Universidad Nacional Autónoma de México

Electrodinámica Clásica

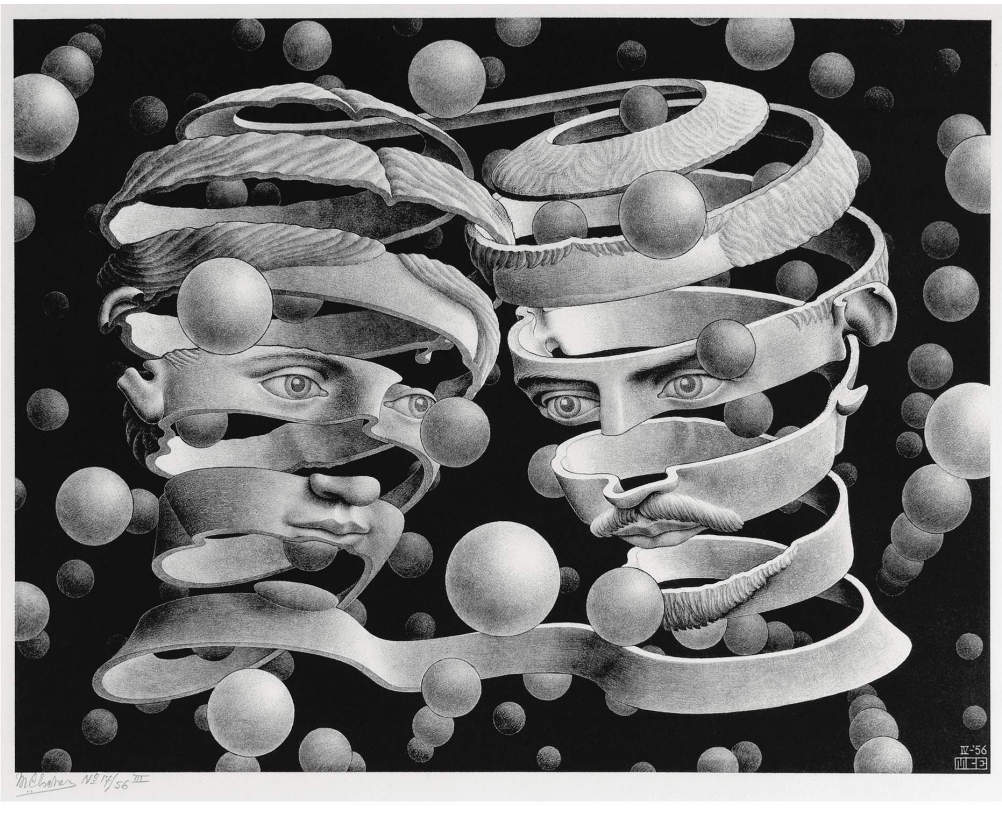
Semestre 2016-II

12 de mayo de 2016

Tarea # 9. Radiación.

Autor:

Favio Vázquez[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 1

En la zona lejana demostrar, partiendo de los potenciales retardados,

(a)

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \hat{n}}{cr} + \frac{\ddot{Q}_\alpha}{6c^2 r}, \quad \text{donde} \quad Q_\alpha = Q_{\alpha\beta}\hat{n}_\beta$$

(b)

$$P = \frac{2|\ddot{p}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{m}|^2}{3c^3} + \frac{\dddot{Q}_{\alpha\beta}}{180c^5}.$$

Solución:

Problema 2

Explicar la radiación de bremsstrahlung.

Solución:

Los cálculos para esta sección se harán en S.I. ya que se tomaron en gran parte de la sección 23.3 de Zangwill [1]. Lo que trabajaremos será con la teoría clásica de bremsstrahlung, y veremos que solo es un nombre a que se le da a un tipo de radiación en electrodinámica.

La energía radiada al infinito por una partícula cargada está determinada por los campos de aceleración $\mathbf{E}_a(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t)$ fueron obtenidos en la tarea anterior, acá los escribimos en S.I. para trabajar con ellos

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\hat{n} \times \{(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cg^3 R}\right]_{ret}, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \times \hat{n})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{n}) + g\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \hat{n}}{g^3 R}\right]_{ret}, \tag{2.2}$$

donde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $g(t') = \frac{d}{dt}[r' - r + R(t')/c]$ y $\hat{n}$ es un vector unitario definido por $\mathbf{R}(t) = R(t)\hat{n}(t)$ y el *ret* se refiere a que las mediciones se hacen el tiempo retardado.

