

Electrodinámica Clásica. Tarea # 2

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1. Problema 2.1 de Classical Electrodynamics (tanto en la 2da como en la 3ra edición) de Jackson [1, 2].

Una carga puntual q es llevada a una posición a una distancia d desde un plano conductor infinito que está a un potencial cero. Usando el método de imágenes, encuentre:

- (a) la densidad de carga superficial inducida en el plano, y gráfíquela;
- (b) la fuerza entre el plano y la carga usando la ley de Coulomb para la fuerza entre la carga y su imagen;
- (c) la fuerza total actuando en el plano integrando $\sigma^2/2\epsilon_0$ sobre todo el plano;
- (d) el trabajo necesario para remover la carga q de su posición al infinito;
- (e) la energía potencial entre la carga q y su imagen [compare la respuesta con la de la parte (d) y discuta].
- (f) Encuentre la respuesta a la parte (d) en eV para un electrón originalmente a un angstrom de la superficie.

Solución:

De la simetría del problema, debe ser claro que el potencial Φ debe ser equivalente al producido por una carga q , junto con una carga imagen $q' = -q$ a una distancia d del lado opuesto del plano. Entonces el potencial debido a dos cargas puntuales una en d de carga q y una en $-d$ de carga $-q$ puede escribirse como:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]. \quad (1.1)$$

- (a) La densidad de carga superficial puede encontrarse con la relación¹

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S, \quad (1.2)$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (1.3)$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(z-d)}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{(z+d)}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right] \Big|_{z=0}, \quad (1.4)$$

* Correo: favio.vazquezp@gmail.com

¹ Ecuación (2.5) de Jackson [2].

Y evaluando en $z = 0$ obtenemos

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (1.5)$$

Debajo se encuentra el gráfico de la densidad de carga inducida en el plano,

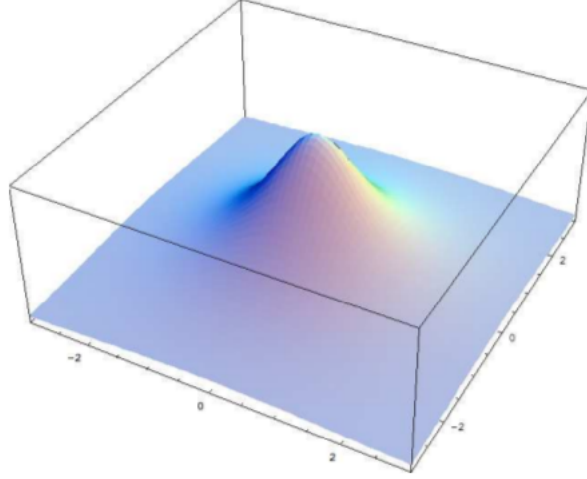


Figura 1: Densidad de carga inducida en el plano como función de la posición en el plano. El eje z etiqueta la densidad en unidades arbitrarias.

(b) Calculemos usando la ley de Coulomb la fuerza entre la carga y su imagen. Es fácil ver al usar la ecuación $Q = \int \sigma dA$ que la carga total inducida es $-q$ [3], por lo tanto podemos decir que la carga q es atraída hacia al plano, con carga inducida $-q$. Debido a que el potencial en la vecindad de q es la misma que en el problema análogo con el método de imágenes (el problema que nos planteamos de una carga $+q$ y una $-q$ sin el plano conductor), la fuerza será simplemente

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \hat{z}. \quad (1.6)$$

(c) La fuerza en el plano conductor debe ser igual y opuesta a la fuerza que calculamos en el inciso anterior. El texto nos solicita que hagamos este cálculo de forma independiente del anterior inciso, integrando $\sigma^2/2\epsilon_0$ sobre todo el plano.

