PERTEMUAN 3-4

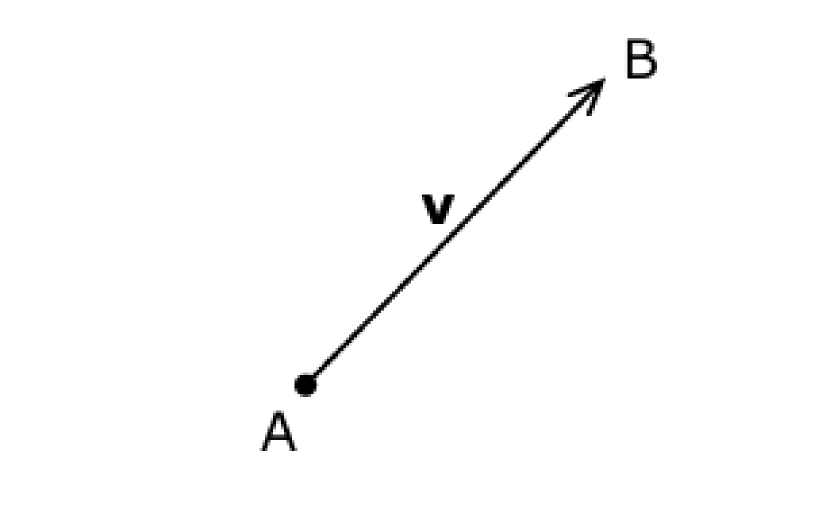
A. VEKTOR

B. MATRIKS

VEKTOR PADA BIDANG BERDIMENSI DUA DAN BERDIMENSI TIGA

Dalam bidang sains kita telah mengenal istilah besaran yang tidak mempunyai arah dan besaran yang mempunyai arah. Umumnya, besaran yang tidak mempunyai arah dikenal dengan istilah besaran skalar. Sedangkan besaran yang mempunyai arah disebut besaran vektor atau vektor.

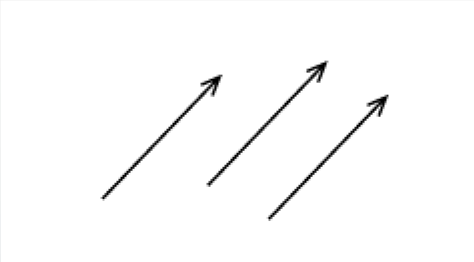
Secara geometrik, vektor dapat dinyatakan sebagai ruas garis berarah pada bidang (R2) atau ruang (R3). Tanda panah menunjukkan arah vektor, sedangkan panjang garis berarah adalah panjang vektor. Titik pangkal dari garis berarah disebut titik awal (initial point) vektor, dan titik ujung (terminal point) disebut titik ujung atau titik akhir vektor



Biasanya vektor dinyatakan secara simbolis dengan huruf kecil, seperti **u, v, w** dengan atau huruf lainnya yang dicetak tebal. Pada gambar diatas adalah sebuah vektor v yang mempunyai titik awal A dan titik ujung B dan dapat ditulis,

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$$

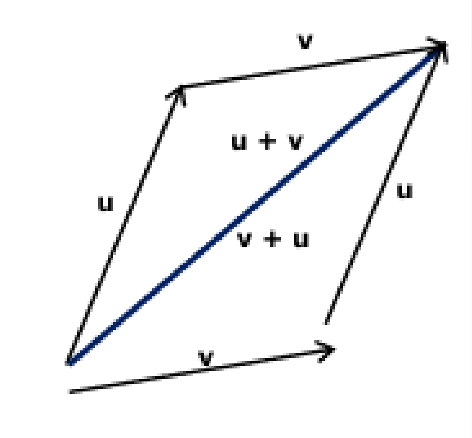
Dua buah vektor $u = (u_1, u_2)$ dan v $= (v_1, v_2)$ dikatakan ekivalen jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 = v_2$. Dengan kata lain arah dan besar $u = (u_1, u_2)$ dan v $= (v_1, v_2)$ adalah sama



Ini merupakan vektor ekuivalen, vektor yang mempunyai panjang nol disebut sebagai vektor nol dan dilambangkan

