
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

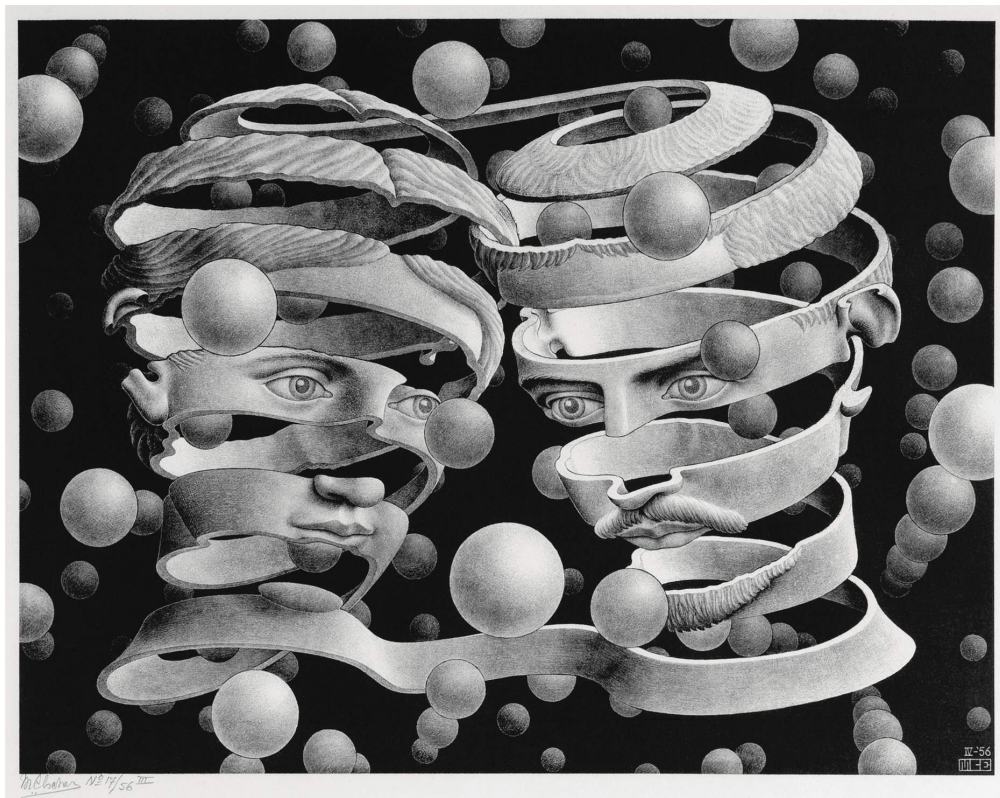
SEMESTRE 2016-II

12 DE MAYO DE 2016

Tarea # 9. Radiación.

Autor:

Favio VÁZQUEZ[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

Problema 1

En la zona lejana demostrar, partiendo de los potenciales retardados,

(a)

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}}{cr} + \frac{\ddot{Q}_\alpha}{6c^2 r}, \quad \text{donde} \quad Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} \hat{n}_\beta$$

(b)

$$P = \frac{2|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\mathbf{m}}|^2}{3c^3} + \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}}{180c^5}.$$

Solución:

Problema 2

Explicar la radiación de bremsstrahlung.

Solución:

Los cálculos para esta sección se harán en S.I. ya que se tomaron en gran parte de la sección 23.3 de Zangwill [1]. Lo que trabajaremos será con la teoría clásica de bremsstrahlung, y veremos que solo es un nombre a que se le da a un tipo de radiación en electrodinámica.

La energía radiada al infinito por una partícula cargada está determinada por los campos de aceleración $\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t)$ fueron obtenidos en la tarea anterior, acá los escribimos en S.I. para trabajar con ellos

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cg^3 R} \right]_{ret}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + g\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \hat{\mathbf{n}}}{g^3 R} \right]_{ret}, \quad (2.2)$$

donde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $g(t') = \frac{d}{dt}[r' - r + R(t')/c]$ y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario definido por $\mathbf{R}(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$ y el *ret* se refiere a que las mediciones se hacen el tiempo retardado.