La fuerza incremental por unidad de área se define como la presión electrostática,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

donde σ , que es la cantidad de proporcionalidad, es la densidad de carga inducida en el plano que calculamos en el inciso (a). Ahora, el campo eléctrico también está relacionado con σ de acuerdo a

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}, \quad (1.8)$$

y usando estas ecuaciones encontramos la relación conocida para la presión electrostática en la superficie de un conductor,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n}. \quad (1.9)$$

La fuerza total es simplemente la presión electrostática por un infinitesimal de área,

$$d\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n} dA, \quad (1.10)$$

y sustituyendo la σ que encontramos en (a), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{q^2 d^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{r dr d\theta}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z}, \\ &= \frac{q^2 d^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{du \theta}{u^{3/2}} \hat{z}, \\ &= -\frac{q^2 d^2}{16\pi \epsilon_0} \frac{1}{u^2} \Big|_{d^2}^{\infty} \hat{z}, \\ &= \frac{q^2 d^2}{16\pi \epsilon_0 d^4} \hat{z}, \\ \therefore \mathbf{F} &= \frac{1}{16\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \hat{z}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

La cual es exactamente igual y opuesta a la fuerza que encontramos en el inciso anterior, como fue anticipado.

(d) Para calcular el trabajo necesario para remover la carga q de su posición al infinito, usamos la ecuación

$$W = \int_d^{\infty} \mathbf{F}(l) \cdot d\mathbf{l} = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0} \int_d^{\infty} \frac{dz}{z^2} = -\frac{q^2}{16\pi \epsilon_0} \frac{1}{z} \Big|_d^{\infty}, \quad (1.12)$$

$$\therefore W = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 d}. \quad (1.13)$$

(e) La energía potencial entre la carga y su imagen se calcula con la ecuación

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 |r_1 - r_2|} = \frac{(q)(-q)}{4\pi \epsilon_0 (2d)}, \quad (1.14)$$

$$\therefore U = -\frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 d}. \quad (1.15)$$

Vemos entonces que la energía cinética es exactamente el doble de energía requerida para remover la carga de su posición al infinito, que fue lo que calculamos en el inciso anterior. Esto es debido a que en el sistema original, solo existe el campo eléctrico debido a la partícula q , mientras en el problema que planteamos por el método de imágenes también está la energía de la partícula imagen; es decir, el problema real solo llena medio espacio $z > 0$, mientras el problema con imágenes el campo llena todo el espacio y es simétrico sobre el origen $z = 0$. Esto no dice que, genéricamente, los cálculos de energía electrostática no son directamente transferibles entre problemas reales a problemas resueltos con el método de imágenes.

(f) Ahora calculemos, como es solicitado, la energía potencial utilizando la expresión del inciso (d) en eV para un electrón a un angstrom de la superficie.

$$W = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 d} = \frac{(e^-)^2}{16\pi (5,526 \times 10^7 \text{ e/Vm})(10^{-10} \text{ m})}, \quad (1.16)$$

$$W = 3,6 \text{ eV}. \quad (1.17)$$

Problema 2. Problema 2.2 de Classical Electrodynamics (tanto en la 2da como en la 3ra edición) de Jackson [1, 2].

Usando el método de imágenes, discuta el problema de una carga puntual q *adentro* de una esfera hueca, conectada a tierra, conductora de radio interno a . Encuentre

- (a) el potencial adentro de la esfera;
- (b) la densidad de carga superficial inducida;
- (c) la magnitud y dirección de la fuerza actuando sobre q .
- (d) ¿Hay algún cambio en la solución si la esfera es mantenida a un potencial fijo V ? ¿y si la esfera tiene una carga total Q en sus superficies internas y externas?

Solución:

Este problema es similar al discutido en la sección 2.2 de Jackson [2], solo que en ese caso la carga estaba afuera de la esfera, pero los argumentos que utilizaremos para resolver este problema son muy similares a los que se presentan en esa sección.

(a) Si colocamos la carga en el punto r , entonces, por simetría axial, la carga imagen debe estar localizada a lo largo de la dirección de r a una distancia $r' > a$. Por lo tanto, el potencial a un punto \mathbf{x} será

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (2.1)$$

Como lo explica el libro, debido a que la esfera está puesta a tierra, debe cumplirse que $\Phi(|\mathbf{x}| = a) = 0$. Y tenemos también como en el ejemplo del libro que

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{r'} \quad \text{y} \quad \frac{r}{a} = \frac{a}{r'}, \quad (2.2)$$

entonces el potencial será (utilizando la ley del coseno)

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{a}{r(x^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2x\frac{a^2}{r} \cos \gamma)^{1/2}} \right], \quad (2.3)$$

donde γ es el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{x} .