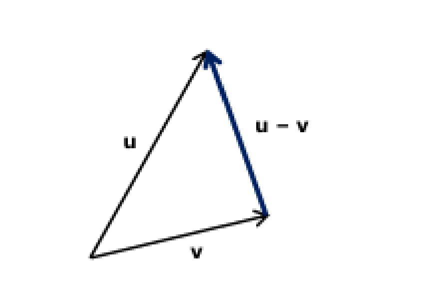
Aritmatika Vektor

- Penjumlahan Dua Vektor



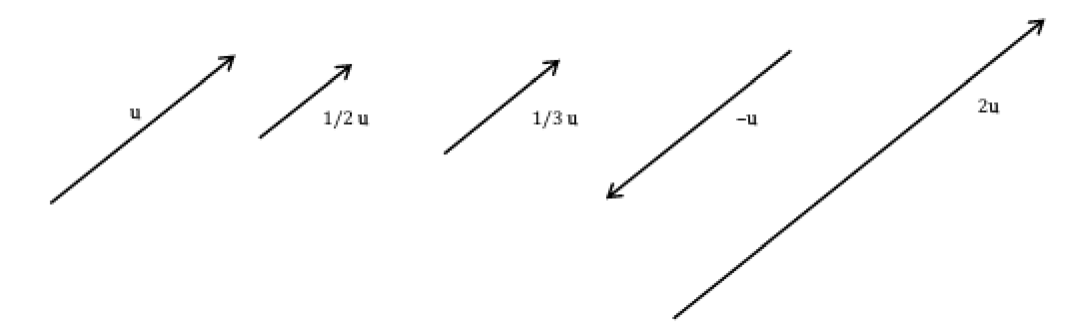
$$u + v = v + u$$

- Pengurangan Dua Vektor



$$u - v$$

- Hasilkali Skalar dengan Vektor



$$k.u, \qquad k < 0, k > 0$$

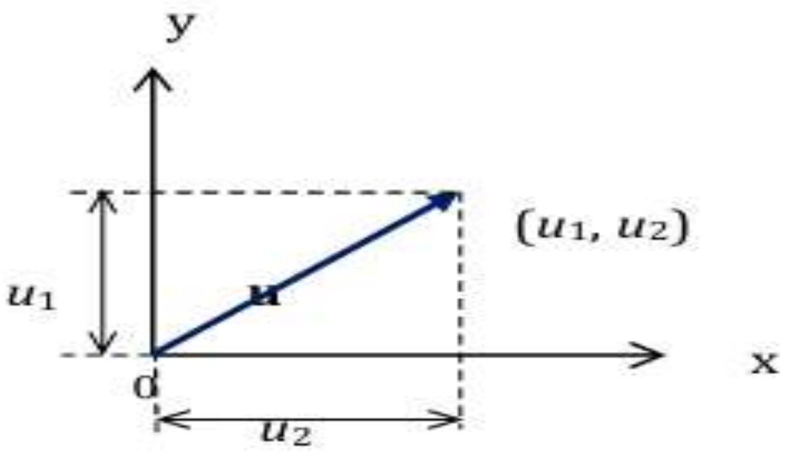
Vektor dalam Sistem Koordinat

Vektor dalam Sistem Koordinat Berdimensi 2

Misal terdapat vektor **u** dalam sistem koordinat bidang atau R^2. Jika titik awal vektor tersebut diletakkan sedemikian rupa sehingga berimpit dengan titik asal sistem koordinat dan titik akhirnya berada pada koordinat (u_1, u_2), maka koordinat (u_1, u_2) disebut sebagai komponen vektor **u** dan ditulis,

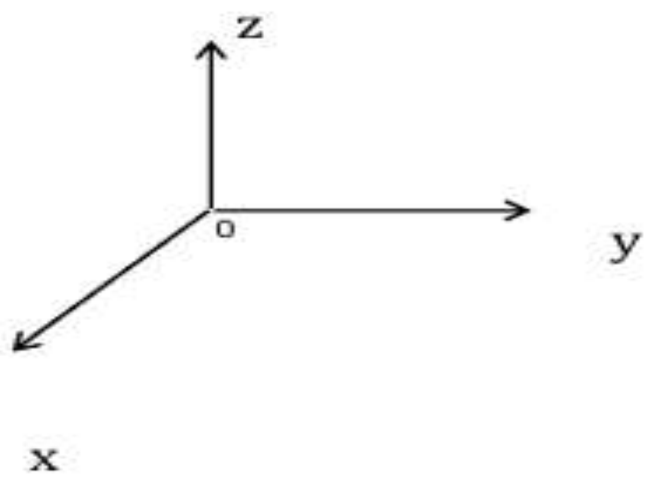
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2),$$

dan **u** disebut sebagai vektor posisi. menunjukkan sebuah vektor $\mathbf{u}(u_1, u_2)$ pada sebuah sistem koordinat berdimensi dua.