Éstos son campos de radiación porque decrecen con $1/R$ y forman una triada ortogonal con el vector unitario retardado de la línea de visión, $\hat{\mathbf{n}}_{ret}$. El vector de Poynting asociado,

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a = \epsilon_0 c E_a^2 \hat{\mathbf{n}}_{ret} = \epsilon_0 c \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]}{cg^3 R} \right|_{ret} \hat{\mathbf{n}}_{ret}, \quad (2.3)$$

determina la tasa en la cual la energía fluye a través de un ángulo sólido $d\Omega$ de una esfera envolvente distante de radio R :

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dU}{dt d\Omega} = R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ret}. \quad (2.4)$$

La tasa de emisión se convierte en una cantidad más fundamental cuando la multiplicamos por g_{ret} y nos enfocamos en la distribución angular del poder emitido,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dU}{dt_{ret} d\Omega} = g_{ret} R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ret} = \frac{1}{c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right|_{ret}. \quad (2.5)$$

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

Esta ecuación se simplifica considerablemente cuando la aceleración \mathbf{a} es paralela a la velocidad \mathbf{v} . El patrón de radiación tiene simetría azimutal al rededor su dirección común y entonces depende solamente del ángulo θ definido por $\hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = (v/c) \cos \theta$. Recordando que todas las cantidades se refieren al tiempo retardado de emisión, la distribución angular de la radiación emitida es

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\parallel} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (2.6)$$

Ahora la dependencia de esta ecuación en a^2 nos dice que el patrón de radiación ocurre cuando la carga se acelera o se desacelera. La palabra alemana *bremsstrahlung* que significa “radiación de frenado” es usada comúnmente para el caso de desaceleración. Un ejemplo de la teoría clásica de *bremsstrahlung* es cuando un electrón de rápida velocidad choca con un blanco metálico, y se desacelera rápidamente, dando lugar a este tipo de radiación, *bremsstrahlung* [2].

Problema 3

Para una partícula no relativista acelerada dibujar el patrón de radiación.

Solución:

Para solucionar este problema recrearemos la figura 9.5 de Jackson [3] que a nuestro parecer representa varios aspectos de los patrones de radiación. En la sección 9.9 del texto, el autor describe como se llegan a las ecuaciones para poder encontrar los patrones de radiación tanto dipolares como cuadrupolares, y dispone una tabla donde se encuentran distribuciones angulares para la forma normalizada del vector de armónicos esféricos $\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)$, que se define como (ec. 9.119 de Jackson [3])

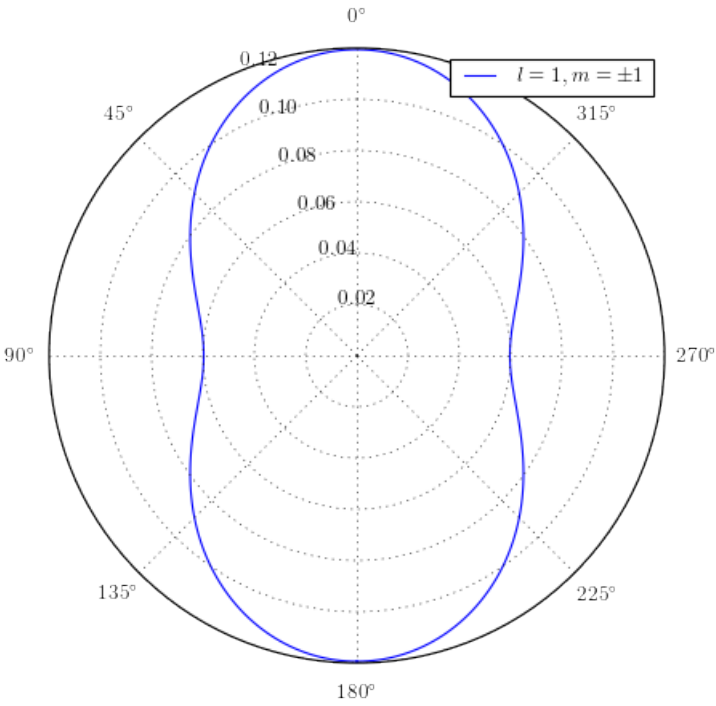
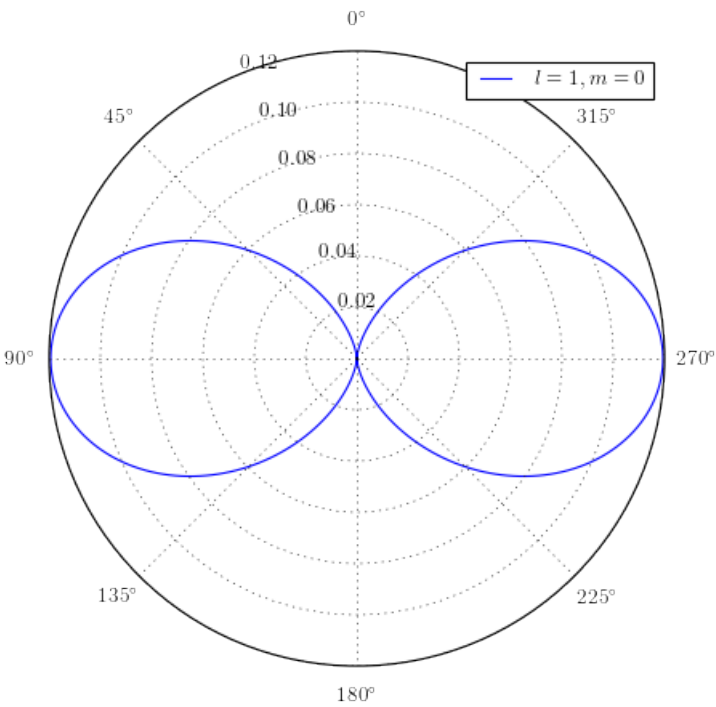
$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.1)$$