(b) Para calcular la densidad de carga superficial inducida en la esfera, calculamos la derivada normal de Φ en la superficie:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{q}{4\pi a r} \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \gamma\right)^{3/2}}. \quad (2.4)$$

(c) La fuerza, como lo expresa Jackson [2], podemos calcularla inmediatamente simplemente obteniendo la fuerza entre la carga q y su imagen q' . La distancia entre ellas es $r - r' = r(1 - a^2/r^2)$, y recordando que $q' = -aq/r$, obtenemos

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-2} \hat{r}, \quad (2.5)$$

que es igual en magnitud a la fuerza encontrada en la sección 2.2 de Jackson [2], pero hacia la dirección opuesta.

(d) Si la esfera es mantenida a un potencial fijo, el potencial dentro de la esfera está dado por el potencial Φ que obtuvimos más V , la densidad de carga superficial inducida en la superficie interna y la fuerza se mantendrán. Habrá una densidad de carga superficial uniformemente distribuida en la superficie externa.

Si la esfera tiene una carga total Q en sus superficies internas y externas, por la ley de Gauss sabemos que la carga en la superficie interna será la misma, $-q$, y por lo tanto en la superficie externa la carga será $Q + q$, por lo tanto el potencial será igual al que obtuvimos pero sumando el potencial debido a la carga $Q + q$. La densidad de carga superficial en la superficie interna no se ve afectada, pero la externa será proporcional a $Q + q$. Por último la fuerza será la misma.

Problema 3. Problema 2.3 de Classical Electrodynamics (2da edición) de Jackson [1] y 2.7 (3ra edición) de Jackson [2].

Considera un problema de potencial en el medio espacio definido por $z \geq 0$, con condiciones de frontera de Dirichlet sobre el plano $z = 0$ (y en infinito).

- (a) Escribe la función de Green apropiada $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.
- (b) Si el potencial en el plano $z = 0$ es especificado por $\Phi = V$ adentro de un círculo de radio a centrado en el origen, y $\Phi = 0$ afuera del círculo, encuentre una expresión integral para el potencial en el punto P especificado en términos de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) .
- (c) Muestre que, a lo largo del eje del círculo ($\rho = 0$), el potencial está dado por

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

- (d) Muestre que para distancias grandes ($\rho^2 + z^2 \gg a^2$) el potencial puede ser expandido en una serie de potencias en $(\rho^2 + z^2)^{-1}$, y que los términos más importantes son

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2} + \dots \right]$$

Verifica que los resultados de las partes (c) y (d) son consistentes el uno con el otro en su rango común de validez.

Solución:

(a) Este problema es similar a uno en el cual tratamos con una carga puntual y un plano conductor infinito, y utilizaremos un poco esta similitud para resolver el problema que no es presentado. La función de Green apropiada para el sistema que propone el problema, con las condiciones de frontera de Dirichlet requieren que $G_D = 0$ en la superficie. Recordemos que podemos escribir esta función como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (3.1)$$

donde la función F debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0. \quad (3.2)$$

El problema para hallar la función de Green se convierte entonces en encontrar la función F apropiada, tal que, la función de Green se haga cero en la frontera. Como mencionamos, este problema es equivalente a la situación en la que tenemos una carga puntual de carga en \mathbf{x}' , que cree un potencial $q/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, en la presencia de un conductor plano infinito en $z = 0$. Y por lo tanto la función de Green que encontraremos será idéntica en ambos casos.

Para resolver el problema de una carga q en \mathbf{x}' en la presencia de un conductor plano en $z = 0$, usaremos el método de imágenes. Colocamos una carga imagen q' en $(x', y', -z')$ tal que el potencial sea la suma de las dos cargas puntuales:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}.$$

Al aplicar la condición de frontera, que $\Phi = 0$ en $z = 0$, obtenemos²

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}}. \quad (3.3)$$

$$\therefore q' = -q. \quad (3.4)$$

Entonces encontramos que la carga imagen tiene una carga inversa a la original, y localizada en la posición opuesta a la original, lo cual tiene sentido ya que podemos ver a la superficie conductora que consideramos en el método de imágenes como un espejo. El potencial es entonces

