UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

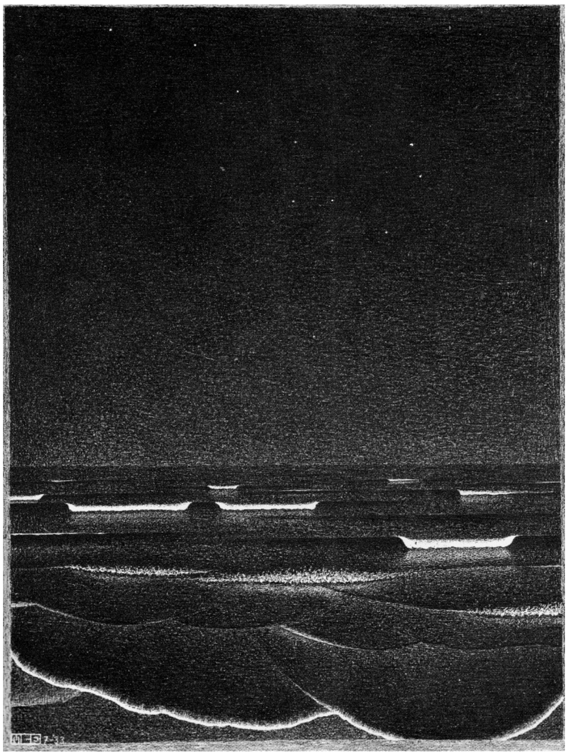
SEMESTRE 2016-II

7 DE ABRIL DE 2016

# Tarea # 6. Ondas electromagnéticas planas y propagación de ondas.

*Autor:*

Favio VÁZQUEZ[†]



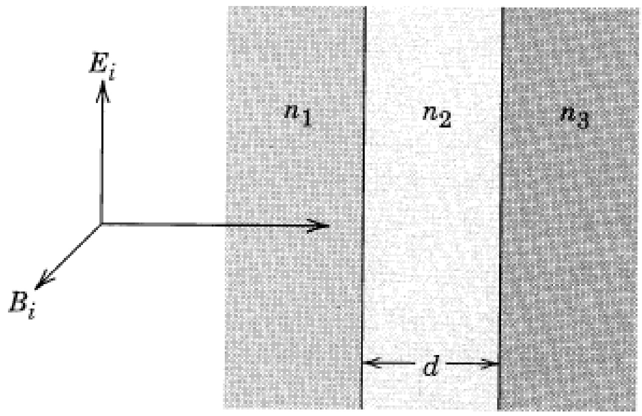
[†] favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

## Problema 1. Problema 7.2 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una onda plana incidente en una interfaz de capas como se muestra en la figura. Los índices de refracción de los tres medios no impermeables son $n_1$, $n_2$ y $n_3$. El grosor de la capa intermedia es $d$. Cada uno de los otros medios es semi-infinito.

**(a)** Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión (las tasas de del flujo de Poynting transmitida y reflejada al flujo incidente), y esboce su comportamiento como función de la frecuencia para $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$; $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$ y $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 1$.




**(b)** El medio $n_1$ es parte de un sistema óptico (e.g., una lente); el medio $n_3$ es aire ($n_3 = 1$). Se desea colocar un revestimiento óptico (medio $n_2$) sobre la superficie para que no haya reflexión para ondas de frecuencia $\omega_0$. ¿Qué grosor $d$ e índice de refracción $n_2$ son necesarios?

<u>Solución:</u>

**(a)** Hago notar de que no encuentro una manera simple de hacer este problema, y el mecanismo que utilicé para solucionarlo fue inspirado en un texto que se llama "A Companion to J.D. Jackson's Classical Electrodynamics", de R. Magyar [2]. En la discusión del capítulo 7 del texto de Jackson [1], argumenta algunas cosas interesantes que pueden utilizarse para resolver este problema, y aunque su discusión es mucho más extensa, la condensé para esta solución. Comencemos entonces.

Como dice el enunciado, una onda electromagnética incide desde la izquierda y viaja por las capas; debido a que tratamos con una onda electromagnética sabemos que $\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{n}} = 0$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$, lo cual nos dice que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares al movimiento de la onda y son mutuamente perpendiculares entre ellas. Ya que los tres medios son no-permeables tenemos que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ y por lo tanto el índice de refracción para cara medio solo dependerá de las $\epsilon_i$.

Pensemos ahora en el recorrido de la onda por las capas. La primera capa puede reflejar la onda y contribuir directamente al coeficiente de reflexión efectivo, o también puede transmitir la onda. La segunda capa también puede reflejar la onda, si esto ocurre viajará de vuelta a la primera capa y puede ser transmitida a la misma. O la onda puede ser reflejada de vuelta. Y esto ocurre también si consideramos la tercera capa, por lo que vemos que el coeficiente de reflexión consistirá en una serie infinita de términos, donde cada término corresponde a una cierta cantidad de rebotes entre las capas antes de que la onda es finalmente reflejada a la izquierda.

Podemos escribir esto como

$$r = r_{12} + t_{12}r_{23}t_{21}\mathrm{e}^{2ik_2d} + t_{12}r_{23}r_{21}t_{21}\mathrm{e}^{4ik_2d} + \dots \tag{1.1}$$

El primer término de esta ecuación corresponde a la reflexión en la interfaz $n_1 - n_2$, el segundo término representa una onda que para por la interfaz $n_1 - n_2$, se refleja en la interfaz $n_2 - n_3$, y luego viaja de vuelta a la interfaz $n_1 - n_2$, y así sucesivamente podemos imaginarnos los términos que corresponden a múltiples reflexiones internas. En esta ecuación vemos el cambio de fase, relacionado con $k_2 = n_2\omega/c$, que en el primer término es el producto de los cambios ya que al llegar la onda va con $ikd$ y al devolverse va con $i(-k)(-d)$, por lo tanto el cambio total de fase será $2ikd$. Si escribimos la ecuación (1.1) como

$$r = r_{12} + [t_{12}r_{23}t_{21}\mathrm{e}2ik_2d][1 + r_{23}r_{21}\mathrm{e}2ik_2d + (r_{23}r_{21})^2\mathrm{e}4ik_2d + \dots], \tag{1.2}$$

y viendo que el segundo término es una serie geométrica que puede escribirse como

$$\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}, \tag{1.3}$$

nos queda que, con $x = r_{23}r_{21}\mathrm{e}^{2ik_2d}$,

$$r = r_{12} + [t_{12}r_{23}t_{21}\mathrm{e}^{2ik_2d}]\left[\frac{1}{1 - r_{23}r_{21}\mathrm{e}^{2ik_2d}}\right]. \tag{1.4}$$

De la ecuación (7.42) de Jackson [1] vemos que

$$r_{ij} = \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j}, \tag{1.5}$$

y

$$t_{ij} = \frac{2n_i}{n_i + n_j}. \tag{1.6}$$

Con estas ecuaciones podemos mostrar que

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = -r_{21}, \tag{1.7}$$

y que

$$t_{12}t_{21} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)\left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right) = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 + r_{12}r_{21}. \tag{1.8}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$r = r_{12} + \frac{(1 + r_{12}r_{21})\mathrm{e}^{2ik_2d}}{1 + r_{12}r_{23}\mathrm{e}^{2ik_2d}} = \frac{r_{12} + r_{23}\mathrm{e}^{2ik_2d}}{1 + r_{12}r_{23}\mathrm{e}^{2ik_2d}}. \tag{1.9}$$

El coeficiente de reflexión se define como $R = |r|^2$, por lo tanto

$$\boxed{R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos(2k_2d)}{1 + 2r_{12}r_{23}\cos(2k_2d) + (r_{12}r_{23})^2}}, \tag{1.10}$$

y debido a que $R+T=1$ el coeficiente de transmisión resulta en

$$\boxed{T=\frac{1-r_{12}^2-r_{23}^2+(r_{12}r_{23})^2}{1+2r_{12}r_{23}\cos{(2k_2d)}+(r_{12}r_{21})^2}}. \tag{1.11}$$

Necesitamos ahora hacer una serie de gráficos para el comportamiento de los coeficientes de reflexión y transmisión que encontramos para distintos índices de refracción.

Si $n_1=1$, $n_2=2$ y $n_3=3$, haciendo $d=1c$ nos queda

$$R=\frac{1/4+1/25+1/5\cos 4\omega}{1+1/100+1/5\cos 4\omega}, \tag{1.12}$$

y

$$T=\frac{1-1/4-1/25+(1/10)^2}{1+1/100+1/5\cos 4\omega} \tag{1.13}$$

cuyo gráfico es

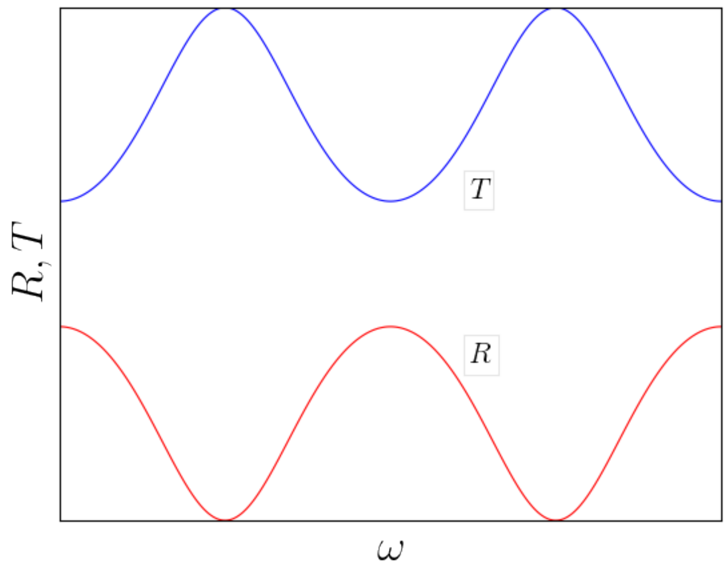



**Figura 1:** Coeficientes de reflexión y transmisión para $n_1=1$, $n_2=2$ y $n_3=3$.

Si $n_1=3$, $n_2=2$ y $n_3=1$ nos queda

$$R=\frac{1/4+1/25+1/5\cos 4\omega}{1+1/100+1/5\cos 4\omega}, \tag{1.14}$$

y

$$T=\frac{1-1/4-1/25+(1/10)^2}{1+1/100+1/5\cos 4\omega} \tag{1.15}$$

cuyo gráfico es el mismo que en el anterior caso

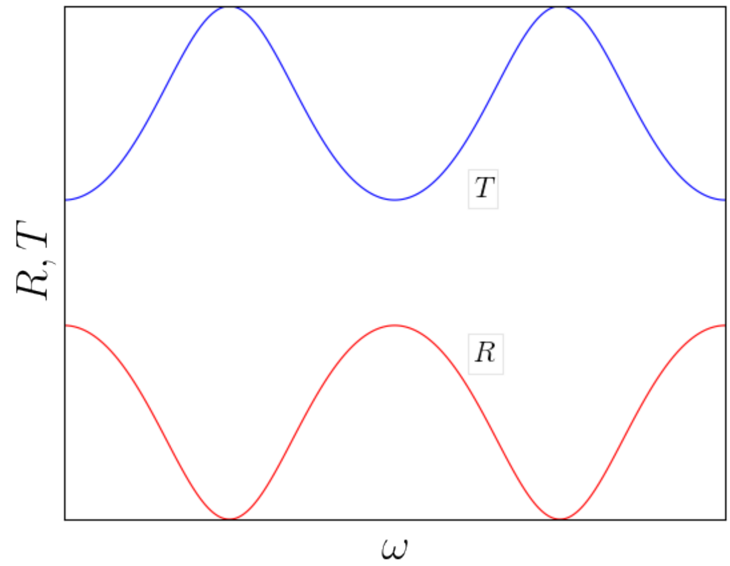



**Figura 2:** Coeficientes de reflexión y transmisión para $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ y $n_3 = 1$.

Si $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ y $n_3 = 1$ nos queda

$$R = \frac{1/9 + 9/25 - 2/5 \cos 8\omega}{1 + 1/25 - 2/5 \cos 8\omega}, \tag{1.16}$$

y

$$T = \frac{1 - 1/9 - 9/25 + 1/25}{1 + 1/25 - 2/5 \cos 8\omega} \tag{1.17}$$

cuyo gráfico es

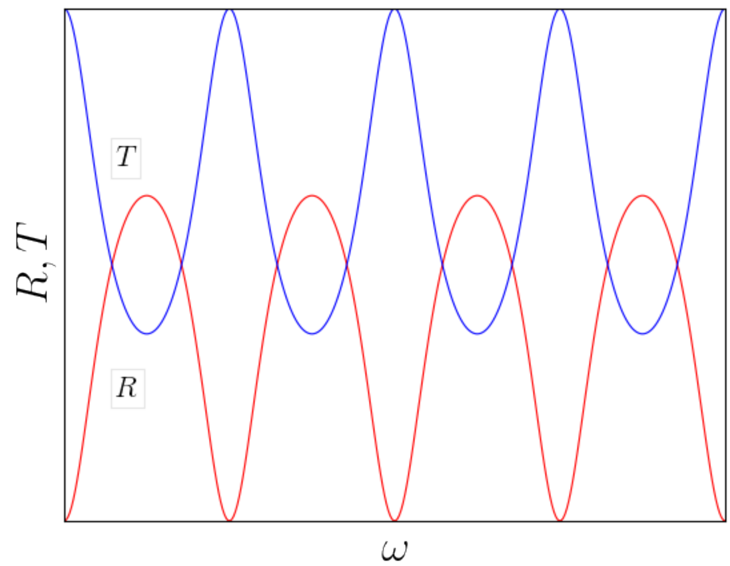



**Figura 3:** Coeficientes de reflexión y transmisión para $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ y $n_3 = 1$.

El código para hacer estas imágenes se encuentra en un repositorio público el cual administro, donde también están los PDF de todas las tareas, así como el código LaTeX con el que las hago. La página es: https://github.com/FavioVazquez/Electrodinamica-Clasica-PCF. Los códigos están en NoteBooks de Python 3, los cuales GitHub renderiza de forma automática y pueden verse en línea.

El código que hace las primeras dos imágenes es:

```python
from __future__ import print_function
import numpy as np
from numpy import arccos, sin, cos, pi, array, sqrt
import matplotlib
matplotlib.use('nbagg')
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc

rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
## for Palatino and other serif fonts use:
#rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
rc('text', usetex=True)

#LaTeX
plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

# Case n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3 and n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 3.

# linespace for omega
omega = np.linspace(0,pi,360)

# Def. of R and T
R_1 = (1/4 + 1/25 + 1/5*cos(4*omega))/(1 + 1/100 + 1/5*cos(4*omega))
T_1 = (1 - 1/4 - 1/25 + 1/100)/(1 + 1/100 + 1/5*cos(4*omega))

# Style
plt.ylabel(r'$R,T$', fontsize=30)
plt.xlabel(r'$\omega$',fontsize=30)
plt.xticks([])
plt.yticks([])

# Legend
plt.text(0.4, 0.33, r"$R$", bbox=dict(facecolor='white', alpha=0.1),
         fontsize=20)
plt.text(0.4, 0.65, r"$T$", bbox=dict(facecolor='white', alpha=0.1),
         fontsize=20)

# Plot
plt.plot(omega,R_1,"red",omega,T_1,"blue")
plt.show()
```

El código que hace la segunda imagen es:

```python
from __future__ import print_function
import numpy as np
from numpy import arccos,sin, cos, pi, array, sqrt
import matplotlib
matplotlib.use('nbagg')
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc

rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
## for Palatino and other serif fonts use:
#rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
rc('text', usetex=True)

#LaTeX
plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

# Case n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 1

# linespace for omega
omega = np.linspace(0,pi,360)

# Def. of R and T
R_2 = (1/9 + 9/25 - 2/5*cos(8*omega))/(1 + 1/25 - 2/5*cos(8*omega))
T_2 = (1 - 1/9 - 9/25 + 1/25)/(1 + 1/25 - 2/5*cos(8*omega))

# Style
plt.ylabel(r'$R,T$', fontsize=30)
plt.xlabel(r'$\omega$',fontsize=30)
plt.xticks([])
plt.yticks([])

# Legend
plt.text(0.25, 0.3, r"$R$", bbox=dict(facecolor='white', alpha=0.1),fontsize=20)
plt.text(0.25, 0.65, r"$T$", bbox=dict(facecolor='white', alpha=0.1),fontsize=20)

# Plot
plt.plot(omega,R_2,"red",omega,T_2,"blue")
plt.show()
```

**(b)** Si $n_3 = 1$ el coeficiente de reflexión se reduce a

$$R = 1 - \frac{8n_1n_2^2}{n_1^2 + [1 + n_1(4 + n_1)]n_2^2 + n_2^4 + (n_1 - n_2)(n_1 + n_2)(n_2^2 - 1)\cos(2dn_2\omega_0)} \tag{1.18}$$

donde hemos cambiado $\omega$ por $\omega_0$ como lo especifica el inciso. Ahora si podemos hacer que $\cos(2dn_2\omega_0) = -1$ el requerimiento de que $R = 0$ se reduce a

$$n_1^2 + [1 + n_1(4 + n_1)]n_2^2 + n_2^4 + (n_1 - n_2)(n_1 + n_2)(n_2^2 - 1) - 8n_1n_2^2 = 0, \tag{1.19}$$

lo que implica que $n_2 = \sqrt{n_1}$. Por lo tanto para que se cumpla que $R = 0$, debemos escoger $n_2 = \sqrt{n_1}$ y para que se cumpla la condición que impusimos en el coseno, debe tenerse que $d = (m - 1/2)\frac{\pi}{\sqrt{n\omega_0}}$.

## Problema 2. Problema 7.3 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Dos losas planas semi-infinitas con el mismo dieléctrico sin pérdidas, uniformidad, isotropía, no-permeabilidad con índice de refracción $n$ son paralelas, y están separadas por una brecha de aire ($n = 1$) de ancho $d$. Una onda electromagnética de frecuencia $\omega$ incide en la brecha desde una de las losas con un ángulo de incidencia $i$. Para una polarización lineal tanto paralela como perpendicular al plano de incidencia,

**(a)** calcule la tasa de potencia transmitida a la segunda losa con respecto a la potencia incidente y la tasa de potencia reflejado con respecto a la incidente;

**(b)** para un $i$ mayor que el ángulo crítico para reflexión interna total, esboce la tasa de potencia transmitida con respecto a la potencia incidente como una función de $d$ medido en unidades de longitud de onda en la brecha.

<u>Solución:</u>

**(a)** Asumiremos que la onda incidente puede escribirse como $\mathbf{E}_i \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, y del lado de la primera losa se refleja una onda de la forma $\mathbf{E}_r \mathrm{e}^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}$, luego en la brecha de aire tenemos las ondas $\mathbf{E}_+ \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}$ y $\mathbf{E}_- \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}$, y por último en la segunda losa tendremos una onda transmitida de la forma $\mathbf{E}_t \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{d})}$.

