Universidad Nacional Autónoma de México

Electrodinámica Clásica

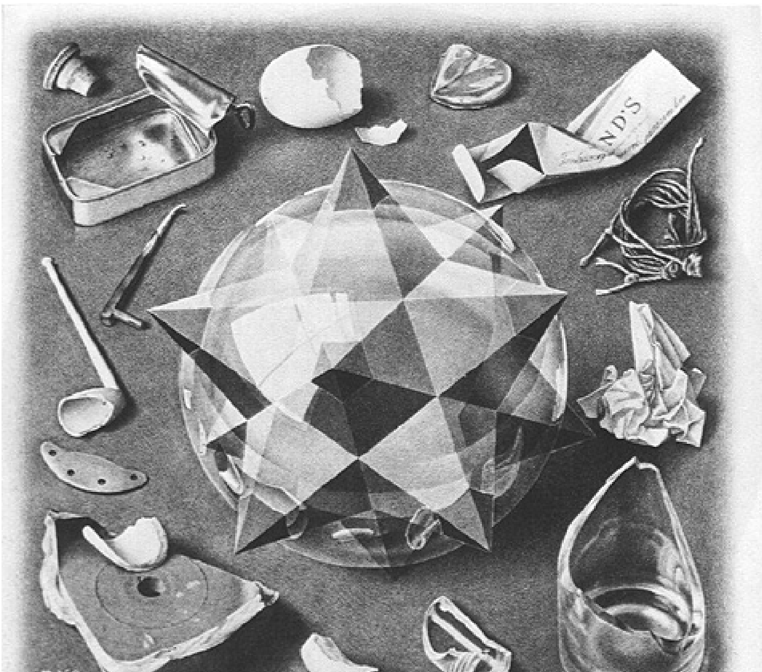
Semestre 2016-II

19 de mayo de 2016

# Tarea # 10.
# Sistemas radiativos, campos multipolares y radiación.

*Autor:*

Favio Vázquez†



†favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

# Problema 1. Problema 9.2 de Classical Electrodynamics de Jackson [1].

Un cuadrupolo que radía consiste en un cuadrado de radio $a$ con cargas $\pm q$ en esquinas alternantes. El cuadrado rota con velocidad angular $\omega$ al rededor de un eje normal al plano del cuadrado y a través de su centro. Calcula los momentos cuadrupolares, los campos de radiación, la distribución angular de la radiación, y la potencia radiada total, todo en la aproximación de longitud de onda grande. ¿Cuál es la frecuencia de la radiación?

Solución:

Lo primero que podemos ver antes de hacer cualquier cálculo es que el momento dipolar eléctrico se hará cero para la configuración en cuadrado que tenemos, ya que podemos pensar que tenemos dos dipolos iguales antiparalelos el uno al otro. También por lo aprendido en la sección 9.3 de Jackson [1] vemos que el momento dipolar magnético también se hace cero debido a que un cuadrado que rota con carga neta igual a cero, no tiene corriente neta fluyendo. Entonces la radiación estará dominada por el momento eléctrico dipolar. Para calcular este, nos apoyamos de nuevo en la sección 9.3 de Jackson [1]. Escojamos el eje $z$ como eje de rotación del cuadrado y en el centro de coordenadas en el centro del cuadrado hagamos $t = 0$ de manera que para en una de las cargas de $+q$ se cumpla $\phi = \omega t$. Para calcular el momento cuadrupolar eléctrico necesitamos conocer la distribución de carga está que en este caso está dada por[1]

$$
\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r},t) = {} & q\delta(z)\delta(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t) - q\delta(z)\delta(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t) \\
& + q\delta(z)\delta(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y + \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t) - q\delta(z)\delta(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y + \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t),
\end{aligned}
$$

que podemos escribir como

$$
\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r},t) = q\delta(z) \Big[ & \delta(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t) - \delta(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t) \\
& + \delta(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y + \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t) - \delta(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t)\delta(y + \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\omega t) \Big].
\end{aligned}
$$

El tensor de momento cuadrupolar viene dado por la ecuación (9.41) de Jackson [1]

$$
Q_{\alpha,\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha,\beta})\rho(\mathbf{r},t)dx^3. \tag{1.1}
$$

Componente a componente este tensor es, (nos ayudamos con Wolphram Alpha para las integrales)[2]

