

Electrodinámica Clásica. Tarea # 1

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1. Problema 1.2 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

La función delta de Dirac en tres dimensiones puede tomarse como el límite impropio mientras $\alpha \rightarrow 0$ de la función gaussiana

$$D(\alpha; x, y, z) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (x^2 + y^2 + z^2) \right].$$

Considere un sistemas de coordenadas ortogonal general especificado por las superficies $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$, $w = \text{constante}$, con elementos de longitud du/U , dv/V , dw/W en las tres direcciones perpendiculares. Mostrar que

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW$$

considerando el límite de la gaussiana arriba. Note que mientras $\alpha \rightarrow 0$, sólo el elemento de longitud infinitesimal necesita ser usado para la distancia entre los puntos en la exponencial.

Solución:

Partiendo de la ecuación

$$D(\alpha; x, y, z) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (x^2 + y^2 + z^2) \right], \quad (1.1)$$

y haciendo el cambio de variable $x \rightarrow x - x'$, $y \rightarrow y - y'$, $z \rightarrow z - z'$ obtenemos

$$D(\alpha; x - x', y - y', z - z') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] \right\}.$$

Notamos que mientras $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow D \rightarrow 0$, a menos que $x \rightarrow x - x'$, $y \rightarrow y - y'$, $z \rightarrow z - z' \rightarrow 0$ también. Y recordando que $x - x' \rightarrow 0 \Rightarrow dx$, etc., tenemos

$$D(\alpha; x - x', y - y', z - z') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right]. \quad (1.2)$$

Recordamos también que el elemento de longitud se escribe como,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.3)$$

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

entonces

$$D(\alpha; x - x', y - y', z - z') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (ds^2) \right]. \quad (1.4)$$

Y utilizando el sistema de coordenadas que hay que considerar según el problema, podemos reescribir ds^2 como

$$ds^2 = \left(\frac{du}{U} \right)^2 + \left(\frac{dv}{V} \right)^2 + \left(\frac{dw}{W} \right)^2, \quad (1.5)$$

donde recalamos que no estamos diciendo que $dx = du/U$, etc., sino que estamos usando el hecho de que ds^2 es el mismo en todos los sistemas ortogonales, por lo tanto podemos reescribir (1.4) como

$$D(\alpha; u, v, w) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2} \right) \right]. \quad (1.6)$$

Ahora expandimos de vuelta los diferenciales en diferencias,

$$D(\alpha; u - u', v - v', w - w') = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{(u - u')^2}{U^2} + \frac{(v - v')^2}{V^2} + \frac{(w - w')^2}{W^2} \right] \right\},$$

que podemos escribir como (utilizando el hecho que $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$),

$$D = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(u - u')^2}{U^2} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(v - v')^2}{V^2} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(w - w')^2}{W^2} \right],$$

y esta ecuación puede expresarse de una forma más conveniente como

$$D = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(u - u')^2}{U^2} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(v - v')^2}{V^2} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \frac{(w - w')^2}{W^2} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha}. \quad (1.7)$$

La cual es una ecuación que comienza a parecerse a la definición de la delta. Ahora si reemplazamos en cada término del lado derecho de (1.7) las α 's por α_u/U , α_v/V y α_w/W respectivamente¹ y obtenemos

$$D(\alpha; u - u', v - v', w - w') = \frac{\exp \left[-\frac{(u - u')^2}{2\alpha_u} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{(v - v')^2}{2\alpha_v} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\exp \left[-\frac{(w - w')^2}{2\alpha_w} \right]}{\sqrt{2\pi}\alpha} \cdot UVW. \quad (1.8)$$

Ahora tomando el límite mientras $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w \rightarrow 0$, vemos que cada término del lado derecho de (1.8) se convierte en un delta de Dirac unidimensional y el lado izquierdo entonces en la expresión general de la delta de Dirac tridimensional, por lo tanto (1.8) se transforma en

$$\lim_{\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w \rightarrow 0} D(\alpha; u - u', v - v', w - w') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW.$$

¹Podemos hacer esto si $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w \rightarrow 0$ mientras que $\alpha \rightarrow 0$.

Problema 2. Problema 1.3 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

Usando las funciones delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, exprese las siguientes distribuciones de carga como las densidades de carga tridimensionales $\rho(\mathbf{x})$.

- (a) En coordenadas esféricas, una carga Q uniformemente distribuida sobre una concha esférica de radio R .
- (b) En coordenadas cilíndricas, una carga λ por unidad de longitud uniformemente distribuida sobre una superficie cilíndrica de radio b .
- (c) En coordenadas cilíndricas, una carga Q extendida uniformemente sobre un disco plano de grosor despreciable y radio R .
- (d) Lo mismo que en la parte (c), pero usando coordenadas esféricas.

Solución:

El método que utilizaremos para solucionar cada caso será usar el hecho de que la densidad de carga en cada caso, será proporcional a una delta de Dirac. Luego utilizaremos la propiedad de que dos objetos proporcionales se pueden escribir como el uno igual al otro por un parámetro arbitrario, luego integraremos sobre el objeto completo, igualaremos a la carga total y resolveremos para el parámetro arbitrario.