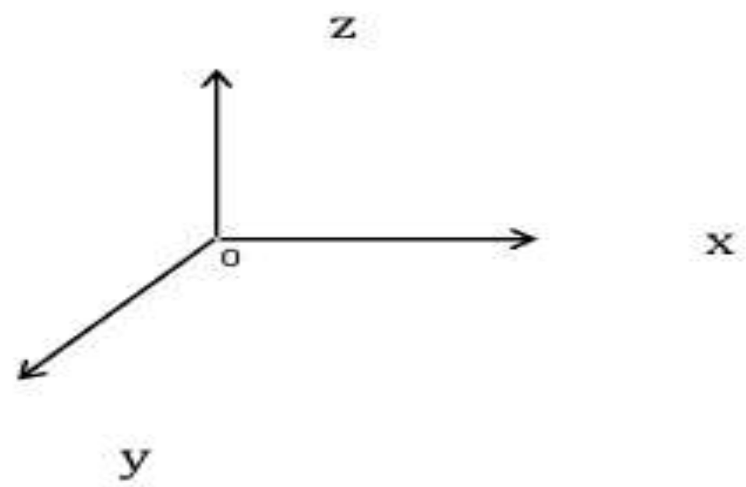


Vektor dalam Sistem Koordinat Berdimensi 3

Sistem koordinat berdimensi 3 adalah sistem koordinat yang terdiri dari tiga sumbu koordinat (*coordinate axes*) yang saling tegak lurus dan berpotongan pada titik asal (*origin*). Sumbu yang mengarah ke diri pembaca, arah kanan, dan ke atas masing-masing adalah sumbu-sumbu x, y, dan z positif. Sedangkan sumbu yang mengarah ke arah yang berlawanan adalah sumbu negatif (Gambar 1.9a). Sistem koordinat ini dikenal sebagai sistem koordinat tangan kanan (*right-handed*). Sedangkan sistem koordinat pada Gambar 3.9b dikenal dengan sistem koordinat tangan kiri (*left-handed*). Selanjutnya sistem koordinat yang akan digunakan adalah sistem koordinat tangan kanan.



(a)



(b)

contoh

Jika $\mathbf{u} = (2, 2, 5)$, $\mathbf{v} = (3, -2, -1)$, dan $k = 2$, tentukan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, dan $k\mathbf{v}$.

Vektor Posisi

Vektor yang mempunyai titik awal berimpit dengan titik asal (*origin*) disebut vektor posisi. Jika terdapat sebuah vektor yang mempunyai titik awal tidak berimpit dengan titik asal koordinat, maka kita bisa menggeser vektor tersebut sedemikian rupa sehingga titik awalnya berimpit dengan titik asal. Misal titik awal suatu vektor **u** adalah $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan titik ujungnya $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Vektor posisi **u** didapat dengan mengurangkan komponen titik P_1 dari komponen P_2 seperti yang dijelaskan pada rumus berikut.

$$\text{Vektor posisi } \mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Sifat-sifat Operasi Vektor

Teorema 1.1

Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor pada bidang (R^2) atau pada ruang (R^3); c dan k adalah skalar-skalar, maka berlaku:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

(f) $ck(\mathbf{u}) = c(k\mathbf{u}) = k(c\mathbf{u})$

(g) $(c+k)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + k\mathbf{u}$

(h) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

Panjang Vektor

Panjang (*length*) sebuah vektor dikenal dengan istilah norma (*norm*) dari vektor tersebut dan dilambangkan dengan $||\mathbf{u}||$. Sesuai dengan teorema Pythagoras, norma sebuah vektor, baik pada R^2 dan R^3 adalah sebagai berikut.

