# Electrodinámica Clásica. Tarea # 2

Favio Vázquez*

*Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.*

## Problema 1. Problema 2.1 de Classical Electrodynamics (tanto en la 2da como en la 3ra edición) de Jackson [1, 2].

Una carga puntual $q$ es llevada a una posición a una distancia $d$ desde un plano conductor infinito que está a un potencial cero. Usando el método de imágenes, encuentre:

**(a)** la densidad de carga superficial inducida en el plano, y grafíquela;

**(b)** la fuerza entre el plano y la carga usando la ley de Coulomb para la fuerza entre la carga y su imagen;

**(c)** la fuerza total actuando en el plano integrando $\sigma^2/2\epsilon_0$ sobre todo el plano;

**(d)** el trabajo necesario para remover la carga $q$ de su posición al infinito;

**(e)** la energía potencial entre la carga $q$ y su imagen [compare la respuesta con la de la parte (d) y discuta].

**(f)** Encuentre la respuesta a la parte (d) en eV para un electrón originalmente a un angstrom de la superficie.

Solución:

De la simetría del problema, debe ser claro que el potencial $\Phi$ debe ser equivalente al producido por una carga $q$, junto con una carga imagen $q' = -q$ a una distancia $d$ del lado opuesto del plano. Entonces el potencial debido a dos cargas puntuales una en $d$ de carga $q$ y una en $-d$ de carga $-q$ puede escribirse como:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]. \tag{1.1}$$

**(a)** La densidad de carga superficial puede encontrarse con la relación[1]

$$\sigma = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S, \tag{1.2}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0}, \tag{1.3}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left.\left[\frac{-(z-d)}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} + \frac{(z+d)}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right]\right|_{z=0}, \tag{1.4}$$

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

[1] Ecuación (2.5) de Jackson [2].

Y evaluando en $z = 0$ obtenemos

$$\boxed{\sigma = -\frac{1}{2\pi}\frac{qd}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}}. \tag{1.5}$$

**(b)** Calculemos usando la ley de Coulomb la fuerza entre la carga y su imagen. Es fácil ver al usar la ecuación $Q = \int \sigma dA$ que la carga total inducida es $-q$ [3], por lo tanto podemos decir que la carga $q$ es atraída hacia al plano, con carga inducida $-q$. Debido a que el potencial en la vecindad de $q$ es la misma que en el problema análogo con el método de imágenes (el problema que nos planteamos de una carga $+q$ y una $-q$ sin el plano conductor), la fuerza será simplemente

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\hat{z}}. \tag{1.6}$$

**(c)** La fuerza en el plano conductor debe ser igual y opuesta a la fuerza que calculamos en el inciso anterior. El texto nos solicita que hagamos este cálculo de forma independiente del anterior inciso, integrando $\sigma^2/2\epsilon_0$ sobre todo el plano.

La fuerza incremental por unidad de área se define como la presión electrostática,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \sigma\mathbf{E}, \tag{1.7}$$

donde $\sigma$, que es la cantidad de proporcionalidad, es la densidad de carga inducida en el plano que calculamos en el inciso (a). Ahora, el campo eléctrico también está relacionado con $\sigma$ de acuerdo a

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}, \tag{1.8}$$

y usando estas ecuaciones encontramos la relación conocida para la presión electrostática en la superficie de un conductor,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat{n}. \tag{1.9}$$

La fuerza total es simplemente la presión electrostática por un infinitesimal de área,

$$d\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat{n}dA, \tag{1.10}$$

y sustituyendo la $\sigma$ que encontramos en (a), obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{q^2d^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int\frac{rdrd\theta}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}\hat{z}, \\
&= \frac{q^2d^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int\frac{du\theta}{u^{3/2}}\hat{z}, \\
&= -\frac{q^2d^2}{16\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{u^2}\right|_{d^2}^{\infty}\hat{z}, \\
&= \frac{q^2d^2}{16\pi\epsilon_0 d^4}\hat{z},
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \mathbf{F} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\hat{z}}. \tag{1.11}$$

La cual es exactamente igual y opuesta a la fuerza que encontramos en el inciso anterior, como fue anticipado.

