
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

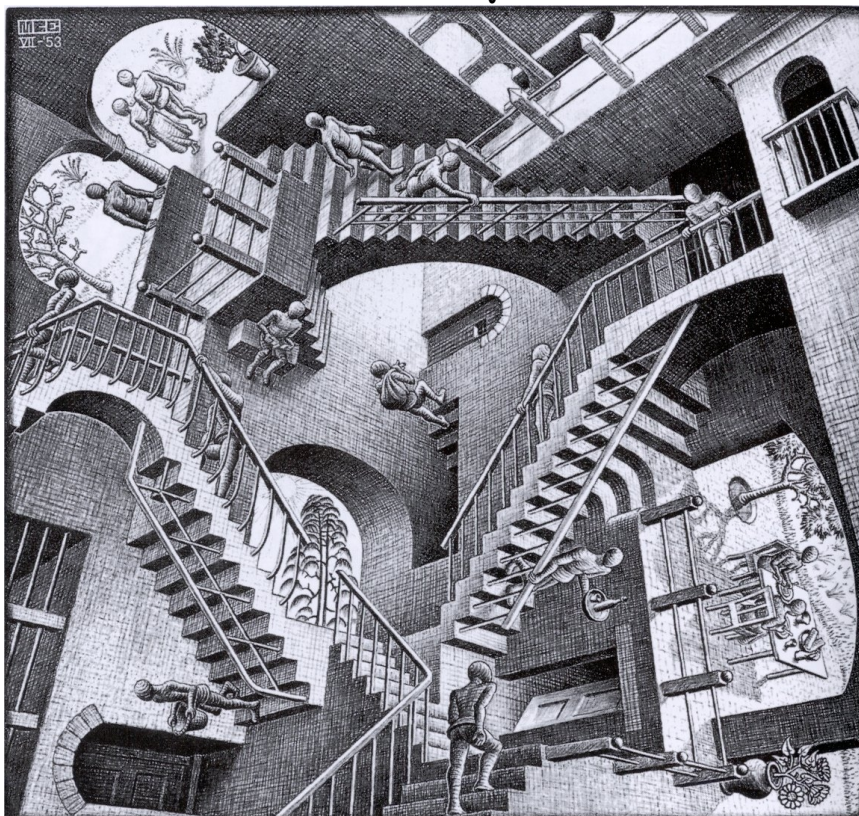
SEMESTRE 2016-II

10 DE MARZO DE 2016

Tarea # 4. Multipolos, Electroestática de Medios Macroscópicos, Dieléctricos.

Autor:

Favio VÁZQUEZ[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

Problema 1. Problema 4.1 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las distribuciones de carga mostradas como las partes a y b. Intente obtener resultados para todo los momentos que no se hacen cero válidos para todo l , pero en cada caso encuentre los primeros dos conjuntos de momentos que no se hacen cero al menos.

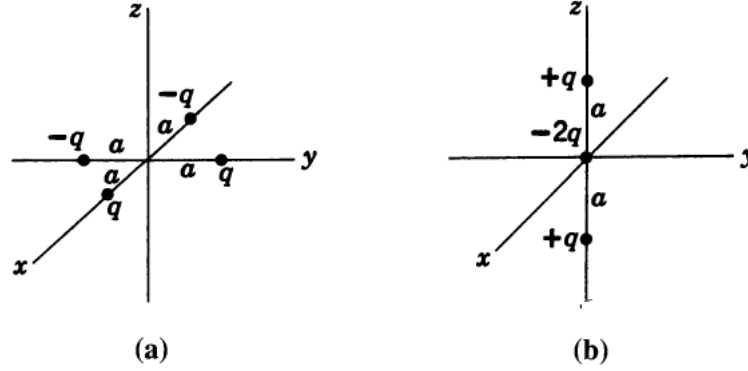


Figura 1: Disposición de la distribución de cargas para el problema 1.