Jika **u** adalah vektor pada R^2 maka

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$

Jika **u** adalah vektor pada R^3 maka

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

Vektor Satuan

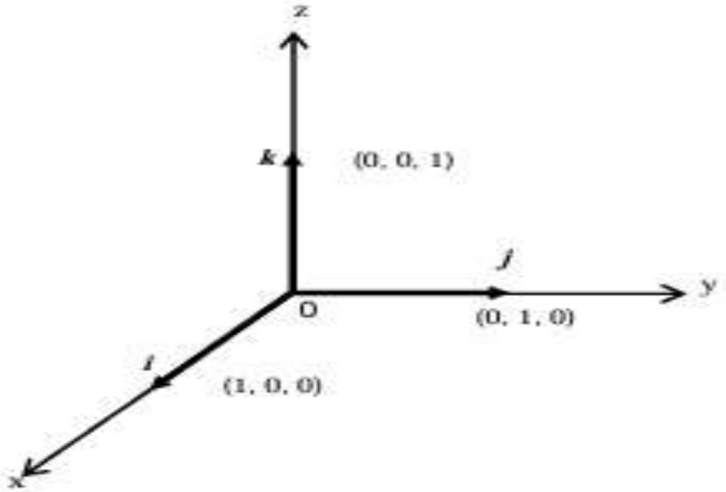
Vektor satuan (*unit vector*) adalah vektor yang mempunyai norma sama dengan satu. Secara formal vektor satuan mengikuti teorema 1.2 berikut.

Teorema 1.2

Jika **v** adalah sebuah vektor tak-nol, baik pada R^2 maupun R^3, maka

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

adalah vektor satuan. Vektor satuan yang secara umum dikenal adalah vektor satuan standar untuk R^2 dan R^3 yang disimbolkan dengan ***i, j, k***. Komponen masing-masing vektor tersebut adalah ***i*** = (1, 0, 0), ***j*** = (0, 1, 0), dan ***k*** = (0, 0, 1), seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.11.



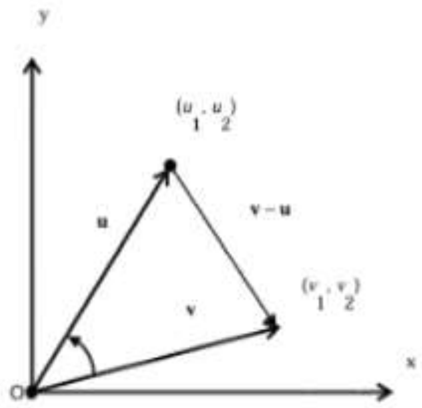
Perkalian Titik

Perkalian titik disebut juga perkalian skalar atau perkalian dalam *Euclidean*. Perkalian titik menghasilkan skalar. Misal terdapat dua vektor posisi **u** dan **v**, dan dimisalkan juga sudut yang diapit oleh kedua vektor tersebut adalah θ

Definisi 1.4

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor, baik pada R^2 maupun pada R^3 dan θ adalah sudut yang diapit oleh **u** dan **v** maka hasil kali titik, disimbolkan dengan **u.v**, didefinisikan oleh,

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \cos\theta & \text{jika } \mathbf{u} \neq 0 \text{ dan } \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & \text{jika } \mathbf{u} = 0 \text{ atau } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$



θ

Dari aturan cosinus,

$$\cos\theta = \frac{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2}{2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

$$\begin{aligned}
2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 \\
&= {u_1}^2 + {u_2}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2 \\
&= {u_1}^2 + {u_2}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 - {v_1}^2 - {u_1}^2 - {v_2}^2 - {u_2}^2 + 2u_1v_1 + 2u_2v_2 \\
&= 2u_1v_1 + 2u_2v_2 \\
\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta &= u_1v_1 + u_2v_2
\end{aligned}$$

Dari definisi 1.4, $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \mathbf{u}.\mathbf{v}$

Sehingga perkalian titik dua buah vektor di R^2 adalah $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

