
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

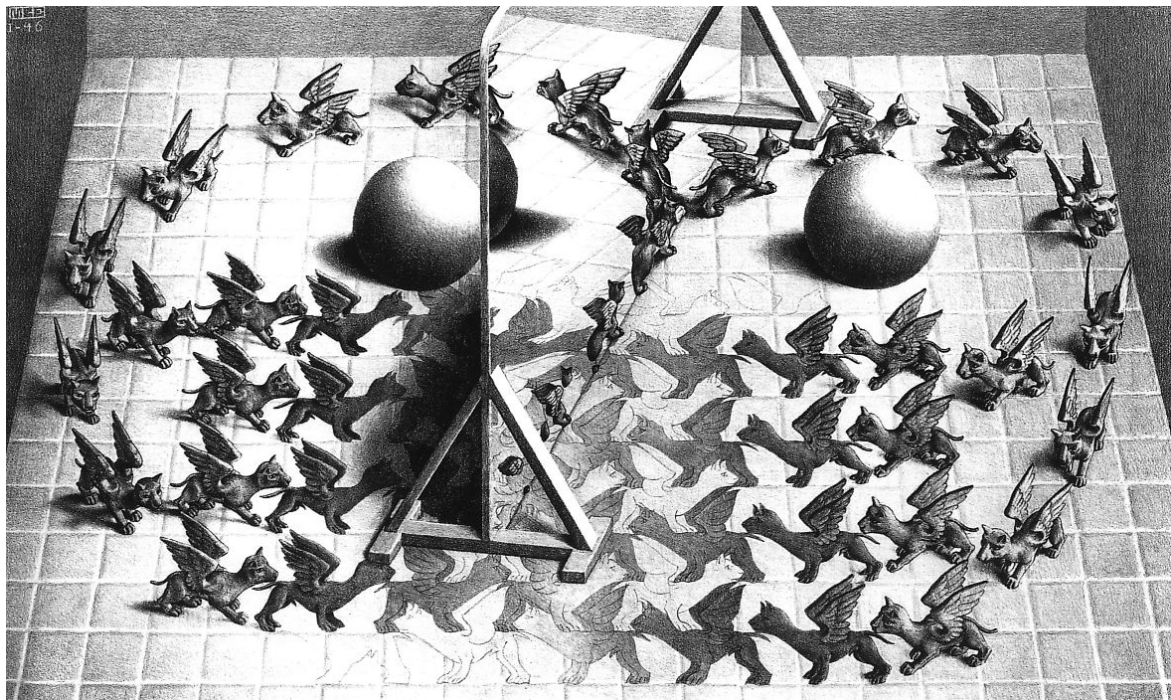
SEMESTRE 2016-II

17 DE MARZO DE 2016

Tarea # 5. Ecuaciones de Maxwell, electromagnetismo macroscópico y leyes de conservación.

Autor:

Favio VÁZQUEZ[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

Problema 1. Problema 6.8 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una esfera de constante dieléctrica constante ϵ y radio a está situada en el origen. Hay un campo eléctrico E_0 uniforme aplicado en la dirección x . La esfera rota con una velocidad angular ω sobre el eje z . Muestre que hay un campo magnético $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M$, donde

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega \left(\frac{a}{r_{>}} \right)^5 \cdot xz,$$

donde $r_{>}$ es el más grande de r y a . El movimiento es no relativista. Puede utilizar los resultados de la sección 4,4 para la esfera dieléctrica en un campo aplicado.

Solución:

La idea básica que nos ayudará a solucionar este problema, fue lo que se vio en clase y en la sección 4.4 de Jackson [1], y es que un campo uniforme E_0 aplicado a la esfera la polariza, induciendo una carga superficial de polarización (o ligada) sobre la misma, la cual se convierte en corriente de polarización (o ligada) debido a la rotación de la esfera. Y como se vio en el capítulo 6 de Jackson [1] estas corrientes dan lugar a campos magnéticos.

