
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

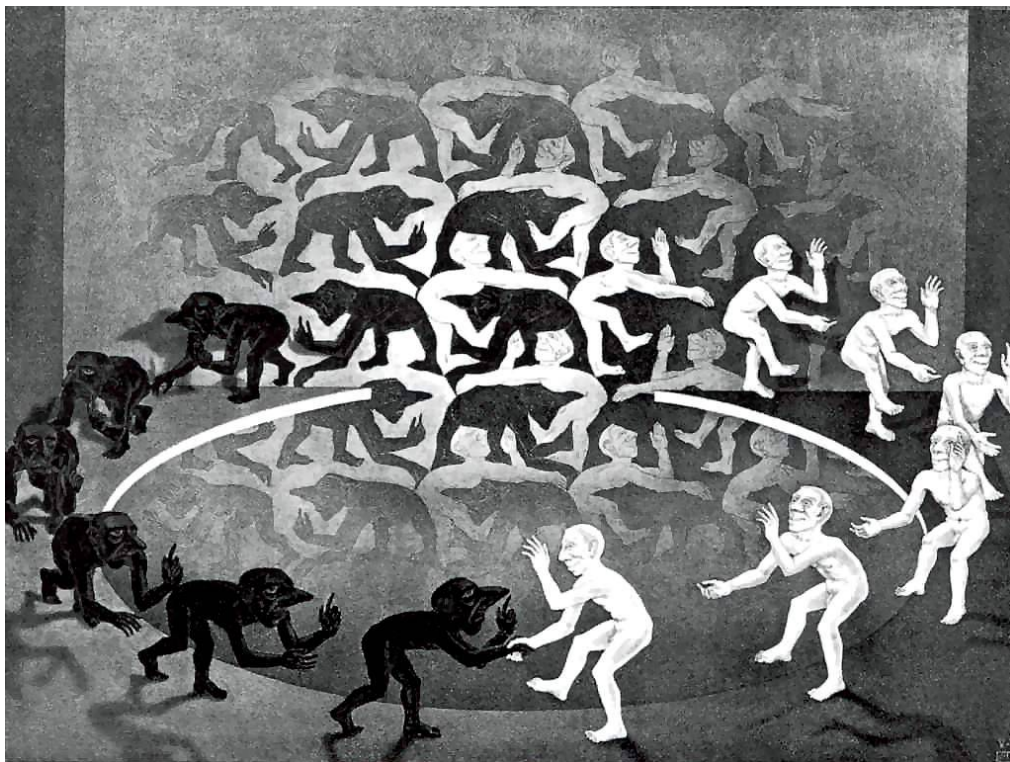
SEMESTRE 2016-II

7 DE ABRIL DE 2016

Tarea # 7. Ondas electromagnéticas, técnicas de medición y problemas avanzados.

Autor:

Favio VÁZQUEZ[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

Problema 1

Explica en que consisten las siguientes técnicas para medir el índice de refracción complejo:

- Elipsometría.
- Reflectancia, absorbancia y transmitancia.
- Técnica de Corbino.
- EELS (electron energy loss spectroscopy).
- REELS (reflection electron energy loss spectroscopy).

Solución:

Elipsometría: La elipsometría es una técnica que mide el cambio en los estados de polarización de la luz reflejada en la superficie de una muestra. Los valores medidos son expresados como Ψ y Δ . Estos valores están relacionados con la tasa de los coeficientes de reflexión de Fresnel, R_P y R_S para la luz polarizada de tipo P y S respectivamente, y esta relación se expresa en la siguiente ecuación

$$\tan \Psi e^{i\Delta} = \frac{R_P}{R_S}. \quad (1.1)$$

Debido a que la elipsometría mide la tasa de los dos valores, puede ser altamente precisa y muy reproducible. De la ecuación anterior vemos que la tasa es un número complejo, por lo que contiene la información de la fase contenida en Δ , que hace que la medición sea muy sensible.

Reflectancia, absorbancia y transmitancia: La reflectancia ρ está definida por la tasa de potencia radiante reflejada a la potencia radiante incidente. Para un cierto elemento de área dA de la superficie reflectante, la potencia radiante incidente diferencial está dada por la irradiancia de la superficie E_e multiplicada por la el tamaño del elemento de superficie, entonces

$$dF_{e,\text{incidente}} = E_e dA, \quad (1.2)$$

y la potencia radiante reflectada diferencial está dada por la exitancia M_e , multiplicada por el tamaño del elemento de superficie,

$$dF_{e,\text{reflejada}} = M_e dA, \quad (1.3)$$

por lo tanto

$$\rho = \frac{dF_{e,\text{reflejada}}}{dF_{e,\text{incidente}}} = \frac{M_e dA}{E_e dA} = \frac{M_e}{E_e}. \quad (1.4)$$

La reflectancia total es luego subdividida en reflectancia regular ρ_r y reflectancia difusa ρ_d , que están dadas por las tasa de potencia radiante reflejada regular y la tasa de potencia radiante reflejada difusa a la potencia radiante incidente. De es esta definición debe ser obvio que

$$\rho = \rho_r + \rho_d. \quad (1.5)$$

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

La transmitancia de un medio está definida por la tasa de potencia radiante transmitida por la potencia radiante incidente. La transmitancia es luego subdividida en transmitancia regular τ_r y transmitancia difusa τ_d , que están dadas por las tasa de potencia radiante transmitida regular y la tasa de potencia radiante transmitida difusa a la potencia radiante incidente. De nuevo

$$\tau = \tau_r + \tau_d. \quad (1.6)$$

La absorbancia de un medio es definida por el ratio de potencia radiante absorbida por la potencia radiante incidente.

Al estar definidas como tasas de los valores de potencia radiante, la reflectancia, transmitancia y absorbancia son adimensionales. Estas cantidades son usadas para describir propiedades ópticas de los materiales, como el índice de refracción. Comúnmente estas cantidades se aplican a radiación compleja, pero también pueden utilizarse para radiación monocromática.

Técnica de Corbino: Esta técnica fue desarrollada para proveer la respuesta dependiente de las frecuencias para el rango espectral de microondas. Ha sido usada para dar información importante sobre superconductores de alta temperatura, fermiones pesados, gafas de electrones y películas superconductoras delgadas. En esta técnica uno mide los coeficientes de reflexión complejos desde una muestra de película fina que termina una línea de transmisión coaxial. Típicamente, el contacto eléctrico es hecho presionando un adaptador de microondas modificado contra la muestra con almohadillas de oro en forma de dona, que empareja las dimensiones radiales de la línea coaxial.

EELS (electron energy loss spectroscopy): EELS es una técnica analítica que mide los cambios en la energía cinética de los electrones luego de que han interactuado con un espécimen. Cuando se hace en un microscopio electrónico de transmisión moderno, EELS es capaz de dar información estructural y química de un sólido, con una resolución espacial a nivel atómico en casos favorables. La resolución energética es típicamente 1 eV pero puede acercarse a 0.1 eV si se usa un haz de electrones monocromático.

Algunos de los electrones se someterán a dispersión inelástica, que significa que perderán energía y sus caminos serán pequeñamente deflectados aleatoriamente. La cantidad de energía perdida puede ser medida mediante un espectrómetro electrónico e interpretada en términos de qué causó la pérdida de energía. Entre estas interacciones inelásticas están las ionizaciones de capas internas, que son particularmente útiles para detectar los componentes elementales de los materiales. Para estudiar superficies, EELS es usualmente usada con baja energía de incidencia.

REELS (reflection electron energy loss spectroscopy): REELS es una combinación de EELS con microscopía electrónica de reflexión (REM), en la que un haz de electrones de alta energía es incidente a un ángulo de brillo sobre la superficie. Se utiliza para estudiar la pérdida de energía de estructuras “near-edge” y pérdida de energía extendida en estructuras finas de superficies de cristales. También es utilizada para detectar cambios relativos en los cambios de estado de densidades en superficies.

Problema 2

Utilizando la transformada de Fourier, encontrar la dependencia en la frecuencia de las siguientes susceptibilidades:

- $\chi(t) = \chi_0 \delta(t)$

GIGANTUM HUMERIS INSIDENTES

- $\chi(t) = \chi_0 \theta(t)$ es la función de Heaviside.
- $\chi(t) = \chi_0 \delta(t) \text{sen}(\omega_0 t)$.

Solución:

De la definición de la transformada de Fourier tenemos, para $\chi(t) = \chi_0 \delta(t)$

$$\begin{aligned} F[\chi(t)] &= \frac{\chi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\chi_0}{\sqrt{2\pi}} e^0 \\ &= \frac{\chi_0}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para $\chi(t) = \chi_0 \theta(t)$

$$\begin{aligned} F[\chi(t)] &= \chi_0 F[\theta(t)] \\ &= \chi_0 \left[-\frac{i}{2\pi\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(\omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Y para $\chi(t) = \chi_0 \delta(t) \text{sen}(\omega_0 t)$

$$\begin{aligned} F[\chi(t)] &= \frac{\chi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \text{sen} \omega_0 t dt \\ &= \frac{\chi_0}{\sqrt{2\pi}} \text{sen}(0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Problema 3

Utilizando el modelo de Lorentz para la función dieléctrica muestra que

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \text{Im}(\epsilon(\omega)) = \frac{\omega_p^2}{8}.$$

En CGS.