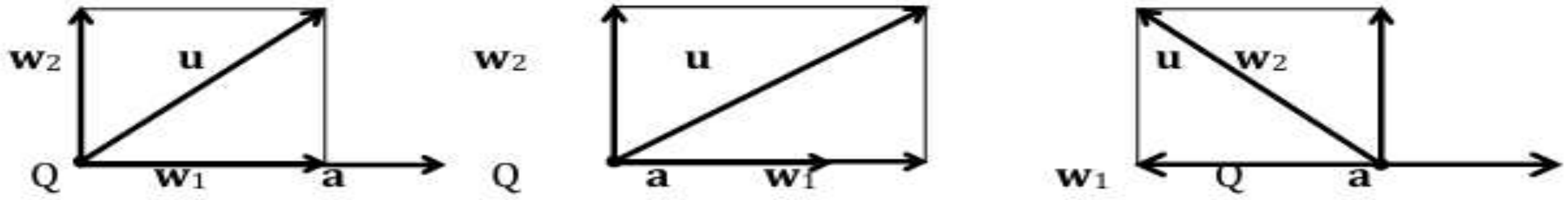
Sedangkan perkalian titik dua buah vektor di R^3 adalah $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Contoh

Jika **u** = (-1, 2, 2), **v** = (-2, 2, 1), tentukan **u** . **v** dan sudut yang diapit oleh kedua vektor tersebut!

Proyeksi Ortogonal

Jika terdapat vektor tak-nol **u** dan **a**, maka kita dapat menguraikan vektor **u** yang sejajar **a** dan tegak lurus **a**. Misal titik awal vektor **u** dan **a** diletakkan sedemikian rupa sehingga berimpit di titik Q



Gambar 1.14

Proyeksi vektor **u** sejajar dan tegak lurus **a**

Vektor $\mathbf{w_1}$ disebut sebagai proyeksi ortogonal **u** pada **a** (*orthogonal projection of* **u** *on* **a**) atau komponen vektor **u** sepanjang **a** (*vector component of* **u** *along* **a**) dan dinotasikan sebagai

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$$

Vektor $\mathbf{w_2}$ disebut sebagai komponen vektor **u** yang ortogonal terhadap **a** (*vector component of* **u** *orthogonal to* **a**).

Dari Gambar 1.14

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$$

Teorema 1.5

Jika **u** dan **a** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3, dan jika $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, maka

Komponen vektor u sepanjang a atau proja **u** adalah, $\text{proj}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$

Komponen vektor **u** yang ortogonal terhadap **a** atau ($\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u}$) adalah

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathrm{a}}\, \mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}.\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

Contoh

Jika **u** = (3, 1, -4), **a** = (5, -2, 1), tentukan komponen vektor **u** sepanjang **a** dan komponen vektor **u** yang ortogonal terhadap **a**.

PERKALIAN SILANG

Perkalian silang dari dua buah vektor menghasilkan sebuah vektor. Perkalian silang disebut juga dengan istilah perkalian vektor dan hanya berlaku untuk R^2.

Definisi 1.5

Jika **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah dua buah vektor maka hasil kali silang, yang disimbolkan dengan **u** x **v**, didefinisikan sebagai,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

Teorema 1.8

Luas bidang

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3, maka ||**u** x **v**|| adalah luas bidang yang dibatasi oleh vektor **u** dan **v**.

Contoh

Tentukan luas bidang yang dibatasi oleh **u** = (2, 1, 3) dan **v** = (4, 5, 0)

Norma dan Jarak pada Ruang Berdimensi *n* *Euclidean*.

Norma dan jarak vektor pada ruang berdimensi *n* *Euclidean* analog dengan vektor pada ruang berdimensi 2 dan 3. Norma *Euclidean* (*Euclidean norm*) untuk vektor

u = ($u1$, $u2$, . . . , un) pada ruang berdimensi *n* didefinisikan sebagai,

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}.\mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2}$$

Sedangkan jarak *Euclidean* (*Euclidean distance*) antara titik **u** = ($u1$, $u2$, . . . , un)dan titik **v** = ($v1$, $v2$, . . . , vn) pada ruang berdimensi *n* didefinisikan sebagai,

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh

Jika **u** = (2, –1, 4, 5) dan **v** = (3, 3, 1, –4) adalah vektor-vektor pada R4, tentukan norma **u**,

norma **v**, dan jarak **u** dan **v**.

Terima Kasih