
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

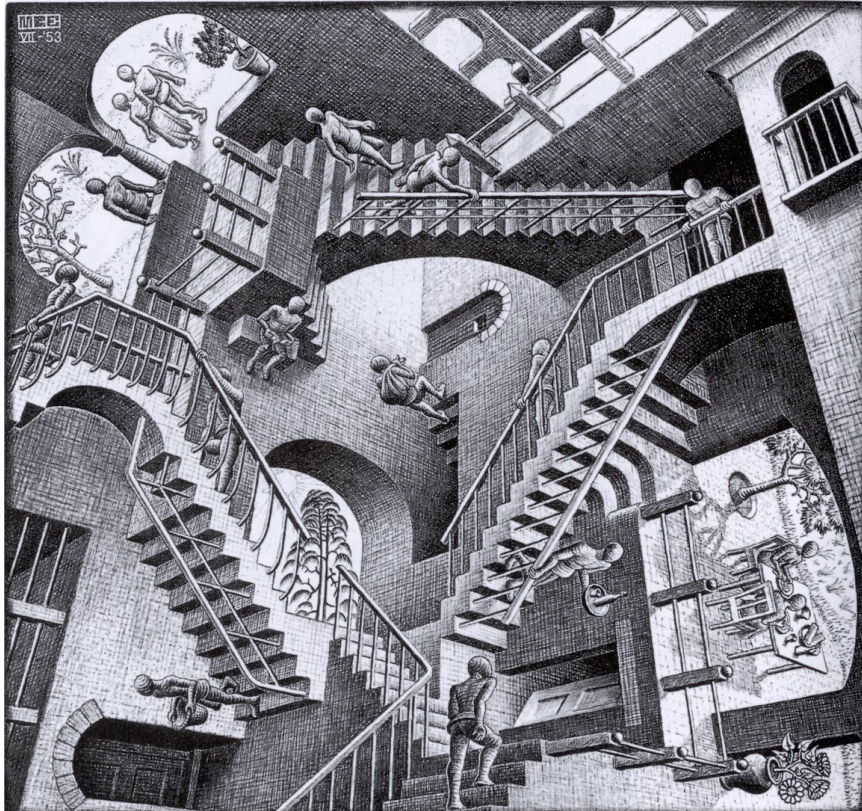
SEMESTRE 2016-II

10 DE MARZO DE 2016

Tarea # 4. Multipolos, Electrostatica de Medios Macroscópicos, Dieléctricos.

Autor:

Favio VÁZQUEZ[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

Problema 1. Problema 4.1 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las distribuciones de carga mostradas como las partes a y b. Intente obtener resultados para todo los momentos que no se hacen cero válidos para todo l , pero en cada caso encuentre los primeros dos conjuntos de momentos que no se hacen cero al menos.

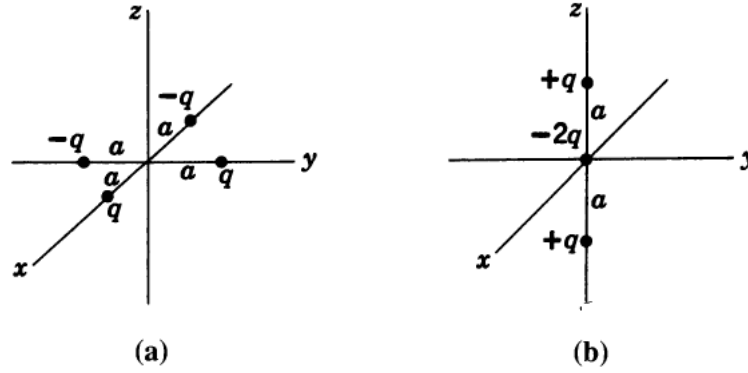


Figura 1: Disposición de la distribución de cargas para el problema 1.

- (c) Para la distribución de carga del segundo conjunto b escriba la expansión multipolar para el potencial. Manteniendo solo los términos de orden bajo en la expansión, grafique el potencial en el plano $x - y$ como una función de la distancia desde el origen para distancias mayores a a .
- (d) Calcule directamente de la ley de Coulomb el potencial exacto para b en el plano $x - y$. Grafíquelo como una función de la distancia y compare con el resultados encontrado en la parte c .

Divida la forma asintótica en las partes c y d para ver el comportamiento a distancias grandes más claramente.

Solución:

Comenzamos recordando la ecuación para los momentos multipolares¹

$$q_{lm} = \sum_i q_i r_i^l Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i), \quad (1.1)$$

donde (r_i, θ_i, ϕ_i) es la posición de la i -ésima carga, q_i es la magnitud de la i -ésima carga y $Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i)$ son los armónicos esféricos. Viendo la figura de la parte (a) vemos que las cargas, en coordenadas esféricas se ubican según la siguiente tabla²

Carga	r	θ	ϕ
$+q$	a	$\pi/2$	0
$+q$	a	$\pi/2$	$\pi/2$
$-q$	a	$\pi/2$	π
$-q$	a	$\pi/2$	$3\pi/2$

¹Ver ecuación (4.3) de Jackson [1].

²La primera carga es la ubicada en $(x = 0, y = a, z = 0)$

Entonces utilizando esta información tenemos

$$q_{lm} = qa^l \left[Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) + Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) - Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) - Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right]. \quad (1.2)$$

Pero recordando que³

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1.3)$$

donde $P_l^m(\cos \theta)$ son las funciones de Legendre asociadas (ver ecuación (3.49) de Jackson) y

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi), \quad (1.4)$$

podemos escribir entonces

$$q_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [e^{i(-m)(0)} + e^{i(-m)(\pi/2)} - e^{i(-m)(\pi)} - e^{i(-m)(3\pi/2)}] P_l^m(\cos \frac{\pi}{2}),$$

pero

$$\begin{aligned} e^{i(-m)(0)} &= 1, \\ e^{i(-m)(\pi/2)} &= (e^{-i\pi/2})^m = (-i)^m, \\ e^{i(-m)(\pi)} &= (e^{-i\pi})^m = (-1)^m, \\ e^{i(-m)(3\pi/2)} &= (e^{-i3\pi/2})^m = i^m. \end{aligned}$$

Tenemos entonces,

$$q_{lm} = qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [1 + (-i)^m - (-1)^m - i^m] P_l^m(0), \quad (1.5)$$

el término entre corchetes $[1 + (-i)^m - (-1)^m - i^m]$ es cero para m par, y se hace $(2 - 2i)$ para $m = -7, -3, 1, 5, 9, \dots$ y $(2 + 2i)$ para $m = -5, -1, 3, 7, \dots$, además por las propiedades de $P_l^m(0)$ sabemos que se hace cero cuando l y m tienen signos diferentes. Estas dos consideraciones no hacen ver que los únicos momentos que no se hacen cero son aquellos con l y m impares. Y como el texto lo solicita, los primeros conjuntos de momentos que no se hacen cero son

$$q_{1,\pm 1} = \mp qa \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (1 \mp i), \quad (1.6)$$

$$q_{3,\pm 1} = \pm qa^3 \sqrt{\frac{21}{\pi}} (1 \mp i), \quad (1.7)$$

$$q_{3,\pm 3} = \mp qa^3 \sqrt{\frac{35}{16\pi}} (1 \pm i), \quad (1.8)$$

³Ver ecuación (3.53) y (3.54) de Jackson [1]

(b) Viendo la figura de la parte (b) vemos que las cargas, en coordenadas esféricas se ubican según la siguiente tabla⁴

Carga	r	θ	ϕ
$+q$	a	0	0
$-2q$	0	0	0
$+q$	a	π	0

Entonces,

$$q_{lm} = q \left[a^l Y_{lm}^*(0, 0) - \cancel{(0)^l Y_{lm}^*(0, 0)} + a^l Y_{lm}^*(\pi, 0) \right], \quad (1.9)$$

y usando (1.3) podemos escribir esto como

$$q_{lm} = qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left[e^{im(0)} P_l^m(\cos(0)) + e^{im(0)} P_l^m(\cos(\pi)) \right], \quad (1.10)$$

$$\therefore q_{lm} qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [P_l^m(1) + P_l^m(-1)]. \quad (1.11)$$

Debido a que el sistema tiene simetría azimutal, solamente los términos con $m = 0$ serán distintos de cero, y notando que $P_l^0(1) = 1, P_l^0(-1) = (-1)^l$ tenemos que

$$q_{l0} = qa^l \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right]^{1/2} [1 + (-1)^l], \quad (1.12)$$

y tendremos que para l par y $m = 0$,

$$q_{l0} = 2qa^l \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right], \quad (1.13)$$

y para l impar o $m \neq 0$ $q_{l0} = 0$. Los primeros momentos que no se hacen cero son

$$q_{2,0} = qa^2 \sqrt{\frac{5}{\pi}}, \quad (1.14)$$

$$q_{4,0} = qa^4 \sqrt{\frac{9}{\pi}}. \quad (1.15)$$

(c) La expansión multipolar para el potencial podemos escribirla como⁵

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (1.16)$$

y sustituyendo (1.13) obtenemos

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left(qa^{2l} \sqrt{\frac{(4l+1)}{4\pi}} \right) \frac{Y_{2l,0}(\theta, \phi)}{r^{2l+1}}, \quad (1.17)$$

⁴La primera carga es la ubicada en $(x = 0, y = 0, z = a)$

⁵Ver ecuación (4.1) de Jackson [1].

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=1} P_{2l}(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2l}. \quad (1.18)$$

El término de orden más bajo se da cuando $l = 1$,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{r^3} \left[\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \right], \quad (1.19)$$

que en el plano $x - y$, donde $\theta = \pi/2$ tenemos

$$\Phi_{x-y}(r, \theta) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{r^3}. \quad (1.20)$$

Cuyo gráfico es

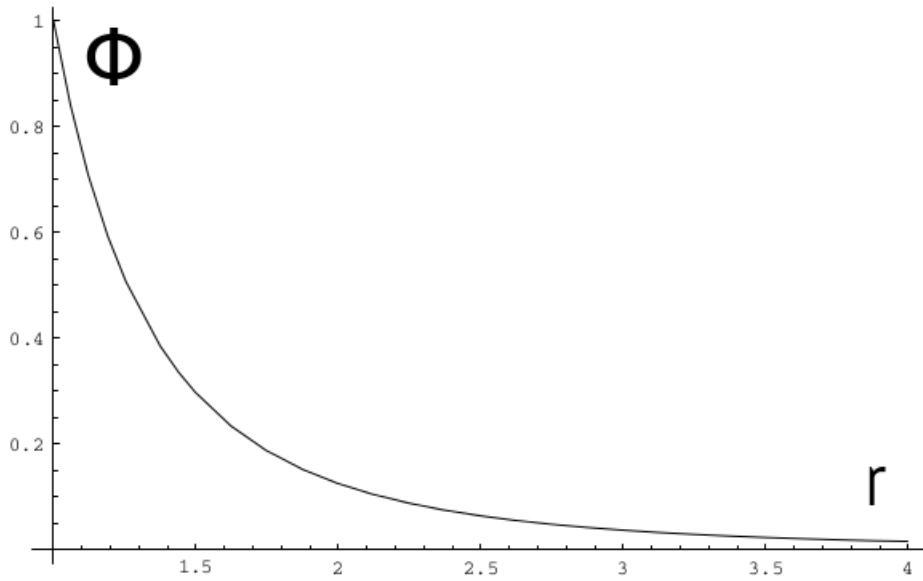


Figura 2: Gráfico del potencial aproximado utilizando expansión multipolar para términos de orden bajo en el plano $x - y$.

(d) Utilizando la ley de Coulomb podemos escribir el potencial como

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}|} \frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{2}{|\mathbf{r}|} \right],$$

que en el plano $x - y$ se escribe

$$\Phi = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} - \frac{1}{r} \right], \quad (1.21)$$

o

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{2}{\sqrt{(r/a)^2 + 1}} - \frac{2}{(r/a)} \right]. \quad (1.22)$$

Cuyo gráfico es

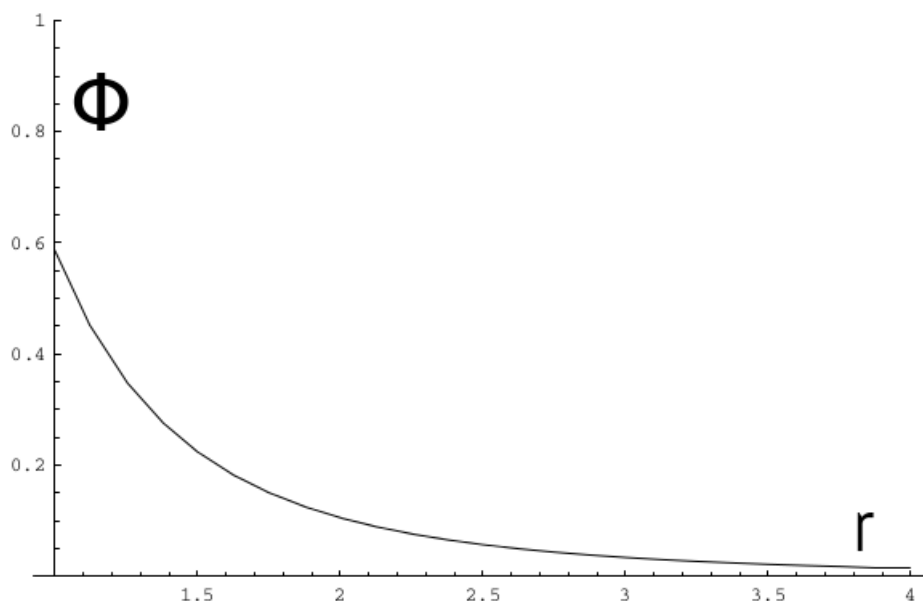


Figura 3: Gráfico del potencial exacto, en el plano $x - y$, utilizando la ley de Coulomb

Con lo cual vemos que el primer término en la expansión multipolar es una buena aproximación para distancias $r \approx 2a$, pero impreciso para otras más pequeñas.

Si dividimos ahora la forma asintótica en las partes (c) y (d) para ver el comportamiento a distancias grandes, lo que tenemos que hacer es dividir por $1/r^3$ tanto el potencial aproximado como el exacto, obteniendo el siguiente gráfico

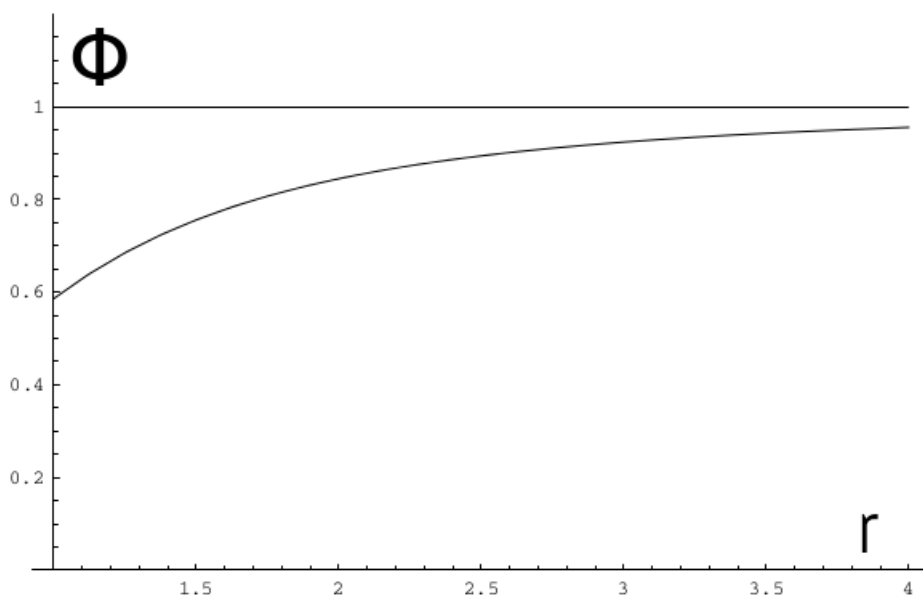


Figura 4: Comportamiento del potencial tanto para la forma aproximada como para la exacta, donde se ha dividido la forma asintótica. La línea recta es la aproximación de la parte (c) y la otra es la obtenida con la ley de Coulomb en la parte (d).

Vemos que la aproximación mejora para $r \gg a$.

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 2. Problema 4.7 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una distribución de carga localizada tiene la densidad de carga

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta$$

- (a) Haga una expansión multipolar del potencial debido a esta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares que no se hacen cero. Escriba el potencial a grandes distancias como una expansión finita en polinomios de Legendre.
- (b) Determine el potencial explícitamente en cualquier punto del espacio, y muestre que cerca del origen, correcto a r^2 inclusive,

$$\Phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \theta) \right]$$

- (c) Si existe en el origen un núcleo con un momento cuadrupolar $Q = 10^{-28} \text{ m}^2$, determine la magnitud de la energía de interacción, asumiendo que la unidad de carga en $\rho(\mathbf{r})$ arriba es la carga electrónica y que la unidad de longitud es el radio de Bohr del hidrógeno $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar/me^2 = 0,529 \times 10^{-10} \text{ m}$. Expresé su respuesta como una frecuencia dividida por la constante de Planck h .

La densidad de carga en este problema es la de los estados $m = \pm 1$ del nivel $2p$ en el hidrógeno, mientras que la interacción cuadrupolar es del mismo orden que el encontrado en moléculas.