Para obtener el potencial magnético que nos pide el problema, utilizaremos la expresión indicada en la ecuación (5.100) de Jackson [1], para el caso en que la magnetización sobre el volumen de integración es constante y por lo tanto se cancela el primer término de esta ecuación y nos queda

$$\Phi_M = \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\sigma_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da', \quad (1.1)$$

y por lo tanto necesitamos una expresión para la densidad superficial de carga magnética σ_M , y ya que esta depende del momento magnético total \mathbf{M} debemos calcularlo. Esto lo haremos calculando primero la densidad de corriente superficial \mathbf{J}_M inducida en la esfera a partir de su polarización, tomando en cuenta la rotación de la misma.

De la sección 4.4 sabemos que la carga superficial inducida en la esfera será¹, en coordenadas cartesianas

$$\sigma_{pol} \equiv \sigma = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \frac{x}{a}. \quad (1.2)$$

Ahora debido a que esta densidad de carga está girando en la superficie de la esfera de radio a a una velocidad angular ω , utilizando²

$$\mathbf{J}_M = \sigma \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

el hecho de que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ y que la velocidad angular puede escribirse como $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$ y $\mathbf{r} = a \hat{r}$ obtenemos

$$\mathbf{J}_M = \sigma(\omega \hat{z}) \times (a \hat{r}), \quad (1.4)$$

$$\therefore \mathbf{J}_M = \sigma \omega a \sin \theta \hat{\phi}, \quad (1.5)$$

¹Ver ecuación (4.58) de Jackson [1].

²Ver página 187 de Jackson [1].

donde hemos utilizado que en coordenadas esféricas $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}$, y sustituyendo la expresión para la densidad superficial obtenemos

$$\mathbf{J}_M = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 x \sin \theta \hat{\phi}. \quad (1.6)$$

Ya que obtuvimos la densidad de corriente superficial podemos obtener el momento magnético total con³

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{M} \times \hat{r}, \quad (1.7)$$

y debido que el momento magnético estará dirigido exclusivamente hacia el lado positivo del eje z , tenemos

$$\mathbf{J}_M = (M \hat{z}) \times \hat{r}, \quad (1.8)$$

ahora utilizando la definición del producto vectorial, las propiedades de los vectores unitarios en coordenadas esféricas y la expresión que obtuvimos para \mathbf{J}_M esta ecuación se puede escribir como

$$M \sin \theta \hat{\phi} = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 x \sin \theta \hat{\phi}, \quad (1.9)$$

y resolviendo para el momento magnético obtenemos

$$\mathbf{M} = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 x \hat{z}. \quad (1.10)$$

Lo único que nos falta para poder utilizar la ecuación (1.1) es obtener una expresión para la densidad superficial de carga magnética, lo cual podemos hacer utilizando la ecuación (5.99) de Jackson [1],

$$\sigma_M = \mathbf{n} \times \mathbf{M}, \quad (1.11)$$

que en nuestro caso puede escribirse como

$$\sigma_M = \hat{r} \times \mathbf{M}, \quad (1.12)$$

y sustituyendo la expresión que obtuvimos para el momento magnético nos queda

$$\sigma_M = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \frac{\omega}{a} x z. \quad (1.13)$$

Estamos ahora en posición para utilizar la ecuación (1.1) y calcular el potencial magnético; pero, para expresarlo en la notación que utiliza el texto conviene primero expandir $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ en esféricos armónicos, entonces⁴

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.14)$$

Entonces (1.1) se escribe como⁵

³Ver ecuación (5.79) de Jackson [1].

⁴Ver ecuación (3.70) de Jackson [1].

⁵Donde hemos utilizado las expresiones para x y z en coordenadas esféricas.

$$\Phi_M = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \frac{\omega}{a} \left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin \theta' \cos \theta' \cos \phi' \right. \\ \left. \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \right],$$

que podemos escribir como

$$\Phi_M = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \phi') \left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta' \cos \theta' \cos \phi' \right. \\ \left. Y_{lm}^*(\theta, \phi) a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \right],$$