Éstos son campos de radiación porque decrecen con $1/R$ y forman una triada ortogonal con el vector unitario retardado de la línea de visión, $\hat{n}_{ret}$. El vector de Poynting asociado,

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a = \epsilon_0 c E_a^2 \hat{n}_{ret} = \epsilon_0 c \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left|\frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]}{cg^3 R}\right|_{ret} \hat{n}_{ret}, \tag{2.3}$$

determina la tasa en la cual la energía fluye a través de un ángulo sólido $d\Omega$ de una esfera envolvente distante de radio R:

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dU}{dt d\Omega} = R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{n}_{ret}. \tag{2.4}$$

La tasa de emisión se convierte en una cantidad más fundamental cuando la multiplicamos por g_{ret} y nos enfocamos en la distribución angular del poder emitido,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{dU}{dt_{ret} d\Omega} = g_{ret} R^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{n}_{ret} = \frac{1}{c}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left|\frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}\right|_{ret}. \tag{2.5}$$

Esta ecuación se simplifica considerablemente cuando la aceleración $\mathbf{a}$ es paralela a la velocidad $\mathbf{v}$. El patrón de radiación tiene simetría azimutal al rededor su dirección común y entonces depende solamente del ángulo θ definido por $\hat{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = (v/c)\cos\theta$. Recordando que todas las cantidades se refieren al tiempo retardado de emisión, la distribución angular de la radiación emitida es

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\parallel} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\frac{a^2\,\mathrm{sen}^\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}. \tag{2.6}$$

Ahora la dependencia de esta ecuación en a^2 nos dice que el patrón de radiación ocurre cuando la carga se acelera o se desacelera. La palabra alemana bremsstrahlung que significa "radiación de frenado" es usada comúnmente para el caso de desaceleración. Un ejemplo de la teoría clásica de bremsstrahlung es cuando un electrón de rápida velocidad choca con un blanco metálico, y se desacelera rápidamente, dando lugar a este tipo de radiación, bremsstrahlung [2].

Problema 3

Para una partícula no relativista acelerada dibujar el patrón de radiación.

Solución:

Para solucionar este problema recrearemos la figura 9.5 de Jackson [3] que a nuestro parecer representa varios aspectos de los patrones de radiación. En la sección 9.9 del texto, el autor describe como se llegan a las ecuaciones para poder encontrar los patrones de radiación tanto dipolares como cuadrupolares, y dispone una tabla donde se encuentran distribuciones angulares para la forma normalizada del vector de armónicos esféricos $\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)$, que se define como (ec. 9.119 de Jackson [3])

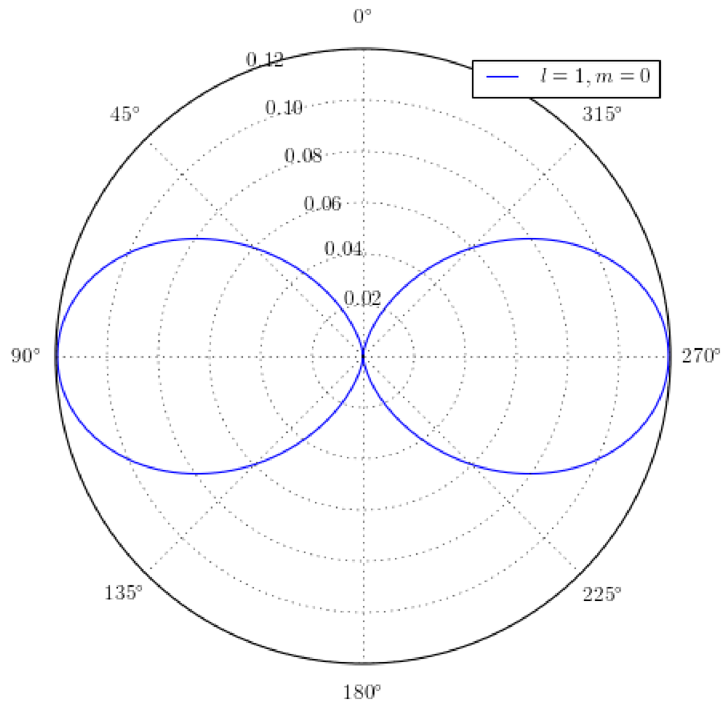
$$\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\mathbf{L}Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{3.1}$$

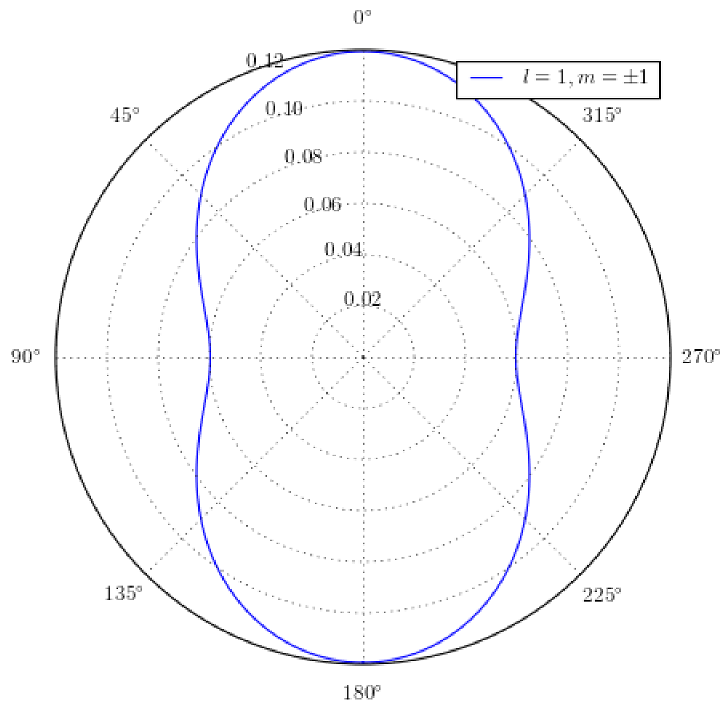
donde $\mathbf{L} = \frac{1}{i}(r\times\boldsymbol{\nabla})$. La tabla en cuestión es la siguiente (tabla 9.1 de Jackson [3])

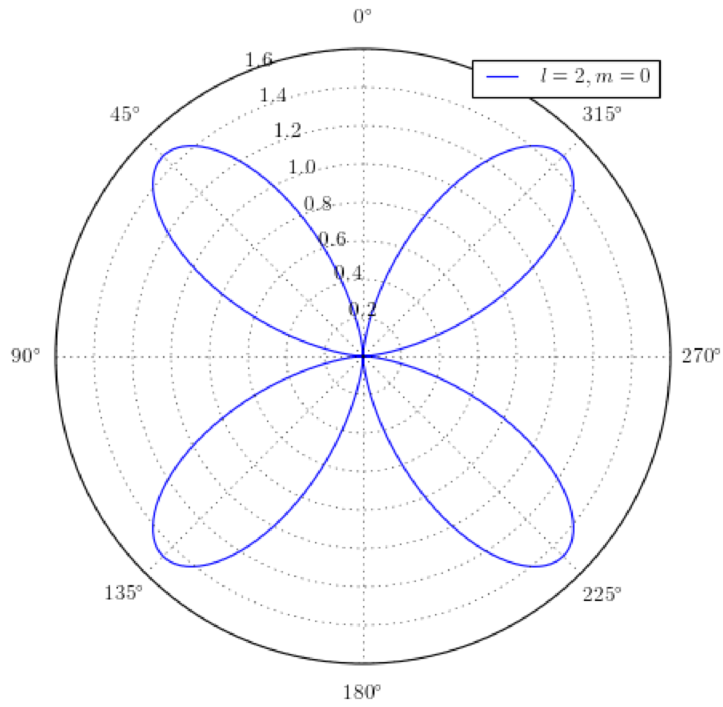
Table 9.1 Some Angular Distributions: $|\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)|^2$