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right].$$

Volviendo ahora a nuestro problema original sin el plano conductor ni la carga puntual, sino con una distribución de carga en la presencia de la condición de frontera de Dirichlet en $z = 0$. La solución al problema original debe encontrarse con la ecuación (1.44) de Jackson [2],

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{x}') \frac{G_D}{\partial n'} da', \quad (3.5)$$

pero ya conocemos la función de Green que debe ser usada en esta ecuación, es simplemente la solución equivalente a uno con carga puntual $q = 4\pi\epsilon_0$:

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}.$$

(b) En este inciso nos solicitan encontrar una expresión integral para el potencial en el punto P especificado en términos de coordenadas cilíndricas, en el caso en que el potencial en el plano $z = 0$ es especificado por $\Phi = V$ dentro de un círculo de radio a centrado en el origen y $\Phi = 0$ fuera de ese círculo. Para resolver este inciso podemos asumir que no hay carga en el espacio, y por lo tanto la solución con funciones de Green y condiciones a la frontera de Dirichlet para el potencial se convierte en³

$$\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{x}') \frac{G_D}{\partial n'} da', \quad (3.6)$$

donde la superficie S en este caso es una caja con un lado en el plano $z = 0$ y el los otros lados en infinito. El potencial se va a cero en el infinito, por lo tanto los lados en infinito no contribuyen a la integral. El potencial también es cero en todos lados del plano $z = 0$ afuera del círculo, por lo tanto la integral será distinta de cero solo de 0 al radio del círculo a . Entonces

$$\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \phi(\mathbf{x}') \frac{G_D}{\partial n'} \rho' d\phi' d\rho', \quad (3.7)$$

pero $\Phi = V$ adentro del círculo, por lo tanto

$$\Phi(x) = -\frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{G_D}{\partial n'} \rho' d\phi' d\rho'. \quad (3.8)$$

² $(-z')^2 = (z')^2$.

³ Ver ecuación (1.44) de Jackson [2], esta ecuación es simplemente esa pero haciendo cero la integral de la izquierda.

La normal n' es definida como apuntando afuera del volumen encerrado por lo tanto para este problema $n' = -z'$,

$$\Phi(x) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{G_D}{\partial z'} \rho' d\phi' d\rho'. \quad (3.9)$$

,
sustituyendo ahora la función de Green que encontramos en el anterior inciso tenemos

$$\Phi(x) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dz'} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \rho' d\phi' d\rho' \right].$$

Pasando ahora a coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\Phi(x) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dz'} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z + z')^2}} \rho' d\phi' d\rho' \right].$$

Y derivando,

$$\Phi(x) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{-2(z - z')}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2)^{3/2}} - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(z + z')}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z + z')^2)^{3/2}} \rho' d\phi' d\rho' \right].$$

Ahora evaluamos en $z' = 0$ debido a que nuestra superficie de integración, que es en el sistema primado, está contenido en este plano, y entonces

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + z^2)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

(c) Debemos ahora probar que a lo largo del eje del círculo ($\rho = 0$), está dado por

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right). \quad (3.11)$$

Si hacemos $\rho = 0$ en la expresión para el potencial que encontramos en el anterior inciso, nos queda

$$\Phi = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.12)$$

$$\Phi = \frac{zV}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.13)$$

$$\Phi = zV \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.14)$$

y haciendo el cambio de variable $u = \rho'^2 + z^2 \Rightarrow du = 2\rho' d\rho'$,

$$\Phi = \frac{zV}{2} \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}}, \quad (3.15)$$

$$\Phi = -zV \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{z^2}^{a^2+z^2}, \quad (3.16)$$

$$\Phi = V \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]. \quad (3.17)$$



(d) Por último hay que mostrar que para distancias grandes, i.e. $\rho^2 + z^2 \gg a^2$, el potencial puede ser expandido en series de potencia para $(\rho^2 + z^2)^{-1}$, y que los términos más importantes de esta expansión son

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8\rho^2 + z^2)^2} + \dots \right], \quad (3.18)$$

y validar la consistencia de este resultado con lo obtenido en el anterior inciso en su rango común de validez. Recordemos la expresión que encontramos en el inciso (b) para el potencial,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + z^2)^{3/2}}, \quad (3.19)$$

primero viendo que el problema tiene simetría azimutal, podemos hacer el cambio de variables $\phi' \rightarrow \phi' + \phi$, y obtener

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi' + z^2)^{3/2}}, \quad (3.20)$$

ahora factorizando $(\rho^2 + z^2)^{3/2}$ nos queda

$$\Phi = \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho' d\rho' d\phi' \left(1 + \frac{\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \theta'}{\rho^2 + z^2} \right)^{-3/2}. \quad (3.21)$$

De acuerdo a la expansión en la serie binomial tenemos que

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots, \quad (3.22)$$

por lo tanto nos queda al expandir el término en la integral del potencial resulta (quedándonos hasta segundo orden)

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho' d\rho' d\phi' & \left[1 - \frac{3}{2}(\rho^2 + z^2)^{-1}(\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi') \right. \\ & \left. + \frac{15}{8}(\rho^2 + z^2)^{-2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ahora podemos integrar término a término

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho' d\rho' d\phi' \\ &\quad - \frac{3}{2} (\rho^2 + z^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho' d\rho' d\phi' [\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'] \\ &\quad + \frac{15}{8} (\rho^2 + z^2)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho' d\rho' d\phi' [\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'] + \dots,\end{aligned}$$

que resulta luego de integrar y evaluar los límites de integración en

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ [\pi a^2] - \frac{3}{2} (\rho^2 + z^2)^{-1} \left[\frac{\pi}{2} a^4 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8} (\rho^2 + z^2)^{-2} \left[2\pi \frac{a^6}{6} + 4\pi \rho^2 \frac{a^4}{4} \right] + \dots \right\},\end{aligned}$$

y con un poco de manipulación algebraica llegamos a

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2} + \dots \right]. \quad (3.23)$$



Por último, debemos verificar que esta ecuación que acabamos de obtener sea equivalente a la que encontramos en el inciso anterior, es decir a lo largo del eje del círculo ($\rho = 0$). Entonces haciendo $\rho = 0$ en (3.23) obtenemos

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{1}{z^2} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{z^2} + \frac{5}{8} \frac{a^4}{z^4} + \dots \right], \quad (3.24)$$

$$\Phi = V \left[\frac{a^2}{2z^2} - \frac{3}{8} \frac{a^4}{z^4} + \frac{5}{16} \frac{a^6}{z^6} + \dots \right], \quad (3.25)$$

$$\therefore \Phi = V \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{2z^2} - \frac{3}{8} \frac{a^4}{z^4} + \frac{5}{16} \frac{a^6}{z^6} + \dots \right) \right], \quad (3.26)$$

y recordando la expansión $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$, donde $x \rightarrow a^2/z^2$, nos queda

$$\Phi = V \left[1 - \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right] = V \left[1 - \left(\frac{a^2 + z^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right] = V \left[1 - \left(\frac{(a^2 + z^2)^{-1/2}}{z^{-1}} \right) \right],$$

$$\therefore \Phi = V \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]. \quad (3.27)$$



Problema 4. Problema 2.5 de Classical Electrodynamics (2da edición) de Jackson [1] y 2.9 (3ra edición) de Jackson [2].

Una concha conductora, aislada y esférica de radio a está en un campo eléctrico uniforme E_0 . Si la esfera es cortada en dos hemisferios por un plano perpendicular al campo, encuentre la fuerza requerida para prevenir que los hemisferios se separen

- (a) si la concha no tiene carga;
- (b) si la carga total en la concha es Q .

Solución:

Este problema es muy similar al que se discute en la sección 2.5 de Jackson [2]. En esta sección el texto calcula la densidad de carga superficial σ inducida en una esfera de radio a en un campo eléctrico uniforme E_0 . Este resultado es muy importante ya que la ecuación que utilizaremos para encontrar la fuerza solicitada en cada caso, mediante la presión electrostática, requiere conocer el valor de σ . Aunque no calcularemos todo como lo hace el texto, vale la pena recordar cómo calcula esta σ .

