
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

SEMESTRE 2016-II

Tarea # 3. Campos Multipolares.

Autor:
Favio VÁZQUEZ[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

Problema 1. Problema 2.1 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestre que el campo eléctrico en el eje polar de un dipolo \mathbf{p} es $2\mathbf{p}/z^3$, mientras que en el plano ecuatorial es $-\mathbf{p}/r^3$. Use este argumento elemental para mostrar, resolviendo el dipolo en dos componentes, que el campo en un punto arbitrario es

$$E(r, \theta) = \frac{p(2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)}{r^3}$$

Solución:

Para calcular el campo eléctrico en el eje polar proponemos la siguiente geometría,

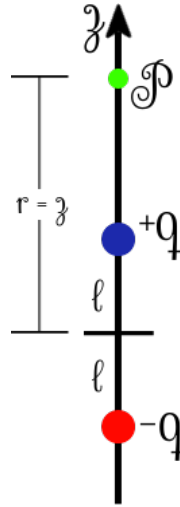


Figura 1: Campo eléctrico de un dipolo en el eje polar.

y mediremos el campo en un punto P a una distancia z del origen. El potencial eléctrico en el punto P debido a las cargas q y $-q$ será

$$\Phi = \frac{q}{r_{+q}} - \frac{q}{r_{-q}}, \quad (1.1)$$

$$\Phi = \frac{q}{(z+l)} - \frac{q}{(z-l)}, \quad (1.2)$$

y utilizando el hecho de que¹

$$E_{ep} = -\text{grad } \Phi, \quad (1.3)$$

vemos que

$$E_{ep} = \frac{q}{(z-l)^2} - \frac{q}{(z+l)^2}. \quad (1.4)$$

Que podemos escribir como

$$E_{ep} = \frac{q}{z^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{z}\right)^2} \right], \quad (1.5)$$

¹ep = eje polar.

y asumiendo que $z \gg l$ podemos expandir en series de Maclaurin obteniendo

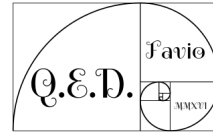
$$E_{ep} = \frac{q}{z^2} \left[\left(1 + \frac{2l}{z} + \dots \right) - \left(1 - \frac{2l}{z} + \dots \right) \right] \quad (1.6)$$

$$E_{ep} = \frac{q}{z^2} + \frac{q2l}{z^3} - \frac{q}{z^2} + \frac{q2l}{z^3}, \quad (1.7)$$

$$\therefore E_{ep} = \frac{4ql}{z^3}, \quad (1.8)$$

y ahora recordando que $p = 2ql$, y que \mathbf{E} es paralelo a \mathbf{p} , encontramos que

$$\mathbf{E}_{ep} = \frac{2\mathbf{p}}{z^3}. \quad (1.9)$$



Ahora para el plano ecuatorial proponemos la siguiente geometría,

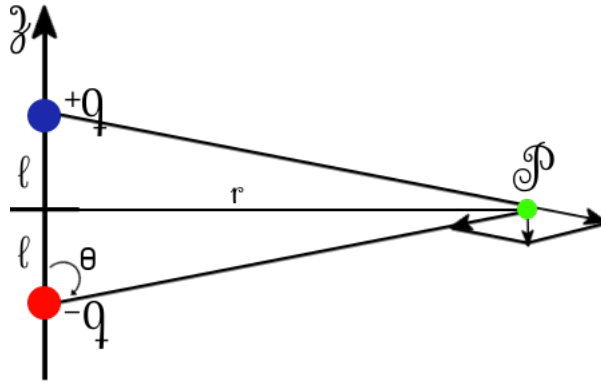


Figura 2: Campo eléctrico de un dipolo en el plano ecuatorial.

En este caso el campo eléctrico en el punto P a una distancia r del origen, ubicado en el plano ecuatorial podemos escribirlo como²

$$E_{pe} = \frac{q}{(r^2 + a^2)} + \frac{q}{(r^2 + a^2)} = 2 \frac{q}{(r^2 + a^2)}, \quad (1.10)$$

ahora el campo resultante E en la dirección vertical se cancela por la simetría del problema, manteniéndose solo la parte horizontal, es decir (ver figura (2))

$$E_{pe} = \frac{2q}{(r^2 + a^2)} \cos \theta, \quad (1.11)$$

y viendo la figura (2) vemos que podemos escribir

$$\cos \theta = \frac{\text{CA}}{\text{HIP}} = \frac{l}{(r^2 + a^2)^2}, \quad (1.12)$$

²pe = plano ecuatorial.

entonces

$$E_{pe} = \frac{2q}{(r^2 + a^2)} \frac{l}{(r^2 + a^2)^2} = \frac{2ql}{(r^2 + a^2)^{3/2}}, \quad (1.13)$$

que podemos escribir como

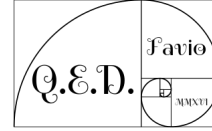
$$E_{pe} = \frac{2ql}{r^3} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right), \quad (1.14)$$

y en el límite cuando $r \gg l \rightarrow l^2/r^2 \approx 0$,

$$\therefore E_{pe} = \frac{2ql}{r^3}, \quad (1.15)$$

y recordando que $p = 2ql$ y que el momento dipolar va en sentido de la $-z$, que es el sentido opuesto del campo eléctrico (ver figura (2)) nos queda

$$\mathbf{E}_{pe} = -\frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.16)$$



Ahora usando estos resultados podemos demostrar la ecuación solicitada. El campo eléctrico en un punto P arbitrario será la superposición del campo en el eje polar de la componente $p_{\parallel} = p \cos \theta$, y el campo en el plano ecuatorial de la componente $p_{\perp} = p \sin \theta$, esto se puede ver en la figura (3).

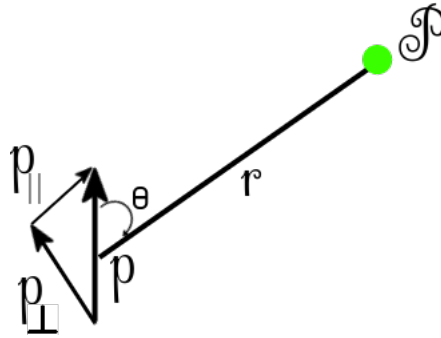
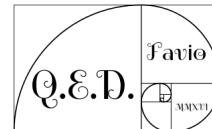


Figura 3: Campo eléctrico de un dipolo en un punto arbitrario del espacio.

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{2p_{\parallel}}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{p_{\perp}}{r^3} \mathbf{e}_{\theta}, \quad (1.17)$$

donde el signo negativo del campo en el plano ecuatorial se cancela por el hecho de que, genéricamente, \mathbf{e}_{θ} va en el sentido opuesto de \mathbf{p} , entonces utilizando la figura (3) vemos que

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_{\theta}). \quad (1.18)$$



Problema 2. Problema 2.2 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

El campo magnético de la Tierra es aproximadamente el de un dipolo. Calcule el momento dipolar magnético usando el hecho de que la componente horizontal del campo de la Tierra en su superficie es aproximadamente 0,23 G a una latitud magnética de 40° .

Solución:

Ya que podemos aproximar el campo magnético de la Tierra como un dipolo, y la geometría de los campos externos de un dipolo eléctrico y magnético es la misma, podemos utilizar las ecuaciones que obtuvimos en el anterior problema, solamente reemplazando \mathbf{p} por \mathbf{m} y \mathbf{E} por \mathbf{B} . La componente horizontal, asumiendo una Tierra perfectamente esférica, es simplemente la componente e_θ ; y recordando que el ángulo de latitud θ_l se mide desde el ecuador, podemos escribir³

$$B_{\text{horizontal}} = \frac{m \cos \theta_l}{R_t^3}, \quad (2.1)$$

donde R_t es el radio de la tierra y θ_l se mide de acuerdo a la siguiente figura

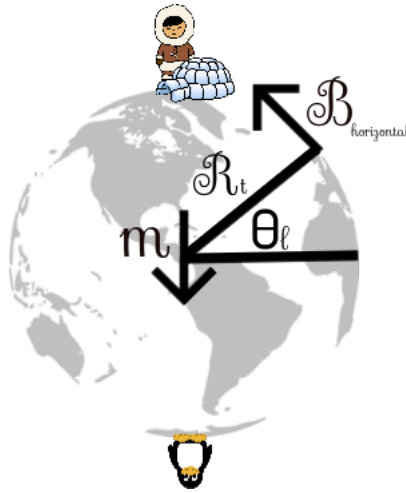


Figura 4: Campo magnético de la tierra. El dipolo magnético apunta hacia la Antártica con los pingüinos.