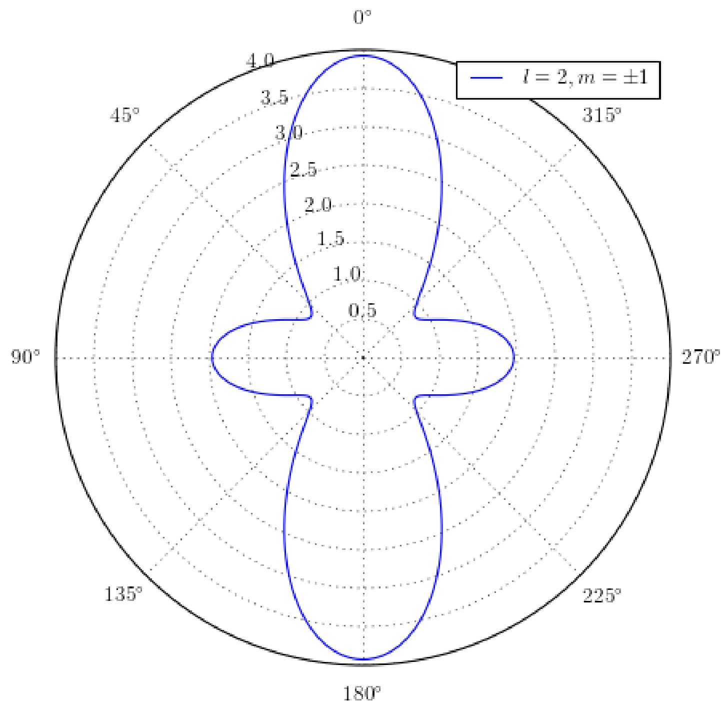
	m		
l	0	±1	±2
1 Dipole	$\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta$	$\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta)$	
2 Quadrupole	$\frac{15}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta$	$\frac{5}{16\pi}(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$	$\frac{5}{16\pi}(1-\cos^4\theta)$

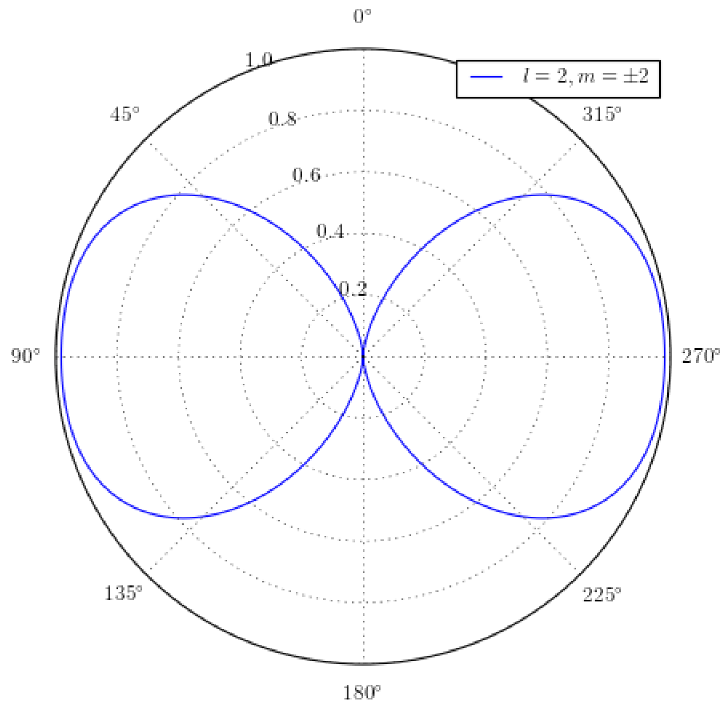
Debajo las distribuciones dipolares se ven como aquellas en las que un dipolo oscila paralelo al eje z ($m=0$) y las que dos dipolos, uno a lo largo del eje x y otro a lo largo del eje y, 90° fuera de fase ($m=\pm1$). Las distribuciones angulares dipolares y cuadrupolares están graficadas debajo como diagramos de intensidad dipolar. Representan distribuciones angulares para $l=1$ y $l=2$. La ecuación de donde salen las porciones de ecuaciones que se encuentran en la tabla de arriba es la (9.152) de Jackson [3]. Cada una tiene su respectiva leyenda que la relaciona a la tabla de arriba, y la última figura es un compendio de todos los patrones de radiación.


