

Electrodinámica Clásica. Tarea # 1

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1. Problema 1.2 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

La función delta de Dirac en tres dimensiones puede tomarse como el límite impropio mientras $\alpha \rightarrow 0$ de la función gaussiana

$$D(\alpha; x, y, z) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (x^2 + y^2 + z^2) \right].$$

Considere un sistemas de coordenadas ortogonal general especificado por las superficies $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$, $w = \text{constante}$, con elementos de longitud du/U , dv/V , dw/W en las tres direcciones perpendiculares. Mostrar que

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW$$

considerando el límite de la gaussiana arriba. Note que mientras $\alpha \rightarrow 0$, sólo el elemento de longitud infinitesimal necesita ser usado para la distancia entre los puntos en la exponencial.

Solución:

Partiendo de la ecuación

$$D(\alpha; x, y, z) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (x^2 + y^2 + z^2) \right], \quad (1.1)$$

y haciendo el cambio de variable $x \rightarrow x - x'$, $y \rightarrow y - y'$, $z \rightarrow z - z'$ obtenemos

$$D(\alpha; x - x', y - y', z - z') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] \right\}.$$

Notamos que mientras $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow D \rightarrow 0$, a menos que $x \rightarrow x - x'$, $y \rightarrow y - y'$, $z \rightarrow z - z' \rightarrow 0$ también. Y recordando que $x - x' \rightarrow 0 \Rightarrow dx$, etc., tenemos

$$D(\alpha; x - x', y - y', z - z') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right]. \quad (1.2)$$

Recordamos también que el elemento de longitud se escribe como,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.3)$$

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

entonces

$$D(\alpha; x - x', y - y', z - z') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (ds^2) \right]. \quad (1.4)$$

Y utilizando el sistema de coordenadas que hay que considerar según el problema, podemos reescribir ds^2 como

$$ds^2 = \left(\frac{du}{U} \right)^2 + \left(\frac{dv}{V} \right)^2 + \left(\frac{dw}{W} \right)^2, \quad (1.5)$$

donde recalamos que no estamos diciendo que $dx = du/U$, etc., sino que estamos usando el hecho de que ds^2 es el mismo en todos los sistemas ortogonales, por lo tanto podemos reescribir (1.4) como

$$D(\alpha; u, v, w) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2} \right) \right]. \quad (1.6)$$

Ahora expandimos de vuelta los diferenciales en diferencias,

$$D(\alpha; u - u', v - v', w - w') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{(u - u')^2}{U^2} + \frac{(v - v')^2}{V^2} + \frac{(w - w')^2}{W^2} \right] \right\},$$

que podemos escribir como (utilizando el hecho que $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$),

$$D = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(u - u')^2}{U^2} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(v - v')^2}{V^2} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(w - w')^2}{W^2} \right],$$

y esta ecuación puede expresarse de una forma más conveniente como

$$D = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(u - u')^2}{U^2} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(v - v')^2}{V^2} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(w - w')^2}{W^2} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha}. \quad (1.7)$$

La cual es una ecuación que comienza a parecerse a la definición de la delta. Ahora si reemplazamos en cada término del lado derecho de (1.7) las α 's por α_u/U , α_v/V y α_w/W respectivamente¹ y obtenemos

$$D(\alpha; u - u', v - v', w - w') = \frac{\exp \left[-\frac{(u - u')^2}{2\alpha_u} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{(v - v')^2}{2\alpha_v} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{(w - w')^2}{2\alpha_w} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \cdot UVW. \quad (1.8)$$

Ahora tomando el límite mientras $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w \rightarrow 0$, vemos que cada término del lado derecho de (1.8) se convierte en un delta de Dirac unidimensional y el lado izquierdo entonces en la expresión general de la delta de Dirac tridimensional, por lo tanto (1.8) se transforma en

$$\lim_{\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w \rightarrow 0} D(\alpha; u - u', v - v', w - w') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW.$$

¹Podemos hacer esto si $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w \rightarrow 0$ mientras que $\alpha \rightarrow 0$.

Problema 2. Problema 1.3 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

Usando las funciones delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, exprese las siguientes distribuciones de carga como las densidades de carga tridimensionales $\rho(\mathbf{x})$.

- (a) En coordenadas esféricas, una carga Q uniformemente distribuida sobre una concha esférica de radio R .
- (b) En coordenadas cilíndricas, una carga λ por unidad de longitud uniformemente distribuida sobre una superficie cilíndrica de radio b .
- (c) En coordenadas cilíndricas, una carga Q extendida uniformemente sobre un disco plano de grosor despreciable y radio R .
- (d) Lo mismo que en la parte (c), pero usando coordenadas esféricas.

Solución:

El método que utilizaremos para solucionar cada caso será usar el hecho de que la densidad de carga en cada caso, será proporcional a una delta de Dirac. Luego utilizaremos la propiedad de que dos objetos proporcionales se pueden escribir como el uno igual al otro por un parámetro arbitrario, luego integraremos sobre el objeto completo, igualaremos a la carga total y resolveremos para el parámetro arbitrario.

Recordamos que

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.1)$$

(a) Para una carga Q distribuida uniformemente sobre una concha esférica, sabemos que la distribución de carga se puede escribir como

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) \propto \delta(r - R), \quad (2.2)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) = \xi(R) \delta(r - R), \quad (2.3)$$

donde $\xi(R)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas esféricas $d^3x = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \xi(R) \delta(r - R) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi,$$

$$Q = 4\pi \xi(R) \int_0^\infty \delta(r - R) r^2 dr = 4\pi R^2 \xi(R), \quad (2.4)$$

$$\therefore \xi(R) = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (2.5)$$

Entonces,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R). \quad (2.6)$$

Que era lo esperado, la densidad de carga es la carga total dividida por el área de la esfera por la delta.

(b) Para la superficie cilíndrica,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) \propto \delta(r - b), \quad (2.7)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \xi(b)\delta(r - b), \quad (2.8)$$

donde $\xi(b)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas cilíndricas $d^3x = r dr d\theta$,

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \xi(b)\delta(r - b) r dr d\theta, \\ \lambda &= \xi(b) 2\pi \int_0^\infty \delta(r - b) r dr = \xi(b) 2\pi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\therefore \xi(b) = \frac{\lambda}{2\pi b}. \quad (2.10)$$

Entonces,

$$\boxed{\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \frac{\lambda}{2\pi b} \delta(r - b)}. \quad (2.11)$$

Que era lo esperado, la densidad de carga es la carga total dividida por la circunferencia del cilindro por la delta.

(c) Para el disco plano, debemos usar la función de paso H en la dirección radial,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) \propto \delta(z) H(R - r), \quad (2.12)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \xi(R)\delta(z) H(R - r), \quad (2.13)$$

donde $\xi(R)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas cilíndricas $d^3x = r dr d\theta$,

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r dr d\theta dz = \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \xi(R)\delta(z) H(R - r) r dr d\theta dz, \\ Q &= \xi(R) \int_{-\infty}^\infty \delta(z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty H(R - r) r dr = \xi(R) 2\pi \int_0^R r dr, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\therefore \xi(b) = \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (2.15)$$

Entonces,

$$\boxed{\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \frac{Q}{\pi R^2} \delta(z) H(R - r)}. \quad (2.16)$$

Que también era lo esperado, la densidad de carga es la delta por la densidad de carga superficial, que en este caso es la carga total dividida por el área del disco.

(c) Para el disco plano en coordenadas esféricas, es lo mismo que el caso anterior, pero en este caso confinado al plano z , que es lo mismo que decir que $\theta = \pi/2$. Entonces,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) \propto \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r), \quad (2.17)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) = \xi(R) \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r), \quad (2.18)$$

donde $\xi(R)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas esféricas $d^3x = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \xi(R) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \delta(\theta - \pi/2) \sin \theta d\theta \int_0^\infty H(R - r) r dr, \\ \therefore \xi(R) &= \frac{Q}{\pi R^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Entonces,

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{\pi R} \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r). \quad (2.20)$$

Problema 3. Problema 1.4 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

Cada una de las esferas cargadas de radio a , una conductora, una con una densidad de carga uniforme adentro de su volumen, y una con una densidad de carga esféricamente simétrica que varía radialmente como r^n ($n > -3$), tiene una carga total Q . Use el teorema de Gauss para obtener los campos eléctricos tanto adentro como afuera de la esfera. Esboce el comportamiento de los campos como una función del radio para las primeras dos esfera, y para la tercera con $n = -2, +2$.

Solución:

Problema 4. Problema 1.5 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

El potencial promedio en el tiempo de un átomo de hidrógeno neutro está dado por

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

donde q es la magnitud de la carga electrónica, y $\alpha^{-1} = a_0/2$, siendo a_0 el radio de Bohr. Encuentre la distribución de carga (tanto continua como discreta) que dará este potencial e interpreta tu resultado físicamente.

Solución:

El potencial con el que debemos trabajar es,

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right). \quad (4.1)$$

Claramente para resolver este problema debemos utilizar la ecuación de Poisson, ya que esta relaciona la densidad de carga con el potencial escalar eléctrico que crea. En este caso la utilizaremos para encontrar la densidad de carga. Debemos entonces utilizar la ecuación,

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.2)$$

hacer la diferenciación (en coordenadas esféricas) y resolver para ρ . En coordenadas esféricas, escribimos esta ecuación como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.3)$$

Debido a que Φ solo depende de r , vemos que el potencial tiene una simetría esférica, y por lo tanto se harán cero todas las parciales de (4.3) menos la componente radial. Es decir,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.4)$$

Evaluando esta ecuación sustituyendo (4.1), resulta en

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha r \right) \right] \right\} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha r} \right) \right] &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} e^{-\alpha r} + e^{-\alpha r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) - \frac{\alpha^2}{2} r^2 e^{-\alpha r} \right] &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\alpha r e^{-\alpha r} + r^2 e^{-\alpha r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{\alpha^2}{2} r^2 e^{-\alpha r} \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\alpha}{r^2} e^{-\alpha r} \frac{\alpha^3}{2} e^{-\alpha r} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 e^{-\alpha r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

y resolviendo para ρ tenemos que

$$\rho = -\frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r} - e^{-\alpha r} \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right). \quad (4.5)$$

Ahora debemos tomar en consideración algo que afecta tanto como al potencial dado, como a la expresión que obtuvimos para ρ , y es que $1/r$ se hace infinito en el origen. Entonces debemos estudiar el comportamiento de ρ para $r \approx 0$ y para $r > 0$.

Comencemos por el comportamiento para $r > 0$. Para $r > 0$, al evaluar las derivadas en el lado derecho de (4.5) el término de la derecha se hace cero y nos queda

$$\rho = -\frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}. \quad (4.6)$$

Ahora si $r \approx 0$ tenemos que $e^{-\alpha r} \approx 1$ y entonces nos queda

$$\rho = -\frac{q\alpha^3}{8\pi} - \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right), \quad (4.7)$$

y usando la relación

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r), \quad (4.8)$$

que en este caso se lee como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -4\pi\delta(r), \quad (4.9)$$

y por lo tanto para $r \approx 0$,

$$\rho = -\frac{q\alpha^3}{8\pi} + q\delta(r). \quad (4.10)$$

Ahora debido a que la delta es cero en todas partes menos en el origen, y debido a que el primer término de ecuación (4.10) es igual al término de (4.6) cuando $r = 0$, podemos combinar ambos casos en

$$\rho = -\frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r} + q\delta(r). \quad (4.11)$$

Y esta ecuación es válida para toda r . La parte discreta de esta ecuación representa físicamente a un protón estacionario con carga q , y al rededor de este protón orbita un electrón de carga $-q$. La parte continua de la densidad de carga se puede interpretar como una distribución estadística de la localización del electrón.

Problema 5. Problema 1.6 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

Un capacitor simple es un dispositivo formado por dos conductores aislados adyacentes el uno del otro. Si cargas iguales y opuestas se colocan en los conductores, habrá una cierta diferencia de potencial entre ellos. La razón de la magnitud de la carga en un conductor a la magnitud de la diferencia de potencial es llamada capacitancia (en unidades SI se mide en faradios). Usando la ley de Gauss, calcule la capacitancia de

- (a) dos láminas grandes, planas, de área A , separadas por una pequeña distancia d ;
- (b) dos esferas concéntricas conductoras con radios a, b ($b > a$);
- (c) dos cilindros concéntricos conductores de longitud L , grande comparada a sus radios a, b ($b > a$).
- (d) ¿Cuál es el diámetro interno del conductor externo en un cable coaxial lleno de aire, cuyo conductor central es un alambre cilíndrico de diámetro 1 mm y cuya capacitancia es 3×10^{-11} F/m? ¿ 3×10^{-12} F/m?

Solución:

Referencias

- [1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.