Si $i$ es el ángulo de incidencia, entonces el ángulo $r$ medido desde la normal en la brecha de aire está dado por la ley de Snell, $n \operatorname{sen} i = \operatorname{sen} r$, y debido a que las losas tienen el mismo índice de refracción, el ángulo de transmisión también será $i$. Tenemos que, por lo anterior

$$\cos r = \sqrt{q - \operatorname{sen}^2 r} = \sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2 i}, \tag{2.1}$$

lo que nos dice que $\cos r$ es puramente imaginario cuando $i$ es más grande que el ángulo crítico. El problema nos pide que calculemos $E_t/E_i$ y $E_r/E_i$, y para hacer esto tomaremos dos casos posibles, y utilizando las condiciones de frontera para las componentes paralelas de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ podremos hacer esto[1]. El primer caso es cuando $\mathbf{E}$ es perpendicular al plano de incidencia, entonces en la primera interfaz tenemos

$$\begin{aligned} E^{\parallel} &: E_i + E_r = E_+ + E_-, \\ H^{\parallel} &: n(E_i - E_r)\cos i = (E_+ - E_-)\cos r, \end{aligned} \tag{2.2}$$

y en la segunda interfaz

$$\begin{aligned} E^{\parallel} &: E_+ \mathrm{e}^{i\phi} + E_- \mathrm{e}^{-i\phi} = E_t, \\ H^{\parallel} &: (E_+ \mathrm{e}^{i\phi} - E_- \mathrm{e}^{-i\phi})\cos r = nE_t \cos i, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde hemos definido la fase

$$\phi = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{d} = k_0 d \cos r = \frac{\omega d \cos r}{c}. \tag{2.4}$$

Ahora las ecuaciones para la primera interfaz podemos escribirlas como

[1] Ver página 304 de Jackson [1]

$$
\begin{aligned}
E_{+} = \frac{1}{2}E_i(1+\xi) + \frac{1}{2}E_r(1-\alpha), \\
E_{-}\frac{1}{2}E_i(1-\xi) + \frac{1}{2}E_r(1+\alpha),
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

donde hemos definido

$$
\xi \equiv \frac{n\cos i}{\cos r} = \frac{n\cos i}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2 i}}. \tag{2.6}
$$

De igual forma las ecuaciones para la segunda interfaz podemos escribirlas como

$$
\begin{aligned}
E_{+} &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\phi}E_t(1+\xi), \\
E_{-} &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\phi}E_t(1+\xi).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Con estos dos pares de ecuaciones podemos resolver para las tasas solicitadas por el texto,

$$
\boxed{\frac{E_t}{E_i} = \frac{2\xi}{2\xi\cos\phi - i(1+\xi^2)\operatorname{sen}\phi}}, \tag{2.8}
$$

$$
\boxed{\frac{E_r}{E_i} = \frac{i(1-\xi^2)\operatorname{sen}\phi}{2\xi\cos\phi - i(1+\xi^2)\operatorname{sen}\phi}}. \tag{2.9}
$$

Como no me queda muy claro si el texto pide estas tasas solamente o también los coeficientes de reflexión y transmisión, debajo se encuentran éstos[2]

$$
\boxed{T = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{4\xi^2}{4\xi^2 + (1-\xi)^2\operatorname{sen}^2\phi}}, \tag{2.10}
$$

$$
\boxed{R = \left|\frac{E_r}{E_i}\right|^2 = \frac{(1-\xi)^2\operatorname{sen}^2\phi}{4\xi^2 + (1-\xi)^2\operatorname{sen}^2\phi}}. \tag{2.11}
$$

Ahora para **E** paralelo al plano de incidencia, tenemos para la primera interfaz

$$
\begin{aligned}
E^{\parallel} : (E_i - E_r)\cos i = (E_{+} - E_{-})\cos r, \\
H^{\parallel} : n(E_i + E_r) = E_{+} + E_{-},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

y en la segunda interfaz

$$
\begin{aligned}
(E_{+}\mathrm{e}^{i\phi} - E_{-}\mathrm{e}^{-i\phi})\cos r = E_t\cos i, \\
E_{+}\mathrm{e}^{i\phi} - E_{-}\mathrm{e}^{-i\phi} = nE_t.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

De nuevo estas ecuaciones podemos escribirlas como

$$
\begin{aligned}
n^{-1}E_{+} &= \frac{1}{2}E_i(1+\zeta) + \frac{1}{2}E_r(1-\zeta), \\
n^{-1}E_{-} &= \frac{1}{2}E_i(1-\zeta) + \frac{1}{2}E_r(1+\zeta),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

[2]Para los casos en que $i$ es menor que el ángulo crítico, y tanto $\xi$ como $\phi$ son reales.

y

$$n^{-1}E_+ = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\phi}E_t(1+\xi),$$
$$n^{-1}E_- = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\phi}E_t(1+\xi). \tag{2.15}$$

donde hemos definido

$$\zeta \equiv \frac{\cos i}{n\cos r} = \frac{\cos i}{n\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^i}}. \tag{2.16}$$

Vemos que son ecuaciones muy similares a las que obtuvimos anteriormente solo con la diferencia de que en vez de $E_\pm$ tenemos $n^{-1}E_\pm$ y en vez de $\xi$ tenemos $\zeta$, y obtendremos las siguientes relaciones

$$\boxed{\frac{E_t}{E_i} = \frac{2\zeta}{2\zeta\cos\phi - i(1+\zeta^2)\operatorname{sen}\phi}}, \tag{2.17}$$

$$\boxed{\frac{E_r}{E_i} = \frac{i(1-\zeta^2)\operatorname{sen}\phi}{2\zeta\cos\phi - i(1+\zeta^2)\operatorname{sen}\phi}}. \tag{2.18}$$

Y los coeficientes de reflexión y transmisión serán

$$\boxed{T = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{4\zeta^2}{4\zeta^2 + (1-\zeta)^2\operatorname{sen}^2\phi}}, \tag{2.19}$$

$$\boxed{R = \left|\frac{E_r}{E_i}\right|^2 = \frac{(1-\zeta)^2\operatorname{sen}^2\phi}{4\zeta^2 + (1-\zeta)^2\operatorname{sen}^2\phi}}. \tag{2.20}$$