Solución:

- (a) Recordando que la expresión integral para los momentos multipolares es

$$q_{lm} = \int \rho(r', \theta', \phi') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') dV', \quad (2.1)$$

y debido a que no hay dependencia en ϕ en el problema, solo serán distintos de cero los momentos con $m = 0$. Tenemos entonces⁶ (ver ecuación (3.57) de Jackson [1])

$$q_{l0} = \frac{1}{64\pi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{l+4} e^{-r} \sin^3 \theta P_l(\cos \theta) dr d\theta d\phi \quad (2.2)$$

que por propiedades de los polinomios de Legendre⁷

$$q_{l0} = \frac{1}{32} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[\int_0^\infty r^{l+4} e^{-r} dr \right] \left[\int_{-1}^1 (1-x^2) P_l(x) dx \right], \quad (2.3)$$

La segunda integral puede escribirse como

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) P_l(x) dx = \int_{-1}^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^1 x^2 P_l(x) dx, \quad (2.4)$$

y por la ortogonalidad de los polinomios de Legendre vemos que la primera integral no es cero solamente para $l = 0$ y por lo tanto será igual a 2, y para la segunda integral podemos

⁶Ver el problema anterior para una referencia sobre la relación entre los armónicos esféricos y los polinomios de Legendre.

⁷Ver sección 3.3 de Jackson [1].

usar la ecuación 3.32 de Jackson [1] que nos dice que esta integral tendrá un valor de $2/3$ para $l = 0$, $4/15$ para $l = 2$ y será cero para cualquier otro valor de l . Por lo tanto

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)P_l(x)dx = \begin{cases} \frac{4}{3}, & l = 0 \\ -\frac{5}{15}, & l = 2 \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Entonces solo necesitamos evaluar la otra integral para $l = 0$ y $l = 2$, y de tablas de integrales vemos que⁸

$$\int_0^\infty r^n e^{-r} dr = n!, \quad (2.6)$$

$$\therefore \int_0^\infty r^{l+4} e^{-r} dr = (l+4)! \quad (2.7)$$

y tenemos entonces

$$\int_0^\infty r^{l+4} e^{-r} dr = \begin{cases} 24, & l = 0 \\ 720, & l = 2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Y utilizando estos resultados encontramos que los momentos multipolares que no se hacen cero son

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}. \quad (2.9)$$

$$q_{20} = -6\sqrt{\frac{5}{4\pi}}. \quad (2.10)$$

Ahora, la expansión multipolar del potencial podemos escribirla como⁹

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (2.11)$$

que con los momentos multipolares que hemos encontrado puede escribirse como

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{6}{r^3} P_2(\cos \theta) \right] \quad (2.12)$$

$$\therefore \Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{6}{r^2} P_2(\cos \theta) \right]. \quad (2.13)$$

(b) La forma explícita para el potencial en cualquier punto del espacio la calculamos con

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \quad (2.14)$$

⁸<http://1.usa.gov/1TxNpSt>

⁹Ver ecuación (4.1) de Jackson [1].

expandiendo el término $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ en armónicos esféricos y usando la diferencial de volumen en coordenadas esféricas podemos escribir (usando la notación de Jackson [1])

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{64\pi\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \phi) \left[\int \frac{r'^l}{r^{l+1}} r'^4 e^{-r'} dr' \right] \left[\int Y_{lm}^*(\theta', \phi') \sin^3 \theta' d\theta' d\phi' \right], \quad (2.15)$$

$$\therefore \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{128\pi\epsilon_0} \sum_l P_l(\cos \theta) \left[\int \frac{r'^l}{r^{l+1}} r'^4 e^{-r'} dr' \right] \left[\int_{-1}^1 (1-x^2) P_l(x) dx \right]. \quad (2.16)$$

De nuevo como arriba, todos los términos con $m \neq 0$ serán cero. Ya hemos resuelto la integral de la derecha, y sustituyendo estos valores encontramos que¹⁰

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{128} \left[\frac{4}{3} \xi_0 - \frac{4}{15} \xi_2 P_2(\cos \theta) \right], \quad (2.17)$$

donde ξ_l se refiere a la integral en r' . Esta integral solo debe evaluarse para $l = 0$ y para $l = 2$. Para el caso en que $l = 0$ tenemos

$$\xi_0 = \frac{1}{r} \int_0^r r'^4 e^{-r'} dr' + \int_r^\infty r'^3 e^{-r'} dr', \quad (2.18)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{r} [24 - e^{-r}(r^3 + 6r^2 + 18r + 24)], \quad (2.19)$$

y para el caso en que $l = 2$ tenemos

$$\xi_2 = \frac{1}{r^3} \int_0^r r'^6 e^{-r'} dr' + r^2 \int_r^\infty r' e^{-r'} dr', \quad (2.20)$$

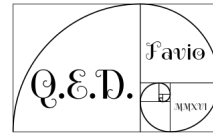
$$\xi_2 = \frac{1}{r^3} [720 - e^{-r}(r^6 + 6r^5 + 30r^4 + 120r^3 + 360r^2 + 720r + 720)] + r^2 [e^{-r}(1-r)]$$

Lo cual completa el cálculo del potencial en cualquier punto del espacio. Ahora cerca del origen, es decir cuando $r \rightarrow 0$ tenemos

$$\xi_0 \simeq 6, \quad \xi_2 \simeq r^2 - 2r^3 + \frac{3}{2}r^4. \quad (2.21)$$

Por lo tanto al sustituir estas expresiones en la ecuación que encontramos para el potencial en todo punto del espacio encontramos

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \theta) \right]. \quad (2.22)$$



¹⁰Utilizando una muy inteligente notación de <http://homerreid.dyndns.org/physics/jackson/>