- (c) Para la distribución de carga del segundo conjunto b escriba la expansión multipolar para el potencial. Manteniendo solo los términos de orden bajo en la expansión, grafique el potencial en el plano $x - y$ como una función de la distancia desde el origen para distancias mayores a a .
- (d) Calcule directamente de la ley de Coulomb el potencial exacto para b en el plano $x - y$. Grafíquelo como una función de la distancia y compare con el resultados encontrado en la parte c .

Divida la forma asintótica en las partes c y d para ver el comportamiento a distancias grandes más claramente.

Solución:

Comenzamos recordando la ecuación para los momentos multipolares¹

$$q_{lm} = \sum_i q_i r_i^l Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i), \quad (1.1)$$

donde (r_i, θ_i, ϕ_i) es la posición de la i -ésima carga, q_i es la magnitud de la i -ésima carga y $Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i)$ son los armónicos esféricos. Viendo la figura de la parte (a) vemos que las cargas, en coordenadas esféricas se ubican según la siguiente tabla²

Carga	r	θ	ϕ
$+q$	a	$\pi/2$	0
$+q$	a	$\pi/2$	$\pi/2$
$-q$	a	$\pi/2$	π
$-q$	a	$\pi/2$	$3\pi/2$

¹Ver ecuación (4.3) de Jackson [1].

²La primera carga es la ubicada en $(x = 0, y = a, z = 0)$

Entonces utilizando esta información tenemos

$$q_{lm} = qa^l \left[Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) + Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) - Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) - Y_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right]. \quad (1.2)$$

Pero recordando que³

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1.3)$$

donde $P_l^m(\cos \theta)$ son las funciones de Legendre asociadas (ver ecuación (3.49) de Jackson) y

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi), \quad (1.4)$$

podemos escribir entonces

$$q_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [e^{i(-m)(0)} + e^{i(-m)(\pi/2)} - e^{i(-m)(\pi)} - e^{i(-m)(3\pi/2)}] P_l^m(\cos \frac{\pi}{2}),$$

pero

$$\begin{aligned} e^{i(-m)(0)} &= 1, \\ e^{i(-m)(\pi/2)} &= (e^{-i\pi/2})^{(m)} = (-i)^m, \\ e^{i(-m)(\pi)} &= (e^{-i\pi})^{(m)} = (-1)^m, \\ e^{i(-m)(3\pi/2)} &= (e^{-i3\pi/2})^{(m)} = i^m. \end{aligned}$$

Tenemos entonces,

$$q_{lm} = qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [1 + (-i)^m - (-1)^m - i^m] P_l^m(0), \quad (1.5)$$

el término entre corchetes $[1 + (-i)^m - (-1)^m - i^m]$ es cero para m par, y se hace $(2 - 2i)$ para $m = -7, -3, 1, 5, 9, \dots$ y $(2 + 2i)$ para $m = -5, -1, 3, 7, \dots$, además por las propiedades de $P_l^m(0)$ sabemos que se hace cero cuando l y m tienen signos diferentes. Estas dos consideraciones no hacen ver que los únicos momentos que no se hacen cero son aquellos con l y m impares. Y como el texto lo solicita, los primeros conjuntos de momentos que no se hacen cero son

$$q_{1,\pm 1} = \mp qa \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (1 \mp i), \quad (1.6)$$

$$q_{3,\pm 1} = \pm qa^3 \sqrt{\frac{21}{\pi}} (1 \mp i), \quad (1.7)$$

$$q_{3,\pm 3} = \mp qa^3 \sqrt{\frac{35}{16\pi}} (1 \pm i), \quad (1.8)$$

³Ver ecuación (3.53) y (3.54) de Jackson [1]

(b) Viendo la figura de la parte (b) vemos que las cargas, en coordenadas esféricas se ubican según la siguiente tabla⁴