**(b)** Como no se especifica, solo consideraremos el caso en que **E** es perpendicular al plano de incidencia. Como $i$ es mayor que el ángulo crítico, tanto $\xi$ como $\phi$ son puramente imaginarios. Por simplicidad podemos escribir éstos como $\xi = i\gamma$, $\phi = i\beta$, entonces

$$\boxed{\frac{E_t}{E_i} = \frac{2i\gamma}{2i\gamma\cosh\beta - (1-\gamma^2)\operatorname{senh}\beta}}, \tag{2.21}$$

$$\boxed{\frac{E_r}{E_i} = \frac{-(1+\gamma^2)\operatorname{senh}\beta}{2i\gamma\cosh\beta + (1+\gamma^2)\operatorname{sen}\beta}}. \tag{2.22}$$

Y los coeficientes de reflexión y transmisión quedan como

$$\boxed{T = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{4\gamma^2}{4\gamma^2 + (1-\gamma)^2\operatorname{senh}^2\beta}}, \tag{2.23}$$

$$\boxed{R = \left|\frac{E_r}{E_i}\right|^2 = \frac{(1-\gamma)^2\operatorname{senh}^2\beta}{4\gamma^2 + (1-\gamma)^2\operatorname{senh}^2\beta}}. \tag{2.24}$$

Donde,

$$\gamma = -\frac{n\cos i}{\sqrt{n^2\operatorname{sen}^2 i - 1}}, \tag{2.25}$$

y

$$\beta = \frac{\omega d\sqrt{n^2 \operatorname{sen}^2 i - 1}}{c}. \tag{2.26}$$

Para tomar un ejemplo, podemos usar que en el aire, con índice de refracción $n \approx 1{,}5$ el ángulo crítico para la reflexión total interna es de $i_0 = 42°$. Y el gráfico de $T$ en función de $d$ medido en unidades de longitud de onda en la brecha será

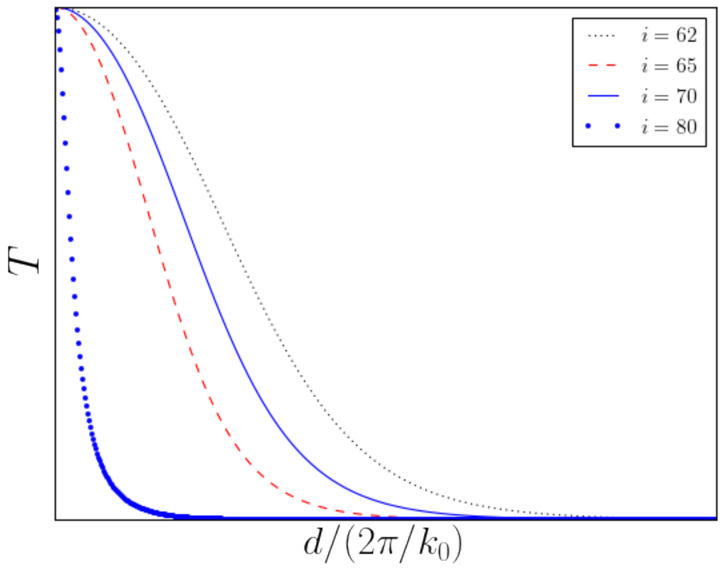



**Figura 4:** Coeficiente de transmisión para $n \approx 1{,}5$ en función de $d$.

El código que esta imagen es:

```python
from __future__ import print_function
import numpy as np
from numpy import arccos,sin, cos, pi, array, sqrt
import matplotlib
matplotlib.use('nbagg')
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc

rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
## for Palatino and other serif fonts use:
#rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
rc('text', usetex=True)

#LaTeX
plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

# Linespace for d
d = np.linspace(0,10,500)

# Variable definitions

def gamma(angle):
    return - (1.5 * cos(angle)) / sqrt((1.5**2)*(sin(angle))**2-1)

def beta(angle):
```

```
    return d*sqrt((1.5**2)*(sin(angle)**2) - 1)

T1 = (5*gamma(62)**2) / ((4 * gamma(62)**2) + (1+gamma(62)**2) *
                          sinh(beta(62))**2)

T2 = (5*gamma(65)**2) / ((4 * gamma(65)**2) + (1+gamma(65)**2) *
                          sinh(beta(65))**2)

T3 = (5*gamma(70)**2) / ((4 * gamma(70)**2) + (1+gamma(70)**2) *
                          sinh(beta(70))**2)

T4 = (5*gamma(80)**2) / ((4 * gamma(80)**2) + (1+gamma(80)**2) *
                          sinh(beta(80))**2)

# Style
plt.ylabel(r'$T$', fontsize=30)
plt.xlabel(r'$d$',fontsize=30)
plt.xticks([])
plt.yticks([])

# Legend
plt.legend(handles=[T1plot,T2plot,T3plot,T4plot], loc=1)

# Plot
T1plot, = plt.plot(d,T1,"k:", label = "$i = 62$")
T2plot, = plt.plot(d,T2,"r--", label = "$i = 65$")
T3plot, = plt.plot(d,T3,"b", label = "$i = 70$")
T4plot, = plt.plot(d,T4,".", label = "$i = 80$")
plt.show()
```

## Problema 3. Problema 7.5 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una onda electromagnética polarizada $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i \mathrm{e}^{i\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - i\omega t$ incide normalmente sobre una lámina plana uniforme de una excelente conducción ($\omega \gg \omega\epsilon_0$) con un grosor de $D$. Asumiendo que en el espacio y en la lámina conductora $\mu/\mu_0 = \epsilon/\epsilon_0 = 1$, discuta la reflexión y transmisión de la onda incidente.

**(a)** Muestre que las amplitudes de las onda reflejada y transmitida, correctas a primer orden en $(\epsilon_0\omega/\sigma)^{1/2}$, son

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-(1-\mathrm{e}^{-2\lambda})}{(1-\mathrm{e}^{-2\lambda}) + \gamma(1+\mathrm{e}^{-2\lambda})}$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2\gamma\mathrm{e}^{-\lambda}}{(1-\mathrm{e}^{-2\lambda}) + \gamma(1+\mathrm{e}^{-2\lambda})}$$

donde

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}(1-i) = \frac{\omega\delta}{c}(1-i)$$

$$\lambda = (1-i)D/\delta$$

y $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ es la profundidad de penetración.