(a) Alineamos el eje z en la dirección del campo eléctrico. Como hace el texto, para encontrar el potencial afuera de la esfera colocamos una carga en $z = -R$ y una en $z = R$ con cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente, y dejamos que R y Q se acerquen a infinito con Q/R^2 constante. La respuesta de la esfera puede representarse con dos cargas imágenes $-Qa/R$ y $+Qa/R$ en la esfera en $-a^2/R$ y a^2/R respectivamente. El potencial afuera en el caso de que la esfera no tenga carga en el campo eléctrico uniforme es el potencial debido a estas cuatro cargas:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} + \frac{a/R}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{R^2} - 2a^2 \frac{r}{R} \cos \theta}} - \frac{a/R}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{R^2} + 2a^2 \frac{r}{R} \cos \theta}} \right],$$

en el límite cuando $R \gg r$, y reconociendo a E_0 como $2Q/4\pi\epsilon_0 R^2$, luego de un poco de cálculo, encontramos que la distribución superficial de carga de la esfera es

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (4.1)$$

Si la esfera es cortada en dos hemisferio en ángulo polar $\theta = \pi/2$, utilizando la definición de presión electrostática, la fuerza que siente el hemisferio inferior será

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2\epsilon_0} \int \sigma^2 \hat{r} da, \quad (4.2)$$

sustituyendo el valor para σ que encontramos y la definición del diferencial de área en coordenadas esféricas

$$\mathbf{F} = \hat{k} \frac{a^2}{2\epsilon_0} \int_0^2 \pi \int_{\pi/2}^{\pi} (3\epsilon_0 E_0 \cos \theta)^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{F} = \hat{k} 9\pi\epsilon_0 E_0^2 a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta, \quad (4.4)$$

$$\therefore \mathbf{F} = -\frac{9}{4}\pi\epsilon_0 E_0^2 a^2 \hat{k}, \quad (4.5)$$

y por lo tanto la fuerza necesaria para mantener al hemisferio inferior en su lugar debe ser igual y en dirección opuesta,

$$\mathbf{F} = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 E_0^2 a^2 \hat{k}. \quad (4.6)$$

Debido a la simetría del problema, la fuerza necesaria para mantener el hemisferio superior en lugar debe ser igual y opuesta a la encontrada.

(b) Si la esfera tiene una carga total Q , esta se distribuirá uniformemente en la esfera como una carga adicional a la inducida, y utilizando argumentos similares a los del pasado inciso, encontramos

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta + \frac{Q}{4\pi a^2}. \quad (4.7)$$

De nuevo la fuerza que sentirá el hemisferio inferior luego del corte será:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2\epsilon_0} \int \sigma^2 \hat{r} da, \quad (4.8)$$

sustituyendo el valor para σ que encontramos y la definición del diferencial de área en coordenadas esféricas

$$\mathbf{F} = \hat{k} \frac{a^2}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(9\epsilon_0^2 E_0^2 \cos^2 \theta + 6\epsilon_0 E_0 \cos \theta \frac{Q}{4\pi a^2} + \frac{Q^2}{16\pi^2 a^2} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi. \quad (4.9)$$

El primer término representa la fuerza en las cargas inducidas debido al campo externo y al campo de las cargas inducidas. El segundo término representa la fuerza en la carga Q debida al campo externo. El tercer término representa la fuerza de Q en sí misma. Hay que destacar que la fuerza del campo externo en la carga puntual Q no tenderá a separar el hemisferio, por lo tanto como queremos la fuerza necesaria para que no se separen los hemisferios, despreciamos el término central y nos queda:

$$\mathbf{F} = \hat{k} \frac{a^2}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(9\epsilon_0^2 E_0^2 \cos^2 \theta + \frac{Q^2}{16\pi^2 a^2} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi. \quad (4.10)$$

Integrando obtenemos

$$\mathbf{F} = -\hat{k} \left[\frac{9}{4}\pi a^2 \epsilon_0 E_0^2 + \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 a^2} \right]. \quad (4.11)$$

Por lo tanto la fuerza necesaria para mantener el hemisferio inferior en su lugar debe ser igual y en dirección opuesta:

$$\mathbf{F} = \hat{k} \left[\frac{9}{4}\pi a^2 \epsilon_0 E_0^2 + \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 a^2} \right]. \quad (4.12)$$

De nuevo, la fuerza en el hemisferio superior será igual y opuesta a la encontrada.

Problema 5. Problema 2.6 de Classical Electrodynamics (2da edición) de Jackson [1] y 2.10 (3ra edición) de Jackson [2].