Recordamos que

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.1)$$

(a) Para una carga Q distribuida uniformemente sobre una concha esférica, sabemos que la distribución de carga se puede escribir como

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) \propto \delta(r - R), \quad (2.2)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) = \xi(R) \delta(r - R), \quad (2.3)$$

donde $\xi(R)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas esféricas $d^3x = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \xi(R) \delta(r - R) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi,$$

$$Q = 4\pi \xi(R) \int_0^\infty \delta(r - R) r^2 dr = 4\pi R^2 \xi(R), \quad (2.4)$$

$$\therefore \xi(R) = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (2.5)$$

Entonces,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R). \quad (2.6)$$

Que era lo esperado, la densidad de carga es la carga total dividida por el área de la esfera por la delta.

(b) Para la superficie cilíndrica,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) \propto \delta(r - b), \quad (2.7)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \xi(b)\delta(r - b), \quad (2.8)$$

donde $\xi(b)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas cilíndricas $d^3x = r dr d\theta$,

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \xi(b)\delta(r - b) r dr d\theta, \\ \lambda &= \xi(b) 2\pi \int_0^\infty \delta(r - b) r dr = \xi(b) 2\pi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\therefore \xi(b) = \frac{\lambda}{2\pi b}. \quad (2.10)$$

Entonces,

$$\boxed{\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \frac{\lambda}{2\pi b} \delta(r - b)}. \quad (2.11)$$

Que era lo esperado, la densidad de carga es la carga total dividida por la circunferencia del cilindro por la delta.

(c) Para el disco plano, debemos usar la función de paso H en la dirección radial,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) \propto \delta(z)H(R - r), \quad (2.12)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \xi(R)\delta(z)H(R - r), \quad (2.13)$$

donde $\xi(R)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas cilíndricas $d^3x = r dr d\theta$,

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r dr d\theta dz = \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \xi(R)\delta(z)H(R - r) r dr d\theta dz, \\ Q &= \xi(R) \int_{-\infty}^\infty \delta(z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty H(R - r) r dr = \xi(R) 2\pi \int_0^R r dr, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\therefore \xi(b) = \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (2.15)$$

Entonces,

$$\boxed{\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, z) = \frac{Q}{\pi R^2} \delta(z)H(R - r)}. \quad (2.16)$$

Que también era lo esperado, la densidad de carga es la delta por la densidad de carga superficial, que en este caso es la carga total dividida por el área del disco.

(c) Para el disco plano en coordenadas esféricas, es lo mismo que el caso anterior, pero en este caso confinado al plano z , que es lo mismo que decir que $\theta = \pi/2$. Entonces,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) \propto \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r), \quad (2.17)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(r, \theta, \phi) = \xi(R) \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r), \quad (2.18)$$

donde $\xi(R)$ es el parámetro arbitrario a determinar. Entonces, recordando que en coordenadas esféricas $d^3x = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \xi(R) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \delta(\theta - \pi/2) \sin \theta d\theta \int_0^\infty H(R - r) r dr, \\ \therefore \xi(R) &= \frac{Q}{\pi R^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Entonces,

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{\pi R} \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r). \quad (2.20)$$

Problema 3. Problema 1.4 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

Cada una de las esferas cargadas de radio a , una conductora, una con una densidad de carga uniforme adentro de su volumen, y una con una densidad de carga esféricamente simétrica que varía radialmente como r^n ($n > -3$), tiene una carga total Q . Use el teorema de Gauss para obtener los campos eléctricos tanto adentro como afuera de la esfera. Esboce el comportamiento de los campos como una función del radio para las primeras dos esfera, y para la tercera con $n = -2, +2$.

Solución:

(a) En el primer caso tenemos una esfera conductora. Primero recordamos que dentro de la esfera el campo eléctrico es cero. Para obtener el campo eléctrico fuera de la esfera, procedemos como siempre a dibujar una esfera concéntrica de integración con un radio r , como es muy simple el problema solo nos planteamos el procedimiento mentalmente. Recordando la forma integral de la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (3.1)$$

y debido a la simetría entre la esfera conductora y la esfera, el campo eléctrico es constante sobre la superficie de integración y entonces podemos escribir:

$$E \oint_S d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3.2)$$

Debemos evaluar la integral de superficie sobre el área total de integración de la esfera de radio r , por lo tanto

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (3.3)$$

y resolviendo para el campo eléctrico,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.4)$$

Resumiendo, para una esfera cargada de radio a y carga total Q ,

$$E = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > a \end{cases}. \quad (3.5)$$

(b) En el segundo caso tenemos una esfera con una densidad de carga uniforme adentro de su volumen. Afuera de la esfera, la superficie de integración usada en la ley de Gauss contiene la misma cantidad de carga que para la esfera conductora del inciso anterior, y por lo tanto,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.6)$$