**(b)** Verifique que para un grosor igual a cero y un grosor infinito se obtienen los resultados limitantes apropiados.

**(c)** Muestre que, excepto para láminas de muy poco grosor, el coeficiente de transmisión es

$$T = \frac{8(\mathrm{Re}\gamma)^2\mathrm{e}^{-2D/\delta}}{1 - 2\mathrm{e}^{-2D/\delta}(\cos 2D/\delta) + \mathrm{e}^{-4D/\delta}}$$

Esboce $\log T$ como una función de $(D/\delta)$, asumiendo que Re $\gamma = 10^{-2}$. Defina “grosor muy pequeño”.

<u>Solución:</u>

**(a)** Mientras consideremos que la lámina conductora como un medio con constante dieléctrica compleja

$$\epsilon/\epsilon_0 = 1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}, \tag{3.1}$$

podemos trabajar como si todo fuera un dieléctrico. Vemos entonces que este problema es muy similar al anterior y procedemos de la misma manera. Introduciremos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{E}_i \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ y $\mathbf{E}_r \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ en la zona de incidencia, $\mathbf{E}_+ \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}}$ y $\mathbf{E}_- \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}}$ en la lámina conductora y $\mathbf{E}_t \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{D})}$ en el lado de transmisión. Utilizamos ahora las condiciones de acople para la parte perpendicular de $\mathbf{E}$ al plano de incidencia. Tenemos entonces, para la primera interfaz

$$E^{\parallel} : E_i + E_r = E_+ + E_-, \tag{3.2}$$

$$H^{\parallel} : (E_i - E_r) = n(E_+ - E_-). \tag{3.3}$$

Y para la segunda interfaz,

$$E_+ \mathrm{e}^{i\phi} + E_- \mathrm{e}^{-i\phi} = E_t, \tag{3.4}$$

$$n(E_+ \mathrm{e}^{i\phi} - E_- \mathrm{e}^{-i\phi}) = E_t, \tag{3.5}$$

donde $n$ es el índice de refracción complejo

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}}, \tag{3.6}$$

y $\phi$ es la fase de cambio al atravesar el dieléctrico

$$\phi = k_1 D = \frac{\omega n}{c} D = \frac{\omega D}{c}\sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}}. \tag{3.7}$$

Resolviendo ahora para $E_t$ y $E_r$ en términos de $E_i$ obtenemos

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{4/n\mathrm{e}^{i\phi}}{(1 + 1/n^2)(1 - \mathrm{e}^{2i\phi}) + 2/n(1 + \mathrm{e}^{2i\phi})}, \tag{3.8}$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-(1 - 1/n^2)(1 - \mathrm{e}^{2i\phi})}{(1 + 1/n^2)(1 - \mathrm{e}^{2i\phi}) + 2/n(1 + \mathrm{e}^{2i\phi})}. \tag{3.9}$$

Tomando ahora el límite utilizando lo que dice el enunciado de que la lámina es un conductor excelente, $\sigma/\omega\epsilon_0 \gg 1$. En este caso el índice de refracción y la fase de cambio se aproximan por

$$n \approx (1 + i)\sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega}} = \frac{2}{\gamma}, \tag{3.10}$$

$$\phi \approx (1 + i)D\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}} = i\lambda, \tag{3.11}$$

donde hemos utilizado la definición de $\gamma$ y $\lambda$ que da el enunciado del problema. Para $|\gamma| \ll 1$ y despreciando términos del orden $\mathcal{O}(1/n^2)$ comparado a 1 y sustituyendo arriba obtenemos

$$\boxed{\frac{E_r}{E_i} = \frac{-(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda})}{(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}) + \gamma(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda})}}, \tag{3.12}$$

$$\boxed{\frac{E_t}{E_i} = \frac{2\gamma\mathrm{e}^{-\lambda}}{(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}) + \gamma(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda})}}. \tag{3.13}$$

Q.E.D. Favio MMXVI

**(b)** El grosor igual a cero corresponde a $\lambda \to 0$. En este caso, viendo las ecuaciones para $E_t/E_i$ y $E_r/E_i$ que obtuvimos en el inciso anterior, tenemos que

$$\frac{E_t}{E_i} \to 1, \tag{3.14}$$

$$\frac{E_r}{E_i} \to 0. \tag{3.15}$$

Y en el caso de grosor infinito, es decir, $\lambda \to \infty$, tenemos que

$$\frac{E_t}{E_i} \to 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{E_r}{E_i} \to -\frac{1}{1+\gamma}. \tag{3.17}$$

La reflexión no se va a 1 en este casi ya que la lámina no es un un conductor perfecto y existe disipación de potencia (aunque muy poca).

**(c)** Para calcular el coeficiente de transmisión desde la expresión que obtuvimos para $E_t/E_i$ que obtuvimos en el inciso (b), debido a que $\gamma$ y $\lambda$ son complejos, y mientras no estemos en el límite para grosor muy pequeño, que definiremos pronto, los términos $\mathbf{O}(\gamma)$ pueden ser ignorados en el denominador. Entonces

$$\frac{E_t}{E_i} \approx \frac{2\gamma e^{-\lambda}}{(1-e^{-2\lambda})}, \tag{3.18}$$

de manera que

$$T = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{4|\gamma|^2 e^{-2\mathrm{Re}\lambda}}{1-2\mathrm{Re}(e^{-2\lambda}+e^{-4\mathrm{Re}\lambda}}, \tag{3.19}$$

tomando ahora $|\gamma|^2 = 2(\mathrm{Re}\gamma)^2$ y $e^{-2\lambda} = e^{2iD/\delta}e^{-2D/\delta}$ tenemos entonces

$$\boxed{T = \frac{8(\mathrm{Re}\gamma)^2 e^{-2D/\delta}}{1-2e^{-2D/\delta}(\cos 2D/\delta)+e^{-4D/\delta}}}. \tag{3.20}$$

El límite para grosor muy pequeño ocurre cuando los términos $\mathcal{O}(\gamma)$ se hacen importantes. Esto ocurre cuando

$$|1-e^{-2\lambda}| \approx |\gamma(1+e^{-2\lambda}|. \tag{3.21}$$

Expandiendo para $\lambda$ pequeño

$$|2\lambda| \approx |2\gamma| \Rightarrow \frac{D}{\delta} \approx \frac{\omega\delta}{c}. \tag{3.22}$$

Por lo tanto de lo anterior vemos que el límite para grosor muy pequeño, en este caso puede definirse como

$$\boxed{D < \frac{\omega \delta^2}{c}}. \tag{3.23}$$

Debajo se encuentra el gráfico de $\log T$ como una función de $(D/\delta)$, asumiendo que Re $\gamma = 10^{-2}$.