Y usando la relación

$$\sin \theta' \cos \theta' \cos \phi' = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2,-1} - Y_{2,1}), \quad (1.15)$$

obtenemos

$$\Phi_M = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \phi') \left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (Y_{2,-1} - Y_{2,1}) \right. \\ \left. Y_{lm}^*(\theta, \phi) a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \right],$$

usando las propiedades de los armónicos esféricos podemos integrar y obtener

$$\Phi_M = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta', \phi') \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [\delta_{l,2} \delta_{m,-1} - \delta_{l,2} \delta_{m,1}], \quad (1.16)$$

que siguiendo los resultados de la sección 3.9 de Jackson [1] escribimos como

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega a^3 \frac{r_{<}^2}{r_{>}^3} \frac{xz}{r}. \quad (1.17)$$

Entonces tenemos dos casos, si $r < a$ se cancelarán las contribuciones de las r^2 y la a^3 con r^3 obtenemos

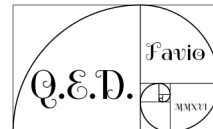
$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega xz, \quad (1.18)$$

y si $r > a$,

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega \frac{a^5}{r^5} xz. \quad (1.19)$$

Si ahora combinamos estos resultados obtenemos

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega \left(\frac{a}{r_{>}} \right)^5 \cdot xz. \quad (1.20)$$



Problema 2. Problema 6.9 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Discuta la conservación de la energía y el impulso lineal para un sistema macroscópico de fuentes y campos electromagnéticos en un medio uniforme e isotrópico, descrito por una permitividad ϵ y una permeabilidad μ . Muestre en un cálculo simple que la densidad de energía, el vector de Poynting, la densidad de campo-impulso, y el tensor de esfuerzo de Maxwell están dados por las expresiones de Minkowski,

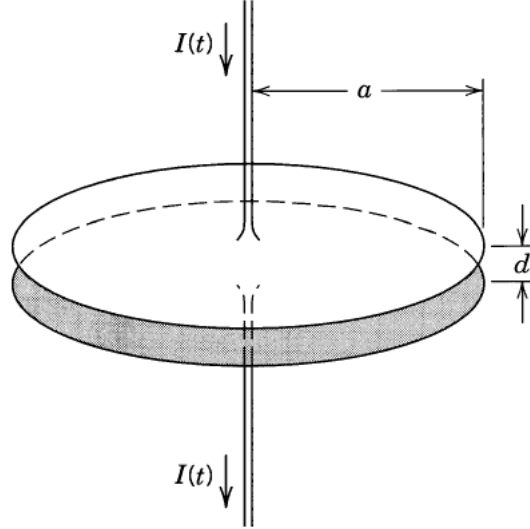
$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2), \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \\ \mathbf{g} &= \mu\epsilon\mathbf{E} \times \mathbf{H}, \\ T_{ij} &= [\epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\epsilon E^2 + \mu H^2)]. \end{aligned}$$

¿Qué modificaciones surgen si ϵ y μ son funciones de la posición?

Solución:

Problema 3. Problema 6.15 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Un capacitor de placas paralelas circular ideal de radio a y separación entre las placas $d \ll a$ está conectado a una fuente de corriente mediante hilos de conexión axial, como se muestra en el bosquejo. La corriente en el cable es $I(t) = I_0 \cos \omega t$.



- (a) Calcule el campo eléctrico y el magnético entre las placas a segundo orden en potencias de la frecuencia (o número de onda), despreciado los efectos de campos de borde.
- (b) Calcule las integrales de volumen de w_e y w_m que entran en la definición de la reactancia X , (6.140), a segundo orden en ω . Muestre que en términos de la corriente de entrada I_i , definida por $I_i = -i\omega Q$, donde Q es a la carga total en una placa, estas energías son

$$\int w_e d^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|I_i|^2 d}{\omega^2 a^2}, \quad \int w_m d^3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|I_i|^2 d}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{12c^2} \right).$$

- (c) Muestre que los circuitos en serie equivalentes tienen $C \simeq \pi\epsilon_0 a^2/d$, $L \simeq \mu_0 d/8\pi$, y que un estimado para la frecuencia de resonancia del sistema es $\omega_{res} \simeq 2\sqrt{2}c/a$. Compare con la primera raíz de $J_0(x)$.

Solución:

Referencias

- [1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.
- [2] D. Griffiths, *Indtroduction to Electrodynamics*, 4ta edición. Pearson, 2013.