

---

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

SEMESTRE 2016-II

17 DE MARZO DE 2016

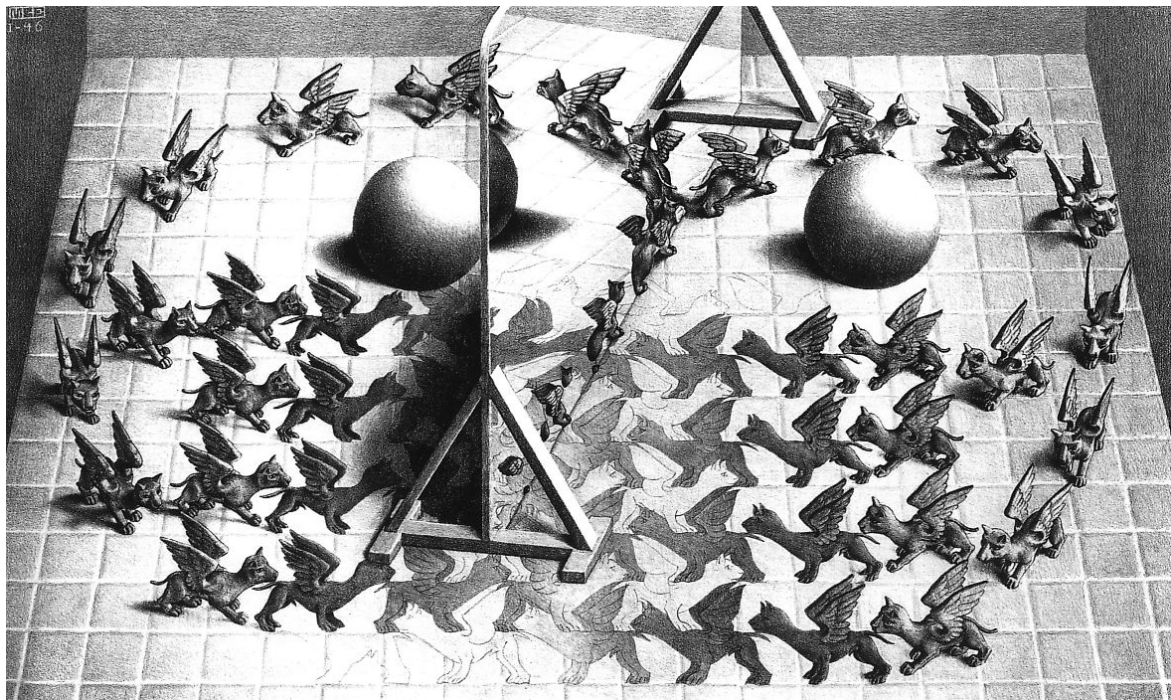
---

## Tarea # 5. Ecuaciones de Maxwell, electromagnetismo macroscópico y leyes de conservación.

---

*Autor:*

Favio VÁZQUEZ<sup>†</sup>



---

<sup>†</sup>favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

## Problema 1. Problema 6.8 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una esfera de constante dieléctrica constante  $\epsilon$  y radio  $a$  está situada en el origen. Hay un campo eléctrico  $E_0$  uniforme aplicado en la dirección  $x$ . La esfera rota con una velocidad angular  $\omega$  sobre el eje  $z$ . Muestre que hay un campo magnético  $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M$ , donde

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega \left( \frac{a}{r_{>}} \right)^5 \cdot xz,$$

donde  $r_{>}$  es el más grande de  $r$  y  $a$ . El movimiento es no relativista. Puede utilizar los resultados de la sección 4,4 para la esfera dieléctrica en un campo aplicado.

### Solución:

La idea básica que nos ayudará a solucionar este problema, fue lo que se vio en clase y en la sección 4.4 de Jackson [1], y es que un campo uniforme  $E_0$  aplicado a la esfera la polariza, induciendo una carga superficial de polarización (o ligada) sobre la misma, la cual se convierte en corriente de polarización (o ligada) debido a la rotación de la esfera. Y como se vio en el capítulo 6 de Jackson [1] estas corrientes dan lugar a campos magnéticos.