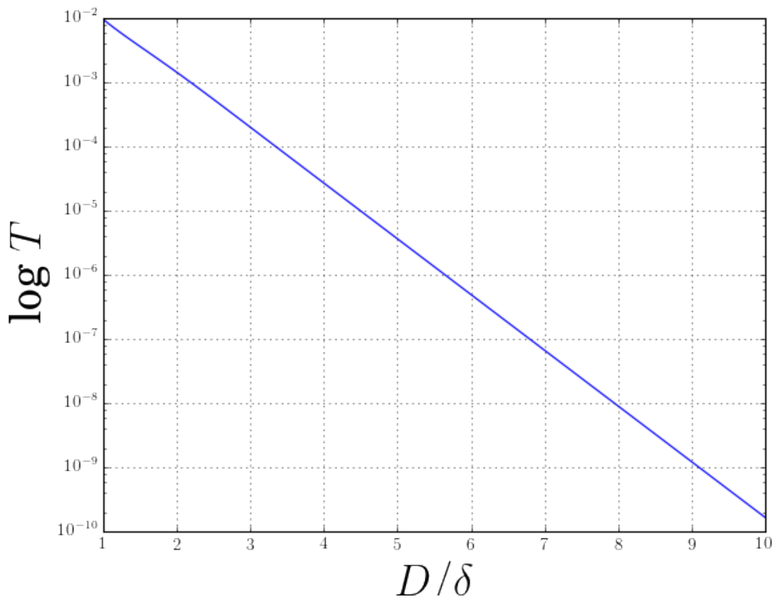



**Figura 5:** Gráfico de $\log T$ como una función de $(D/\delta)$, asumiendo que Re $\gamma = 10^{-2}$.

Debajo se encuentra el código que hace la figura:

```
from __future__ import print_function
import numpy as np
from numpy import arccos,sin, cos, pi, array, sqrt
import matplotlib
matplotlib.use('nbagg')
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc

rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
## for Palatino and other serif fonts use:
#rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
rc('text', usetex=True)

#LaTeX
plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

# Linespace for Ddelta
Ddelta = np.linspace(1,10,500)

# Variable definitions

T = (8 * (10E-2)**2 * exp(-2*Ddelta)) / (1 -
    (2 * exp(-2*Ddelta) * cos(2*Ddelta)) + exp(-4*Ddelta))

```

```
# Style
plt.ylabel(r'log $ T$', fontsize=30)
plt.xlabel(r'$D/\delta$',fontsize=30)

# Plot
T1plot, = plt.semilogy(Ddelta,T,"b")
plt.grid(True)
plt.show()
```

## Problema 4. Problema 7.14 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1]. (Es el 7.9 de la 2da ed.)

Un modelo simple para la propagación de ondas de radio en la atmósfera de la Tierra o ionosfera consiste en una tierra plana en $z = 0$ y un medio no uniforme con $\epsilon = \epsilon(z)$ para $z > 0$. Considere la ecuaciones de Maxwell bajo la suposición de que los campos son independientes de $y$ y pueden escribirse como funciones de $z$ por $\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$.

**(a)** Muestre que la ecuación de onda que gobierna la propagación para $z > 0$ es

$$\frac{d^2F}{dz^2} + q^2(z)F = 0,$$

donde

$$q^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

y $F = E_y$ para la polarización *horizontal*, y

$$q^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(z) + \frac{1}{2\epsilon}\frac{d^2\epsilon}{dz^2} - \frac{3}{4\epsilon^2}\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2 - k^2$$

con $F = \sqrt{\epsilon}E_z$ para la polarización *vertical.*

**(b)** Use la aproximación WKB para tratar la propagación de ondas dirigidas verticalmente hacia la ionosfera ($k = 0$), asumiendo que la constante dieléctrica está dada por (7.59) con una frecuencia de plasma $\omega_p(z)$ gobernada por una densidad electrónica como se muestra en la figura 7.11. Verifique que los argumentos cualitativos de la sección 7.6 se mantienen, con discrepancias en detalle solo para $\omega\ \omega_{p,\max}$.

**(c)** Usando los resultados WKB de la parte (b) y los conceptos de propagación de un pulso de la sección 7.8, define una altura efectiva de la ionosfera $h'(\omega)$ calculando el tiempo $T$ para un pulso de frecuencia dominante $\omega$ que viaja hacia arriba y se refleja ($h' \equiv cT/2$). [La aproximación WKB es discutida en la mayoría de los libros de mecánica cuántica].

Solución:

**(a)** Comenzamos escribiendo las ecuaciones de Maxwell sin fuentes ($\rho = \mathbf{J} = 0$, con $\mu = 1$,

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{E}) &= 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, \\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla\times\mathbf{B} &= -\frac{\epsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para un medio no homogéneo tenemos

$$\nabla\epsilon\cdot\mathbf{E} + \epsilon\nabla\cdot\mathbf{E} = 0, \tag{4.2}$$

que podemos escribir como

$$\frac{d\epsilon}{dz}E_z + \epsilon\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0. \tag{4.3}$$

Ahora por propiedades del rotacional

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right), \tag{4.4}$$

y entonces resultando lo obtenido arriba

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = \nabla\left(-\frac{1}{\epsilon}\frac{d\epsilon}{dz}E_z\right) = -\frac{d}{dz}\ln\epsilon\nabla E_z - \hat{z}E_z\frac{d^2}{dz^2}\ln\epsilon, \tag{4.5}$$

$$\therefore \mathbf{E} = \mathbf{E}(z)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}. \tag{4.6}$$

Hemos probado entonces que lo que dice el enunciado para este tipo de ondas es cierto. Ahora,

$$\frac{d^2}{dz}\mathbf{E} + \left(\frac{\epsilon\omega}{c^2} - k^2\right)\mathbf{E} = -\frac{d}{dz}\ln\epsilon\frac{d}{dz}E_z\hat{z} - E_z\frac{d^2}{dz^2}\ln\epsilon\hat{z} = -\frac{d}{dz}\left(E_z\frac{d}{dz}\ln\epsilon\right)\hat{z}. \tag{4.7}$$

