Universidad Nacional Autónoma de México

Electrodinámica Clásica

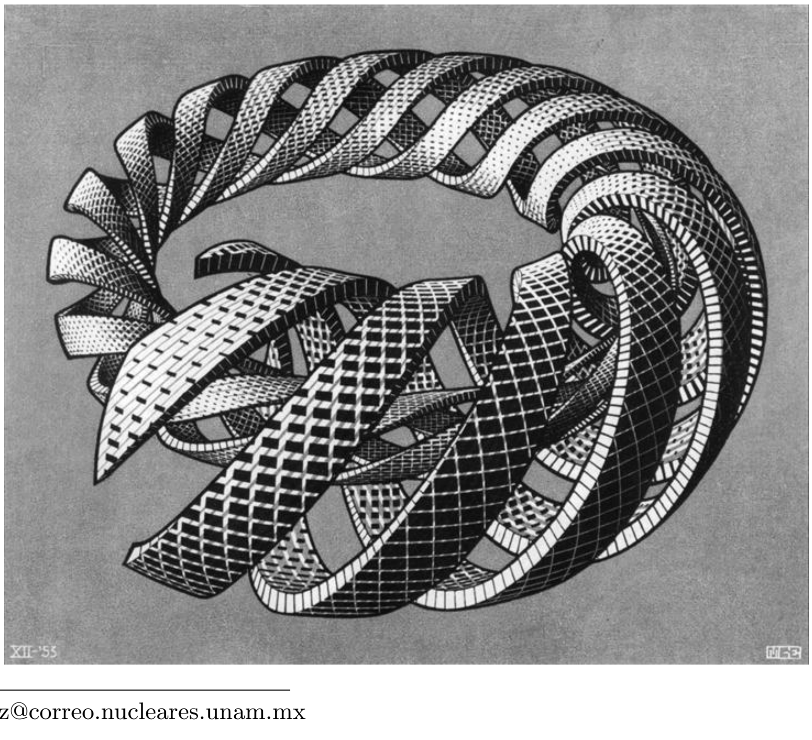
Semestre 2016-II

5 de mayo de 2016

Tarea # 8. Deducción de los campos eléctricos y magnéticos de velocidad y aceleración a partir de los potenciales de Lienard-Wiechert.

Autor:

Favio Vázquez[†]



[†]favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

Diferenciación de los potenciales de Lienard-Wiechert.

Esta deducción se hizo siguiendo los resultados de las secciones 6.2 y 6.3 del libro de Schwartz [1]. Los potenciales de Lienard-Wiechert podemos escribirlos como

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')\left[1-\frac{v'(t')\cdot\hat{\epsilon}}{c}\right]}, \tag{1.1}$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q\mathbf{v}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')\left[1-\frac{v'(t')\cdot\hat{\epsilon}}{c}\right]}, \tag{1.2}$$

donde q es la carga de la partícula, $\mathbf{v}(t)$ y ϵ es un vector unitario de $\mathbf{r}'(t')$ a $\mathbf{r}$,

$$\epsilon' = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}. \tag{1.3}$$

Podemos pasar ahora a calcular ahora los campos eléctricos y magnéticos debidos a nuestras pequeñas cargas en movimiento. Aunque en el régimen no relativista, nos interesan situaciones donde $v \ll c$, trabajaremos por el momento manteniendo todos los órdenes en v/c. Nuestro trabajo se convierte entonces en diferenciar estos potenciales, para encontrar

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\frac{q\mathbf{v}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')\left[1-\frac{v'(t')\cdot\hat{\epsilon}}{c}\right]}, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')\left[1-\frac{v'(t')\cdot\hat{\epsilon}}{c}\right]} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{q\mathbf{v}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')\left[1-\frac{v'(t')\cdot\hat{\epsilon}}{c}\right]}\right]. \tag{1.5}$$

La dificultad de estas derivaciones yace en la compleja dependencia implícita de los términos primados en $\mathbf{r}$ y t. Definiendo el tiempo retardado como

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}, \tag{1.6}$$

entonces

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t'}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)\frac{\partial t'}{\partial t}, \tag{1.7}$$

y

$$\frac{\partial|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\partial t'} = -\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}', \tag{1.8}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\epsilon'}{c}}. \tag{1.9}$$

Similarmente,

$$\nabla t' = \frac{1}{c}\hat{\epsilon}' - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t'}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)\nabla t', \tag{1.10}$$

y entonces

$$\nabla t' = \frac{-\hat{\epsilon}'}{c\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}}{c}\right)}. \tag{1.11}$$