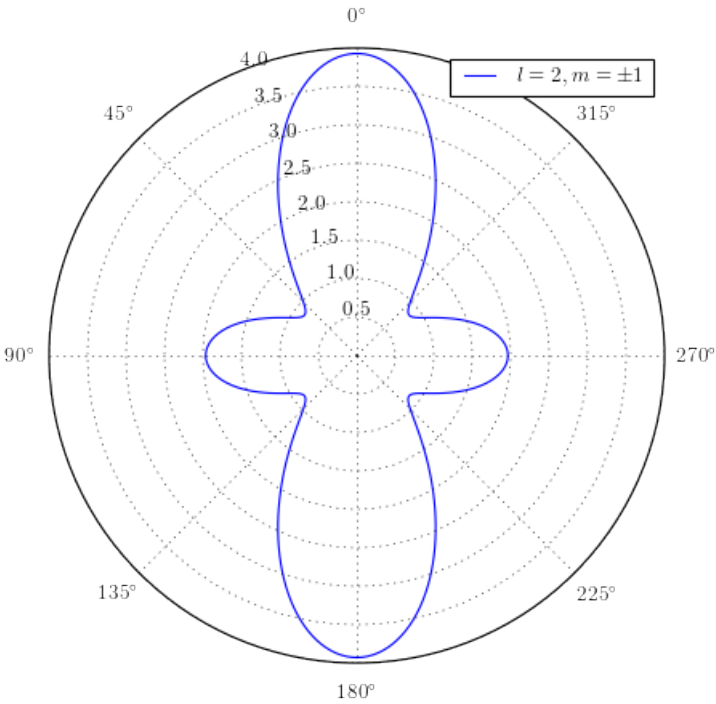
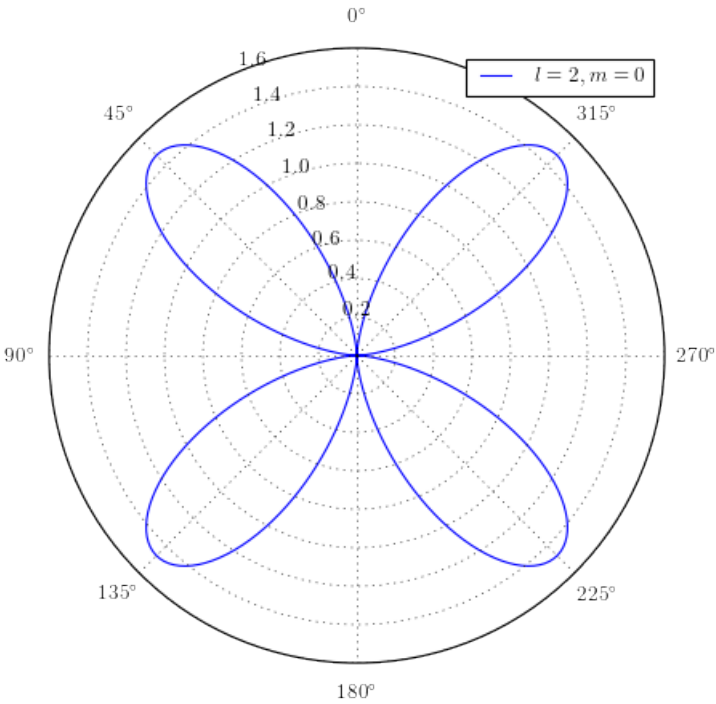
donde $\mathbf{L} = \frac{1}{i}(r \times \nabla)$. La tabla en cuestión es la siguiente (tabla 9.1 de Jackson [3])