Un capacitor de placas paralelas grande está hecho de dos láminas conductoras planas con una separación D , una de ellas tiene un bulto semiesférico de radio a en su superficie interna ($D \gg a$). El conductor con el bulto es puesto a un potencial cero, y el otro conductor es a un potencial tal que, lejos del bulto, el campo eléctrico entre las placas es E_0 .

- (a) Calcule la densidad de carga superficial en un punto arbitrario del plano y sobre el bulto, y esboce su comportamiento como una función de la distancia (o ángulo).
- (b) Muestre que la carga total en el bulto tiene la magnitud $3\pi\epsilon_0 E_0 a^2$.
- (c) Si, en cambio de tener la otra lámina a un potencial diferente, una carga puntual q es colocada directamente arriba del bulto semiesférico a una distancia d de su centro, muestre que la carga inducida sobre el bulto es

$$q' = -q \left[1 - \frac{d^2 - a^2}{d\sqrt{d^2 + a^2}} \right]$$

Solución:

Si asumimos que los planos son infinitos y muy lejos el uno del otro, vemos que el sistema puede aproximarse por una esfera conectada a tierra en un campo eléctrico uniforme (damos por hecho que el propósito de la placa no conectada a tierra es causar que el campo eléctrico entre los planos sea constante y uniforme). Por lo tanto, el potencial eléctrico entre está dado por la ecuación (2.14) de Jackson [2]:

$$\Phi = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (5.1)$$

En el bulto, la densidad de carga superficial es simplemente la dada por la ecuación (2.15) de Jackson [2], y usada en los anteriores problemas,

$$\sigma_{bulto} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (5.2)$$

Para encontrar la densidad de carga superficial en el plano (que localizamos en $z = 0$), necesitamos convertir el potencial entre las placas a coordenadas cartesianas, si recordamos que $z = r \cos \theta$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi &= -E_0 r \cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ &= -E_0 z \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right), \end{aligned}$$

y entonces

$$\sigma_{plano} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (5.3)$$

$$\sigma_{plano} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right). \quad (5.4)$$

Debajo están graficadas las densidades de carga superficial tanto sobre el bulto como sobre el plano,

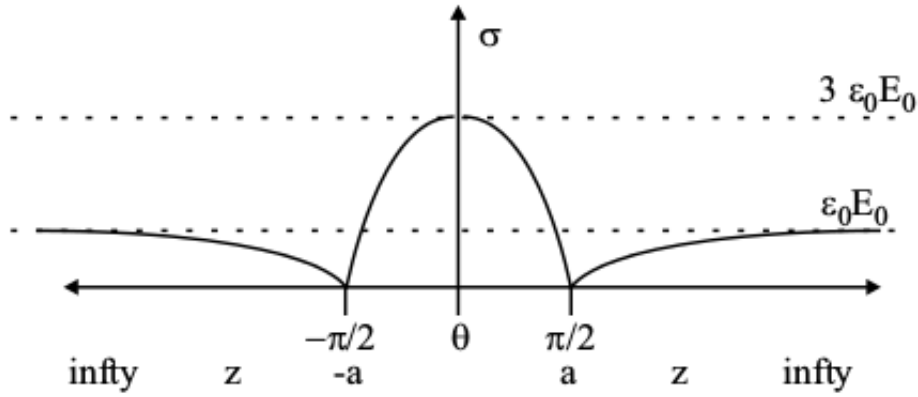


Figura 2: Esbozo de la densidad de carga superficial tanto para el bulto como para el plano. La zona central, donde σ tiene un mayor valor corresponde al bulto, y la de la izquierda y derecha al plano. Otro dato importante es que en la punta del bulto, la densidad de carga superficiales tres veces mayor que en el plano, sin importar el tamaño del bulto. El gráfico está hecho en unidades de $\epsilon_0 E_0$.

