
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

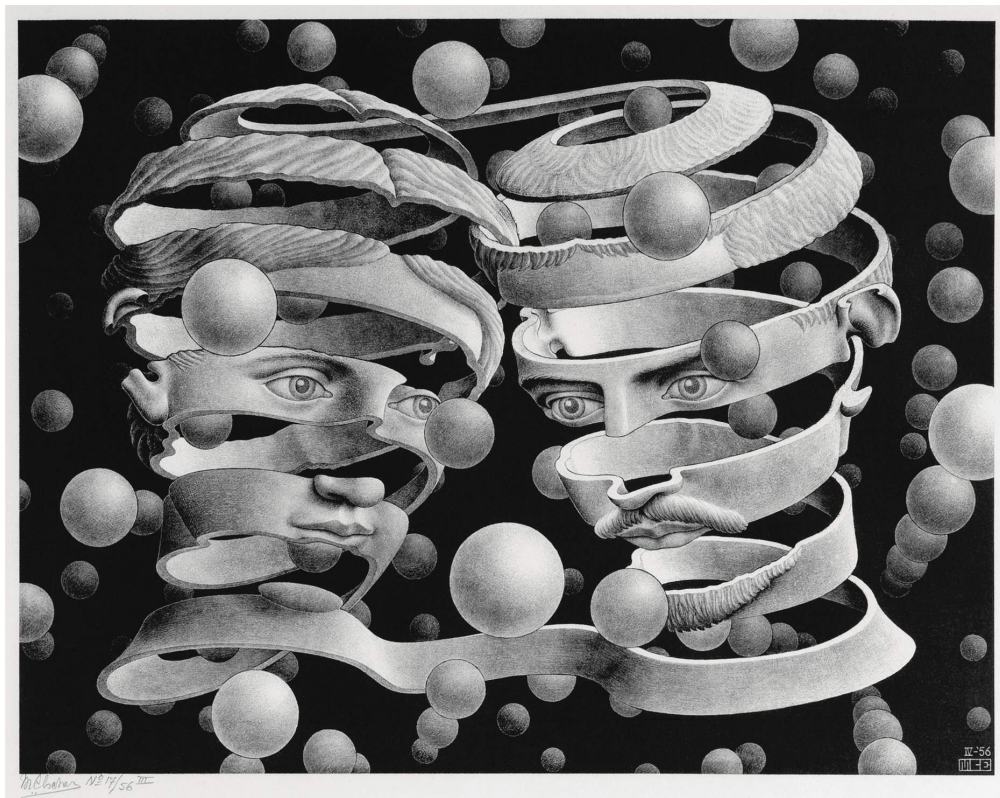
SEMESTRE 2016-II

12 DE MAYO DE 2016

Tarea # 9. Radiación.

Autor:

Favio VÁZQUEZ[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 1

En la zona lejana demostrar, partiendo de los potenciales retardados,

(a)

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}}{cr} + \frac{\ddot{Q}_\alpha}{6c^2 r}, \quad \text{donde} \quad Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} \hat{n}_\beta$$

(b)

$$P = \frac{2|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\mathbf{m}}|^2}{3c^3} + \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}}{180c^5}.$$

Solución:

Problema 2

Explicar la radiación de bremsstrahlung.

Solución:

Los cálculos para esta sección se harán en S.I. ya que se tomaron en gran parte de la sección 23.3 de Zangwill [1]. Lo que trabajaremos será con la teoría clásica de bremsstrahlung, y veremos que solo es un nombre a que se le da a un tipo de radiación en electrodinámica.

La energía radiada al infinito por una partícula cargada está determinada por los campos de aceleración $\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t)$ fueron obtenidos en la tarea anterior, acá los escribimos en S.I. para trabajar con ellos

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cg^3 R} \right]_{ret}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + g\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \hat{\mathbf{n}}}{g^3 R} \right]_{ret}, \quad (2.2)$$

donde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $g(t') = \frac{d}{dt}[r' - r + R(t')/c]$ y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario definido por $\mathbf{R}(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$ y el *ret* se refiere a que las mediciones se hacen el tiempo retardado.

Éstos son campos de radiación porque decrecen con $1/R$ y forman una triada ortogonal con el vector unitario retardado de la línea de visión, $\hat{\mathbf{n}}_{ret}$. El vector de Poynting asociado,

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a = \epsilon_0 c E_a^2 \hat{\mathbf{n}}_{ret} = \epsilon_0 c \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]}{cg^3 R} \right|_{ret} \hat{\mathbf{n}}_{ret}, \quad (2.3)$$

determina la tasa en la cual la energía fluye a través de un ángulo sólido $d\Omega$ de una esfera envolvente distante de radio R :

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dU}{dt d\Omega} = R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ret}. \quad (2.4)$$

La tasa de emisión se convierte en una cantidad más fundamental cuando la multiplicamos por g_{ret} y nos enfocamos en la distribución angular del poder emitido,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dU}{dt_{ret} d\Omega} = g_{ret} R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ret} = \frac{1}{c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right|_{ret}. \quad (2.5)$$

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

Esta ecuación se simplifica considerablemente cuando la aceleración \mathbf{a} es paralela a la velocidad \mathbf{v} . El patrón de radiación tiene simetría azimutal al rededor su dirección común y entonces depende solamente del ángulo θ definido por $\hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = (v/c) \cos \theta$. Recordando que todas las cantidades se refieren al tiempo retardado de emisión, la distribución angular de la radiación emitida es

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\parallel} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (2.6)$$

Ahora la dependencia de esta ecuación en a^2 nos dice que el patrón de radiación ocurre cuando la carga se acelera o se desacelera. La palabra alemana bremsstrahlung que significa “radiación de frenado” es usada comúnmente para el caso de desaceleración. Un ejemplo de la teoría clásica de bremsstrahlung es cuando un electrón de rápida velocidad choca con un blanco metálico, y se desacelera rápidamente, dando lugar a este tipo de radiación, bremsstrahlung [2].

Problema 3

Para una partícula no relativista acelerada dibujar el patrón de radiación.

Solución:

Problema 4

¿Cuánto tiempo tarda en caer un electrón al núcleo? Considere el átomo de hidrógeno y $n=1$.

Solución:

La pérdida de energía dominante en este caso está dada por la radiación dipolar, que utilizando la ecuación de Larmor podemos escribir como

$$\frac{dU}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{2a^2 e^2 \omega^4}{3c^3}. \quad (4.1)$$

Para un electrón de carga $-e$ y masa m_e en una órbita de radio a acerca de un núcleo fijo de carga $+e$ (átomo de hidrógeno), la segunda ley de Newton, $F = ma$ nos dice que

$$\frac{e^2}{a^2} = m \frac{v^2}{a} = m \omega^2 a, \quad (4.2)$$

de manera que

$$\omega^2 = \frac{e^2}{ma^3}, \quad (4.3)$$

y también la energía total será

$$U = -\frac{e^2}{a} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{e^2}{2a}. \quad (4.4)$$

Usando las ecuaciones (4.3) y (4.4) en la ecuación (4.1), tenemos

$$\frac{dU}{dt} = \frac{e^2}{2a^2} \dot{a} = -\frac{2e^6}{3a^4 m^2 c^3}, \quad (4.5)$$

o

$$a^2 \dot{a} = \frac{1}{3} \frac{da^3}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} = -\frac{4}{3} r_0^2 c, \quad (4.6)$$

donde $r_0 = e^2/mc^2$ es el radio clásico del electrón. Entonces

$$a^3 = a_0^3 - 4r_0^2 ct. \quad (4.7)$$

El tiempo de caída del electrón será entonces ($a \rightarrow 0$)

$$t_{\text{caída}} = \frac{a_0^3}{4r_0^2 c}. \quad (4.8)$$

Sustituyendo los valores conocidos para $r_0 = 2,8 \times 10^{-13}$ cm y $a_0 = 5,3 \times 10^{-9}$, el tiempo de caída del electrón al núcleo será $t_{\text{caída}} = 1,6 \times 10^{-11} \text{ s}$. Este es el orden de magnitud para el tiempo de vida de un átomo de hidrógeno excitado con $n = 1$.

Referencias

- [1] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2012.
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4ta edición, Pearson Education, 2013.