Carga	r	θ	ϕ
$+q$	a	0	0
$-2q$	0	0	0
$+q$	a	π	0

Entonces,

$$q_{lm} = q \left[a^l Y_{lm}^*(0, 0) - \cancel{(0)^l Y_{lm}^*(0, 0)} + a^l Y_{lm}^*(\pi, 0) \right], \quad (1.9)$$

y usando (1.3) podemos escribir esto como

$$q_{lm} = qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left[e^{im(0)} P_l^m(\cos(0)) + e^{im(0)} P_l^m(\cos(\pi)) \right], \quad (1.10)$$

$$\therefore q_{lm} qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [P_l^m(1) + P_l^m(-1)]. \quad (1.11)$$

Debido a que el sistema tiene simetría azimutal, solamente los términos con $m = 0$ serán distintos de cero, y notando que $P_l^0(1) = 1$, $P_l^0(-1) = (-1)^l$ tenemos que

$$q_{l0} = qa^l \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right]^{1/2} [1 + (-1)^l], \quad (1.12)$$

y tendremos que para l par y $m = 0$,

$$q_{l0} = 2qa^l \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right], \quad (1.13)$$

y para l impar o $m \neq 0$ $q_{l0} = 0$. Los primeros momentos que no se hacen cero son

$$q_{2,0} = qa^2 \sqrt{\frac{5}{\pi}}, \quad (1.14)$$

$$q_{4,0} = qa^4 \sqrt{\frac{9}{\pi}}. \quad (1.15)$$

(c) La expansión multipolar para el potencial podemos escribirla como⁵

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (1.16)$$

y sustituyendo (1.13) obtenemos

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left(qa^{2l} \sqrt{\frac{(4l+1)}{4\pi}} \right) \frac{Y_{2l,0}(\theta, \phi)}{r^{2l+1}}, \quad (1.17)$$

⁴La primera carga es la ubicada en $(x = 0, y = 0, z = a)$

⁵Ver ecuación (4.1) de Jackson [1].

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=1} P_{2l}(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2l}. \quad (1.18)$$

El término de orden más bajo se da cuando $l = 1$,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{r^3} \left[\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \right], \quad (1.19)$$

que en el plano $x - y$, donde $\theta = \pi/2$ tenemos

$$\Phi_{x-y}(r, \theta) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{r^3}. \quad (1.20)$$

Cuyo gráfico es

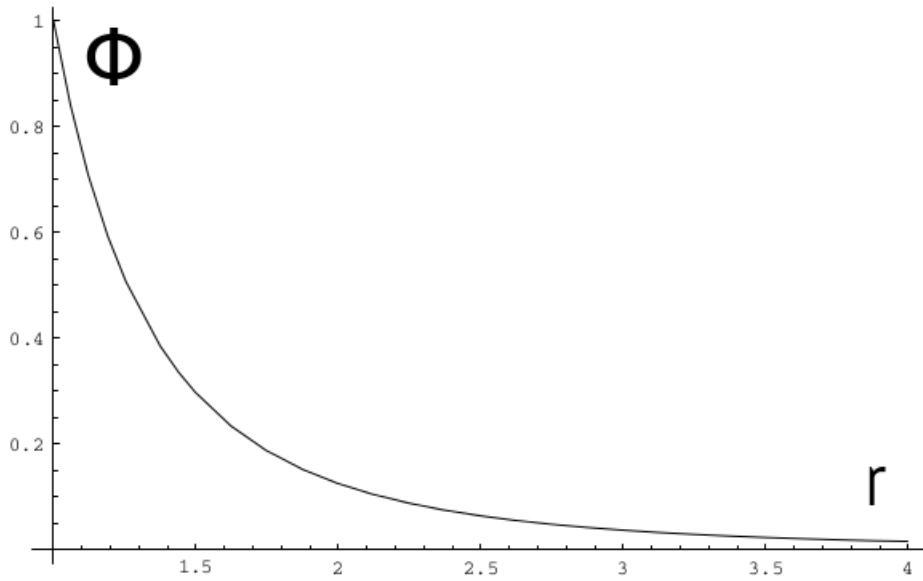


Figura 2: Gráfico del potencial aproximado utilizando expansión multipolar para términos de orden bajo en el plano $x - y$.