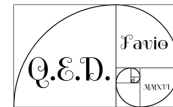
(b) Para calcular la carga total en el bulto, integraremos la carga de densidad superficial sobre el área total del bulto,

$$\begin{aligned}
 Q &= \int 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta ds \\
 &= 3\epsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= 3a^2 \epsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi,
 \end{aligned}$$

haciendo ahora el cambio de variable $u = \sin \theta$, $du = \cos \theta$,

$$\begin{aligned}
 Q &= 3a^2 \epsilon_0 E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 u du d\phi \\
 &= 3a^2 \epsilon_0 E_0 \frac{1}{2} 2\pi,
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore Q = 3\pi a^2 \epsilon_0 E_0}. \quad (5.5)$$



(c) Si ahora en vez de tener otra lámina a un diferente potencial, colocamos una carga puntual q directamente arriba del bulto a una distancia d del centro, el problema se resuelve haciendo uso del método de imágenes, en el cual colocamos dos cargas afuera de una esfera conductora con carga neta cero. La geometría que utilizaremos, es colocar las cargas

originales q y $-q$ en $z = d$ y $z = -d$, respectivamente. Las cargas imágenes $-q\frac{a}{d}$ y $q\frac{a}{d}$ las colocaremos en $z = \frac{a^2}{d}$ y $z = -\frac{a^2}{d}$ respectivamente. El nuevo sistema se muestra debajo,

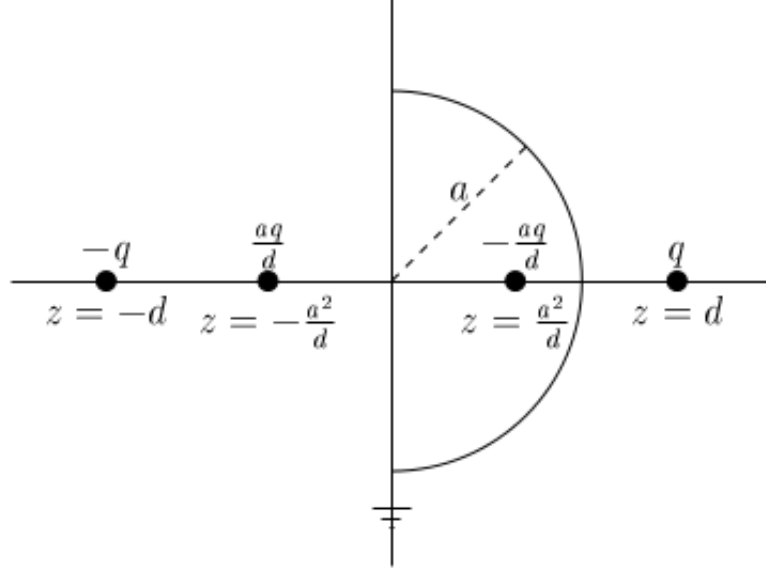


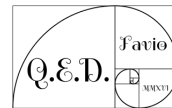
Figura 3: Disposición de cargas y geometría para el sistema del inciso (c).

Utilizando la ecuación (2.5) de Jackson [2] y el principio de superposición encontramos que la densidad de carga superficial sobre el bulto es ahora

$$\sigma_{bulto} = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{a}{d} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{d^2} + 2\frac{a}{d} \cos \theta\right)^{3/2}} \right]. \quad (5.6)$$

La carga q' inducida sobre el bulto es, con $z = \cos \theta$, $u = 1 + \frac{a^2}{d^2}$ y $v = 2\frac{a}{d}$,

$$\begin{aligned} q' &= 2\pi a^2 \frac{1}{4\pi a^2} \frac{a}{d} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \left[\int_0^1 \frac{dz}{(u - vz)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{dz}{(u + vz)^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{q}{2} \frac{a}{d} \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \left\{ \left[\frac{2}{v\sqrt{u - vz}} \right]_0^1 - \left[-\frac{2}{v\sqrt{u + vz}} \right]_0^1 \right\} \\ &= q \left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2}}} - \frac{d^2}{d^2 - a^2} \right] \\ &= q \left(\frac{d^2 - a^2}{d^2} \right) \left(\frac{d^2}{d^2 - a^2} \right) \left[\frac{d^2 - a^2}{d\sqrt{d^2 + a^2}} - 1 \right] \\ &\quad \boxed{\therefore q' = -q \left[1 - \frac{d^2 - a^2}{d\sqrt{d^2 + a^2}} \right]} \end{aligned} \quad (5.7)$$



Referencias

- [1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2da edición. John Wiley and Sons, Inc. 1975.
- [2] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.
- [3] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4ta edición, Pearson Education, 2013.