También será útil el siguiente resultado:

$$\frac{\partial\hat{\epsilon}'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \frac{(\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{1.12}$$

o

$$\frac{\partial\hat{\epsilon}'}{\partial t'} = \frac{\hat{\epsilon}'\times(\hat{\epsilon}'\times\mathbf{v}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{1.13}$$

Podemos evaluar

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}|\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)\right] = -\mathbf{v}|\cdot\hat{\epsilon}'\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right) - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\frac{\mathbf{a}'}{c}\cdot\hat{\epsilon}' - \frac{\mathbf{v}'}{c}\cdot\left[\hat{\epsilon}'\times(\hat{\epsilon}'\times\mathbf{v}')\right]$$

o

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}|\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)\right] = \frac{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\mathbf{a}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c} - \mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}' + \frac{v'^2}{c}, \tag{1.14}$$

que nos da

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}|\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)\right] = \frac{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\mathbf{a}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c} - \mathbf{v}|\cdot\left(\hat{\epsilon}'-\frac{\mathbf{v}'}{c}\right), \tag{1.15}$$

donde

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}. \tag{1.16}$$

Estamos listos ahora para encontrar el gradiente de ϕ,

$$-\nabla\phi = -(\nabla\phi)_{t'const} - \frac{\partial\phi}{\partial t'}\nabla t', \tag{1.17}$$

al hacer estos cálculos encontramos

$$-\nabla\phi = \frac{q\left[\hat{\epsilon}'\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)-\frac{\mathbf{v}'}{c}\left(1-\frac{v}{c}\cdot\hat{\epsilon}'\right)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3} + \frac{q\hat{\epsilon}'(\mathbf{a}'\cdot\hat{\epsilon}')}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3}. \tag{1.18}$$

Ahora calculamos

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}, \tag{1.19}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t'}\frac{q\mathbf{v}'}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)}, \tag{1.20}$$

y al hacer la derivada obtenemos (y con un poco de álgebra)

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{-q\frac{\mathbf{v}'}{c}\left[\frac{\mathbf{v}'}{c}\cdot\left(\hat{\epsilon}'-\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3} + \frac{-q\mathbf{a}'+q\hat{\epsilon}'\times\left(\mathbf{a}'\times\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3} \tag{1.21}$$

Combinando $-\nabla\phi$ y $-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$, podemos calcular el campo eléctrico que queda como

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{-q[\mathbf{a}' - (\mathbf{a}'\cdot\hat{\epsilon}')\hat{\epsilon}' + q\hat{\epsilon}'\times\left(\mathbf{a}'\times\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)]}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3} + \frac{q\left(\hat{\epsilon}'-\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3}}. \tag{1.22}$$

Ahora, calculamos el campo magnético con $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})_{t'const} - \left(\frac{\mathbf{A}}{\partial t'}\right)\nabla t'. \tag{1.23}$$

Entonces,

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})_{t'const} = \frac{-q\left(\hat{\epsilon}'-\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)\times\frac{\mathbf{v}'}{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^2}, \tag{1.24}$$

y

$$-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t'}\times\nabla t' = \frac{q\mathbf{a}'\times\hat{\epsilon}' + q\hat{\epsilon}'\times\left[\hat{\epsilon}'\times\left(\mathbf{a}'\times\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)\right]}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3} + \frac{q\left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\times\hat{\epsilon}'\right)\left[\frac{\mathbf{v}'}{c}\cdot\left(\hat{\epsilon}'-\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3}, \tag{1.25}$$

y finalmente tenemos

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{q\left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\times\hat{\epsilon}'\right)\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3} + \hat{\epsilon}'\times\frac{-q\mathbf{a}' + q\left[\hat{\epsilon}'\times\left(\mathbf{a}'\times\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)\right]}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\hat{\epsilon}'}{c}\right)^3}}. \tag{1.26}$$

Si examinamos las expresiones que obtuvimos para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, notamos que cada una de ellas se divide naturalmente en dos partes, una que es independiente de la aceleración y decrece con $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2$ (campo de velocidad) y otra que es proporcional a la aceleración de la carga que decrece con $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ (campo de aceleración). Los términos proporcionales a $\mathbf{a}$ son los que nos interesan, y son los llamados campos de radiación.

Referencias

[1] M. Schwartz, *Principles of electrodynamics*, Dover Publications, Inc. 1972.