Universidad Nacional Autónoma de México

Electrodinámica Clásica

Semestre 2016-II

Tarea # 3. Campos Multipolares.

Autor:
Favio Vázquez†

†favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 1. Problema 2.1 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestre que el campo eléctrico en el eje polar de un dipolo $\mathbf{p}$ es $2\mathbf{p}/z^3$, mientras que en el plano ecuatorial es $-\mathbf{p}/r^3$. Use este argumento elemental para mostrar, resolviendo el dipolo en dos componentes, que el campo en un punto arbitrario es

$$E(r,\theta) = \frac{p(2\cos\theta\mathbf{e_r} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_\theta)}{r^3}$$

Solución:

Para calcular el campo eléctrico en el eje polar proponemos la siguiente geometría,

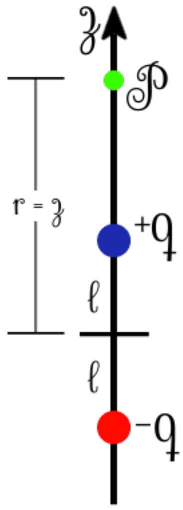


Figura 1: Campo eléctrico de un dipolo en el eje polar.

y mediremos el campo en un punto P a una distancia z del origen. El potencial eléctrico en el punto P debido a las cargas q y $-q$ será

$$\Phi = \frac{q}{r_{+q}} - \frac{q}{r_{-q}}, \tag{1.1}$$

$$\Phi = \frac{q}{(z+l)} - \frac{q}{(z-l)}, \tag{1.2}$$

y utilizando el hecho de que[1]

$$E_{ep} = -\operatorname{grad}\Phi, \tag{1.3}$$

vemos que

$$E_{ep} = \frac{q}{(z-l)^2} - \frac{q}{(z+l)^2}. \tag{1.4}$$

Que podemos escribir como

$$E_{ep} = \frac{q}{z^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{l}{z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{l}{z}\right)^2}\right], \tag{1.5}$$

[1] ep = eje polar.

y asumiendo que $z \gg l$ podemos expandir en series de Maclaurin obteniendo

$$E_{ep} = \frac{q}{z^2}\left[\left(1 + \frac{2l}{z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2l}{z} + \dots\right)\right] \tag{1.6}$$

$$E_{ep} = \frac{\cancel{q}}{\cancel{z}^2} + \frac{q2l}{z^3} - \frac{\cancel{q}}{\cancel{z}^2} + \frac{q2l}{z^3}, \tag{1.7}$$

$$\therefore E_{ep} = \frac{4ql}{z^3}, \tag{1.8}$$

y ahora recordando que $p = 2ql$, y que $\mathbf{E}$ es paralelo a $\mathbf{p}$, encontramos que

$$\boxed{\mathbf{E}_{ep} = \frac{2\mathbf{p}}{z^3}}. \tag{1.9}$$

Ahora para el plano ecuatorial proponemos la siguiente geometría,

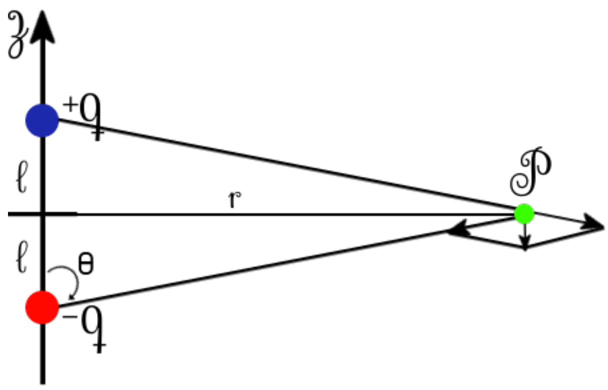


Figura 2: Campo eléctrico de un dipolo en el plano ecuatorial.

En este caso el campo eléctrico en el punto P a una distancia r del origen, ubicado en el plano ecuatorial podemos escribirlo como[2]

$$E_{pe} = \frac{q}{(r^2 + a^2)} + \frac{q}{(r^2 + a^2)} = 2\frac{q}{(r^2 + a^2)}, \tag{1.10}$$

ahora el campo resultante E en la dirección vertical se cancela por la simetría del problema, manteniéndose solo la parte horizontal, es decir (ver figura (2))

$$E_{pe} = \frac{2q}{(r^2 + a^2)} \cos\theta, \tag{1.11}$$

y viendo la figura (2) vemos que podemos escribir

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{HIP}} = \frac{l}{(r^2 + a^2)^2}, \tag{1.12}$$

[2] pe = plano ecuatorial.

entonces

$$E_{pe} = \frac{2q}{(r^2 + a^2)} \frac{l}{(r^2 + a^2)^2} = \frac{2ql}{(r^2 + a^2)^{3/2}}, \tag{1.13}$$

que podemos escribir como

$$E_{pe} = \frac{2ql}{r^3} \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right), \tag{1.14}$$

y en el límite cuando $r \gg l \to l^2/r^2 \approx 0$,

$$\therefore E_{pe} = \frac{2ql}{r^3}, \tag{1.15}$$

y recordando que $p = 2ql$ y que el momento dipolar va en sentido de la $-z$, que es el sentido opuesto del campo eléctrico (ver figura (2)) nos queda

$$\boxed{\mathbf{E}_{pe} = -\frac{\mathbf{p}}{r^3}}. \tag{1.16}$$

Ahora usando estos resultados podemos demostrar la ecuación solicitada. El campo eléctrico en un punto P arbitrario será la superposición del campo en el eje polar de la componente $p_{\|} = p\cos\theta$, y el campo en el plano ecuatorial de la componente $p_{\perp} = p \operatorname{sen}\theta$, esto se puede ver en la figura (3).

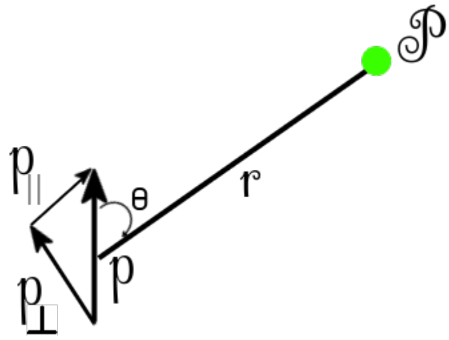


Figura 3: Campo eléctrico de un dipolo en un punto arbitrario del espacio.

$$\mathbf{E}(r,\theta) = \frac{2p_{\|}}{r^3}\mathbf{e}_r + \frac{p_{\perp}}{r^3}\mathbf{e}_\theta, \tag{1.17}$$

donde el signo negativo del campo en el plano ecuatorial se cancela por el hecho de que, genéricamente, $\mathbf{e}_\theta$ va en el sentido opuesto de $\mathbf{p}$, entonces utilizando la figura (3) vemos que

$$\boxed{\mathbf{E}(r,\theta) = \frac{p}{r^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_r + \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_\theta)}. \tag{1.18}$$

Problema 2. Problema 2.2 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

El campo magnético de la Tierra es aproximadamente el de un dipolo. Calcule el momento dipolar magnético usando el hecho de que la componente horizontal del campo de la Tierra en su superficie es aproximadamente 0,23 G a una latitud magnética de 40°.

Solución:

Ya que podemos aproximar el campo magnético de la Tierra como un dipolo, y la geometría de los campos externos de un dipolo eléctrico y magnético es la misma, podemos utilizar las ecuaciones que obtuvimos en el anterior problema, solamente reemplazando $\mathbf{p}$ por $\mathbf{m}$ y $\mathbf{E}$ por $\mathbf{B}$. La componente horizontal, asumiendo una Tierra perfectamente esférica, es simplemente la componente $\mathbf{e}_\theta$; y recordando que el ángulo de latitud θ_l se mide desde el ecuador, podemos escribir[3]

$$B_{\text{horizontal}} = \frac{m\cos\theta_l}{R_t^3}, \tag{2.1}$$

donde R_t es el radio de la tierra y θ_l se mide de acuerdo a la siguiente figura

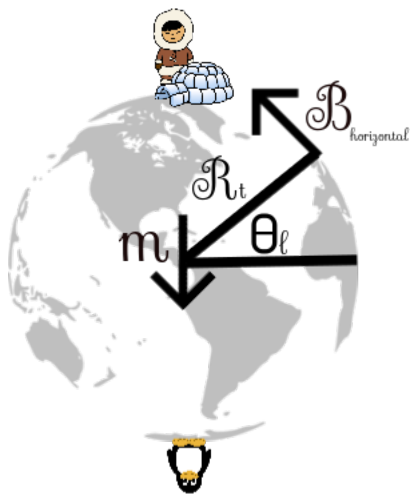


Figura 4: Campo magnético de la tierra. El dipolo magnético apunta hacia la Antártica con los pingüinos.

Debido a que el radio de la tierra es aproximadamente $R_t = 6{,}37 \times 10^8$ cm, resolviendo (2.1) para m nos queda,

$$\boxed{m = \frac{(0{,}23\ \text{G})(6{,}37\times 10^8\ \text{cm})^3}{\cos 40^\circ} = 7{,}8\times 10^{25}\ \text{G cm}^3}. \tag{2.2}$$

El dipolo magnético de la tierra apunta hacia la Antártica y por lo tanto las líneas del campo magnético retornan hacia el Ártico (con los esquimales) en el norte de la superficie de la Tierra.

[3] Ver ecuación (1.16).

Problema 3. Problema 2.3 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestre que el momento dipolar eléctrico de un sistema de cargas es independiente de la elección del origen si el sistema tiene carga neta igual a cero.