(d) Utilizando la ley de Coulomb podemos escribir el potencial como

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}|} \frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{2}{|\mathbf{r}|} \right],$$

que en el plano $x - y$ se escribe

$$\Phi = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} - \frac{1}{r} \right], \quad (1.21)$$

o

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{2}{\sqrt{(r/a)^2 + 1}} - \frac{2}{(r/a)} \right]. \quad (1.22)$$

Cuyo gráfico es

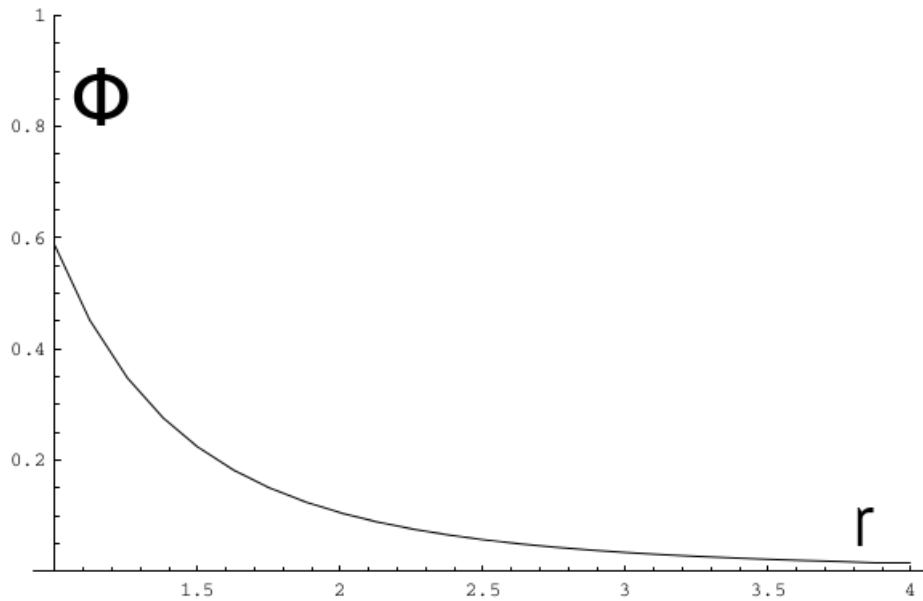


Figura 3: Gráfico del potencial exacto, en el plano $x - y$, utilizando la ley de Coulomb

Con lo cual vemos que el primer término en la expansión multipolar es una buena aproximación para distancias $r \approx 2a$, pero impreciso para otras más pequeñas.

Si dividimos ahora la forma asintótica en las partes (c) y (d) para ver el comportamiento a distancias grandes, lo que tenemos que hacer es dividir por $1/r^3$ tanto el potencial aproximado como el exacto, obteniendo el siguiente gráfico