0°
45°
315°
90°
270°
135°
225°
180°
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
$l = 1, m = 0$


0°
45°
315°
90°
270°
135°
225°
180°
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
$l = 1, m = \pm 1$


0°
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
$l = 2, m = 0$


0°
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
$l = 2, m = \pm 1$

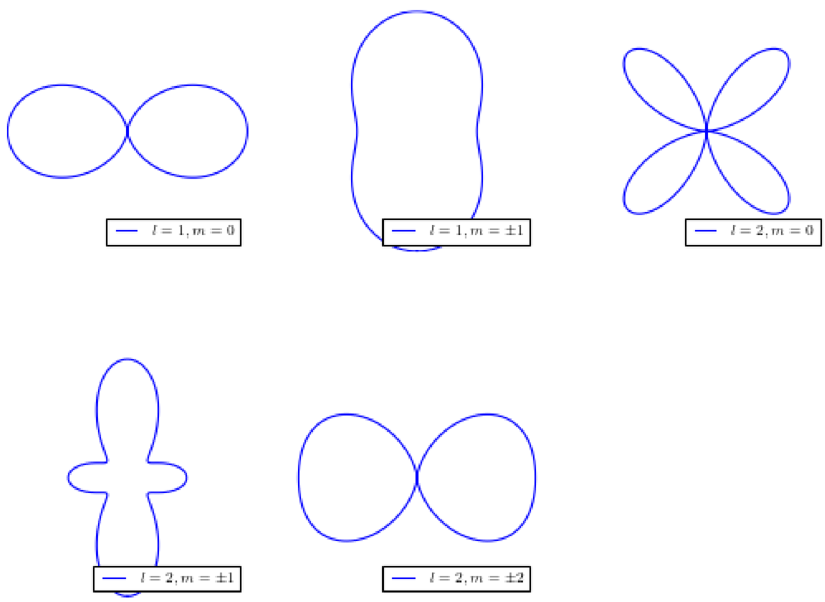


El código que hace estas imágenes de arriba es (Link al notebook de Python en mi GitHub)

```
from __future__ import print_function
import numpy as np
from numpy import arccos, sin, cos, pi, array, sqrt, log, exp
import matplotlib
matplotlib.use('nbagg')
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc

rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
## for Palatino and other serif fonts use:
#rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
rc('text', usetex=True)

#LaTeX
plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

# Linespace for theta

theta = np.linspace(-pi,pi,360)

# Variable definitions
x1 = 3/(8*pi)*(sin(theta))**2 #l=1,m=0
x2 = 3/(16*pi)*(1 + (cos(theta))**2)#l=1,m=+-1
x3 = 15/8*pi * (sin(theta))**2*(cos(theta))**2 #l=2,m=0
x4 = (5/8*pi) * (1 - 3*(cos(theta))**2 +
              4*(cos(theta))**4) #l=2, m=+-1
x5= 5/16*pi * (1 - (cos(theta))**4)

#Plots and Style

# l=1, m=0
ax = plt.subplot(111, polar=True)
```

```
ax.set_theta_offset(pi/2)
ax.plot(theta,x1,label=r'$l=1,m=0$')
ax.legend(loc=1,fontsize=12)
plt.show()

# l=1, m=+-1
ax = plt.subplot(111, polar=True)
ax.set_theta_offset(pi/2)
ax.plot(theta,x2,label=r'$l=1,m=\pm 1$')
ax.legend(loc=1,fontsize=12)
plt.show()

# l=2, m=0
ax = plt.subplot(111, polar=True)
ax.set_theta_offset(pi/2)
ax.plot(theta,x3, label=r'$l=2,m=0$')
ax.legend(loc=1,fontsize=12)
plt.show()

# l=2, m=+-1
ax = plt.subplot(111, polar=True)
ax.set_theta_offset(pi/2)
ax.plot(theta,x4, label=r'$l=2,m=\pm 1$')
ax.legend(loc=1,fontsize=12)
plt.show()

# l=2, m=+-2
ax = plt.subplot(111, polar=True)
ax.set_theta_offset(pi/2)
ax.plot(theta,x5, label=r'$l=2,m=\pm 2$')
ax.legend(loc=1,fontsize=12)
plt.show()
```