Adentro de la esfera, sabemos que la carga debe ser proporcional al volumen de la esfera de integración de radio r , $4/3\pi r^3$. Por lo tanto,

$$\rho = \frac{Q}{4/3\pi a^3}, \quad (3.7)$$

y entonces la carga total contenida adentro de la esfera de integración será

$$q = \left(\frac{Q}{4/3\pi a^3} \right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = Q \frac{r^3}{a^3}, \quad (3.8)$$

y utilizando la ley de Gauss,

$$E \oint_S d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3.9)$$

$$E 4\pi r^2 = Q \frac{r^3}{a^3 \epsilon_0}, \quad (3.10)$$

$$\therefore E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}. \quad (3.11)$$

Resumiendo, para esfera con una densidad de carga uniforme adentro de su volumen de radio a y carga total Q ,

$$E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > a \end{cases}. \quad (3.12)$$

(c) La tercera esfera tiene una carga de simetría esférica que varía radialmente como r^n . Afuera de la esfera tendremos el mismo resultado que para los dos casos anteriores, entonces

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.13)$$

Adentro de la esfera debemos primero encontrar la forma de la densidad de carga. Sabemos que tiene la forma

$$\rho \propto r^n, \quad (3.14)$$

y entonces

$$\rho = \xi r^n, \quad (3.15)$$

donde la constante ξ se determina integrando sobre la superficie de la esfera e igualando a la carga total. Entonces,

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a (\xi r^n) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
&= \xi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [r^{n+3}]_0^a \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \xi a^{n+3} \int_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi d\phi \\
&= \xi 2a^{n+3} \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \xi 4\pi a^{n+3},
\end{aligned}$$

$$\therefore \xi = \frac{Q}{4\pi a^{n+3}}, \quad (3.16)$$

entonces

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\xi 4\pi r^{n+3}}{4\pi a^{n+3}}, \quad (3.17)$$

por lo tanto

$$E = \frac{Q r^{n+1}}{4\pi \epsilon_0 a^{n+3}}. \quad (3.18)$$

Resumiendo, para esfera con una carga de simetría esférica que varía radialmente como r^n , de radio a y carga total Q ,

$$E = \begin{cases} \frac{Q r^{n+1}}{4\pi \epsilon_0 a^{n+3}}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}, & r > a \end{cases}. \quad (3.19)$$

Debajo se muestra el comportamiento de los campos eléctrico obtenidos como una función del radio para las primeras dos esfera, y para la tercera con $n = -2, +2$.

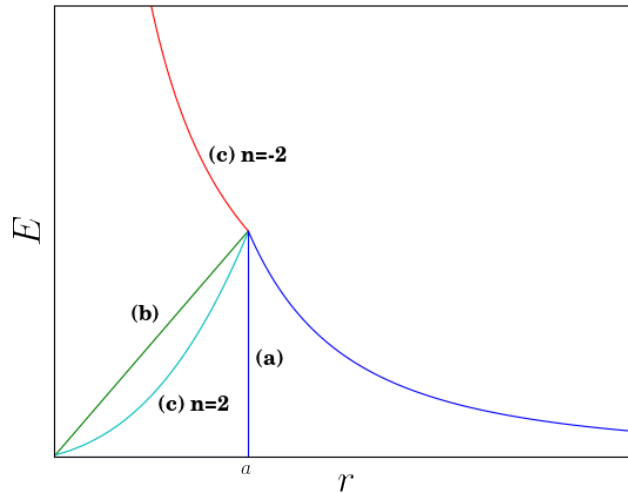


Figura 1: Comportamiento de los campos eléctrico obtenidos como una función del radio para las primeras dos esfera, y para la tercera con $n = -2, +2$. Recordamos que en todos los casos para $r > a$ el comportamiento es el mismo.

Problema 4. Problema 1.5 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

El potencial promedio en el tiempo de un átomo de hidrógeno neutro está dado por

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

donde q es la magnitud de la carga electrónica, y $\alpha^{-1} = a_0/2$, siendo a_0 el radio de Bohr. Encuentre la distribución de carga (tanto continua como discreta) que dará este potencial e interpreta tu resultado físicamente.

Solución:

Problema 5. Problema 1.6 de Classical Electrodynamics (3ra ed) de Jackson [1].

Un capacitor simple es un dispositivo formado por dos conductores aislados adyacentes el uno del otro. Si cargas iguales y opuestas se colocan en los conductores, habrá una cierta diferencia de potencial entre ellos. La razón de la magnitud de la carga en un conductor a la magnitud de la diferencia de potencial es llamada capacitancia (en unidades SI se mide en faradios). Usando la ley de Gauss, calcule la capacitancia de

- (a) dos láminas grandes, planas, de área A , separadas por una pequeña distancia d ;
- (b) dos esferas concéntricas conductoras con radios a, b ($b > a$);
- (c) dos cilindros concéntricos conductores de longitud L , grande comparada a sus radios a, b ($b > a$).
- (d) ¿Cuál es el diámetro interno del conductor externo en un cable coaxial lleno de aire, cuyo conductor central es un alambre cilíndrico de diámetro 1 mm y cuya capacitancia es 3×10^{-11} F/m? ¿ 3×10^{-12} F/m?

Solución:

Referencias

- [1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.