Para obtener el potencial magnético que nos pide el problema, utilizaremos la expresión indicada en la ecuación (5.100) de Jackson [1], para el caso en que la magnetización sobre el volumen de integración es constante y por lo tanto se cancela el primer término de esta ecuación y nos queda

$$\Phi_M = \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\sigma_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da', \quad (1.1)$$

y por lo tanto necesitamos una expresión para la densidad superficial de carga magnética  $\sigma_M$ , y ya que esta depende del momento magnético total  $\mathbf{M}$  debemos calcularlo. Esto lo haremos calculando primero la densidad de corriente superficial  $\mathbf{J}_M$  inducida en la esfera a partir de su polarización, tomando en cuenta la rotación de la misma.

De la sección 4.4 sabemos que la carga superficial inducida en la esfera será<sup>1</sup>, en coordenadas cartesianas

$$\sigma_{pol} \equiv \sigma = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \frac{x}{a}. \quad (1.2)$$

Ahora debido a que esta densidad de carga está girando en la superficie de la esfera de radio  $a$  a una velocidad angular  $\omega$ , utilizando<sup>2</sup>

$$\mathbf{J}_M = \sigma \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

el hecho de que  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  y que la velocidad angular puede escribirse como  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$  y  $\mathbf{r} = a \hat{r}$  obtenemos

$$\mathbf{J}_M = \sigma(\omega \hat{z}) \times (a \hat{r}), \quad (1.4)$$

$$\therefore \mathbf{J}_M = \sigma \omega a \sin \theta \hat{\phi}, \quad (1.5)$$

<sup>1</sup>Ver ecuación (4.58) de Jackson [1].

<sup>2</sup>Ver página 187 de Jackson [1].

donde hemos utilizado que en coordenadas esféricas  $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$ , y sustituyendo la expresión para la densidad superficial obtenemos

$$\mathbf{J}_M = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 x \sin \theta \hat{\phi}. \quad (1.6)$$

Ya que obtuvimos la densidad de corriente superficial podemos obtener el momento magnético total con<sup>3</sup>

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{M} \times \hat{r}, \quad (1.7)$$

y debido que el momento magnético estará dirigido exclusivamente hacia el lado positivo del eje  $z$ , tenemos

$$\mathbf{J}_M = (M \hat{z}) \times \hat{r}, \quad (1.8)$$

ahora utilizando la definición del producto vectorial, las propiedades de los vectores unitarios en coordenadas esféricas y la expresión que obtuvimos para  $\mathbf{J}_M$  esta ecuación se puede escribir como

$$M \sin \theta \hat{\phi} = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 x \sin \theta \hat{\phi}, \quad (1.9)$$

y resolviendo para el momento magnético obtenemos

$$\mathbf{M} = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 x \hat{z}. \quad (1.10)$$

Lo único que nos falta para poder utilizar la ecuación (1.1) es obtener una expresión para la densidad superficial de carga magnética, lo cual podemos hacer utilizando la ecuación (5.99) de Jackson [1],

$$\sigma_M = \mathbf{n} \times \mathbf{M}, \quad (1.11)$$

que en nuestro caso puede escribirse como

$$\sigma_M = \hat{r} \times \mathbf{M}, \quad (1.12)$$

y sustituyendo la expresión que obtuvimos para el momento magnético nos queda

$$\sigma_M = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \frac{\omega}{a} x z. \quad (1.13)$$

Estamos ahora en posición para utilizar la ecuación (1.1) y calcular el potencial magnético; pero, para expresarlo en la notación que utiliza el texto conviene primero expandir  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  en esféricos armónicos, entonces<sup>4</sup>

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.14)$$

Entonces (1.1) se escribe como<sup>5</sup>

<sup>3</sup>Ver ecuación (5.79) de Jackson [1].

<sup>4</sup>Ver ecuación (3.70) de Jackson [1].

<sup>5</sup>Donde hemos utilizado las expresiones para  $x$  y  $z$  en coordenadas esféricas.

$$\Phi_M = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \frac{\omega}{a} \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin \theta' \cos \theta' \cos \phi' \right. \\ \left. \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \right],$$

que podemos escribir como

$$\Phi_M = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \phi') \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta' \cos \theta' \cos \phi' \right. \\ \left. Y_{lm}^*(\theta, \phi) a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \right],$$

Y usando la relación

$$\sin \theta' \cos \theta' \cos \phi' = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2,-1} - Y_{2,1}), \quad (1.15)$$

obtenemos

$$\Phi_M = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \phi') \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2,-1} - Y_{2,1}) \right. \\ \left. Y_{lm}^*(\theta, \phi) a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \right],$$

usando las propiedades de los armónicos esféricos podemos integrar y obtener

$$\Phi_M = 3 \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \phi') \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [\delta_{l,2} \delta_{m,-1} - \delta_{l,2} \delta_{m,1}], \quad (1.16)$$

que siguiendo los resultados de la sección 3.9 de Jackson [1] escribimos como

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \frac{r_{<}^2}{r_{>}^3} \frac{xz}{r}. \quad (1.17)$$

Entonces tenemos dos casos, si  $r < a$  se cancelarán las contribuciones de las  $r^2$  y la  $a^3$  con  $r^3$  obtenemos

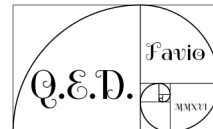
$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega xz, \quad (1.18)$$

y si  $r > a$ ,

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega \frac{a^5}{r^5} xz. \quad (1.19)$$

Si ahora combinamos estos resultados obtenemos

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega \left( \frac{a}{r_{>}} \right)^5 \cdot xz. \quad (1.20)$$



## Problema 2. Problema 6.9 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Discuta la conservación de la energía y el impulso lineal para un sistema macroscópico de fuentes y campos electromagnéticos en un medio uniforme e isotrópico, descrito por una permitividad  $\epsilon$  y una permeabilidad  $\mu$ . Muestre en un cálculo simple que la densidad de energía, el vector de Poynting, la densidad de campo-impulso, y el tensor de esfuerzo de Maxwell están dados por las expresiones de Minkowski,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2), \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \\ \mathbf{g} &= \mu\epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \\ T_{ij} &= [\epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\epsilon E^2 + \mu H^2)]. \end{aligned}$$

¿Qué modificaciones surgen si  $\epsilon$  y  $\mu$  son funciones de la posición?

Solución:

**Nota:** Los resultados solicitados por el problema se encuentran adentro de cajas (marcos). Todas las demás ecuaciones son solamente necesarias para su deducción y para que la demostración sea completa y autosuficiente.

Comencemos con la ecuación de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

si multiplicamos ambos lados de esta ecuación por la velocidad obtenemos

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt, \quad (2.2)$$

y por las propiedades del producto vectorial esta ecuación se convierte en

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt, \quad (2.3)$$

En términos de densidades de carga y corrientes<sup>6</sup> esta ecuación puede escribirse como<sup>7</sup> el trabajo que es hecho sobre todas las cargas en un volumen  $V$

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau. \quad (2.4)$$

Ahora para un sistema macroscópicos de fuentes y campos electromagnéticos en un medio uniforme e isotrópico, solo nos interesa el trabajo hecho sobre las cargas y corrientes libres, entonces esta ecuación se convierte en<sup>8</sup>

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_l) d\tau. \quad (2.5)$$

<sup>6</sup> $q \rightarrow \rho d\tau$  y  $\rho\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{J}$ . Ver página 357 de Griffiths [2].

<sup>7</sup>Ver ecuación (8.6) de Griffiths [2].

<sup>8</sup> $l$  se refiere a “libre”.

Ahora de la ley de Ampère-Maxwell para medios

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

vemos que

$$\mathbf{J}_l = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

y tomando el producto punto en ambos lados del campo eléctrico obtenemos

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_l = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Ahora utilizando propiedades de productos vectoriales tenemos que

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (2.9)$$

y recordando que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.10)$$

obtenemos

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (2.11)$$

Y podemos reescribir (2.6) como

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_l = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (2.12)$$

sustituyendo esta ecuación en (2.5) obtenemos<sup>9</sup>

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.13)$$

Este es el teorema de Poynting para los campos electromagnéticos en materiales. De forma análoga al caso de campos electromagnéticos en el vacío podemos identificar el vector de Poynting como (segundo término del lado derecho de (2.13))

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}}, \quad (2.14)$$

el cual representa la potencia por unidad de área transportada por los campos. Y también podemos ver que la tasa de cambio de la densidad de energía de electromagnética es (primer término del lado derecho de (2.13))

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

ahora ya que tratamos con un medio uniforme e isotrópico descrito por una permitividad  $\epsilon$  y una permeabilidad  $\mu$  tenemos que

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.16)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.17)$$

<sup>9</sup>Donde hemos usado el teorema de Gauss.

que podemos escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.18)$$

y entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \quad (2.19)$$

De esta ecuación, vemos que

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (2.20)$$

pero por las relaciones entre los campos en teoría de respuesta lineal esta ecuación puede escribirse como

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2). \quad (2.21)$$

Por otra parte, si recordamos la expresión para la densidad de campo-impulso<sup>10</sup>

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{\nu^2}, \quad (2.22)$$

donde  $\nu$  es la velocidad de las ondas en el medio y está dada por

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (2.23)$$

y utilizando la ecuación para el vector de Poynting que encontramos arriba vemos que

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}(\sqrt{\mu\epsilon})^2, \quad (2.24)$$

$$\therefore \mathbf{g} = \mu\epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.25)$$

Para terminar debemos obtener la expresión del tensor de esfuerzo de Maxwell para materiales. Comenzamos por escribir el tensor de Maxwell para campos en el vacío

$$T_{ij} = \left[ \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \right]. \quad (2.26)$$

Ahora para el tipo de materiales que estamos considerando, solo debemos reemplazar la permitividad y permeabilidad del vacío con las del material, y obtenemos

$$T_{ij} = \left[ \epsilon E_i E_j + \frac{1}{\mu} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \right]. \quad (2.27)$$

Ahora intercambiando las  $\mathbf{B}$  por las  $\mathbf{H}$  con  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  obtenemos

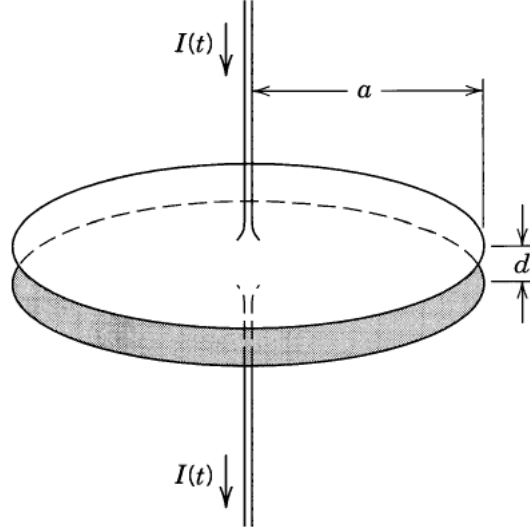
$$T_{ij} = [\epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon E^2 + \mu H^2)]. \quad (2.28)$$

Con respecto a qué modificaciones surgen si  $\epsilon$  y  $\mu$  son funciones de la posición, vemos que debido a que todas las ecuaciones en caja que obtuvimos contienen densidades que dependen de la posición, automáticamente toman en cuenta la posibilidad de que la permeabilidad y la permitividad dependan del tiempo. Por lo tanto no hay que hacer ningún cambio en las ecuaciones, y esta es la gran ventaja de trabajar con densidades en vez de valores totales.

<sup>10</sup> Ver ecuación (8.29) de Griffiths [2].

### Problema 3. Problema 6.15 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Un capacitor de placas paralelas circular ideal de radio  $a$  y separación entre las placas  $d \ll a$  está conectado a una fuente de corriente mediante hilos de conexión axial, como se muestra en el bosquejo. La corriente en el cable es  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ .



- (a) Calcule el campo eléctrico y el magnético entre las placas a segundo orden en potencias de la frecuencia (o número de onda), despreciado los efectos de campos de borde.
- (b) Calcule las integrales de volumen de  $w_e$  y  $w_m$  que entran en la definición de la reactancia  $X$ , (6.140), a segundo orden en  $\omega$ . Muestre que en términos de la corriente de entrada  $I_i$ , definida por  $I_i = -i\omega Q$ , donde  $Q$  es a la carga total en una placa, estas energías son

$$\int w_e d^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|I_i|^2 d}{\omega^2 a^2}, \quad \int w_m d^3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|I_i|^2 d}{8} \left( 1 + \frac{\omega^2 a^2}{12c^2} \right).$$

- (c) Muestre que los circuitos en serie equivalentes tienen  $C \simeq \pi\epsilon_0 a^2/d$ ,  $L \simeq \mu_0 d/8\pi$ , y que un estimado para la frecuencia de resonancia del sistema es  $\omega_{res} \simeq 2\sqrt{2}c/a$ . Compare con la primera raíz de  $J_0(x)$ .

Solución:



## Referencias

- [1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.
- [2] D. Griffiths, *Indtroduction to Electrodynamics*, 4ta edición. Pearson, 2013.