(c) La energía de la interacción cuadrupolar está dada por el tercer término de la ecuación (4.24) de Jackson [1],

$$W^{(4)} = -\frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \left. \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right|_{x=0}, \quad (2.23)$$

además para un núcleo atómico tenemos simetría en el eje z (eje arbitrario), por lo tanto se cumple que¹¹

$$Q_{33} = -2Q_{11} = -2Q_{22} = eQ, \quad (2.24)$$

y todos las demás componentes son cero. Y entonces

$$W = \frac{eQ}{6} \left| \frac{1}{2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad (2.25)$$

que podemos escribir como

$$W = \frac{eQ}{6} \left| \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{3}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad (2.26)$$

y utilizando la ley de Gauss encontramos

$$W = \frac{eQ}{6} \left| \frac{1}{2} \overset{0}{\cancel{\rho}} \epsilon_0 - \frac{3}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad (2.27)$$

donde recordamos que $\rho \rightarrow 0$ en el origen. Tenemos entonces

$$W = -\frac{eQ}{4} \left| \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad (2.28)$$

$$\therefore W = -\frac{eQ}{4} \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{\mathbf{x}=0}. \quad (2.29)$$

Para calcular esta última derivada parcial necesitamos expresar el potencial obtenido en el inciso anterior en coordenadas cartesianas, que ignorando la parte constante podemos escribir como

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{480\pi\epsilon_0} r^2 P_2(\cos \theta), \quad (2.30)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{960\pi\epsilon_0} r^2 (3 \cos \theta - 1), \quad (2.31)$$

usando la definición de r y de $\cos \theta$

$$\therefore \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{960\pi\epsilon_0} (2z^2 - x^2 - y^2), \quad (2.32)$$

y diferenciando obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{240\pi\epsilon_0}, \quad (2.33)$$

¹¹Ver ecuación (2.38) de Marion y Heald [2].

y sustituyendo este resultado en la ecuación para W obtenemos

$$W = \frac{eQ}{960\pi\epsilon_0}, \quad (2.34)$$

ahora para asegurar que las dimensiones están correctas debemos multiplicar por e y dividir por a_0^3 , obtenemos entonces

$$\frac{W}{\hbar} = \frac{1}{240} \frac{e^2 Q}{4\pi\epsilon_0 \hbar a_0^3}, \quad (2.35)$$

que podemos escribir como¹²

$$\frac{W}{\hbar} = \frac{1}{240} \frac{\alpha c Q}{a_0^3}, \quad (2.36)$$

y sustituyendo los valores que nos da el texto encontramos

$$\boxed{\frac{W}{\hbar} = 6,16 \times 10^6 \text{ rad/s} \simeq 1 \text{ MHz}}. \quad (2.37)$$

¹²Utilizando la ecuación para la constante de estructura fina $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$.

Problema 3. Problema 4.8 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Un cascarón cilíndrico, muy largo y circular recto, de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radio interno y externo a y b , respectivamente, es colocado en un previamente campo eléctrico uniforme E_0 con su eje perpendicular al campo. El medio adentro y afuera del cilindro tiene una constante dieléctrica de uno.

- (a) Determine el potencial y campo eléctrico en las tres regiones, despreciando efectos finales.
- (b) Esboce las líneas de fuerza para un caso típico de $b \simeq 2a$.
- (c) Discuta las formas limitantes en su solución apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme, y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Solución:

Debido a que el cilindro es muy largo y uniforme sobre su eje, y el campo original es también uniforme, el problema puede reducirse a dos dimensiones, y por la simetría del mismo trabajaremos en coordenadas polares. Supongamos además que el campo apunta hacia el lado positivo del eje x .

Por otra parte, ya que no hay carga libre en ningún lado, y además no hay carga ligada en ningún lado excepto la superficie del cilindro, podemos dividir el problema en tres regiones, y usar la solución a la respectiva ecuación de Laplace en cada región.

Recordemos que la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares cuando se trabaja con un barrido angular total es¹³

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m})(A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}). \quad (3.1)$$

La región interna incluye el origen, por lo que debe tener la forma

$$\Phi_{\rho < a} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}). \quad (3.2)$$

La región externa debe comportarse como un campo uniforme a distancias grandes, entonces recordando que hemos escogido que el campo apunta hacia el lado positivo del eje x

$$-E_0 \rho \cos \phi = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m})(A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}), \quad (3.3)$$

debido a la ortogonalidad tenemos que $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, y solo el término con $m = 1$ no se hace cero, y $A_1 = B_1$, entonces

$$-E_0 = a_1 2B_1, \quad (3.4)$$

por lo que la solución se convierte en

$$\Phi_{\rho > b} = (-E_0 \rho + b_1 \rho^1) \cos \theta. \quad (3.5)$$

¹³Ver ecuación (2.71) de Jackson [1].

La región del medio simplemente conecta las otras dos regiones,

$$\therefore \Phi_{a < \rho < b} = c_0 + d_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \rho^m + d_m \rho^{-m}) (C_m e^{im\phi} + D_m e^{-im\phi}). \quad (3.6)$$

Debemos ahora calcular estos parámetros que hemos puesto a lo largo de las expresiones para los potenciales; para hacer esto partimos de las condiciones de frontera que deben cumplirse, i.e.

$$(\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma, \quad (3.7)$$

pero debido a que no hay carga libre y que el campo eléctrico se propaga la dirección radial tenemos

$$\epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\rho} = \epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\rho}. \quad (3.8)$$

Aplicando esto a la superficie exterior ($\rho = b$) obtenemos

$$\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi_{\rho > b}}{\partial \rho} \right|_{\rho=b} = \epsilon \left. \frac{\partial \Phi_{a < \rho < b}}{\partial \rho} \right|_{\rho=b}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \left. \frac{\partial}{\partial \rho} [(-E_0 \rho + b_1 \rho^1) \cos \phi] \right|_{\rho=b} &= \epsilon \left. \frac{\partial}{\partial \rho} [c_0 + d_0 \ln \rho \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \rho^m + d_m \rho^{-m}) (C_m e^{im\phi} + D_m e^{-im\phi})] \right|_{\rho=b}, \end{aligned}$$

$$\therefore \epsilon_0 [(-E_0 - b_1 b^{-2}) \cos \phi] = \epsilon \left[d_0 \frac{1}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m m b^{m-1} - m d_m b^{-m-1}) (C_m e^{im\phi} + D_m e^{-im\phi}) \right].$$

Debido a la ortogonalidad encontramos que $d_0 = 0$, $D_m = C_m$ y solamente se mantienen los términos con $m = 1$; también podemos despreciar el c_0 ya que es una constante que no afecta el resultado final, entonces

$$\epsilon_0 [(-E_0 - b_1 b^{-2}) \cos \phi] = \epsilon [(c_1 - d_1 b^{-2}) C_1 2 \cos \phi], \quad (3.10)$$

combinando ahora los factores de c_1 con C_1 encontramos

$$C_1 = \frac{-\epsilon_0 (-E_0 - b_1 b^{-2})}{2\epsilon (1 - d_1 b^{-2})}, \quad (3.11)$$

y la solución del medio se convierte por ahora en

$$\Phi_{a < \rho < b} = -(\rho + d_1 \rho^{-1}) \frac{-\epsilon_0 (-E_0 - b_1 b^{-2})}{2\epsilon (1 - d_1 b^{-2})} \cos \phi. \quad (3.12)$$

Aplicando la otra condición de frontera en la superficie exterior ($\rho = b$)

$$E_{r,2}|_{\rho=b} = E_{r,1}|_{\rho=b}, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\rho > b}}{\partial \rho} \right|_{\rho=b} = \left. \frac{\partial \Phi_{a < \rho < b}}{\partial \rho} \right|_{\rho=b},$$

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi} [(-E_0 \rho + b_1 \rho^1) \cos \phi] \right|_{\rho=b} = \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \left[c_0 - (\rho + d_1 \rho^{-1}) \frac{-\epsilon_0(-E_0 - b_1 b^{-2})}{2\epsilon(1 - d_1 b^{-2})} \cos \phi \right] \right|_{\rho=b}$$

$$\therefore (E_0 - b_1 b^{-2})\epsilon(1 - d_1 b^{-2}) = (1 + d_1 b^{-2})\epsilon_0(E_0 + b_1 b^{-2}), \quad (3.14)$$

y entonces

$$d_1 = b^2 \frac{b_1(\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon - \epsilon_0)}{b_1(\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon + \epsilon_0)}, \quad (3.15)$$

y la solución en la región central se convierte en

$$\Phi_{a < \rho < b} = \frac{1}{2\epsilon b^2} \cos \phi \{ b_1(\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon + \epsilon_0)\rho + b^2[(b_1(\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon - \epsilon_0)\rho^{-1}] \}.$$

Ahora aplicando las condiciones de frontera en la superficie interna ($\rho = a$)

$$\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi_{\rho > b}}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \epsilon \left. \frac{\partial \Phi_{a < \rho < b}}{\partial \rho} \right|_{\rho=a}, \quad (3.16)$$

obtenemos

$$\frac{1}{2b^2} \{ b_1(\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon + \epsilon_0) + b^2[(b_1(\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon - \epsilon_0)]a^{-2} \} = \epsilon_0 A_1, \quad (3.17)$$

y

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\rho > b}}{\partial \phi} \right|_{\rho=a} = \left. \frac{\partial \Phi_{a < \rho < b}}{\partial \phi} \right|_{\rho=a}, \quad (3.18)$$

obtenemos

$$\frac{1}{2\epsilon a b^2} \{ [b_1(\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon + \epsilon_0)]a + b^2[(b_1(\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2(\epsilon - \epsilon_0)]a^{-1} \} = A_1, \quad (3.19)$$

Y resolviendo este sistema de ecuaciones con **Mathematica**[®] obtenemos

$$b_1 = E_0 b^2 \frac{(b^2 - a^2)(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2}, \quad (3.20)$$

y

$$A_1 = -\frac{4b^2 E_0 \epsilon \epsilon_0}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2}. \quad (3.21)$$

Ya tenemos todos los parámetros que necesitamos para escribir las expresiones que encontramos arriba para los potenciales en las tres regiones, que resultan

$$\Phi_{\rho < a} = E_0 \rho \cos \phi \left[-\frac{4b^2 E_0 \epsilon \epsilon_0}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \right], \quad (3.22)$$

$$\Phi_{a < \rho < b} = \frac{-2ab^2 \epsilon_0}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \left[(\epsilon + \epsilon_0) \frac{\rho}{a} + (\epsilon + \epsilon_0) \frac{a}{\rho} \right] E_0 \cos \phi, \quad (3.23)$$

$$\Phi_{\rho>b} = E_0 \cos \phi \left[-\rho + \frac{(b^2 - a^2)(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \frac{b^2}{\rho} \right]. \quad (3.24)$$

Para obtener los campos eléctricos utilizamos

$$\mathbf{E} = -\hat{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \quad (3.25)$$

y luego de hacer las derivadas y un poco de álgebra, recordando la dirección del campo eléctrico que hemos escogido, obtenemos

$$\mathbf{E}_{\rho<a} = E_0 \left[-\frac{4b^2 E_0 \epsilon \epsilon_0}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \right] \hat{i}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{E}_{a<\rho<b} = \frac{2ab^2 \epsilon_0 E_0}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \left[(\epsilon + \epsilon_0) \hat{i} - (\epsilon - \epsilon_0) \frac{a^2}{\rho^2} (\hat{i} + 2\hat{\phi} \sin \phi) \right], \quad (3.27)$$

$$E_{\rho>b} = E_0 \hat{i} + \frac{(b^2 - a^2)(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \frac{b^2}{\rho^2} E_0 (\hat{i} + 2\hat{\phi} \sin \phi). \quad (3.28)$$

(b) Para esbozar las líneas de fuerza para un caso típico de $b \simeq 2a$, primero hagamos esta sustitución en los campos eléctricos que hemos encontrado en el inciso anterior

$$\mathbf{E}_{\rho<a} = E_0 \left[-\frac{16E_0 \epsilon \epsilon_0}{4(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \right] \hat{i}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{E}_{a<\rho<b} = \frac{8\epsilon_0 E_0}{4(\epsilon + \epsilon_0)^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2} \left[(\epsilon + \epsilon_0) \hat{i} - (\epsilon - \epsilon_0) \frac{a^2}{\rho^2} (\hat{i} + 2\hat{\phi} \sin \phi) \right], \quad (3.30)$$

$$E_{\rho>b} = E_0 \hat{i} + \frac{12(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{4(\epsilon + \epsilon_0)^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2} \frac{a^2}{\rho^2} E_0 (\hat{i} + 2\hat{\phi} \sin \phi). \quad (3.31)$$

El gráfico de estas tres regiones es el siguiente

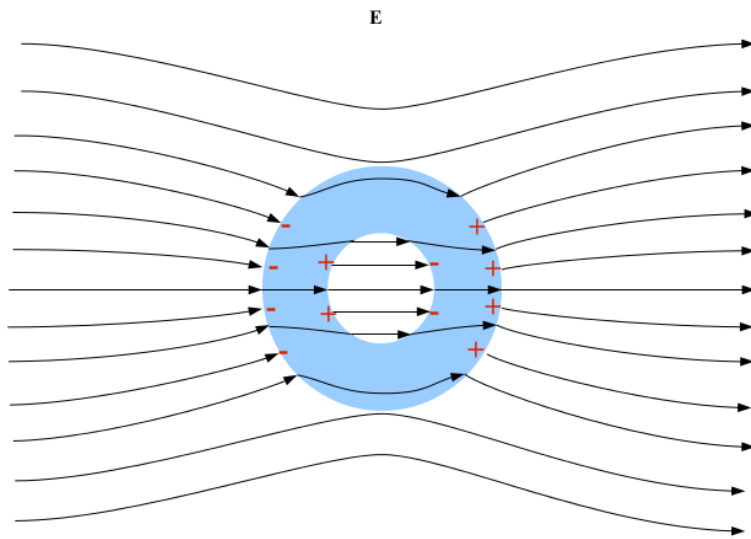


Figura 5: Gráfico del comportamiento del campo eléctrico para el caso $b \simeq 2a$. Notar que la figura no la realicé completamente yo, la tome de <http://bit.ly/1psllha> y la modifiqué un poco.

(c) Para un cilindro dieléctrico sólido en un campo, solamente tenemos que hacer $a \rightarrow 0$, y tenemos

$$\mathbf{E}_{\rho < b} = \frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} E_0 \hat{i}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{E}_{\rho > b} = E_0 \hat{i} + \frac{(\epsilon - \epsilon_0)b^2}{(\epsilon + \epsilon_0)\rho^2} E_0 (\hat{i} + 2\hat{\phi} \sin \phi). \quad (3.33)$$

Para una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme, solamente tenemos que hacer $b \rightarrow 0$, y obtenemos

$$\mathbf{E}_{\rho < a} = \frac{3\epsilon\epsilon_0}{(\epsilon + \epsilon_0)^2} E_0 \hat{i}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{E}_{\rho > a} = \frac{2\epsilon_0}{(\epsilon + \epsilon_0)^2} E_0 \left[(\epsilon + \epsilon_0) \hat{i} - (\epsilon - \epsilon_0) \frac{a^2}{\rho^2} (\hat{i} + 2\hat{\phi} \sin \phi) \right]. \quad (3.35)$$

Problema 4. Problema 4.9 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una carga puntual q es colocada en el espacio libre a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a ($a < d$) y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 .

- (a) Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio como una expansión en armónicos esféricos.
- (b) Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera.
- (c) Verifique que, en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$, tu resultado es el mismo que para la esfera conductora.

Solución:

Si colocamos la esfera en el origen y la carga puntual en el eje z a una distancia $z = d$ el problema tendrá simetría azimutal, y por lo tanto $m = 0$ y la solución puede expresarse en términos de los polinomios de Legendre, lo cual será más simple que en armónicos esféricos, y no se pierde generalidad con esta suposición.

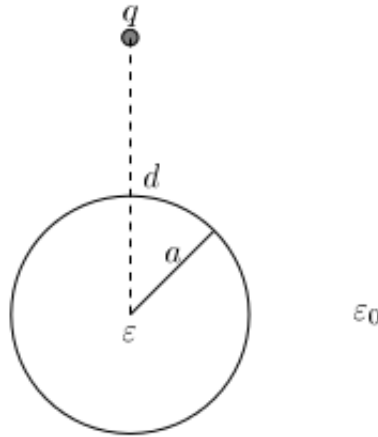


Figura 6: Geometría asumida para el sistema del problema 4.

Debemos resolver el problema para las dos regiones, y utilizar las condiciones de frontera para así encontrar una solución completa. Tenemos las siguientes dos regiones:

$$\Phi_{r < a} \quad \text{donde tenemos } \epsilon, \quad (4.1)$$

$$\Phi_{r > a} \quad \text{donde tenemos } \epsilon_0. \quad (4.2)$$

Resolvamos primero la región $r > a$ utilizando el método de imágenes. Para esto colocamos una carga imagen q' en $z = a^2/d$ para dar cuenta de los efectos de la esfera dieléctrica, y la posición que hemos escogido ha sido basada en los resultados obtenidos en la sección 2.2 de Jackson [1], específicamente la ecuación (2.4). El potencial en la región exterior debido a la carga puntual y la carga imagen es

$$\Phi_{r > a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - d\hat{z}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - (a^2/d)\hat{z}|} \right), \quad (4.3)$$

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

ahora expandiendo en series de polinomios de Legendre y combinando

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{>}^l}{r_{<}^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (4.4)$$

donde $r_{<}$ es el más pequeño entre (r, r_0) . Entonces si $r > d$

$$\Phi_{r>a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{1}{r^{l+1}} \left(qd^l + q' \frac{a^{2l}}{d^l} \right), \quad (4.5)$$

y si $r < d$

$$\Phi_{r>a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(q \frac{r^l}{d^{l+1}} + q' \frac{a^{2l}}{d^l r^{l+1}} \right). \quad (4.6)$$