Debido a que el radio de la tierra es aproximadamente $R_t = 6,37 \times 10^8$ cm, resolviendo (2.1) para m nos queda,

$$m = \frac{(0,23 \text{ G})(6,37 \times 10^8 \text{ cm})^3}{\cos 40^\circ} = 7,8 \times 10^{25} \text{ G cm}^3. \quad (2.2)$$

El dipolo magnético de la tierra apunta hacia la Antártica y por lo tanto las líneas del campo magnético retornan hacia el Ártico (con los esquimales) en el norte de la superficie de la Tierra.

³Ver ecuación (1.16).

Problema 3. Problema 2.3 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestre que el momento dipolar eléctrico de un sistema de cargas es independiente de la elección del origen si el sistema tiene carga neta igual a cero.

Solución:

Podemos imaginarnos la geometría del sistema colocando una colección de cargas q_α a una distancia r'_α del origen original O , y a una distancia $R'_\alpha = r'_\alpha - r_O$ del otro origen que llamamos O' , y donde r_O es la distancia entre los dos orígenes, representada en la siguiente figura

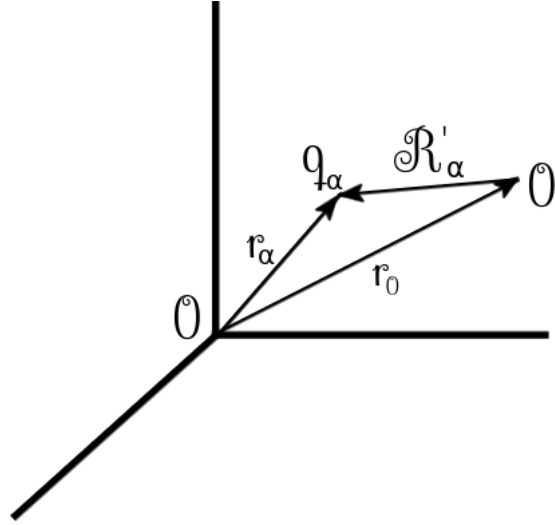


Figura 5: Geometría de una colección de cargas q_α con respecto a dos orígenes diferentes.

Según la ecuación (2.22) de Marion y Heald [1], el momento dipolar del sistema de cargas es

$$\mathbf{p} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha}, \quad (3.1)$$

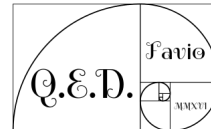
y si expresamos los vectores de posición en términos del origen O' , tenemos

$$\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_O + \mathbf{R}'_{\alpha}, \quad (3.2)$$

y luego

$$\mathbf{p} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (\mathbf{r}_O + \mathbf{R}'_{\alpha}) = \mathbf{r}_O \sum_{\alpha} q_{\alpha} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{R}'_{\alpha}, \quad (3.3)$$

pero si el sistema tiene carga neta igual a cero entonces $\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0$, y el primer término de la ecuación anterior se hace cero, y por lo tanto el momento dipolar es independiente de la posición de \mathbf{r}_O del origen. Podemos decir entonces que el momento dipolar de un sistema de cargas es independiente de la elección del origen del sistema, siempre y cuando el sistema tenga una carga neta igual a cero.



Problema 4. Problema 2.3 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestre que la fuerza en un dipolo eléctrico es $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E}$. Luego considere la interacción de una carga q y un dipolo \mathbf{p} que están a una distancia r , con el dipolo orientado perpendicular a la línea que los une. Calcule la fuerza (vectorial)

(a) en q debido a \mathbf{p} ,

(b) en \mathbf{p} debido a q .

Si tus resultados violan la tercera ley de Newton, inténtalo de nuevo.

Solución:

Si colocamos el origen de nuestro sistema (cartesiano) en el centro del dipolo, y expandimos el campo eléctrico en una serie de Maclaurin sobre este origen obtenemos:

$$E(x, y, z) = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_0 z + \dots \quad (4.1)$$

Que en notación de Marion y Heald [1] escribimos como

$$E(x, y, z) = E_0 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E} + \dots \quad (4.2)$$

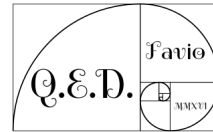
Ahora recordando que $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ podemos sumar las fuerzas vectoriales de nuestro modelo de dipolo que consisten en dos cargas $\pm q$ en las posiciones $\pm l$ respectivamente, para obtener

$$\mathbf{F} = q[E_0 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E} + \dots] - q[E_0 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E} + \dots], \quad (4.3)$$

$$\therefore \mathbf{F} = 2q(\mathbf{l} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E}, \quad (4.4)$$

y recordando la definición de momento dipolar nos queda

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E}}. \quad (4.5)$$



Consideremos la interacción de una carga q y un dipolo \mathbf{p} que están a una distancia r , con el dipolo orientado perpendicular a la línea que los une. Para el caso (a), para calcular la fuerza en q debido a \mathbf{p} , colocando la carga q en el plano ecuatorial del dipolo, del problema 1 sabemos que la fuerza que sentirá la partícula será⁴

$$\boxed{\mathbf{F}_p \text{ sobre } q = qE_{pe} = -\frac{qp}{r^3}\mathbf{e}_p}, \quad (4.6)$$

donde \mathbf{e}_p es el vector unitario en la dirección de \mathbf{p} . En el caso (b), para calcular la fuerza en \mathbf{p} debido a q , utilizamos la ecuación que derivamos al principio del problema,

$$\mathbf{F}_q \text{ sobre } p = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{E}(q). \quad (4.7)$$

⁴Ver ecuación (1.16)

Ahora, el operador $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad})$ es el operador de derivada espacial en la dirección de \mathbf{e}_p , y podría parecer que el campo debido a q en p solo cambiaría en la dirección radial desde q y por lo tanto la derivada en la dirección de \mathbf{e}_p es cero, lo cual violaría la tercera ley de Newton, ya que las fuerzas que esperamos deberían ser iguales y opuestas en q y \mathbf{p} ; pero haciendo un estudio más detallado nos damos cuenta que el campo cambia de dirección, así no cambie de signo, por lo tanto la fuerza sobre p no sería cero. Nos faltaría demostrar que en efecto es igual y opuesta a la fuerza sobre q , para esto calculamos las componentes del campo eléctrico en un sistema de coordenadas con origen en q , el eje x hacia p y el eje y paralelo a \mathbf{p} , por lo tanto escribimos (para el campo cercano a p)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{(x^2 + y^2)} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \approx \frac{q}{x^2} \\ E_y &= \frac{q}{(x^2 + y^2)} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \approx \frac{qy}{x^3} \\ E_z &= \frac{q}{(x^2 + y^2)} \frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \approx \frac{qz}{x^3}, \end{aligned}$$

y debido a la geometría que propusimos para el sistema el operador relevante será solo el correspondiente a y , por lo tanto reescribimos la fuerza en \mathbf{p} debido a q como

$$\mathbf{F}_{q \text{ sobre } p} = p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{x^2} \mathbf{e}_x + \frac{qy}{x^3} \mathbf{e}_y + \frac{qz}{x^3} \mathbf{e}_z \right), \quad (4.8)$$

$$\therefore \mathbf{F}_{q \text{ sobre } p} = \frac{qp}{x^3} \mathbf{e}_y, \quad (4.9)$$

que colocando $x \rightarrow r$ y $\mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_p$ es igual y opuesta a (4.6), de acuerdo a la tercera ley de Newton.

Problema 5. Problema 2.5 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Muestra que un dipolo finito simple (cargas $\pm q$ localizadas en $z = \pm l/2$) tiene un momento cuadrupolar cero con respecto a su centro como origen.

Solución:

Recordemos la ecuación para el momento cuadrupolar, vía el tensor cuadrupolar, que según la ecuación (2.32) de Marion y Heald [1] escribimos como

$$Q_{ij} \equiv \sum_{\alpha} q_{\alpha} (3x'_{\alpha,i} x'_{\alpha,j} - r_{\alpha}^2 \delta_{ij}), \quad (5.1)$$

que podemos representar por la matriz (en tres dimensiones)⁵

$$\{\mathbf{Q}\} = \begin{pmatrix} \sum q(2x^2 - y^2 - z^2) & \sum q(3xy) & \sum q(3xz) \\ \sum q(3xy) & \sum q(-x^2 + 2y^2 - z^2) & \sum q(3yz) \\ \sum q(3xz) & \sum q(3yz) & \sum (-x^2 - y^2 + 2z^2) \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Para la primera carga q de nuestro dipolo en $(0, 0, +l)$ esta matriz se convierte en

$$\{\mathbf{Q}_1\} = \begin{pmatrix} -ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & -ql^2 & 0 \\ 0 & 0 & +2ql^2 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