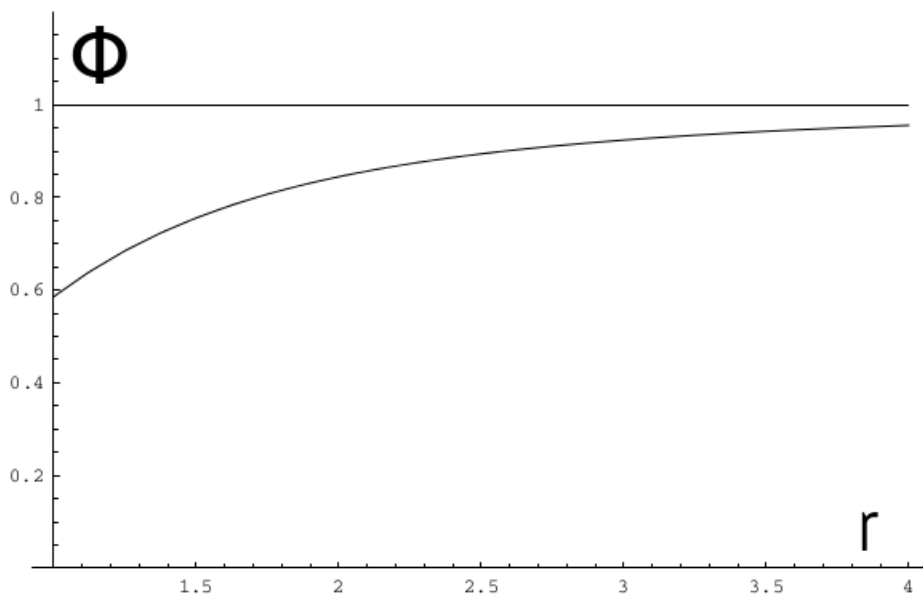


Figura 4: Comportamiento del potencial tanto para la forma aproximada como para la exacta, donde se ha dividido la forma asintótica. La línea recta es la aproximación de la parte (c) y la otra es la obtenida con la ley de Coulomb en la parte (d).

Vemos que la aproximación mejora para $r \gg a$.

GIGANTIIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 2. Problema 4.7 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una distribución de carga localizada tiene la densidad de carga

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta$$

- (a) Haga una expansión multipolar del potencial debido a esta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares que no se hacen cero. Escriba el potencial a grandes distancias como una expansión finita en polinomios de Legendre.
- (b) Determine el potencial explícitamente en cualquier punto del espacio, y muestre que cerca del origen, correcto a r^2 inclusive,

$$\Phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \theta) \right]$$

- (c) Si existe en el origen un núcleo con un momento cuadrupolar $Q = 10^{-28} \text{ m}^2$, determine la magnitud de la energía de interacción, asumiendo que la unidad de carga en $\rho(\mathbf{r})$ arriba es la carga electrónica y que la unidad de longitud es el radio de Bohr del hidrógeno $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar/mc^2 = 0,529 \times 10^{-10} \text{ m}$. Expresé su respuesta como una frecuencia dividida por la constante de Planck h .

La densidad de carga en este problema es la de los estados $m = \pm 1$ del nivel $2p$ en el hidrógeno, mientras que la interacción cuadrupolar es del mismo orden que el encontrado en moléculas.

Solución:

Problema 3. Problema 4.8 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Un cascarón cilíndrico, muy largo y circular recto, de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radio interno y externo a y b , respectivamente, es colocado en un previamente campo eléctrico uniforme E_0 con su eje perpendicular al campo. El medio adentro y afuera del cilindro tiene una constante dieléctrica de uno.

- (a) Determine el potencial y campo eléctrico en las tres regiones, despreciando efectos finales.
- (b) Esboce las líneas de fuerza para un caso típico de $b \simeq 2a$.
- (c) Discuta las formas limitantes en su solución apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme, y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Solución:

Problema 4. Problema 4.9 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una carga puntual q es colocada en el espacio libre a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a ($a < d$) y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 .

- (a) Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio como una expansión en armónicos esféricos.
- (b) Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera.
- (c) Verifique que, en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$, tu resultado es el mismo que para la esfera conductora.

Solución:

Problema 5. Problema 4.13 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Dos superficies cilíndricas conductoras, largas y coaxiales, de radios a y b son bajadas verticalmente a un líquido dieléctrico. Si el líquido sube una altura promedio de h entre los electrodos cuando una diferencia de potencial V es establecida entre ellos, muestre que la susceptibilidad del líquido es

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho gh \ln(b/a)}{\epsilon_0 V^2}$$

donde ρ es la densidad del líquido, g es la aceleración debida a la gravedad, y la susceptibilidad del aire es depreciada.

Solución:

Referencias

- [1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.