Solución:

La parte imaginaria de la función dieléctrica en el modelo de Lorentz es igual a

$$\text{Im}(\epsilon(\omega)) = \frac{\omega \omega_p^2 \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}, \quad (3.1)$$

entonces

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \text{Im}(\epsilon(\omega)) = \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega^2 \omega_p^2 \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (3.2)$$

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

Esta integral al introducirla en **Wolfram Alpha** a partir de una interfaz con **Mathematica** produjo el siguiente resultado (luego lo cotejé con una tabla de integración, y unas notas de un profesor disponibles en <http://www.phys.ufl.edu/~tanner/notes.pdf>)

$$\int_0^\infty d\omega \omega \text{Im}(\epsilon(\omega)) = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \left[\frac{\pi}{2} \right], \quad (3.3)$$

siendo $\pi/2$ el resultado de la integral luego de un cambio de variable y usando propiedades trigonométricas. Al simplificar obtenemos el resultado deseado

$$\int_0^\infty d\omega \omega \text{Im}(\epsilon(\omega)) = \frac{\omega_p^2}{8}. \quad (3.4)$$

Problema 4

Plasmones-polaritones de superficie. Supongan que para $z > 0$ hay un metal descrito por el modelo de plasma. Es decir

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Para $z < 0$ hay vacío. Es decir la superficie que divide el metal del vacío es el plano $x - y$.

- ¿Qué es un plasmón-polaritón de superficie?
- Encontrar la relación de dispersión para el plasmón.

Solución:

Un plasmón polaritón de superficie (PPS) son ondas electromagnéticas de frecuencia infrarroja o visible, que viajan a lo largo de una interfaz metal-dieléctrico o metal-aire. El término PSS explica que la onda involucra movimiento de cargas en el metal (“plasmón de superficie”) y ondas electromagnéticas en el aire o dieléctrico (“polariton”).

Para demostrar la condición para su existencia haremos una deducción para un sistema semi-infinito y un acercamiento clásico. Consideremos entonces un modelo clásico que consiste en dos medios no-magnéticos semi-infinitos con funciones dieléctricas (dependientes del tiempo) locales ϵ_1 y ϵ_2 separados por una interfaz plana en $z = 0$. Las ecuaciones de Maxwell en la ausencia de fuentes externas pueden ser expresadas como

$$\nabla \times \mathbf{H}_i = \epsilon_i \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_i, \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_i, \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_i \mathbf{E}_i) = 0, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (4.4)$$

Donde el índice i describe el medio: $i = 1$ en $z < 0$ y $i = 2$ en $z > 0$. Si escogemos el eje x como la dirección de propagación, tenemos que

$$\mathbf{E}_i = (E_{ix}, 0, E_{iz}) e^{-\kappa_i |z|} e^{i(q_i x - \omega t)}, \quad (4.5)$$

GIGANTUM HUMERIS INSIDENTES

y

$$\mathbf{H}_i = (0, E_{iy}, 0)e^{-\kappa_i|z|}e^{i(q_ix - \omega t)}, \quad (4.6)$$

donde q_i representa la magnitud de un vector de onda que es paralelo a la superficie. Introduciendo estas ecuaciones en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos

$$i\kappa_1 H_{1y} = \frac{\omega}{c} \epsilon_1 E_{1x}, \quad (4.7)$$

$$i\kappa_2 H_{2y} = -\frac{\omega}{c} \epsilon_2 E_{2x}, \quad (4.8)$$

y

$$\kappa_i = \sqrt{q_i^2 - \epsilon_i \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (4.9)$$

Las condiciones de frontera implican que las componentes de los campos magnéticos y eléctricos paralelos a la superficie deben ser continuos. Entonces tenemos

$$\frac{\kappa_1}{\epsilon_1} H_{1y} + \frac{\kappa_2}{\epsilon_2} H_{2y} = 0, \quad (4.10)$$

y

$$H_{1y} - H_{2y} = 0, \quad (4.11)$$

que tiene soluciones solo si el determinante es cero, i.e.

$$\frac{\epsilon_1}{\kappa_1} + \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} = 0. \quad (4.12)$$

Esta es la condición de plasmón de superficie. Esta expresión puede escribirse como

$$q(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}, \quad (4.13)$$

donde ω/c representa la magnitud del vector de onda de luz. En el caso de un metal semi-infinito de Drude en el vacío tenemos que $\epsilon_2 = 1$ y tenemos que

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\eta)}, \quad (4.14)$$

η una infinitesimal positiva. Entonces, en este caso tenemos

$$q(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{2\omega^2 - \omega_p^2}}. \quad (4.15)$$

Esta es la ecuación de dispersión para el plasmón superficie, y la expresión final para el plasmón polaritón de superficie viene dada por

$$\omega^2(q) = \omega_p^2/2 + c^2 q^2 - \sqrt{\omega_p^4/4 + c^4 q^4}. \quad (4.16)$$