⁵Ver ecuación (2.33) de Marion y Heald [1].

y para la segunda carga $-q$ en $(0, 0, -l)$ tenemos

$$\{\mathbf{Q}_2\} = \begin{pmatrix} ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & ql^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2ql^2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

que es exactamente el negativo de la matriz para q . Por lo tanto el momento cuadrupolar total $\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{Q}_1\} + \{\mathbf{Q}_2\} = 0$ para un dipolo que tiene como centro el origen. Esta claro de la forma de la matriz para el momento cuadrupolar que si el origen es otro que el del dipolo, $\{\mathbf{Q}\}$ no será cero, por lo tanto el momento cuadrupolar depende del origen, a diferencia del momento dipolar, que como vimos en el problema 3, es independiente del origen para este sistema.

Problema 6. Problema 2.6 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Una carga $q_1 = +2e$ está localizada en el origen y una carga $q_2 = -e$ está localizada en el punto $(x, y) = (1, 0)$. Calcule el potencial en los puntos $(0, 5)$ y $(5, 0)$ en las siguientes maneras:

- (a) Mediante un cálculo directo de q/R para cada carga,
- (b) Considerando un término de una expansión multipolar:
 - De un término,
 - De dos términos,
 - De tres términos.

Discute la diferencia en las tasas de convergencia hacia los valores exactos para los dos diferentes puntos del campo.

Solución:

Planteamos la geometría del sistema dado como en la siguiente figura

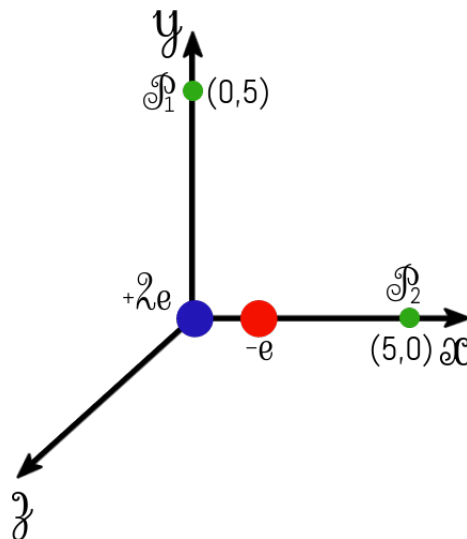


Figura 6: Geometría para el sistema de una carga de $+2e$ localizada en el origen y una de $-e$ localizada en el punto $(1, 0)$.

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

(a) Para calcular el potencial mediante un cálculo directo de q/R para cada carga lo hacemos mediante la siguiente ecuación

$$\Phi(P_i) = \sum_i \frac{q_i}{|r - r_i|}, \quad (6.1)$$

entonces para $P_1(0, 5)$,

$$\begin{aligned} \Phi(P_1) &= \frac{2e}{\sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2}} - \frac{e}{\sqrt{(0-1)^2 + (0-5)^2}} \\ &= \frac{2e}{5} - \frac{e}{\sqrt{26}}, \\ \Phi(P_1) &= 0,2039 e. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Y para $P_2(5, 0)$,

$$\begin{aligned} \Phi(P_2) &= \frac{2e}{\sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2}} - \frac{e}{\sqrt{(5-1)^2 + (0-0)^2}} \\ &= \frac{2e}{5} - \frac{e}{4}, \\ \Phi(P_2) &= 0,1500 e. \end{aligned} \quad (6.3)$$

(b) Para calcular el potencial considerando una expansión multipolar de un término, solo necesitamos calcular el momento monopolar

$$\Phi^{(1)} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{r}, \quad (6.4)$$

y en este caso $\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 2e - e = +e$, entonces para P_1 tenemos

$$\Phi^{(1)}(P_1) = \Phi^{(1)}(P_2) = \frac{q}{r} = \frac{e}{5} = 0,2000 e. \quad (6.5)$$

