

Решение СЛАУ методом простой итерации

Найти решение СЛАУ $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Составим итерационный процесс в виде:

$$x^{k+1} = Bx^k + c$$

$$B = E - \mu A, \quad c = \mu b, \quad \text{где } \mu = \frac{1}{\|A\|}$$

Будем использовать $\|A\|_{\infty} = 9$.

$$\mu := \frac{1}{9}$$
$$B := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Учитывая то, что $\|B\|_{\infty} = \frac{8}{9} < 1$, итерационный процесс сходится для любого начального приближения. Пусть $x_0 = c = \mu b$:

$$x_0 := \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{7}{9} \\ 1 \end{bmatrix}$$

После прохода первой итерации получаем:

$$x1 := \begin{bmatrix} 0.7283950617 \\ 0.9506172840 \\ 1.074074074 \end{bmatrix}$$

Проверяем условие (критерий) остановки итерационного процесса:

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\| \leq \varepsilon$$

$$\frac{\|B\|_{\infty}}{1 - \|B\|_{\infty}} \|x^1 - x^0\|_{\infty} = 1.382716050 - \text{условие остановки не выполнено,}$$

поэтому переходим на следующую итерацию:

$$x2 := \begin{bmatrix} 0.816186556900000 \\ 1. \\ 1.05212620000000 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|B\|_{\infty}}{1 - \|B\|_{\infty}} \|x^2 - x^1\|_{\infty} = 0.7023319616 - \text{условие остановки не выполнено,}$$

продолжаем итерационный процесс.

...

$$x22 := \begin{bmatrix} 0.999757557200000 \\ 1.00008311700000 \\ 1.00003549600000 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|B\|_{\infty}}{1 - \|B\|_{\infty}} \|x^{22} - x^{21}\|_{\infty} = 0.0007504416000 - \text{условие остановки выполнено,}$$

итерационный процесс заканчивается.

Решение СЛАУ $Ax = b$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\tilde{x} = x^{22} = \begin{bmatrix} 0.9997575 \\ 1.0000831 \\ 1.0000354 \end{bmatrix}$$