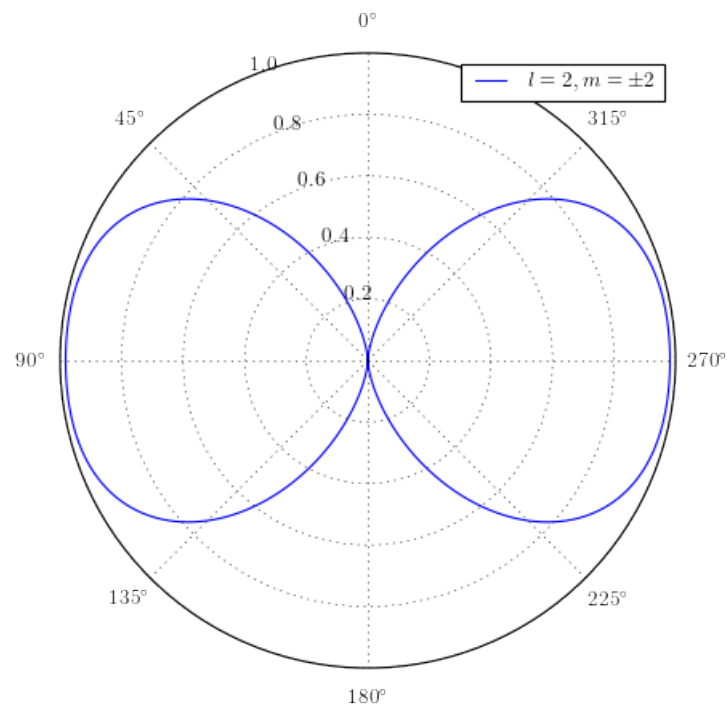
Table 9.1 Some Angular Distributions: $|\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)|^2$

l	m		
	0	± 1	± 2
1 Dipole	$\frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta$	$\frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta)$	
2 Quadrupole	$\frac{15}{8\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$	$\frac{5}{16\pi} (1 - 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta)$	$\frac{5}{16\pi} (1 - \cos^4 \theta)$

Debajo las distribuciones dipolares se ven como aquellas en las que un dipolo oscila paralelo al eje z ($m = 0$) y las que dos dipolos, uno a lo largo del eje x y otro a lo largo del eje y , 90° fuera de fase ($m = \pm 1$). Las distribuciones angulares dipolares y cuadrupolares están graficadas debajo como diagramas de intensidad dipolar. Representan distribuciones angulares para $l = 1$ y $l = 2$. La ecuación de donde salen las porciones de ecuaciones que se encuentran en la tabla de arriba es la (9.152) de Jackson [3]. Cada una tiene su respectiva leyenda que la relaciona a la tabla de arriba, y la última figura es un compendio de todos los patrones de radiación.







El código que hace estas imágenes de arriba es ([Link al notebook de Python en mi GitHub](#))

```

1 from __future__ import print_function
2 import numpy as np
3 from numpy import arccos, sin, cos, pi, array, sqrt, log, exp
4 import matplotlib
5 matplotlib.use('nbagg')
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from matplotlib import rc
8
9 rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
10 ## for Palatino and other serif fonts use:
11 #rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
12 rc('text', usetex=True)
13
14 #LaTeX
15 plt.rc('text', usetex=True)
16 plt.rc('font', family='serif')
17
18 # Linespace for theta
19
20 theta = np.linspace(-pi, pi, 360)
21
22 # Variable definitions
23 x1 = 3/(8*pi)*(sin(theta))**2 #l=1,m=0
24 x2 = 3/(16*pi)*(1 + (cos(theta))**2)#l=1,m=+-1
25 x3 = 15/8*pi * (sin(theta))**2*(cos(theta))**2 #l=2,m=0
26 x4 = (5/8*pi) * (1 - 3*(cos(theta))**2 +
27               4*(cos(theta))**4) #l=2, m=+-1
28 x5= 5/16*pi * (1 - (cos(theta))**4)
29
30 #Plots and Style
31
32 # l=1, m=0
33 ax = plt.subplot(111, polar=True)