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= \int (2x^2 - y^2 - z^2)\rho(\mathbf{r},t)dx^3 \\
&= \int 2x^2\rho(\mathbf{r},t)dx^3 - \int y^2\rho(\mathbf{r},t)dx^3 - \cancelto{0}{\int z^2\rho(\mathbf{r},t)dx^3} \\
&= 2qa^2\cos 2\omega t - (-qa^2\cos 2\omega t) \\
&= 3qa^2\cos 2\omega t.
\end{aligned}
$$

[1] Ver ecuación 1.6 de Jackson [1].
[2] Solo escribimos las que no se hacen idénticamente cero.

$$Q_{12} = Q_{21} = \int 3xy\rho(\mathbf{r},t)dx^3 = 3qa^2 \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$\begin{aligned}
Q_{22} &= \int (2y^2 - x^2 - z^2)\rho(\mathbf{r},t)dx^3 \\
&= \int 2y^2\rho(\mathbf{r},t)dx^3 - \int x^2\rho(\mathbf{r},t)dx^3 - \cancelto{0}{\int z^2\rho(\mathbf{r},t)dx^3} \\
&= -2qa^2 \cos 2\omega t - -qa^2 \cos 2\omega t \\
&= -3qa^2 \cos 2\omega t.
\end{aligned}$$

Entonces el tensor de momento cuadrupolar será (usando que los factores de arriba pueden escribirse como $\propto \operatorname{Re}\left\{ \mathrm{e}^{2\omega t} \right\}$

$$\{Q\} = 3qa^2 \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Vemos también, a partir de las componentes de $Q_{\alpha,\beta}$ que la frecuencia de radiación será $2\omega$. Con esto contestamos la primera y última pregunta del problema. Calculemos ahora los campos de radiación. En el límite de longitud de onda grande, el campo de radiación magnético viene dado por la ecuación (9.44) de Jackson [1],

$$\mathbf{H} = -\frac{ick^3}{24\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}), \tag{1.3}$$

donde

$$\mathbf{n} = \hat{x} \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \hat{y} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \hat{z}\cos\theta, \tag{1.4}$$

y usando los resultados anteriores

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{3} (\hat{x}Q_{1i}n_i + \hat{y}Q_{2i}n_i + \hat{z}Q_{3i}n_i) = 3qa^2 \operatorname{sen}\theta \left[ (\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) + (i\cos\phi - \operatorname{sen}\phi) \right]$$

$$\therefore \mathbf{Q}(\mathbf{n}) 3qa^2 \operatorname{sen}\theta \mathrm{e}^{i\phi} (\hat{x} + i\hat{y}). \tag{1.5}$$

El campo magnético de radiación será entonces

$$\boxed{\mathbf{H} = -\frac{ick^3qa^2}{8\pi} \frac{\mathrm{e}ikr}{r} \mathrm{e}^{i\phi} \operatorname{sen}\theta (-i\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\cos\theta + \hat{z}i \operatorname{sen}\theta \mathrm{e}^{i\phi})}. \tag{1.6}$$

El campo eléctrico, siguiendo la ecuación (9.19) de Jackson [1] será[3]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H} \times \mathbf{n} = -Z_0 \frac{ick^3qa^2}{8\pi} \frac{\mathrm{e}ikr}{r} \mathrm{e}^{i\phi} &\operatorname{sen}\theta (-i\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\cos\theta + \hat{z}i \operatorname{sen}\theta \mathrm{e}^{i\phi}) \\
&\times (\hat{x} \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \hat{y} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \hat{z}\cos\theta).
\end{aligned}$$

[3] Donde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ es la impedancia del espacio vacío.

Ahora la distribución angular de la radiación viene dada por la ecuación (9.45) de Jackson [1], que usando la relación (9.46) tenemos,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{1152\pi^2} k^6 |[\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})] \times \mathbf{n}|^2 = \frac{c^2 Z_0}{1152\pi^2} k^6 \left[ |\mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2 - |\mathbf{Q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}|^2 \right], \tag{1.7}$$

entonces

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{1152\pi^2} k^6 \left[ (3qa^2 \operatorname{sen}\theta)^2 - (3qa^2 \operatorname{sen}\theta)^2 (\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi \right], \tag{1.8}$$

que con un poco de álgebra y sabiendo que $k = 2\omega/c$ en este caso tenemos

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^6 q^2 a^4}{2\pi^2 c^4}(1 - \cos^4\theta)}. \tag{1.9}$$