**(d)** Para calcular el trabajo necesario para remover la carga $q$ de su posición al infinito, usamos la ecuación

$$W = \int_d^\infty \mathbf{F}(l) \cdot d\mathbf{l} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_d^\infty \frac{dz}{z^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{z}\Big|_d^\infty , \tag{1.12}$$

$$\boxed{\therefore W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}}. \tag{1.13}$$

**(e)** La energía potencial entre la carga y su imagen se calcula con la ecuación

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |r_1 - r_2|} = \frac{(q)(-q)}{4\pi\epsilon_0 (2d)}, \tag{1.14}$$

$$\boxed{\therefore U = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d}}. \tag{1.15}$$

Vemos entonces que la energía cinética es exactamente el doble de energía requerida para remover la carga de su posición al infinito, que fue lo que calculamos en el inciso anterior. Esto es debido a que en el sistema original, solo existe el campo eléctrico debido a la partícula $q$, mientras en el problema que planteamos por el método de imágenes también está la energía de la partícula imagen; es decir, el problema real solo llena medio espacio $z > 0$, mientras el problema con imágenes el campo llena todo el espacio y es simétrico sobre el origen $z = 0$. Esto no dice que, genéricamente, los cálculos de energía electrostática no son directamente transferibles entre problemas reales a problemas resueltos con el método de imágenes.

**(f)** Ahora calculemos, como es solicitado, la energía potencial utilizando la expresión del inciso (d) en eV para un electrón a un ansgtrom de la superficie.

$$W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} = \frac{(\mathrm{e}^-)^2}{16\pi(5{,}526 \times 10^7 \ \mathrm{e/Vm})(10^{-10} \ \mathrm{m})}, \tag{1.16}$$

$$\boxed{W = 3{,}6 \ \mathrm{eV}}. \tag{1.17}$$

## Problema 2. Problema 2.2 de Classical Electrodynamics (tanto en la 2da como en la 3ra edición) de Jackson [1, 2].

Usando el método de imágenes, discuta el problema de una carga puntual $q$ *adentro* de una esfera hueca, conectada a tierra, conductora de radio interno $a$. Encuentre

- **(a)** el potencial adentro de la esfera;
- **(b)** la densidad de carga superficial inducida;
- **(c)** la magnitud y dirección de la fuerza actuando sobre $q$.
- **(d)** ¿Hay algún cambio en la solución si la esfera es mantenida a un potencial fijo $V$? ¿y si la esfera tiene una carga total $Q$ en sus superficies internas y externas?

Solución:

Este problema es similar al discutido en la sección 2.2 de Jackson [2], solo que en ese caso la carga estaba afuera de la esfera, pero los argumentos que utilizaremos para resolver este problema son muy similares a los que se presentan en esa sección.

**(a)** Si colocamos la carga en el punto $r$, entonces, por simetría axial, la carga imagen debe estar localizada a lo largo de la dirección de $r$ a una distancia $r' > a$. Por lo tanto, el potencial a un punto $\mathbf{x}$ será

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}'|}\right). \tag{2.1}$$

Como lo explica el libro, debido a que la esfera está puesta a tierra, debe cumplirse que $\Phi(|\mathbf{x}| = a) = 0$. Y tenemos también como en el ejemplo del libro que

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{r'} \qquad \text{y} \qquad \frac{r}{a} = \frac{a}{r'}, \tag{2.2}$$

entonces el potencial será (utilizando la ley del coseno)

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(x^2 + r^2 - 2xr\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{a}{r(x^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2x\frac{a^2}{r}\cos\gamma)^{1/2}}\right]}, \tag{2.3}$$

donde $\gamma$ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{x}$.

**(b)** Para calcular la densidad de carga superficial inducida en la esfera, calculamos la derivada normal de $\Phi$ en en la superficie:

$$\boxed{\sigma = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{q}{4\pi ar}\frac{1-\frac{a^2}{r^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\gamma\right)^{3/2}}}. \tag{2.4}$$

**(c)** La fuerza, como lo expresa Jakcson [2], podemos calcularla inmediatamente simplemente obteniendo la fuerza entre la carga $q$ y su imagen $q'$. La distancia entre ellas es $r - r' = r(1 - a^2/r^2)$, y recordando que $q' = -aq/r$, obtenemos

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-2}\hat{r}, \tag{2.5}$$

que es igual en magnitud a la fuerza encontrada en la sección 2.2 de Jackson [2], pero hacia la dirección opuesta.

**(d)** Si la esfera es mantenida a un potencial fijo, el potencial dentro de la esfera está dado por el potencial $\Phi$ que obtuvimos más $V$, la densidad de carga superficial inducida en la superficie interna y la fuerza se mantendrán. Habrá una densidad de carga superficial uniformemente distribuida en la superficie externa.

Si la esfera tiene una carga total $Q$ en sus superficies internas y externas, por la ley de Gauss sabemos que la carga en la superficie interna será la misma, $-q$, y por lo tanto en la superficie externa la carga será $Q + q$, por lo tanto el potencial será igual al que obtuvimos pero sumando el potencial debido a la carga $Q + q$. La densidad de carga superficial en la superficie interna no se ve afectada, pero la externa será proporcional a $Q + q$. Por último la fuerza será la misma.

## Problema 3. Problema 2.3 de Classical Electrodynamics (2da edición) de Jackson [1] y 2.7 (3ra edición) de Jackson [2].

Considera un problema de potencial en el medio espacio definido por $z \geq 0$, con condiciones de frontera de Dirichlet sobre el plano $z = 0$ (y en infinito).

**(a)** Escribe la función de Green apropiada $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

**(b)** Si el potencial $z = 0$ es especificado por $\Phi = V$ adentro de un círculo de radio $a$ centrado en el origen, y $\Phi = 0$ afuera del círculo, encuentre una expresión integral para el potencial en el punto $P$ especificado en términos de coordenadas cilíndricas $(\rho, \phi, z)$.

**(c)** Muestre que, a lo largo del eje del círculo ($\rho = 0$), el potencial está dado por

$$\Phi = V\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

**(d)** Muestre que para distancias grandes ($\rho^2 + z^2 \gg a^2$) el potencial puede ser expandido en una serie de potencias en $(\rho^2 + z^2)^{-1}$, y que los términos más importantes son

$$\Phi = \frac{Va^2}{2}\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8\rho^2 + z^2)^2} + \dots\right]$$

Verifica que los resultados de las partes (c) y (d) son consistentes el uno con el otro en su rango común de validez.

<u>Solución:</u>

## Problema 4. Problema 2.5 de Classical Electrodynamics (2da edición) de Jackson [1] y 2.9 (3ra edición) de Jackson [2].

Una concha conductora, aislada y esférica de radio $a$ está en un campo eléctrico uniforme $E_0$. Si la esfera es cortada en dos hemisferios por un plano perpendicular al campo, encuentre la fuerza requerida para prevenir que los hemisferios se separen

**(a)** si la concha no tiene carga;

**(b)** si la carga total en la concha es $Q$.

<u>Solución:</u>

## Problema 5. Problema 2.6 de Classical Electrodynamics (2da edición) de Jackson [1] y 2.10 (3ra edición) de Jackson [2].

Un capacitor de placas paralelas grande está hecho de dos láminas conductoras planas con una separación $D$, una de ellas tiene tiene un bulto semiesférico de radio $a$ en su superficie interna ($D \gg a$). El conductor con el bulto es puesto a un potencial cero, y el otro conductor es a un potencial tal que, lejos del bulto, el campo eléctrico entre las placas es $E_0$.

**(a)** Calcule la densidad de carga superficial en un punto arbitrario del plano y sobre el bulto, y esboce su comportamiento como una función de la distancia (o ángulo).

**(b)** Muestre que la carga total en el bulto tiene la magnitud $3\pi\epsilon_0 E_0 a^2$.

**(c)** Si, en cambio de tener la otra lámina a un potencial diferente, una carga puntual $q$ es colocada directamente arriba del bulto semiesférico a una distancia $d$ de su centro, muestre que la carga inducida sobre el bulto es

$$q' = -q\left[1 - \frac{d^2 - a^2}{d\sqrt{d^2 + a^2}}\right]$$

<u>Solución:</u>

# Referencias


[1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2da edición. John Wiley and Sons, Inc. 1975.

[2] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.

[3] D. Griffits, *Introduction to Electrodynamics*, 4ta edición, Pearson Education, 2013.