Solución:

Podemos imaginarnos la geometría del sistema colocando una colección de cargas q_α a una distancia r'_α del origen original O, y a una distancia $R'_\alpha = r'_\alpha - r_O$ del otro origen que llamamos O', y donde r_O es la distancia entre los dos orígenes, representada en la siguiente figura

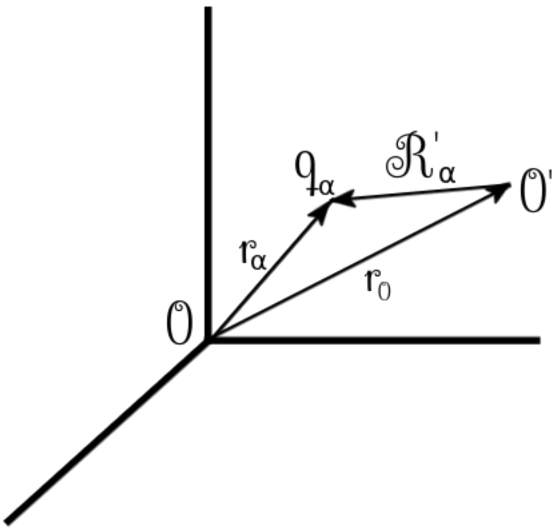


Figura 5: Geometría de una colección de cargas q_α con respecto a dos orígenes diferentes.

Según la ecuación (2.22) de Marion y Heald [1], el momento dipolar del sistema de cargas es

$$\mathbf{p} = \sum_\alpha q_\alpha r'_\alpha, \tag{3.1}$$

y si expresamos los vectores de posición en términos del origen O', tenemos

$$r'_\alpha = r_O + R'_\alpha, \tag{3.2}$$

y luego

$$\mathbf{p} = \sum_\alpha = q_\alpha(r_O + R'_\alpha) = r_O \sum_\alpha q_\alpha + \sum_\alpha q_\alpha R'_\alpha, \tag{3.3}$$

pero si el sistema tiene carga neta igual a cero entonces $\sum_\alpha q_\alpha = 0$, y el primer término de la ecuación anterior se hace cero, y por lo tanto el momento dipolar es independiente de la posición de r_O del origen. Podemos decir entonces que el momento dipolar de un sistema de cargas es independiente de la elección del origen del sistema, siempre y cuando el sistema tenga una carga neta igual a cero.

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 4. Problema 2.3 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestre que la fuerza en un dipolo eléctrico es $\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{E}$. Luego considere la interacción de una carga q y un dipolo $\mathbf{p}$ que están a una distancia r, con el dipolo orientado perpendicular a la línea que los une. Calcule la fuerza (vectorial)

(a) en q debido a **p**,

(b) en **p** debido a q.

Si tus resultados violan la tercera ley de Newton, inténtalo de nuevo.

Solución:

Problema 5. Problema 2.5 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestra que un dipolo finito simple (cargas $\pm q$ localizadas en $z = \pm l/2$) tiene un momento cuadrupolar cero con respecto a su centro como origen.

Solución:

Problema 6. Problema 2.6 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Una carga $q_1 = +2e$ está localizada en el origen y una carga $q_2 = -e$ está localizada en el punto $(x, y) = (1, 0)$. Calcule el potencial en los puntos $(0, 5)$ y $(5, 0)$ en las siguientes maneras:

(a) Mediante un cálculo directo de q/R para cada carga,

(b) Considerando un término de una expansión multipolar:

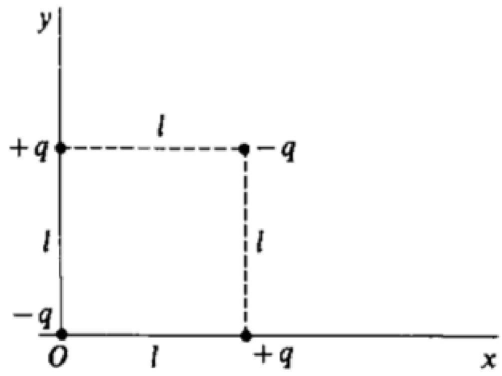
- De dos términos,
- De tres términos.

Discute la diferencia en las tasas de convergencia hacia los valores exactos para los dos diferentes puntos del campo.

Solución:

Problema 7. Problema 2.7 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Computa el tensor cuadrupolar para la siguiente distribución de cargas:



Diagonaliza el tensor mediante una rotación de coordenadas y encuentra el momento cuadrupolar.

Solución:

Problema 8. Problema 2.12 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

La densidad de carga lineal de un anillo de radio a está dada por

$$\lambda = \frac{q}{a}(\cos\phi - \operatorname{sen} 2\phi)$$

(a) Encontrar el momento monopolar, dipolar y cuadrupolar del sistema.

(b) Calcular el potencial en un punto arbitrario del espacio, preciso hasta términos en q/r^3.

Solución:

Referencias

[1] J. Marion, M. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, 2da edición, Academic Press, 1965.