Universidad Nacional Autónoma de México

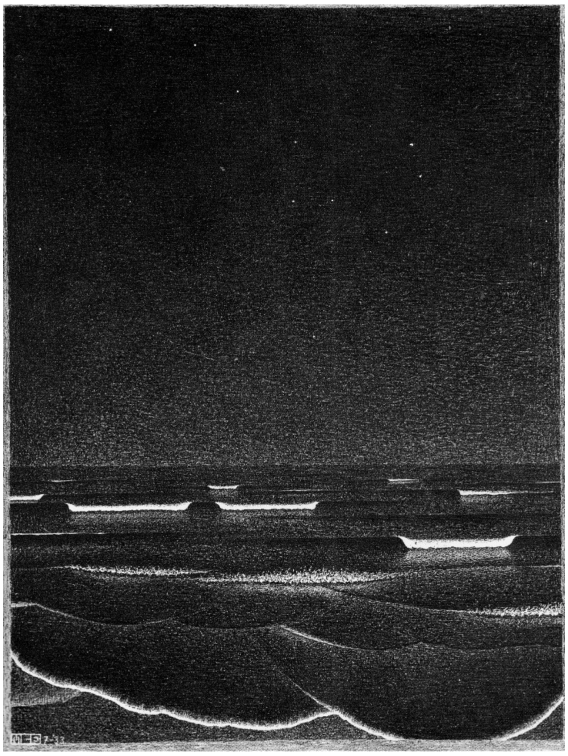
Electrodinámica Clásica

Semestre 2016-II

7 de abril de 2016

Tarea # 6. Ondas electromagnéticas planas y propagación de ondas.

Autor:
Favio Vázquez†



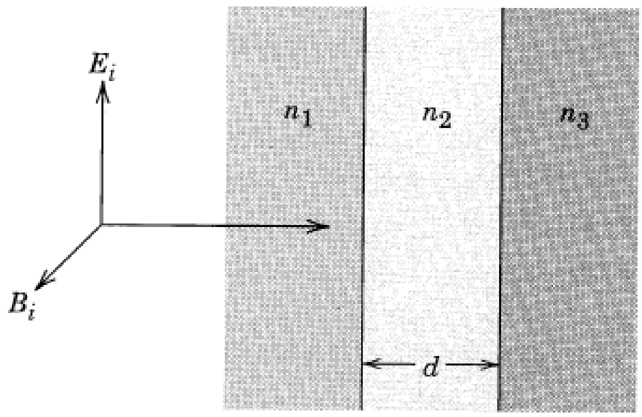
† favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 1. Problema 7.2 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una onda plana incidente en una interfaz de capas como se muestra en la figura. Los índices de refracción de los tres medios no impermeables son n_1, n_2 y n_3. El grosor de la capa intermedia es d. Cada uno de los otros medios es semi-infinito.

(a) Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión (las tasas de del flujo de Poynting transmitida y reflejada al flujo incidente), y esboce su comportamiento como función de la frecuencia para $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$; $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$ y $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 1$.



(b) El medio n_1 es parte de un sistema óptico (e.g., una lente); el medio n_3 es aire ($n_3 = 1$). Se desea colocar un revestimiento óptico (medio n_2) sobre la superficie para que no haya reflexión para ondas de frecuencia ω_0. ¿Qué grosor d e índice de refracción n_2 son necesarios?

Solución:

Problema 2. Problema 7.3 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Dos losas planas semi-infinitas con el mismo dieléctrico sin pérdidas, uniformidad, isotropía, no-permeabilidad con índice de refracción n son paralelas, y están separadas por una brecha de aire ($n = 1$) de ancho d. Una onda electromagnética de frecuencua ω incide en la brecha desde una de las losas con un ángulo de incidencia i. Para una polarización lineal tanto paralela como perpendicular al plano de incidencia,

(a) calcule la tasa de potencia transmitida a la segunda losa con respecto al poder incidente y la tasa de poder reflejado con respecto al incidente;

(b) para un i mayor que el ángulo crítico para reflexión interna total, esboce la tasa de potencia transmitida con respecto a la potencia incidente como una función de d medido en unidades de longitud de onda en la brecha.

Solución:

Problema 3. Problema 7.5 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una onda electromagnética polarizada $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i \mathrm{e}^{i\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - i\omega t$ incide normalmente sobre una lámina plana uniforme de una excelente conducción ($\omega \gg \omega\epsilon_0$) con un grosor de D. Asumiendo que en el espacio y en la lámina conductora $\mu/\mu_0 = \epsilon/\epsilon_0 = 1$, discuta la reflexión y transmisión de la onda incidente.

(a) Muestre que las amplitudes de las onda reflejada y transmitida, correctas a primer orden en $(\epsilon_0\omega/\sigma)^1/2)$, son

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-(1-\mathrm{e}^{-2\lambda})}{(1-\mathrm{e}^{-2\lambda}) + \gamma(1+\mathrm{e}^{-2\lambda})}$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2\gamma \mathrm{e}^{-\lambda}}{(1-\mathrm{e}^{-2\lambda}) + \gamma(1+\mathrm{e}^{-2\lambda})}$$

donde

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}(1-i) = \frac{\omega\delta}{c}(1-i)$$

$$\lambda = (1-i)D/\delta$$

y $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ es la profundidad de penetración.

(b) Verifique que para un grosor igual a cero y un grosor infinito se obtienen los resultados limitantes apropiados.

(c) Muestre que, excepto para láminas de muy poco grosor, el coeficiente de transmisión es

$$T = \frac{8(\mathrm{Re}\gamma)^2\mathrm{e}^{-2D/\gamma}}{1 - 2\mathrm{e}^{-2D/\gamma}\cos 2D/\delta) + \mathrm{e}^{-4/\gamma}}$$

Esboce $\log T$ como una función de (D/δ), asumiendo que Re $\gamma = 10^{-2}$. Defina "grosor muy pequeño".

Solución:

Problema 4. Problema 7.14 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1]. (Es el 7.9 de la 2da ed.)

Un modelo simple para la propagación de ondas de radio en la atmósfera de la Tierra o ionosfera consiste en una tierra plana en $z = 0$ y un medio no uniforme con $\epsilon = \epsilon(z)$ para $z > 0$. Considere la ecuaciones de Maxwell bajo la suposición de que los campos son independientes de y y pueden escribirse como funciones de z por $\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$.

(a) Muestre que la ecuación de onda que gobierna la propagación para $z > 0$ es

$$\frac{d^2F}{dz^2} + q^2(z)F = 0,$$

donde

$$q^2(z) = \omega^2\mu_0\epsilon(z) - k^2$$

y $F = E_y$ para la polarización *horizontal*, y

$$q^2(z) = \omega^2\mu_0\epsilon(z) + \frac{1}{2\epsilon}\frac{d^2\epsilon}{dz^2} - \frac{3}{4\epsilon^2}\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2 - k^2$$

con $F = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}E_z$ para la polarización *vertical*.

(b) Use la aproximación WKB para tratar la propagación de ondas dirigidas verticalmente hacia la ionosfera ($k = 0$), asumiendo que la constante dieléctrica está dad por (7.59) con una frecuencia de plasma $\omega_p(z)$ gobernada por una densidad electrónica como se muestra en la figura 7.11. Verifique que los argumentos cualitativos de la sección 7.6 se mantienen, con discrepancias en detalle solo para $\omega\ \omega_{p,\max}$.

(c) Usando los resultados WKB de la parte (b) y los conceptos de propagación de un pulso de la sección 7.8, define una altura efectiva de la ionosfera $h'(\omega)$ calculando el tiempo T para un pulso de frecuencia dominante ω que viaja hacia arriba y se refleja ($h' \equiv cT/2$). [La aproximación WKB es discutida en la mayoría de los libros de mecánica cuántica].

<u>Solución:</u>

Referencias

[1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.

[2] D. Griffiths, *Indtroduction to Electrodynamics*, 4ta edición. Pearson, 2013.

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES