 14:25:10,942] SGD_Momentum - Epoch 6: Train Loss = 0.1933, Test Loss = 0.1442, Accuracy = 95.70%
57 [2024-11-29 14:25:14,962] SGD_Momentum - Epoch 7: Train Loss = 0.1762, Test Loss = 0.1322, Accuracy = 95.97%

```

```

101 [2024-11-29 14:28:19,022] Adam - Epoch 1: Train Loss = 0.2751, Test Loss = 0.1173, Accuracy = 96.24%
102 [2024-11-29 14:28:23,239] Adam - Epoch 2: Train Loss = 0.1302, Test Loss = 0.0883, Accuracy = 97.20%
103 [2024-11-29 14:28:27,428] Adam - Epoch 3: Train Loss = 0.1000, Test Loss = 0.0833, Accuracy = 97.40%
104 [2024-11-29 14:28:31,656] Adam - Epoch 4: Train Loss = 0.0817, Test Loss = 0.0736, Accuracy = 97.71%
105 [2024-11-29 14:28:35,810] Adam - Epoch 5: Train Loss = 0.0734, Test Loss = 0.0669, Accuracy = 97.95%
106 [2024-11-29 14:28:39,955] Adam - Epoch 6: Train Loss = 0.0640, Test Loss = 0.0796, Accuracy = 97.52%
107 [2024-11-29 14:28:44,096] Adam - Epoch 7: Train Loss = 0.0588, Test Loss = 0.0689, Accuracy = 98.01%

```

```

152 [2024-11-29 14:31:46,436]
153 SGD Results:
154 [2024-11-29 14:31:46,436] Final Test Accuracy: 95.03%
155 [2024-11-29 14:31:46,436]
156 SGD_Momentum Results:
157 [2024-11-29 14:31:46,436] Final Test Accuracy: 98.25%
158 [2024-11-29 14:31:46,436]
159 Adam Results:
160 [2024-11-29 14:31:46,436] Final Test Accuracy: 98.42%

```

- Spustiť vyhľadávanie najlepších hyperparametrov pre model zo suboru model\_search.py

*“python hypersearch/model\_search.py”*

Mame logovane vystupy a konečne vysledky tak-to:

```

[2024-11-29 17:38:28,025] Trial 0 finished with value: 0.17405724644295606
[2024-11-29 17:42:07,578] Trial 1 finished with value: 0.07104295122012874
[2024-11-29 17:45:46,357] Trial 2 finished with value: 2.3052947521209717
[2024-11-29 17:49:05,208] Trial 3 finished with value: 2.3122380372065647
[2024-11-29 17:51:52,649] Trial 4 finished with value: 0.08082737735935552
[2024-11-29 17:54:25,887] Trial 5 finished with value: 2.304564023017883
[2024-11-29 17:57:42,022] Trial 6 finished with value: 0.08849324168727579
[2024-11-29 18:01:20,990] Trial 7 finished with value: 0.06811147175743283
[2024-11-29 18:04:18,312] Trial 8 finished with value: 0.15752188919577748
[2024-11-29 18:07:21,454] Trial 9 finished with value: 0.09021864101105165

```

# Ako funguje program? MNIST

- **Zloženie neurónovej siete**

Zloženie neurónovej siete je **dynamické**, čo znamená, že jej štruktúra (počet vrstiev, veľkosti vrstiev a pod.) závisí od parametrov, ktoré zadáme pri vytváraní objektu triedy

```
class MNISTClassifier(nn.Module): 7 usages new *
    def __init__(self, input_size, hidden_sizes, num_classes, dropout_rate):
        super(MNISTClassifier, self).__init__()
        layers = []
        prev_size = input_size

        # Dynamic create hidden layers
        for size in hidden_sizes:
            layers.append(nn.Linear(prev_size, size))
            layers.append(nn.ReLU())
            layers.append(nn.Dropout(dropout_rate))
            prev_size = size

        layers.append(nn.Linear(prev_size, num_classes))

        self.network = nn.Sequential(*layers)