```

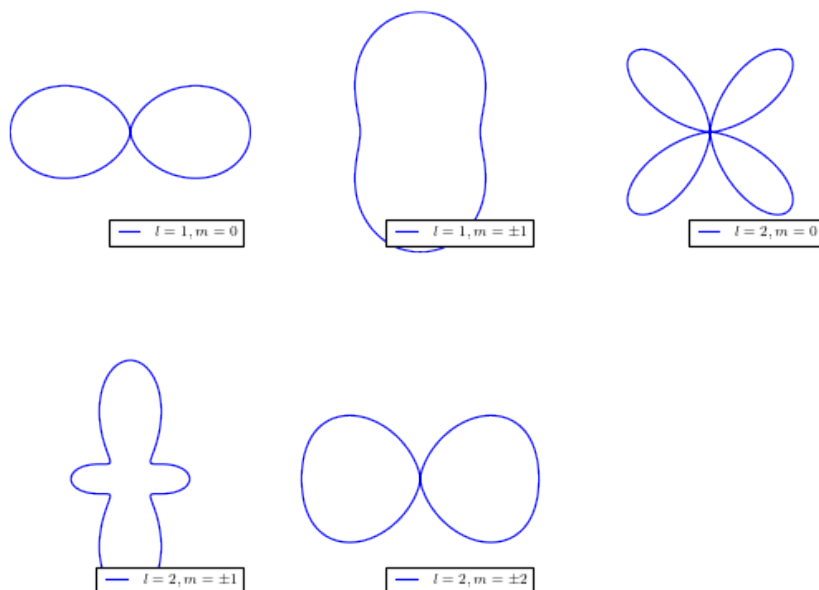
GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

```

34 ax.set_theta_offset(pi/2)
35 ax.plot(theta,x1,label=r'$l=1,m=0$')
36 ax.legend(loc=1,fontsize=12)
37 plt.show()
38
39 # l=1, m=+-1
40 ax = plt.subplot(111, polar=True)
41 ax.set_theta_offset(pi/2)
42 ax.plot(theta,x2,label=r'$l=1,m=\pm 1$')
43 ax.legend(loc=1,fontsize=12)
44 plt.show()
45
46 # l=2, m=0
47 ax = plt.subplot(111, polar=True)
48 ax.set_theta_offset(pi/2)
49 ax.plot(theta,x3, label=r'$l=2,m=0$')
50 ax.legend(loc=1,fontsize=12)
51 plt.show()
52
53 # l=2, m=+-1
54 ax = plt.subplot(111, polar=True)
55 ax.set_theta_offset(pi/2)
56 ax.plot(theta,x4, label=r'$l=2,m=\pm 1$')
57 ax.legend(loc=1,fontsize=12)
58 plt.show()
59
60 # l=2, m=+-2
61 ax = plt.subplot(111, polar=True)
62 ax.set_theta_offset(pi/2)
63 ax.plot(theta,x5, label=r'$l=2,m=\pm 2$')
64 ax.legend(loc=1,fontsize=12)
65 plt.show()