Por último la potencia total de radiación es

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^6}{2\pi^2 c^4 (q^2 a^4)} \int d\Omega (1 - \cos^4\theta, \tag{1.10}$$

$$\boxed{\therefore P = \frac{8 Z_0 \omega^6}{5\pi c^4} q^2 a^4}. \tag{1.11}$$

## Problema 2. Problema 9.3 de Classical Electrodynamics de Jackson [1].

Dos mitades de un cascarón metálico esférico de radio $R$ y conductividad infinita están separadas por una abertura aislante muy pequeña. Un potencial alterno es aplicado entre las dos mitades de la esfera de manera que los potenciales son $\pm V \cos \omega t$. En el límite de longitud de onda grande, encuentre los campos de radiación, la distribución angular de potencia radiada, y la potencia radiada total radiada desde la esfera.

Solución:

En este problema podemos asumir que el término dipolar es el dominante ya que las dos mitades de las esferas cargadas opuestamente en el régimen de longitud grande se asemejan mucho a el comportamiento de un dipolo. Entonces necesitamos encontrar el momento dipolar de esta configuración y luego de ahí utilizar las ecuaciones que se encuentran en Jackson [1] (que fueron usadas en el problema anterior) para hallar lo solicitado por el autor en el problema.

Consideremos la esfera en un tiempo cuando los voltajes están en su pico. En la sección 2.7 de Jackson [1] y en el 4 problema de la segunda tarea, encontramos que a primer orden, el potencial externo de una esfera cortada en hemisferios, en términos de los polinomios de Legendre puede escribirse como

$$\Phi = V\frac{3}{2}\frac{R^2}{r^2}\cos\theta, \tag{2.1}$$

y de Marion y Heald (ec. 2.5) [2] sabemos que el potencial debido a un dipolo eléctrico en la dirección $z$ luce como

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^2}\cos\theta. \tag{2.2}$$

Si ahora igualamos estas dos expresiones, y despejamos $p$, tenemos que en cantidades vectoriales

$$\mathbf{p} = 6\pi\epsilon_0 V R^2 \hat{z}. \tag{2.3}$$

Ahora los potenciales en la esfera varían con $\cos\omega t$, que es la parte real de la dependencia armónica exponencial. Ahora del capítulo 7 de Marion y Heald [2] podemos obtener expresiones para los campos debidos a un dipolo eléctrico que varía armónicamente en el tiempo, tenemos entonces

$$\mathbf{E} = -\frac{k^2 p}{4\pi\epsilon_0}\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{p})\frac{\mathrm{e}^{i(kr-wt)}}{r}, \tag{2.4}$$

y sustituyendo la expresión para el momento dipolar q encontramos tenemos

$$\boxed{E = -\frac{3}{2}Vk^2R^2\frac{\mathrm{e}^{i(kr-wt)}}{r}\operatorname{sen}\theta\hat{\theta}}. \tag{2.5}$$

Y el campo magnético será

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 c k^2 p}{4\pi}(\hat{k}\times\hat{p})\frac{\mathrm{e}^{i(kr-wt)}}{r}, \tag{2.6}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = -\frac{3}{2}\frac{Vk^2R^2}{c}\frac{\mathrm{e}^{i(kr-wt)}}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\theta}}. \tag{2.7}$$

La distribución angular de potencia radiada la calculamos con la ecuación (9.21) de Jackson [1],

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[r^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{H}], \tag{2.8}$$

tenemos entonces

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left[-\frac{3}{2}Vk^2R^2\frac{\mathrm{e}^{i(kr-wt)}}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\theta}\right]\times\left[-\frac{1}{\mu_0}\frac{3}{2}\frac{Vk^2R^2}{c}\frac{\mathrm{e}^{-}i(kr-wt)}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\theta}\right]\right\}, \tag{2.9}$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{dP}{d\Omega} = \frac{9}{8}\frac{V^2k^2R^4}{\mu_0 c}\,\mathrm{sen}^2\,\theta}. \tag{2.10}$$

Por último, la potencia total radiada es

$$P = \int \frac{9}{8}\frac{V^2k^2R^4}{\mu_0 c}\,\mathrm{sen}^2\,\theta d\Omega, \tag{2.11}$$

$$\boxed{\therefore P = \frac{3\pi V^2k^4R^4}{\mu_0 c}}. \tag{2.12}$$

## Referencias

[1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.

[2] J. Marion, M. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, 2da edición, Academic Press, 1965.