Para calcular el potencial considerando una expansión multipolar de dos términos, necesitamos calcular el momento monopolar y el dipolar, ya que calculamos el monopolar solo queda calcular el dipolar. Lo hacemos con la ecuación

$$\Phi^{(2)} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}, \quad (6.6)$$

donde $\mathbf{p} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} r'_{\alpha}$. En este caso debido a que ambas cargas están en el eje x , el momento dipolar irá en la dirección de \mathbf{e}_x , y su magnitud será

$$p_x = (+2e)(0) + (-e)(1) = -e, \quad (6.7)$$

por lo tanto

$$\mathbf{p} = -e \mathbf{e}_x. \quad (6.8)$$

Entonces tenemos,

$$\Phi^{(2)}(P_1) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{e \cos 90^\circ}{(5)^2} = 0. \quad (6.9)$$

GIGANTUM HUMERIS INSIDENTES

y

$$\Phi^{(2)}(P_2) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{e \cos 180^\circ}{(5)^2} = -0,0400e. \quad (6.10)$$

Entonces los potenciales en los puntos P_1 y P_2 en una expansión multipolar de dos términos será igual a

$$\Phi_2(P_1) = \Phi^{(1)}(P_1) + \Phi^{(2)}(P_1) = 0,2000e + 0 = 0,2000e, \quad (6.11)$$

$$\Phi_2(P_2) = \Phi^{(1)}(P_2) + \Phi^{(2)}(P_2) = 0,2000e - 0,0400e = 0,1600e, \quad (6.12)$$

Por último para un cálculo de los potenciales mediante una expansión multipolar de 3 términos debemos obtener el momento cuadrupolar para sumarlo a los anteriores momentos. Primero obtenemos el tensor cuadrupolar, expresado por la matriz

$$\{\mathbf{Q}\} = \begin{pmatrix} -2e & 0 & 0 \\ 0 & +e & 0 \\ 0 & 0 & +e \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

y tenemos entonces

$$\Phi^{(4)}(P_1) = \frac{1}{6} \sum_j Q_j j \frac{3x_j^2 - r^2}{r^5} = \frac{1}{6} e \frac{2 + 2 - 1}{5^3} = 0,0040e, \quad (6.14)$$

y

$$\Phi^{(4)}(P_2) = \frac{1}{6} \sum_j Q_j j \frac{3x_j^2 - r^2}{r^5} = \frac{1}{6} e \frac{-4 - 1 - 1}{5^3} = -0,0080e, \quad (6.15)$$

Entonces los potenciales en los puntos P_1 y P_2 en una expansión multipolar de tres términos será igual a

$$\Phi_3(P_1) = \Phi^{(1)}(P_1) + \Phi^{(2)}(P_1) + \Phi^{(4)}(P_1) = 0,2000e + 0 + 0,0040e = 0,2040e, \quad (6.16)$$

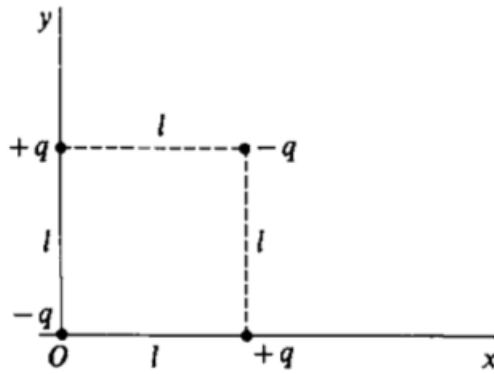
$$\Phi_3(P_2) = \Phi^{(1)}(P_2) + \Phi^{(2)}(P_2) + \Phi^{(4)}(P_2) = 0,2000e - 0,0400e - 0,0080e = 0,1520e, \quad (6.17)$$

Debido a que la distribución de cargas de tamaño finito se extiende en el eje x , vemos que el potencial para P_2 en la expansión multipolar que hicimos es más cercano al valor directo que el del potencial para P_1 , y su serie converge (para P_1) por lo tanto más lentamente.

Problema 7. Problema 2.7 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Computa el tensor cuadrupolar para la siguiente distribución de cargas:





Diagonaliza el tensor mediante una rotación de coordenadas y encuentra el momento cuadrupolar.

Solución:

Problema 8. Problema 2.12 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

La densidad de carga lineal de un anillo de radio a está dada por

$$\lambda = \frac{q}{a}(\cos \phi - \sin 2\phi)$$

- (a) Encontrar el momento monopolar, dipolar y cuadrupolar del sistema.
- (b) Calcular el potencial en un punto arbitrario del espacio, preciso hasta términos en q/r^3 .

Solución:

Referencias

- [1] J. Marion, M. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, 2da edición, Academic Press, 1965.