Resolvamos ahora para el potencial adentro de la esfera. Ya que no hay carga adentro de la esfera, solo necesitamos una carga imagen q'' afuera de la esfera en $z = d$ para simular los efectos de el material dieléctrico. Tenemos entonces

$$\Phi_{r<a} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q''}{|\mathbf{r} - d\hat{z}|} \right). \quad (4.7)$$

Ahora ya que r siempre es más pequeño que d'' , solo necesitamos una expansión

$$\Phi_{r<a} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\sum_{l=0}^{\infty} q'' \frac{r^l}{d^{l+1}} P_l(\cos \theta) \right). \quad (4.8)$$

Para encontrar expresiones para q' y q'' debemos aplicar la condición de frontera en $r = a$ que nos dice que $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma$, y debido a que no hay densidad de carga libre en la superficie de la esfera, esta condición se convierte en¹⁴

$$(\epsilon_0 \mathbf{E}_{r>a} - \epsilon \mathbf{E}_{r<a}) \cdot \hat{r} = 0, \quad (4.9)$$

que implica usando la definición de campo eléctrico dado el potencial eléctrico

$$\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{r>a}}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial \Phi_{r<a}}{\partial r}, \quad (4.10)$$

y derivando obtenemos

$$ql + q'(-l-1) \frac{d}{a} = q''l. \quad (4.11)$$

Aplicando la segunda condición de frontera en $r = a$ que nos dice que $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{12} = 0$ tenemos

$$E_{r<a}|_{\theta} = E_{r>a}|_{\theta}, \quad (4.12)$$

$$\therefore \frac{\partial \Phi_{r>a}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{r<a}}{\partial r}, \quad (4.13)$$

y derivando encontramos

$$q'' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} q + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} q' \frac{d}{a}. \quad (4.14)$$

¹⁴Donde estamos usando el hecho de que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ en este caso.

Resolviendo las ecuaciones en cajas con **Mathematica**[®] encontramos

$$q' = \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1}{d \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon} (l+1) + l \right]}, \quad (4.15)$$

y

$$q'' = \frac{q(2l+1)}{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} (l+1) + l}. \quad (4.16)$$

Podemos escribir el resultado final para los potenciales como

$$\Phi_{r < a} = \frac{q}{4\pi\epsilon d} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{q(2l+1)}{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} (l+1) + l} \left(\frac{r}{d} \right)^l P_l(\cos \theta) \right], \quad (4.17)$$

$$\Phi_{r > a} = \frac{q}{4\pi\epsilon d} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{d^{l+1}}{r^{l+1}} \left[1 + \frac{l \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right)}{\left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon} (l+1) + l \right]} \left(\frac{a}{d} \right)^{2l+1} \right] \quad \text{si } r > d, \quad (4.18)$$

$$\Phi_{r > a} = \frac{q}{4\pi\epsilon d} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[\left(\frac{r}{d} \right)^l + \frac{l \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right)}{\left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon} (l+1) + l \right]} \left(\frac{a}{d} \right)^l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] \quad \text{si } r < d. \quad (4.19)$$

(b) Cerca del centro de la esfera tenemos $r \ll d \rightarrow r/d \ll 1$. Debido a que el campo interno está en términos de potencias de r/d , los órdenes superiores pueden despreciarse

$$\Phi_{r \ll d} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[1 + \frac{3}{1 + 2\epsilon_0/\epsilon} \frac{r}{d} \cos \theta \right], \quad (4.20)$$

que podemos escribir como

$$\Phi_{r \ll d} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[1 + \frac{3}{2 + \epsilon/\epsilon_0} \frac{z}{d} \right]. \quad (4.21)$$

El campo eléctrico lo calculamos con

$$\mathbf{E}_{r \ll d} = -\nabla \Phi_{r \ll d}, \quad (4.22)$$

que resulta en

$$\mathbf{E}_{r \ll d} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[\frac{3}{2 + \epsilon/\epsilon_0} \right] \hat{z}. \quad (4.23)$$

El campo eléctrico cerca del centro de la esfera apunta hacia el lado contrario de la carga puntual, en la dirección negativa del eje z .

(c) En el límite en que ϵ/ϵ_0 , vemos que todos los términos de la serie se hacen cero menos el término con $l = 0$, entonces

$$\Phi_{r < a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad (4.24)$$

exactamente lo que encontramos para una esfera conductora. Y el otro caso, comenzamos por reescribir $\Phi_{r > a}$ como

$$\Phi_{r > a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{rd} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) - \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l}}{(rd)^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (4.25)$$

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

pero según la ecuación (3.38) de Jackson [1]

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - d\mathbf{z}|}, \tag{4.26}$$

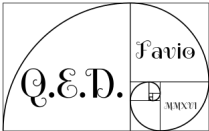
y

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l}}{(rd)^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{|a^2\mathbf{z} - d\mathbf{r}|}, \tag{4.27}$$

por lo tanto

$$\Phi_{r>a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a}{rd} + \frac{1}{|\mathbf{r} - d\mathbf{z}|} - \frac{a/d}{|\frac{a^2}{d}\mathbf{z} - d\mathbf{r}|} \right], \tag{4.28}$$

que también tiene la misma forma que la ecuación (2.8) de Jackson [1] donde se calcula este potencial.



Problema 5. Problema 4.13 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Dos superficies cilíndricas conductoras, largas y coaxiales, de radios a y b son bajadas verticalmente a un líquido dieléctrico. Si el líquido sube una altura promedio de h entre los electrodos cuando una diferencia de potencial V es establecida entre ellos, muestre que la susceptibilidad del líquido es

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho g h \ln(b/a)}{\epsilon_0 V^2}$$

donde ρ es la densidad del líquido, g es la aceleración debida a la gravedad, y la susceptibilidad del aire es depreciada.

Solución:

Referencias

- [1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.
- [2] J. Marion, M. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, 2da edición, Academic Press, 1965.