```

Compendio de patrones de radiación



El código que hace esta figura es

```

1  from __future__ import print_function
2  import numpy as np
3  from numpy import arccos, sin, cos, pi, array, sqrt, log, exp
4  import matplotlib
5  matplotlib.use('nbagg')
6  import matplotlib.pyplot as plt
7  from matplotlib import rc
8
9  rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
10  ## for Palatino and other serif fonts use:
11  #rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
12  rc('text', usetex=True)
13
14  #LaTeX
15  plt.rc('text', usetex=True)
16  plt.rc('font', family='serif')
17
18  # Linespace for theta
19
20  theta = np.linspace(-pi,pi,360)
21
22  # Variable definitions
23  x1 = 3/(8*pi)*(sin(theta))**2 #l=1,m=0
24  x2 = 3/(16*pi)*(1 + (cos(theta))**2)#l=1,m=-1
25  x3 = 15/8*pi * (sin(theta))**2*(cos(theta))**2 #l=2,m=0
26  x4 = (5/8*pi) * (1 - 3*(cos(theta))**2 +
27  4*(cos(theta))**4) #l=2, m=-1
28  x5= 5/16*pi * (1 - (cos(theta))**4)
29
30  fig = plt.figure()
31
32  #Plots
33  ax1 = fig.add_subplot(231,projection='polar')
34  ax1.plot(theta,x1,label=r'$l=1,m=0$')
35  ax2 = fig.add_subplot(232,projection='polar')
36  ax2.plot(theta,x2,label=r'$l=1,m=\pm 1$')
37  ax3 = fig.add_subplot(233,projection='polar')
38  ax3.plot(theta,x3, label=r'$l=2,m=0$')
39  ax4 = fig.add_subplot(234,projection='polar')
40  ax4.plot(theta,x4, label=r'$l=2,m=\pm 1$')
41  ax5 = fig.add_subplot(235,projection='polar')
42  ax5.plot(theta,x5, label=r'$l=2,m=\pm 2$')
43
44  #Offsets
45  ax1.set_theta_offset(pi/2)
46  ax2.set_theta_offset(pi/2)
47  ax3.set_theta_offset(pi/2)
48  ax4.set_theta_offset(pi/2)
49  ax5.set_theta_offset(pi/2)
50
51  #Legends
52  ax1.legend(loc=4,fontsize=8)
53  ax2.legend(loc=4,fontsize=8)
54  ax3.legend(loc=4,fontsize=8)
55  ax4.legend(loc=4,fontsize=8)
56  ax5.legend(loc=4,fontsize=8)
57
58  #Axis style
59  ax1.axis('off')
60  ax2.axis('off')
61  ax3.axis('off')

```

GIGANTUM HUMERIS INSCIDENTES


```

62 ax4.axis('off')
63 ax5.axis('off')
64
65 plt.show()

```

Problema 4

¿Cuánto tiempo tarda en caer un electrón al núcleo? Considere el átomo de hidrógeno y $n=1$.

Solución:

La pérdida de energía dominante en este caso está dada por la radiación dipolar, que utilizando la ecuación de Larmor podemos escribir como

$$\frac{dU}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{2a^2e^2\omega^4}{3c^3}. \quad (4.1)$$

Para un electrón de carga $-e$ y masa m_e en una órbita de radio a acerca de un núcleo fijo de carga $+e$ (átomo de hidrógeno), la segunda ley de Newton, $F = ma$ nos dice que

$$\frac{e^2}{a^2} = m \frac{v^2}{a} = m\omega^2 a, \quad (4.2)$$

de manera que

$$\omega^2 = \frac{e^2}{ma^3}, \quad (4.3)$$

y también la energía total será

$$U = -\frac{e^2}{a} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{e^2}{2a}. \quad (4.4)$$

Usando las ecuaciones (4.3) y (4.4) en la ecuación (4.1), tenemos

$$\frac{dU}{dt} = \frac{e^2}{2a^2} \dot{a} = -\frac{2e^6}{3a^4 m^2 c^3}, \quad (4.5)$$

o

$$a^2 \dot{a} = \frac{1}{3} \frac{da^3}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} = -\frac{4}{3} r_0^2 c, \quad (4.6)$$

donde $r_0 = e^2/mc^2$ es el radio clásico del electrón. Entonces

$$a^3 = a_0^3 - 4r_0^2 ct. \quad (4.7)$$

El tiempo de caída del electrón será entonces ($a \rightarrow 0$)

$$t_{\text{caída}} = \frac{a_0^3}{4r_0^2 c}. \quad (4.8)$$

Sustituyendo los valores conocidos para $r_0 = 2,8 \times 10^{-13}$ cm y $a_0 = 5,3 \times 10^{-9}$ cm, el tiempo de caída del electrón al núcleo será $t_{\text{caída}} = 1,6 \times 10^{-11}$ s. Este es el orden de magnitud para el tiempo de vida de un átomo de hidrógeno excitado con $n = 1$.

Referencias

- [1] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2012.
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4ta edición, Pearson Education, 2013.
- [3] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.