    def forward(self, x): new *
        x = x.view(x.size(0), -1) # Flatten the image
        return self.network(x)
```

## 1. Konštruktor (\_\_init\_\_):

- input\_size: Veľkosť vstupných dát (784)
- hidden\_sizes: Zoznam veľkostí skrytých vrstiev (128 a 64 neuroni a td)
- num\_classes: Počet výstupných tried (napr. 10 pre MNIST, kde sú triedy 0-9)
- dropout\_rate: Miera dropout pre zníženie preťaženia siete

## 2. Tvorba vrstiev:

*Sieť je vytvorená dynamicky v cykle:*

- nn.Linear(prev\_size, size): Lineárna vrstva. prev\_size je veľkosť predchádzajúcej vrstvy a size je aktuálna veľkosť vrstvy
- nn.ReLU(): aktivačná funkcia ReLU
- nn.Dropout(dropout\_rate): Aplikujem dropout

## 3. Výstupná vrstva:

- Posledná vrstva je lineárna s počtom neurónov zodpovedajúcim počtu tried (num\_classes)

## 4. Funkcia forward:

- Transformuje vstupné dáta z 2D na 1D (flatten) a následne ich prechádza sieťou pomocou self.network

- **Ako stiahneme data?**

Na stiahnutie a prípravu údajov použijeme funkciu **prepare\_data**.

*Táto funkcia vykonáva nasledujúce kroky:*

**Transformuje a normalizuje údaje:** Definujeme transformačný kanál pomocou funkcie `transforms.Compose` na prevod obrázkov na tenzory a ich normalizáciu

**Nastavenie ciest k údajom:** Zadáme cesty pre trénujúce a testovacie údaje

**Kontrola existujúcich údajov:** Skontrolujeme, či údaje už existujú na zadaných cestách. Ak nie, nastavíme príznak preberania na hodnotu `True`

**Načítať údaje:** Na stiahnutie a načítanie súboru údajov MNIST použijeme triedu `datasets.MNIST`

Údaje sú potom zabalené do objektov `DataLoader` na jednoduché dávkové spracovanie

```
def prepare_data(batch_size): 6 usages new *
    # Transform and normalize data
    transform = transforms.Compose([
        transforms.ToTensor(),
        transforms.Normalize(mean=(0.1307,), std=(0.3081,))
    ])

    data_path = "/Users/faustyn/Developer/STU_2324/UI/Zadanie3a/data"
    train_path = os.path.join(data_path, 'raw/train-images-idx3-ubyte')
    test_path = os.path.join(data_path, 'raw/t10k-images-idx3-ubyte')

    download = not (os.path.exists(train_path) and os.path.exists(test_path))

    # Load train and test data
    train_dataset = datasets.MNIST(root=data_path, train=True, download=download, transform=transform)
    test_dataset = datasets.MNIST(root=data_path, train=False, download=download, transform=transform)

    train_loader = DataLoader(train_dataset, batch_size=batch_size, shuffle=True)
    test_loader = DataLoader(test_dataset, batch_size=batch_size, shuffle=False)

    return train_loader, test_loader
```



- **Ako trénujeme model?**

Na trénovanie modelu použijeme funkciu **train\_model**

*Táto funkcia vykonáva nasledujúce kroky:*

**Nastaví model do režimu trénovania:** `model.train()`

**Inicializácia straty:** Inicializujeme premennú na sledovanie celkovej straty

**Iterovať nad dávkami:** Iterujeme po batches údajov v `train_loader`

**Presunúť údaje do zariadenia:** Presunieme údaje (CPU alebo GPU)

*Nastavíme tieto parametre*

**Zero Gradients -> Forward Pass -> Compute Loss -> Spätný priechod -> Aktualizácia váh a strat**

```
def train_model(model, train_loader, optimizer, criterion): 4 us
    model.train()
    total_loss = 0

    for batch_idx, (data, target) in enumerate(train_loader):
        data, target = data.to(DEVICE), target.to(DEVICE)

        optimizer.zero_grad()
        output = model(data)
        loss = criterion(output, target)
        loss.backward()
        optimizer.step()

        total_loss += loss.item()

    return total_loss / len(train_loader)
```

- **Evaluating methoda**

Na vyhodnotenie modelu použijeme funkciu **evaluate\_model**

*Táto funkcia vykonáva nasledujúce kroky:*

Nastavíme model do režimu vyhodnocovania: `model.eval()`

**Inicializujeme metriky:** celkovej straty, počtu správnych predpovedí a celkového počtu vzoriek

**Zakážeme výpočet gradientu:** Vypneme výpočet gradientu pomocou `torch.no_grad()`, aby sme urýchlili vyhodnotenie

**Iterácia nad dávkami:** Iterujem nad dávkami údajov v `test_loader`

**Presun údajov do zariadenia:** Presunieme údaje a cieľové štítky do určeného zariadenia

**Forward Pass:** Údaje prechádzame cez model, aby sme získali výstup

Vypočítame stratu

Kumulujem stratu

Vypočítame predpovede

Spočítajte správne predpovede

Vypočítame presnosť

```
def evaluate_model(model, test_loader, criterion): 4 usages new *
    model.eval()
    total_loss = 0
    correct = 0
    total = 0

    with torch.no_grad():
        for data, target in test_loader:
            data, target = data.to(DEVICE), target.to(DEVICE)
            output = model(data)
            loss = criterion(output, target)

            total_loss += loss.item()
            pred = output.argmax(dim=1, keepdim=True)
            correct += pred.eq(target.view_as(pred)).sum().item()
            total += target.size(0)

    return total_loss / len(test_loader), 100. * correct / total
```

## Confusion matrix pre najlepši model MNIST:

- Loadneme najlepši model

```
def load_best_model(): 1 usage new *
    model = MNISTClassifier(INPUT_SIZE, HIDDEN_SIZES, NUM_CLASSES, dropout_rate=DROPOUT_RATE).to(DEVICE)
    model.load_state_dict(torch.load('mnist_logs/best_model.pth'))
    return model
```

- Cez knižnicu confusion\_matrix na testovacom súbore údajov vypočítame confusion matrix

```
def evaluate_with_confusion_matrix(model, test_loader): 1 usage
    #model eval mode
    model.eval()

    all_preds = []
    all_targets = []

    with torch.no_grad():
        for data, target in test_loader:
            data, target = data.to(DEVICE), target.to(DEVICE)

            # get model predictions
            output = model(data)
            preds = output.argmax(dim=1, keepdim=True)

            # get predictions and targets
            all_preds.extend(preds.cpu().numpy())
            all_targets.extend(target.cpu().numpy())

    # Compute the cm
    cm = confusion_matrix(all_targets, all_preds)
    return cm
```

- Vizualizujeme confusion matrix pomocou heatmap

```
def plot_confusion_matrix(cm): 1 usage new *
    plt.figure(figsize=(10, 8))
    sns.heatmap(cm, annot=True, fmt='d', cmap='Blues', xticklabels=range(10), yticklabels=range(10))
    plt.xlabel('Predicted')
    plt.ylabel('True')
    plt.title('Confusion Matrix')
    plt.show()
```

## RESULTS:

(Epochs 500)

```
[2024-11-30 23:26:41,715]
SGD Results:
[2024-11-30 23:26:41,715] Final Test Accuracy: 98.25%
[2024-11-30 23:26:41,715]
SGD_Momentum Results:
[2024-11-30 23:26:41,715] Final Test Accuracy: 98.28%
[2024-11-30 23:26:41,715]
Adam Results:
[2024-11-30 23:26:41,715] Final Test Accuracy: 98.32%
```

## Parametre pre optimizatory:

### SGD:

'sgd\_lr': 0.011667030131725665  
'input\_size': 784  
'num\_layers': 3  
'hidden\_size\_0': 256  
'hidden\_size\_1': 256  
'hidden\_size\_2': 256  
'num\_classes': 10  
'batch\_size': 64  
'dropout\_rate': 0.1

### SGD\_Momentum:

'sgd\_momentum\_lr': 0.008005276745626849  
'momentum': 0.8987060343120898  
'input\_size': 784  
'num\_layers': 2  
'hidden\_size\_0': 256  
'hidden\_size\_1': 256  
'num\_classes': 10  
'batch\_size': 256  
'dropout\_rate': 0.2

### Adam:

'adam\_lr': 7.85101358317508e-05  
'input\_size': 784  
'num\_layers': 3  
'hidden\_size\_0': 256  
'hidden\_size\_1': 128  
'hidden\_size\_2': 128  
'num\_classes': 10  
'batch\_size': 64  
'dropout\_rate': 0.2

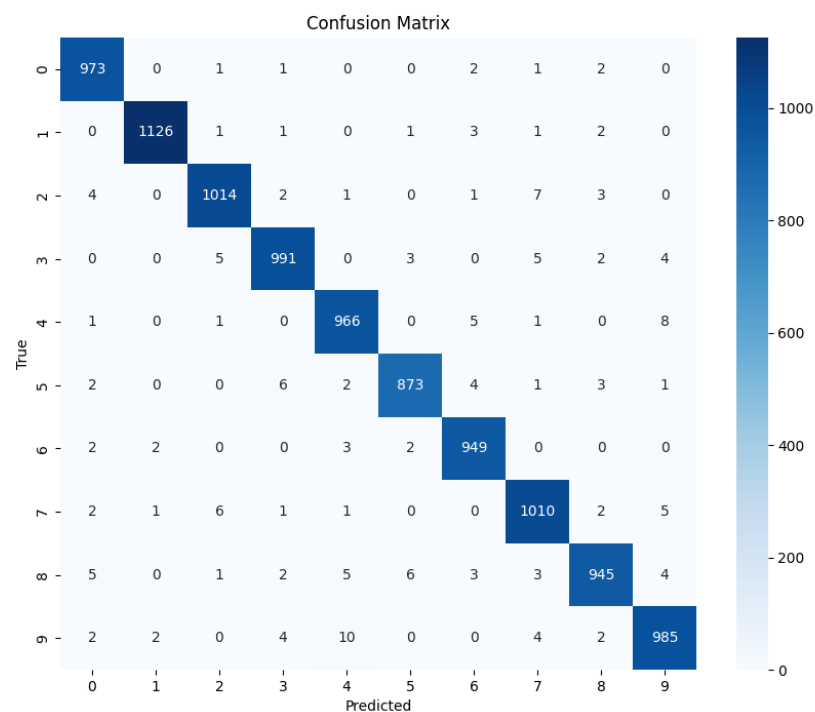
## Stručne zhodnotenie MNIST

V priebehu svojej analýzy a práce som skúmal 3 algoritmy na optimalizáciu neurónových sietí a výber hyperparametrov.

Pri hľadaní najlepších hyperparametrov pre každý z algoritmov som použil bibliotéku **optuna** a získal som perfektné hyperparametre ( strana hore hneď )

Aj z 3 optimizátorov bol najlepší – Adam (98.32%)

Taktiež som pre prehľadnosť odhadol maticu zámeny pre každé číslo a algoritmus s týmito výsledkami:



**Celkovo som s výsledkami úplne spokojný a mám presnosťou väčšou ako 97%**

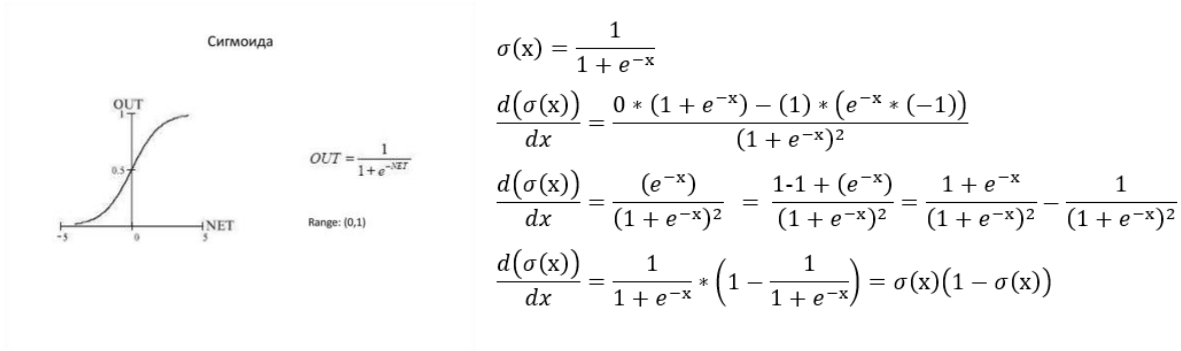
# Backpropagation algoritmus forward/backward

(source <https://www.geeksforgeeks.org/gradient-descent-algorithm-and-its-variants/> )

## SigmoidMethod

Metoda implementuje sigmoidnú aktivačnú funkciu a jej deriváciu na spätné šírenie chyby. Sigmoid sa používa na zavedenie **nonlinearity** do modelu a transformáciu vstupnej hodnoty do rozsahu od 0 do 1.

Teoria:



Implementacia:

```
def forward(self, x): 4 usages (2 dynamic)  ⚡ Nazar Faustyn *
    self.x = x
    return 1/(1+np.exp(-x))

def backward(self, gradient): 3 usages (3 dynamic)  ⚡ Nazar Faustyn *
    sigmoid_deriv = self.forward(self.x)*(1-self.forward(self.x))
    return gradient * sigmoid_deriv
```

## TanhMethod

Trieda TanhMethod implementuje hyperbolickú aktivačnú funkciu tanh a jej deriváciu na spätné šírenie chyby.

Funkcia sa používa aj na pridanie **nonlinearity** a **normalizáciu** výstupných hodnôt do rozsahu -1 až 1.

Teoria:

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

**Derivative of tanh x**

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x$$

© imathist.com

Implementacia:

```
def forward(self, x): 2 usages (2 dynamic) new *
    self.output = np.tanh(x)
    return self.output

def backward(self, d_output): 3 usages (3 dynamic) new *
    return d_output * (1 - self.output ** 2)
```

## ReLU Method

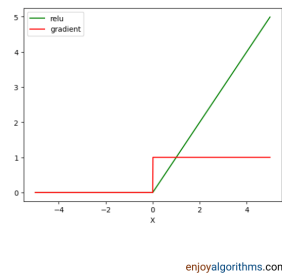
Metóda ReLU Method implementuje aktivačnú funkciu „Rektifikovaná lineárna jednotka“ a jej deriváciu na spätné šírenie chyby

Teoria:

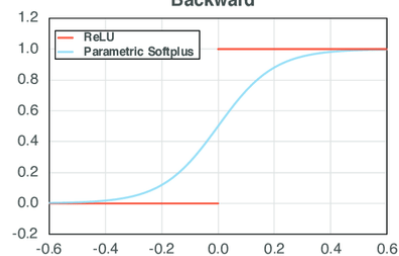
Rectified Linear Unit (ReLU)  
Activation Function

$$f(x) = \max\{0, x\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Backward



Implementacia:

```
def forward(self, x): 2 usages (2 dynamic)  Nazar Faustyn *
    self.x = x
    return np.maximum(0, x) # return 0 or x

def backward(self, gradient): 3 usages (3 dynamic)  Nazar Faustyn
    return gradient * (self.x > 0)
```

## LossMethod

LossMethod implementuje výpočet funkcie MSE (Mean Squared Error), ktorú budeme v našej úlohe používať na meranie rozdielu medzi predpovedanými hodnotami (predicted) a skutočnými hodnotami (target)

### Forward:

vypočíta strednú kvadratickú chybu (MSE) medzi predpovedanými hodnotami a skutočnými cieľovými hodnotami

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overbrace{(Y_i - \hat{Y}_i)}^{\text{Error}} \overbrace{)^2}^{\text{Squared}}$$

### Backward:

Backward vráti gradient stratovej funkcie MSE nad predpovedanými hodnotami. Tento gradient použijeme na aktualizáciu váh pre backpropagation

Implementacia:

```
def forward(self, predicted, target): 3 usages (2 dynamic) new *
    self.predicted = predicted
    self.target = target
    return np.mean((predicted - target) ** 2)

def backward(self): 4 usages (3 dynamic) new *
    return (2 * (self.predicted - self.target))/self.predicted.size
```



## LayerContainer

LayerContainer predstavuje kontajner na správu postupnosti vrstiev neurónovej siete a vykonávanie operácií prechodu dopredu a dozadu cez nu

layers - zoznam vrstiev neurónovej siete (každá vrstva má dopredné a spätné metódy)  
Vrstvy sa odovzdávajú v poradí, v akom sa vykonávajú

```
def __init__(self, layers):  # Nazar Faustyn
    self.layers = layers
```

Metóda „forward“ postupuje vstupné údaje postupne cez všetky vrstvy

Metóda „backward“ vykonáva spätné šírenie gradientu cez všetky vrstvy v **opačnom poradí**

```
def forward(self, x): 2 usages (2 dynamic)  # Nazar Faustyn
    for layer in self.layers:
        x = layer.forward(x)
    return x

def backward(self, gradient): 3 usages (3 dynamic)  # Nazar Faustyn
    for layer in reversed(self.layers):
        gradient = layer.backward(gradient)
```

## LinearLayer

LinearLayer je lineárna vrstva neurónovej siete, ktorá vykonáva lineárnu transformáciu vstupných údajov pomocou váh a skreslení (bias) a podporuje aj mechanizmus momentového učenia na urýchlenie konvergence gradientného zostupu.

```
def __init__(self, input_size, output_size, learning_rate=0.1, momentum=0.0):  # Nazar Faustyn *
    self.weights = np.random.randn(input_size, output_size) * 0.01
    self.biases = np.zeros((1, output_size))
    self.learning_rate = learning_rate
    self.momentum = momentum

    self.weight_momentum = np.zeros_like(self.weights)
    self.bias_momentum = np.zeros_like(self.biases)

    self.last_input = None
    self.last_output = None
```

Metóda forward vykonáva lineárnu transformáciu vstupných údajov pomocou vzorca  
 $y = Wx + b$

```
def forward(self, x): 2 usages (2 dynamic)  Nazar Faustyn
    self.last_input = x
    self.last_output = np.dot(x, self.weights) + self.biases
    return self.last_output
```

Metóda backward počíta gradienty a aktualizuje váhy a posuny

- **input\_gradient:**  $y_p = xW_T + b$

Chybový gradient odovzdaný predchádzajúcej vrstve

- **weights\_gradient:**

$$W'_x = W_x - a \left( \frac{\partial \text{Error}}{\partial W_x} \right)$$

Old weight      Derivative of Error with respect to weight  
New weight      Learning rate

Gradient chyby podľa váh

- **biases\_gradient:**

$$\sum_{i=m}^n a_i$$

m – počet gradientov

a - gradient

Súčet gradientov za všetky príklady v dávke      Súčet gradientov za všetky príklady v dávke

- **Aktualizácia váh a posunov:**
- IF **momentum** > 0:

$\mu$  - koeficient hybnosti

$\eta$  - miera učenia

- IF **momentum** = 0, váhy a posuny sa aktualizujú pomocou obvyklého gradientného zostupu

```
def backward(self, gradient): 3 usages (3 dynamic)  Nazar Faustyn *
    input_gradient = np.dot(gradient, self.weights.T)
    weights_gradient = np.dot(self.last_input.T, gradient)
    biases_gradient = np.sum(gradient, axis=0, keepdims=True)

    if self.momentum > 0:
        self.weight_momentum = self.momentum * self.weight_momentum - self.learning_rate * weights_gradient
        self.bias_momentum = self.momentum * self.bias_momentum - self.learning_rate * biases_gradient

        self.weights += self.weight_momentum
        self.biases += self.bias_momentum
    else:
        self.weights -= self.learning_rate * weights_gradient
        self.biases -= self.learning_rate * biases_gradient

    return input_gradient
```

### Momentum based Gradient Descent Update Rule

$$v_t = \gamma * v_{t-1} + \eta \nabla w_t$$

$$w_{t+1} = w_t - v_t$$

## Metoda trenerovania modelu

Model trénujeme pomocou metódy spätného šírenia s gradientným zostupom

`loss_fn = LossMethod()` - vytvorí sa objekt stratovej funkcie (MSE)

Vykoná tréning modelu pre daný počet epoch (epoch)

```
prediction = model.forward(X[i].reshape(1, -1))
```

Každá vstupná vzorka `X[i]` sa preženie cez model a vypočíta sa predikcia

```
loss = loss_fn.forward(prediction, y[i].reshape(1, -1))
```

```
total_loss += loss
```

Vypočíta sa chyba medzi predikciou modelu predikcie a skutočnou hodnotou `y[i]` a pripočíta sa k celkovej chybe

```
gradient = loss_fn.backward()
```

```
model.backward(gradient)
```

Gradient stratovej funkcie sa odovzdá modelu, ktorý aktualizuje svoje váhy a posuny

```
avg_loss = total_loss / len(X)
```

```
losses.append(avg_loss)
```

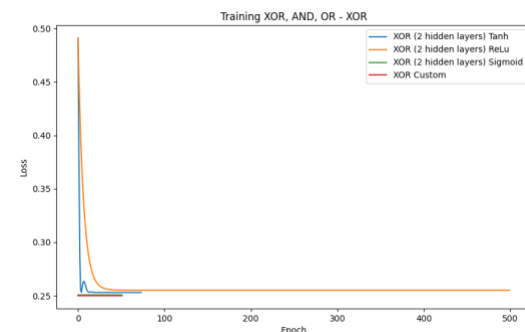
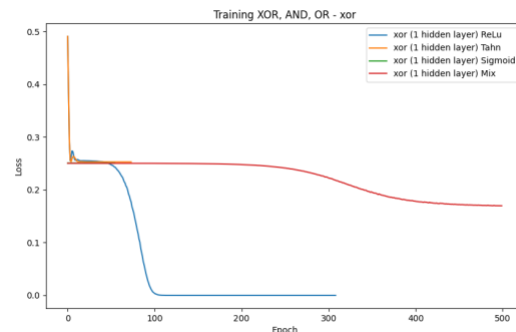
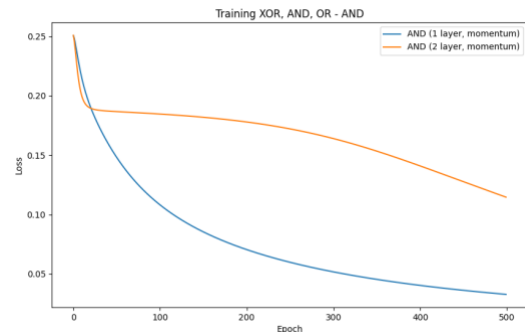
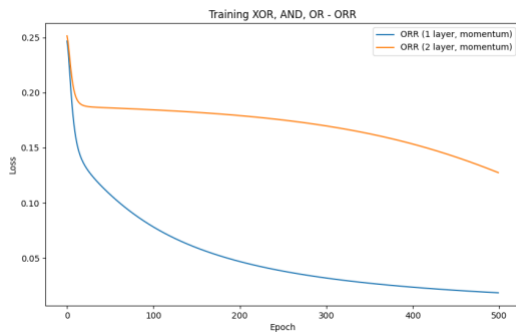
Priemerná chyba sa uloží pre ďalšiu analýzu

Po ukončení tréningu metóda vráti zoznam priemerných chýb v každej epoche

```
def train_model(X, y, model, epochs, verbose=True):  
    loss_fn = LossMethod()  
    losses = []  
  
    for epoch in range(epochs):  
        total_loss = 0  
  
        for i in range(len(X)):  
            # forward pass  
            prediction = model.forward(X[i].reshape(1, -1))  
  
            # loss calculation  
            loss = loss_fn.forward(prediction, y[i].reshape(1, -1))  
            total_loss += loss  
  
            # backpropagation  
            gradient = loss_fn.backward()  
            model.backward(gradient)  
  
        avg_loss = total_loss / len(X)  
        losses.append(avg_loss)  
  
        if verbose and epoch % 50 == 0:  
            print(f"Epoch {epoch}, Loss: {avg_loss}")  
  
    return losses
```

# Vypisy a testovanie

Počas analyzu najlepšieho modelu z viróznymi parametrami dostal som také výsledky:



```
[2024-12-02 01:19:16,362] Train: xor (1 hidden layer) Tanh
[2024-12-02 01:19:16,363] Epoch 0, Loss: 0.4907352326437151
[2024-12-02 01:19:16,386] Epoch 50, Loss: 0.2529748968373269
[2024-12-02 01:19:16,393] Early stopping at epoch 73

[2024-12-02 01:19:16,265] Train: xor (1 hidden layer) ReLU
[2024-12-02 01:19:16,266] Epoch 0, Loss: 0.4908523352629769
[2024-12-02 01:19:16,278] Epoch 50, Loss: 0.23708566996228608
[2024-12-02 01:19:16,295] Epoch 100, Loss: 0.16978600747359995
[2024-12-02 01:19:16,307] Epoch 150, Loss: 0.03661203509697997
[2024-12-02 01:19:16,319] Epoch 200, Loss: 1.926538679311998e-11
[2024-12-02 01:19:16,324] Epoch 250, Loss: 1.531181667015596e-20
[2024-12-02 01:19:16,335] Epoch 300, Loss: 2.1477970739806454e-30
[2024-12-02 01:19:16,357] Epoch 350, Loss: 0.0
[2024-12-02 01:19:16,362] Early stopping at epoch 362

[2024-12-02 01:19:16,527] Train: xor (1 hidden layer) Sigmoid
[2024-12-02 01:19:16,527] Epoch 0, Loss: 0.25065440299996045
[2024-12-02 01:19:16,532] Epoch 50, Loss: 0.2506572865404335
[2024-12-02 01:19:16,532] Early stopping at epoch 51

[2024-12-02 01:19:16,394] Train: XOR (2 hidden layers) Tanh
[2024-12-02 01:19:16,395] Epoch 0, Loss: 0.4909280462796399
[2024-12-02 01:19:16,410] Epoch 50, Loss: 0.25296944374428426
[2024-12-02 01:19:16,417] Early stopping at epoch 73

[2024-12-02 01:19:16,417] Train: XOR (2 hidden layers) ReLU
[2024-12-02 01:19:16,418] Epoch 0, Loss: 0.5000996266547234
[2024-12-02 01:19:16,434] Epoch 50, Loss: 0.2551289119425127
[2024-12-02 01:19:16,441] Epoch 100, Loss: 0.2550499716149226
[2024-12-02 01:19:16,458] Epoch 150, Loss: 0.2550499109682498
[2024-12-02 01:19:16,465] Epoch 200, Loss: 0.25504987438803645
[2024-12-02 01:19:16,486] Epoch 250, Loss: 0.25504983750868715
[2024-12-02 01:19:16,495] Epoch 300, Loss: 0.2550498002771683
[2024-12-02 01:19:16,503] Epoch 350, Loss: 0.25504976265688495
[2024-12-02 01:19:16,510] Epoch 400, Loss: 0.2550497245778086
[2024-12-02 01:19:16,519] Epoch 450, Loss: 0.25504968599988836

[2024-12-02 01:19:16,532] Train: XOR (2 hidden layers) Sigmoid
[2024-12-02 01:19:16,533] Epoch 0, Loss: 0.25065791925111425
[2024-12-02 01:19:16,550] Epoch 50, Loss: 0.2506595232407921
[2024-12-02 01:19:16,551] Early stopping at epoch 51
```

```

[2024-12-02 01:19:16,551] Train: xor (1 hidden layer) Mix
[2024-12-02 01:19:16,551] Epoch 0, Loss: 0.25033870217849546
[2024-12-02 01:19:16,559] Epoch 50, Loss: 0.25032935202037093
[2024-12-02 01:19:16,565] Epoch 100, Loss: 0.25032096714344815
[2024-12-02 01:19:16,571] Epoch 150, Loss: 0.25027043320920556
[2024-12-02 01:19:16,576] Epoch 200, Loss: 0.25001577295231076
[2024-12-02 01:19:16,584] Epoch 250, Loss: 0.24869093404565798
[2024-12-02 01:19:16,590] Epoch 300, Loss: 0.24212223716518053
[2024-12-02 01:19:16,596] Epoch 350, Loss: 0.2189259192959352
[2024-12-02 01:19:16,601] Epoch 400, Loss: 0.18743893256521468
[2024-12-02 01:19:16,606] Epoch 450, Loss: 0.1736832909725114

[2024-12-02 01:19:16,650] Train: AND (2 layer, momentum)
[2024-12-02 01:19:16,650] Epoch 0, Loss: 0.25180555374890345
[2024-12-02 01:19:16,655] Epoch 50, Loss: 0.18671306038406565
[2024-12-02 01:19:16,660] Epoch 100, Loss: 0.18469905121815625
[2024-12-02 01:19:16,665] Epoch 150, Loss: 0.18202712170359148
[2024-12-02 01:19:16,670] Epoch 200, Loss: 0.17813342824747122
[2024-12-02 01:19:16,675] Epoch 250, Loss: 0.1724299835044643
[2024-12-02 01:19:16,680] Epoch 300, Loss: 0.16440551916486557
[2024-12-02 01:19:16,685] Epoch 350, Loss: 0.15394173684427215
[2024-12-02 01:19:16,690] Epoch 400, Loss: 0.1415750392530789
[2024-12-02 01:19:16,695] Epoch 450, Loss: 0.12830734211343198

[2024-12-02 01:19:16,700] Train: ORR (1 layer, momentum)
[2024-12-02 01:19:16,700] Epoch 0, Loss: 0.25244189554627877
[2024-12-02 01:19:16,703] Epoch 50, Loss: 0.10834008911829712
[2024-12-02 01:19:16,706] Epoch 100, Loss: 0.07869060458003814
[2024-12-02 01:19:16,709] Epoch 150, Loss: 0.059651226064738376
[2024-12-02 01:19:16,713] Epoch 200, Loss: 0.047040575757278824
[2024-12-02 01:19:16,716] Epoch 250, Loss: 0.03829228516613208
[2024-12-02 01:19:16,719] Epoch 300, Loss: 0.03197425249958337
[2024-12-02 01:19:16,722] Epoch 350, Loss: 0.02725487460955257
[2024-12-02 01:19:16,725] Epoch 400, Loss: 0.02362811471103496
[2024-12-02 01:19:16,728] Epoch 450, Loss: 0.020773111172286265

[2024-12-02 01:19:16,732] Train: ORR (2 layer, momentum)
[2024-12-02 01:19:16,732] Epoch 0, Loss: 0.2509293047213465
[2024-12-02 01:19:16,737] Epoch 50, Loss: 0.18634828618851385
[2024-12-02 01:19:16,742] Epoch 100, Loss: 0.18462354221735988
[2024-12-02 01:19:16,747] Epoch 150, Loss: 0.182449035896937
[2024-12-02 01:19:16,753] Epoch 200, Loss: 0.17958348499909885
[2024-12-02 01:19:16,758] Epoch 250, Loss: 0.17573602881143333
[2024-12-02 01:19:16,763] Epoch 300, Loss: 0.1705756002571426
[2024-12-02 01:19:16,768] Epoch 350, Loss: 0.16372201030917066
[2024-12-02 01:19:16,774] Epoch 400, Loss: 0.15475906178111223
[2024-12-02 01:19:16,779] Epoch 450, Loss: 0.14330988027857766

```

## Výsledky:

### 1. XOR (1 skrytá vrstva):

- **Aktivácia ReLU:**
  - Výrazné zlepšenie straty (Loss) počas tréningu, až po epochu 350, kde sa strata stabilizuje na 0, čo naznačuje perfektné naučenie modelu.
  - Early stopping sa aktivovalo pri 362. epoche, čo naznačuje dostatočnú kapacitu modelu pre riešenie problému XOR.
- **Aktivácia Tanh:**
  - Strata sa zlepšila už v 73. epoche, kedy došlo k early stoppingu.
  - Model sa naučil rýchlo, čo ukazuje efektívnosť funkcie Tanh pre tento problém.
- **Aktivácia Sigmoid:**
  - Strata zostáva takmer konštantná, čo naznačuje, že Sigmoid je menej efektívny pre riešenie XOR v tejto konfigurácii. Early stopping nastalo už pri 51. epoche.
- **Mix aktivácií:**
  - Pozvoľné zlepšovanie straty, ale zlepšenie je viditeľné až po dlhšom tréningu (350+ epoch). Výsledná strata ukazuje, že model sa síce zlepšuje, ale nie tak efektívne ako pri ReLU alebo Tanh.

---

## 2. XOR (2 skryté vrstvy):

- **Aktivácia Tanh:**
  - Podobne ako pri 1 vrstve, early stopping nastalo pri 73. epoche s porovnateľným výkonom.
- **Aktivácia ReLU:**
  - Model dosiahol minimálne zlepšenie straty a pretrvávala stabilná strata okolo 0,255, čo naznačuje nedostatočné zlepšenie s touto architektúrou.

---

## 3. AND a OR:

- **AND (1 vrstva, momentum):**
  - Strata postupne klesá počas celého tréningu, pričom model dosiahol významné zlepšenie, a to z 0,25 na približne 0,036.
  - Tento model sa dobre prispôbil problému.
- **AND (2 vrstvy, momentum):**
  - Model vykazuje pomalšie zlepšovanie, no postupne sa adaptuje na problém, hoci o niečo menej efektívne než model s 1 vrstvou.
- **OR (1 vrstva, momentum):**
  - Výrazné zlepšenie straty z 0,252 na približne 0,020 počas 450 epoch.
  - Model rýchlo konverguje a ukazuje dobré prispôsobenie.
- **OR (2 vrstvy, momentum):**
  - Zlepšenie je podobné ako pri 1 vrstve, ale konvergencia je pomalšia.

---

## Stručne zhodnotenie Backpropagation

- **ReLU** je mimoriadne efektívny pre problémy ako XOR s 1 skrytou vrstvou, čo vedie k perfektnej presnosti
- **Tanh** je univerzálna a rýchlo konvergujúca aktivácia, ktorá funguje dobre aj pre XOR
- **Sigmoid** je menej efektívny pre riešenie XOR a výsledky ukazujú, že model sa ťažko optimalizuje
- **Problémy AND a OR** boli úspešne vyriešené pomocou jednej alebo dvoch vrstiev s využitím momentu. Jedna vrstva sa však ukázala ako efektívnejšia
- Modely s 2 vrstvami nepreukázali výrazné zlepšenie oproti modelom s 1 vrstvou, čo naznačuje, že pre tieto jednoduché problémy nemusí byť potrebná zvýšená komplexita



# Zhodnotenie

1. **Pre úlohu klasifikácie MNIST datasetu** je optimálnym riešením použitie algoritmu ADAM, ktorý dosiahol vysokú presnosť nad 97% a rýchlu konvergenciu v porovnaní s SGD a SGD s momentum
2. **Backpropagation algoritmus** bol úspešne implementovaný na klasických logických problémoch XOR, AND a OR
3. Použitie optimalizačných techník ako moment a nastavenie vhodnej rýchlosti učenia má významný vplyv na rýchlosť a kvalitu učenia neurónových sietí

Obe podúlohy boli úspešne splnené, pričom implementované modely a algoritmy spĺňajú požiadavky zadania a dosahujú očakávané výsledky