Compendio de patrones de radiación



El código que hace esta figura es

```
 from __future__ import print_function
import numpy as np
from numpy import arccos,sin, cos, pi, array, sqrt, log, exp
import matplotlib
matplotlib.use('nbagg')
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc

rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
## for Palatino and other serif fonts use:
#rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
rc('text', usetex=True)

#LaTeX
plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')

# Linespace for theta

theta = np.linspace(-pi,pi,360)

# Variable definitions
x1 = 3/(8*pi)*(sin(theta))**2 #l=1,m=0
x2 = 3/(16*pi)*(1 + (cos(theta))**2)#l=1,m=+-1
x3 = 15/8*pi * (sin(theta))**2*(cos(theta))**2 #l=2,m=0
x4 = (5/8*pi) * (1 - 3*(cos(theta))**2 +
              4*(cos(theta))**4) #l=2, m=+-1
x5= 5/16*pi * (1 - (cos(theta))**4)

fig = plt.figure()

#Plots
ax1 = fig.add_subplot(231,projection='polar')
ax1.plot(theta,x1,label=r'$l=1,m=0$')
ax2 = fig.add_subplot(232,projection='polar')
ax2.plot(theta,x2,label=r'$l=1,m=\pm 1$')
ax3 = fig.add_subplot(233,projection='polar')
ax3.plot(theta,x3, label=r'$l=2,m=0$')
ax4 = fig.add_subplot(234,projection='polar')
ax4.plot(theta,x4, label=r'$l=2,m=\pm 1$')
ax5 = fig.add_subplot(235,projection='polar')
ax5.plot(theta,x5, label=r'$l=2,m=\pm 2$')

#Offsets
ax1.set_theta_offset(pi/2)
ax2.set_theta_offset(pi/2)
ax3.set_theta_offset(pi/2)
ax4.set_theta_offset(pi/2)
ax5.set_theta_offset(pi/2)

#Legends
ax1.legend(loc=4,fontsize=8)
ax2.legend(loc=4,fontsize=8)
ax3.legend(loc=4,fontsize=8)
ax4.legend(loc=4,fontsize=8)
ax5.legend(loc=4,fontsize=8)

#Axis style
ax1.axis('off')
ax2.axis('off')
ax3.axis('off')
```

```
ax4.axis('off')
ax5.axis('off')

plt.show()
```

Problema 4

¿Cuánto tiempo tarda en caer un electrón al núcleo? Considere el átomo de hidrógeno y n=1.

Solución:

La pérdida de energía dominante en este caso está dada por la radiación dipolar, que utilizando la ecuación de Larmor podemos escribir como

$$\frac{dU}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{2a^2e^2\omega^4}{3c^3}. \tag{4.1}$$

Para un electrón de carga $-e$ y masa m_e en una órbita de radio a acerca de un núcleo fijo de carga $+e$ (átomo de hidrógeno), la segunda ley de Newton, $F = ma$ nos dice que

$$\frac{e^2}{a^2} = m\frac{v^2}{a} = m\omega^2 a, \tag{4.2}$$

de manera que

$$\omega^2 = \frac{e^2}{ma^3}, \tag{4.3}$$

y también la energía total será

$$U = -\frac{e^2}{a} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{e^2}{2a}. \tag{4.4}$$

Usando las ecuaciones (4.3) y (4.4) en la ecuación (4.1), tenemos

$$\frac{dU}{dt} = \frac{e^2}{2a^2}\dot{a} = -\frac{2e^6}{3a^4m^2c^3}, \tag{4.5}$$

o

$$a^2\dot{a} = \frac{1}{3}\frac{da^3}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2c^3} = -\frac{4}{3}r_0^2c, \tag{4.6}$$

donde $r_0 = e^2/mc^2$ es el radio clásico del electrón. Entonces

$$a^3 = a_0^3 - 4r_0^2ct. \tag{4.7}$$

El tiempo de caída del electrón será entonces ($a \to 0$)

$$t_{\text{caída}} = \frac{a_0^3}{4r_0^2c}. \tag{4.8}$$

Sustituyendo los valores conocidos para $r_0 = 2{,}8 \times 10^{-13}$ cm y $a_0 = 5{,}3 \times 10^{-9}$, el tiempo de caída del electrón al núcleo será $\boxed{t_{\text{caída}} = 1{,}6 \times 10^{-11} s}$. Este es el orden de magnitud para el tiempo de vida de un átomo de hidrógeno excitado con $n = 1$.

Referencias

[1] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2012.

[2] D. Griffits, *Introduction to Electrodynamics*, 4ta edición, Pearson Education, 2013.

[3] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.