Para polarización horizontal tenemos que $E_y \neq 0$, entonces

$$\left[\frac{d^2}{dz} + \left(\frac{\epsilon\omega}{c^2} - k^2\right)\right]E_y = 0, \tag{4.8}$$

o

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dz} + q^2(z)\right)E_y = 0}, \tag{4.9}$$

con

$$\boxed{q^2(z) = \frac{\epsilon\omega}{c^2} - k^2}. \tag{4.10}$$

Y para la polarización vertical tenemos que $E_z \neq 0$, entonces

$$\left[\frac{d^2}{dz} + \left(\frac{\epsilon\omega}{c^2} - k^2\right)\right]E_z = -\frac{d}{dz}\left(E_z\frac{d}{dz}\ln\epsilon\right), \tag{4.11}$$

Si hacemos $E_z = F/\sqrt{\epsilon}$ obtenemos

$$\frac{d}{dz}E_z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\frac{dF}{dz} - \frac{1}{2\epsilon^{3/2}}F\frac{d\epsilon}{dz}, \tag{4.12}$$

y derivando de nuevo

$$\frac{d^2}{dz^2}E_z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon^{3/2}}\frac{dF}{dz}\frac{d\epsilon}{dz} + \frac{3}{4}\frac{F}{\epsilon^{3/2}}\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2 - \frac{F}{2\epsilon^{3/2}}\frac{d^2\epsilon}{dz^2}. \tag{4.13}$$

Con un poco de trabajo algebraico llegamos a

$$\frac{d^2}{dz^2}F + F\left\{\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2\left(-\frac{3}{4\epsilon^2}\right) + \frac{d^2\epsilon}{dz^2}\frac{1}{2\epsilon} + \left[\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2\right]\right\} = 0, \tag{4.14}$$

o

$$\boxed{\frac{d^2F}{dz^2} + q^2(z)F = 0}, \tag{4.15}$$

con

$$\boxed{q^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(z) + \frac{1}{2\epsilon}\frac{d^2\epsilon}{dz^2} - \frac{3}{4\epsilon^2}\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2 - k^2}. \tag{4.16}$$

**(b)** En Física, la aproximación WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin)es el ejemplo más familiar de un cálculo semi-clásico en el cual la función de onda es redactada como una función exponencial, y entonces o la amplitud o la fase es tomada para estar cambiando lentamente. Entonces tomando que

$$F = A\mathrm{e}^{i\phi}, \tag{4.17}$$

$$F' = i\phi' F, \tag{4.18}$$

$$F'' = i\phi'' F - \phi' F, \tag{4.19}$$

y con la ecuación del anterior inciso,

$$F'' + q^2 F = 0 \Rightarrow (i\phi'' + \phi'^2 + q^2)F = 0, \tag{4.20}$$

y en la aproximación WKB $\phi'' \approx 0$, por lo que

$$\phi' = q \Rightarrow \phi = \int dzq. \tag{4.21}$$

Para una propagación vertical $k = 0$, nos queda, utilizando los resultados del inciso anterior

$$F = \sqrt{\epsilon}E_z \approx A\exp\left[dz\sqrt{\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} + \frac{1}{2\epsilon}\frac{d^2}{dz^2} - \frac{3}{4\epsilon^2}\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2}\right], \tag{4.22}$$

$$\therefore E_y \approx B\exp\left[\int dz\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon}\right], \tag{4.23}$$

Vemos entonces que

$$\epsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \tag{4.24}$$

donde, como en la ecuación (7.60) de Jackson [1]

$$\omega_p^2 = 4\pi NZ\mathrm{e}^2/m, \tag{4.25}$$

donde $NZ$ es el número total de electrones por unidad de volumen, y $e$ y $m$ son la carga y la masa del electrón, respectivamente. Vemos que a una frecuencia $\omega$ dada encontramos que $\epsilon > 0$ para $y$ pequeño y $\epsilon < 0$ para $y$ grande, siguiendo los argumentos de la sección 7.6 de Jackson [1].

**(c)** En este caso definimos el pulso por

$$E_+ = \int d\omega A(\omega) \frac{1}{\sqrt{q(\omega)}} \mathrm{e}^{i\theta}, \tag{4.26}$$

donde la fase está dada por

$$\theta = \int dzq - \omega t, \tag{4.27}$$

y la velocidad de fase a una frecuencia $\omega$ por

$$\frac{d\theta}{d\omega} = 0 = \frac{d}{d\omega} \int dzq - t = \int dz \frac{dq}{d\omega} - t = \int dz \frac{1}{v_g} - t, \tag{4.28}$$

donde hemos generalizado hacia la velocidad de grupo $v_g$, que se escribe como

$$\therefore v_g = \left( \frac{dq}{d\omega} \right)^{-1}. \tag{4.29}$$

Por lo tanto el tiempo necesario para llegar a $z$ será

$$r = \int dz \frac{dq}{d\omega}, \tag{4.30}$$

pero

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}, \tag{4.31}$$

y

$$\frac{dq}{d\omega} = \frac{1}{v_g} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \frac{d\epsilon}{d\omega}, \tag{4.32}$$

y entonces el tiempo medio $T/2$ para un pulso de frecuencia dominante $\omega$ que viaja hacia arriba y se refleja será

$$\frac{T}{2} = \int_0^{z'} dz \frac{1}{v_g}, \tag{4.33}$$

con la ecuación para la altura efectiva que da el texto encontramos que

$$h = \int_0^{z'} dz \left[ \sqrt{\epsilon} + \frac{\omega}{2\sqrt{\epsilon}} \frac{d\epsilon}{d\omega} \right]. \tag{4.34}$$

Ahora usando el resultado para $\epsilon$ del inciso anterior

$$\epsilon \approx= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} = 1 - \xi^2, \tag{4.35}$$

donde hemos definido $\xi \equiv \frac{\omega_p^2}{\omega}$. Por lo tanto

$$h = \int_0^{z'} dz \left[ \sqrt{1 - \xi^2} + \xi^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right], \tag{4.36}$$

que podemos escribir como

$$h = \int_0^{z'} dz \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \tag{4.37}$$

$$\boxed{\therefore h = \int_0^{z'} dz \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}}. \tag{4.38}$$

## Referencias

[1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.

[2] R. Magyar, *A Companion to Classical Electrodynamics 3rd Edition by J.D. Jackson*, 2001.

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES