Universidad Nacional Autónoma de México

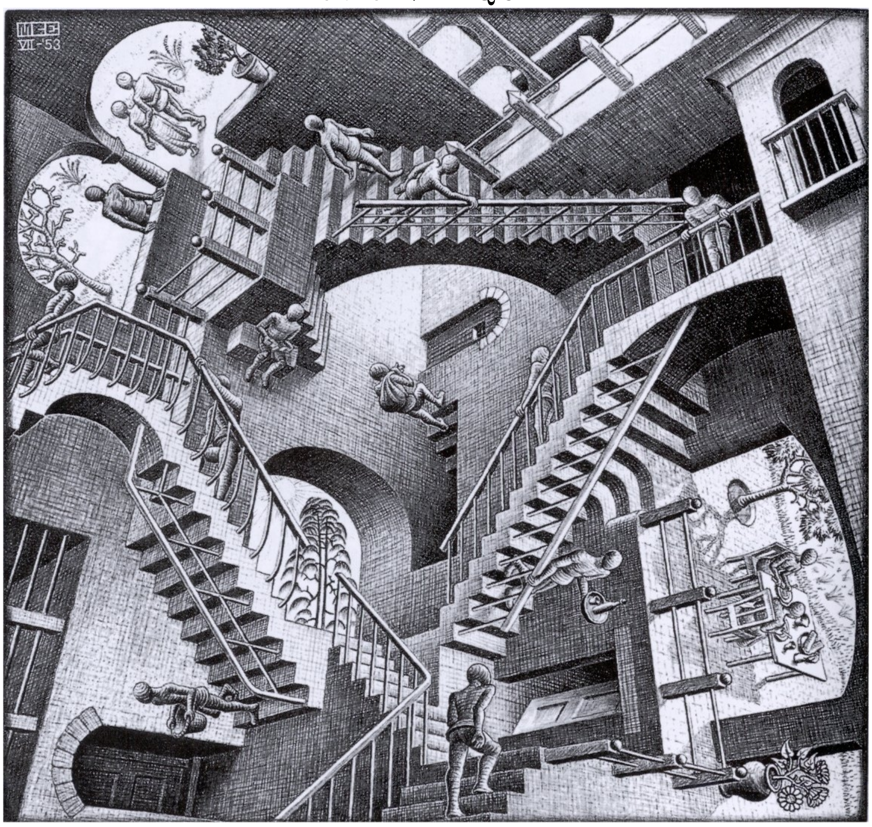
Electrodinámica Clásica

Semestre 2016-II

10 de marzo de 2016

Tarea # 4. Multipolos, Electrostática de Medios Macroscópicos, Dieléctricos.

Autor:
Favio Vázquez†



†favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 1. Problema 4.1 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las distribuciones de carga mostradas como las partes a y b. Intente obtener resultados para todo los momentos que no se hacen cero válidos para todo l, pero en cada caso encuentre los primeros dos conjuntos de momentos que no se hacen cero al menos.

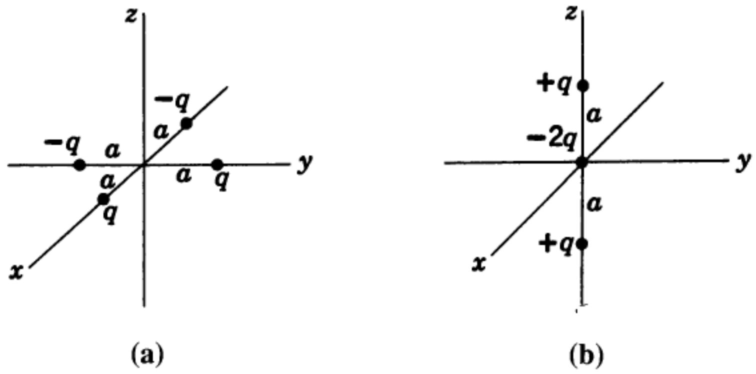


Figura 1: Disposición de la distribución de cargas para el problema 1.

(c) Para la distribución de carga del segundo conjunto b escriba la expansión multipolar para el potencial. Manteniendo solo los términos de orden bajo en la expansión, grafique el potencial en el plano $x - y$ como una función de la distancia desde el origen para distancias mayores a a.

(d) Calcule directamente de la ley de Coulomb el potencial exacto para b en el plano $x - y$. Grafíquelo como una función de la distancia y compare con el resultados encontrado en la parte c.

Divida la forma asintótica en las partes c y d para ver el comportamiento a distancias grandes más claramente.

Solución:

Comenzamos recordando la ecuación para los momentos multipolares[1]

$$q_{lm} = \sum_i q_i r_i^l Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i), \tag{1.1}$$

donde (r_i, θ_i, ϕ_i) es la posición de la i-ésima carga, q_i es la magnitud de la i-ésima carga y $Y_{lm}^*(\theta_i, \phi_i)$ son los armónicos esféricos. Viendo la figura de la parte (a) vemos que las cargas, en coordenadas esféricas se ubican según la siguiente tabla[2]

Carga	r	θ	ϕ
$+q$	a	$\pi/2$	0
$+q$	a	$\pi/2$	$\pi/2$
$-q$	a	$\pi/2$	π
$-q$	a	$\pi/2$	$3\pi/2$

[1] Ver ecuación (4.3) de Jackson [1].

[2] La primera carga es la ubicada en $(x = 0, y = a, z = 0)$

Entonces utilizando esta información tenemos

$$q_{lm} = qa^l \left[Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) - Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right]. \tag{1.2}$$

Pero recordando que[3]

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{im\phi}, \tag{1.3}$$

donde $P_l^m(\cos\theta$ son las funciones de Legendre asociadas (ver ecuación (3.49) de Jackson) y

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta, \phi), \tag{1.4}$$

podemos escribir entonces

$$q_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [\mathrm{e}^{i(-m)(0)} + \mathrm{e}^{i(-m)(\pi/2)} - \mathrm{e}^{i(-m)(\pi)} - \mathrm{e}^{i(-m)(3\pi/2)}] P_l^m(\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}}),$$

pero

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i(-m)(0)} &= 1, \\
\mathrm{e}^{i(-m)(\pi/2)} &= (\mathrm{e}^{-i\pi/2})^{(m)} = (-i)^m, \\
\mathrm{e}^{i(-m)(\pi)} &= (\mathrm{e}^{-i\pi})^{(m)} = (-1)^m, \\
\mathrm{e}^{i(-m)(3\pi/2)} &= (\mathrm{e}^{-i3\pi/2})^{(m)} = i^m.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces,

$$q_{lm} = qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left[1 + (-i)^m - (-1)^m - i^m\right] P_l^m(0), \tag{1.5}$$

el término entre corchetes $[1 + (-i)^m - (-1)^m - i^m]$ es cero para m par, y se hace $(2 - 2i)$ para $m = -7, -3, 1, 5, 9, \ldots$ y $(2 + 2i)$ para $m = -5, -1, 3, 7, \ldots$, además por las propiedades de $P_l^m(0)$ sabemos que se hace cero cuando l y m tienen signos diferentes. Estas dos consideraciones no hacen ver que los únicos momentos que no se hacen cero son aquellos con l y m impares. Y como el texto lo solicita, los primeros conjuntos de momentos que no se hacen cero son

$$\boxed{q_{1,\pm1} = \mp qa\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(1 \mp i)}, \tag{1.6}$$

$$\boxed{q_{3,\pm1} = \pm qa^3\sqrt{\frac{21}{\pi}}(1 \mp i)}, \tag{1.7}$$

$$\boxed{q_{3,\pm3} = \mp qa^3\sqrt{\frac{35}{16\pi}}(1 \pm i)}, \tag{1.8}$$

[3]Ver ecuación (3.53) y (3.54) de Jackson [1]

(b) Viendo la figura de la parte (b) vemos que las cargas, en coordenadas esféricas se ubican según la siguiente tabla[4]

Carga	r	θ	ϕ
$+q$	a	0	0
$-2q$	0	0	0
$+q$	a	π	0

Entonces,

$$q_{lm} = q\left[a^l Y^*_{lm}(0,0) - \cancelto{0}{(0)^l l Y^*_{lm}(0,0)} + a^l l Y^*_{lm}(\pi,0)\right], \tag{1.9}$$

y usando (1.3) podemos escribir esto como

$$q_{lm} = qa^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\left[e^{im(0)}P_l^m(\cos(0)) + e^{im(0)}P_l^m(\cos(\pi))\right], \tag{1.10}$$

$$\therefore q_{lm}qa^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\left[P_l^m(1) + P_l^m(-1)\right]. \tag{1.11}$$

Debido a que el sistema tiene simetría azimutal, solamente los términos con $m = 0$ serán distintos de cero, y notando que $P_l^0(1) = 1, P_l^0(-1) = (-1)^l$ tenemos que

$$q_{l0} = qa^l\left[\frac{2l+1}{4\pi}\right]^{1/2}[1 + (-1)^l], \tag{1.12}$$

y tendremos que para l par y $m = 0$,

$$q_{l0} = 2qa^l\left[\frac{2l+1}{4\pi}\right], \tag{1.13}$$

y para l impar o $m \neq 0$ $q_{l0} = 0$. Los primeros momentos que no se hacen cero son

$$\boxed{q_{2,0} = qa^2\sqrt{\frac{5}{\pi}}}, \tag{1.14}$$

$$\boxed{q_{4,0} = qa^4\sqrt{\frac{9}{\pi}}}. \tag{1.15}$$

(c) La expansión multipolar para el potencial podemos escribirla como[5]

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}, \tag{1.16}$$

y sustituyendo (1.13) obtenemos

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\left(qa^{2l}\sqrt{\frac{(4l+1)}{4\pi}}\right)\frac{Y_{2l,0}(\theta,\phi)}{r^{2l+1}}, \tag{1.17}$$

[4] La primera carga es la ubicada en $(x = 0, y = 0, z = a)$

[5] Ver ecuación (4.1) de Jackson [1].

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}\sum_{l=1} P_{2l}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2l}}. \tag{1.18}$$

El término de orden más bajo se da cuando $l = 1$,

$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{r^3}\left[\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\right], \tag{1.19}$$

que en el plano $x - y$, donde $\theta = \pi/2$ tenemos

$$\Phi_{x-y}(r,\theta) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{r^3}. \tag{1.20}$$

Cuyo gráfico es

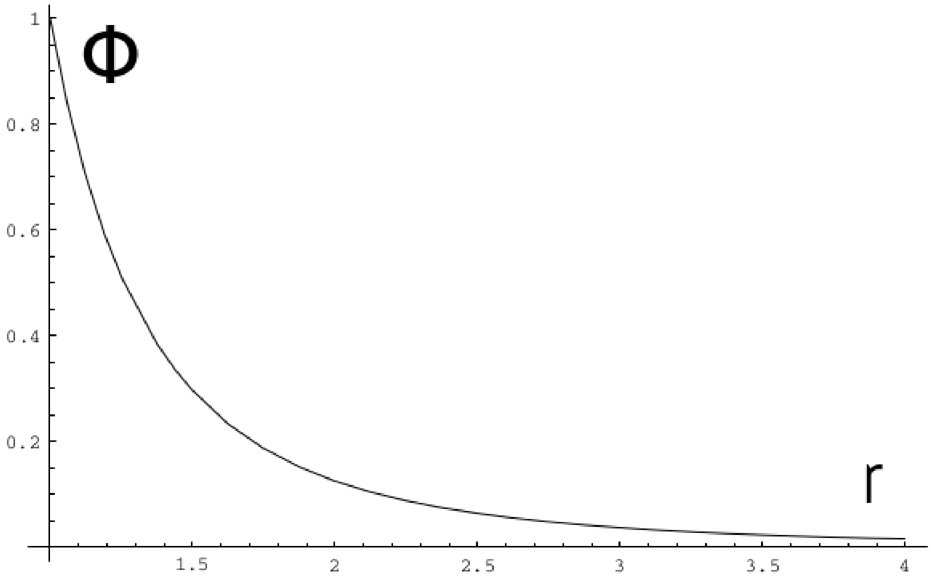


Figura 2: Gráfico del potencial aproximado utilizando expansión multipolar para términos de orden bajo en el plano $x - y$.

(d) Utilizando la ley de Coulomb podemos escribir el potencial como

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}|}\frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{2}{|\mathbf{r}|}\right],$$

que en el plano $x - y$ se escribe

$$\Phi = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} - \frac{1}{r}\right], \tag{1.21}$$

o

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\left[\frac{2}{\sqrt{(r/a)^2 + 1}} - \frac{2}{(r/a)}\right]}. \tag{1.22}$$

Cuyo gráfico es

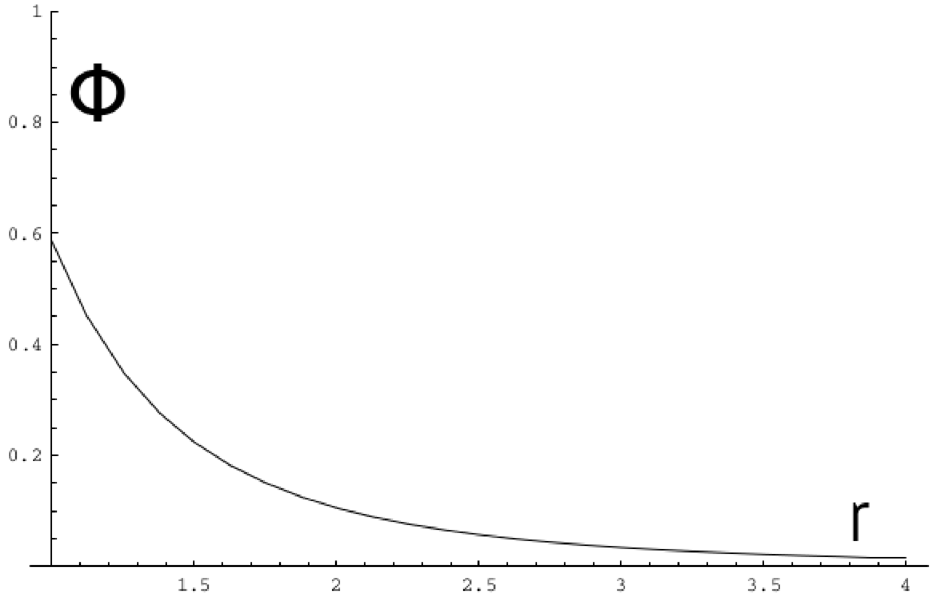


Figura 3: Gráfico del potencial exacto, en el plano $x - y$, utilizando la ley de Coulomb

Con lo cual vemos que el primer término en la expansión multipolar es una buena aproximación para distancias $r \approx 2a$, pero impreciso para otras más pequeñas.

Si dividimos ahora la forma asintótica en las partes (c) y (d) para ver el comportamiento a distancias grandes, lo que tenemos que hacer es dividir por $1/r^3$ tanto el potencial aproximado como el exacto, obteniendo el siguiente gráfico

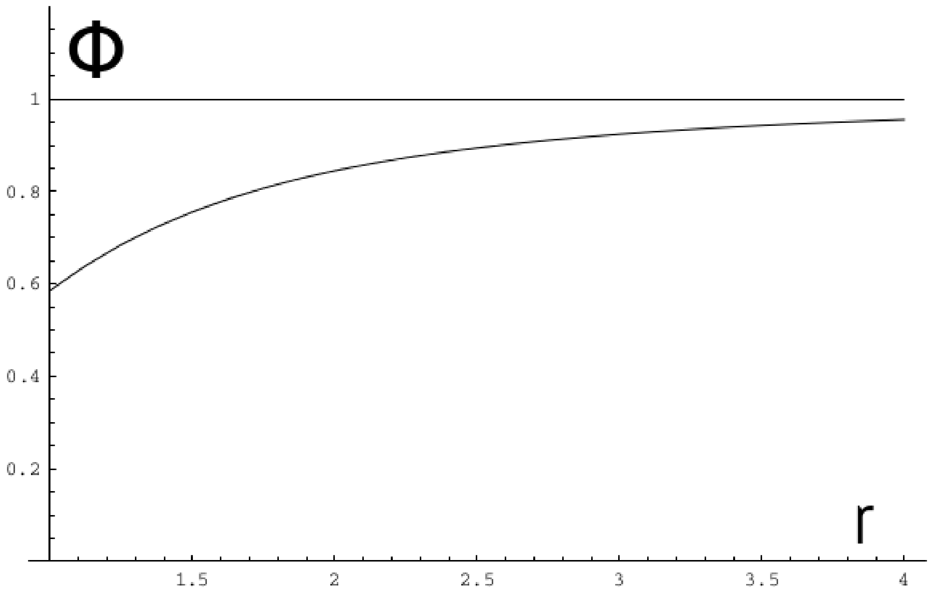


Figura 4: Comportamiento del potencial tanto para la forma aproximada como para la exacta, donde se ha dividido la forma asintótica. La línea recta es la aproximación de la parte (c) y la otra es la obtenida con la ley de Coulomb en la parte (d).

Vemos que la aproximación mejora para $r \gg a$.

Problema 2. Problema 4.7 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una distribución de carga localizada tiene la densidad de carga

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 \mathrm{e}^{-r} \operatorname{sen}^2\theta$$

(a) Haga una expansión multipolar del potencial debido a esta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares que no se hacen cero. Escriba el potencial a grandes distancias como una expansión finita en polinomios de Legendre.

(b) Determine el potencial explícitamente en cualquier punto del espacio, y muestre que cerca del origen, correcto a r^2 inclusive,

$$\Phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120}P_2(\cos\theta)\right]$$

(c) Si existe en el origen un núcleo con un momento cuadrupolar $Q = 10^{-28}$ m^2, determine la magnitud de la energía de interacción, asumiendo que la unidad de carga en $\rho(\mathbf{r})$ arriba es la carga electrónica y que la unidad de longitud es el radio de Bohr del hidrógeno $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar/me^2 = 0{,}529\times 10^{-10}$ m. Exprese su respuesta como una frecuencia dividida por la constante de Planck h.

La densidad de carga en este problema es la de los estados $m = \pm 1$ del nivel $2p$ en el hidrógeno, mientras que la interacción cuadrupolar es del mismo orden que el encontrado en moléculas.

Solución:

(a) Recordando que la expresión integral para los momentos multipolares es

$$q_{lm} = \int \rho(r',\theta',\phi') r'^l Y^*_{lm}(\theta',\phi') dV', \tag{2.1}$$

y debido a que no hay dependencia en ϕ en el problema, solo serán distintos de cero los momentos con $m = 0$. Tenemos entonces[6] (ver ecuación (3.57) de Jackson [1])

$$q_{l0} = \frac{1}{64\pi}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{l+4} \mathrm{e}^{-r} \operatorname{sen}^3\theta P_l(\cos\theta) dr d\theta d\phi \tag{2.2}$$

que por propiedades de los polinomios de Legendre[7]

$$q_{l0} = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[\int_0^\infty r^{l+4} e^{-r} dr\right]\left[\int_{-1}^1 (1-x^2)P_l(x)dx\right], \tag{2.3}$$

La segunda integral puede escribirse como

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)P_l(x)dx = \int_{-1}^1 P_l(x)dx - \int_{-1}^1 x^2 P_l(x)dx, \tag{2.4}$$

y por la ortogonalidad de los polinomios de Legendre vemos que la primera integral no es cero solamente para $l = 0$ y por lo tanto será igual a 2, y para la segunda integral podemos

[6] Ver el problema anterior para una referencia sobre la relación entre los armónicos esféricos y los polinomios de Legendre.

[7] Ver sección 3.3 de Jackson [1].

usar la ecuación 3.32 de Jackson [1] que nos dice que esta integral tendrá un valor de 2/3 para $l = 0$, 4/15 para $l = 2$ y será cero para cualquier otro valor de l. Por lo tanto

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) P_l(x) dx = \begin{cases} \frac{4}{3}, & l = 0 \\ -\frac{5}{15}, & l = 2 \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Entonces solo necesitamos evaluar la otra integral para $l = 0$ y $l = 2$, y de tablas de integrales vemos que[8]

$$\int_0^\infty r^n \mathrm{e}^{-r} dr = n!, \tag{2.6}$$

$$\therefore \int_0^\infty r^{l+4} \mathrm{e}^{-r} dr = (l + 4)! \tag{2.7}$$

y tenemos entonces

$$\int_0^\infty r^{l+4} \mathrm{e}^{-r} dr = \begin{cases} 24, & l = 0 \\ 720, & l = 2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Y utilizando estos resultados encontramos que los momentos multipolares que no se hacen cero son

$$\boxed{q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}}. \tag{2.9}$$

$$\boxed{q_{20} = -6\sqrt{\frac{5}{4\pi}}}. \tag{2.10}$$

Ahora, la expansión multipolar del potencial podemos escribirla como[9]

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l + 1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \tag{2.11}$$

que con los momentos multipolares que hemos encontrado puede escribirse como

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{6}{r^3} P_2(\cos\theta) \right] \tag{2.12}$$

$$\boxed{\therefore \Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{6}{r^2} P_2(\cos\theta) \right]}. \tag{2.13}$$

(b) La forma explícita para el potencial en cualquier punto del espacio la calculamos con

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \tag{2.14}$$

[8] http://1.usa.gov/1TxNpSt
[9] Ver ecuación (4.1) de Jackson [1].

expandiendo el término $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ en armónicos esféricos y usando la diferencial de volumen en coordenadas esféricas podemos escribir (usando la notación de Jackson [1])

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{64\pi\epsilon_0}\sum_{lm}\frac{1}{2l+1}Y_{lm}(\theta,\phi)\left[\int\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}r'^4 \mathrm{e}^{-r'}dr\right]\left[\int Y^*_{lm}(\theta',\phi')\,\mathrm{sen}^3\,\theta' d\theta' d\phi'\right], \quad (2.15)$$

$$\therefore\ \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{128\pi\epsilon_0}\sum_{l}P_l(\cos\theta)\left[\int\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}r'^4 \mathrm{e}^{-r'}dr\right]\left[\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_l(x)dx\right]. \quad (2.16)$$

De nuevo como arriba, todos los términos con $m\neq 0$ serán cero. Ya hemos resuelto la integral de la derecha, y sustituyendo estos valores encontramos que[10]

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{128}\left[\frac{4}{3}\xi_0 - \frac{4}{15}\xi_2 P_2(\cos\theta)\right]}, \quad (2.17)$$

donde xi_l se refiere a la integral en r'. Esta integral solo debe evaluarse para $l=0$ y para $l=2$. Para el caso en que $l=0$ tenemos

$$\xi_0 = \frac{1}{r}\int_0^r r'^4 \mathrm{e}^{-r'}dr' + \int_r^\infty r'^3 \mathrm{e}^{-r'}dr', \quad (2.18)$$

$$\boxed{\xi_0 = \frac{1}{r}[24 - \mathrm{e}^{-r}(r^3+6r^2+18r+24)]}, \quad (2.19)$$

y para el caso en que $l=2$ tenemos

$$\xi_2 = \frac{1}{r^3}\int_0^r r'^6 \mathrm{e}^{-r'}dr' + r^2\int_r^\infty r' \mathrm{e}^{-r'}dr', \quad (2.20)$$

$$\boxed{\xi_2 = \frac{1}{r^3}[720 - \mathrm{e}^{-r}(r^6+6r^5+30r^4+120r^3+360r^4+720r+720)] + r^2[\mathrm{e}^{-r}(1-r)]}$$

Lo cual completa el cálculo del potencial en cualquier punto del espacio. Ahora cerca del origen, es decir cuando $r\to 0$ tenemos

$$\xi_0 \simeq 6, \qquad \xi_2 \simeq r^2 - 2r^3 + \frac{3}{2}r^4. \quad (2.21)$$

Por lo tanto al sustituir estas expresiones en la ecuación que encontramos para el potencial en todo punto del espacio encontramos

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120}P_2(\cos\theta)\right]}. \quad (2.22)$$

[10] Utilizando una muy inteligente notación de http://homerreid.dyndns.org/physics/jackson/

(c) La energía de la interacción cuadrupolar está dada por el tercer término de la ecuación (4.24) de Jackson [1],

$$W^{(}4) = -\frac{1}{6}\sum_{ij} Q_{ij} \left.\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right|_{x=0}, \tag{2.23}$$

además para un núcleo atómico tenemos simetría en el eje z (eje arbitrario), por lo tanto se cumple que[11]

$$Q_{33} = -2Q_{11} = -2Q_{22} = eQ, \tag{2.24}$$

y todos las demás componentes son cero. Y entonces

$$W = \frac{eQ}{6}\left|\frac{1}{2}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{\mathbf{x}=0}, \tag{2.25}$$

que podemos escribir como

$$W = \frac{eQ}{6}\left|\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{3}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{\mathbf{x}=0}, \tag{2.26}$$

y utilizando la ley de Gauss encontramos

$$W = \frac{eQ}{6}\left|\frac{1}{2}\frac{\cancelto{0}{\rho}}{\epsilon_0} - \frac{3}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{\mathbf{x}=0}, \tag{2.27}$$

donde recordamos que $\rho \to 0$ en el origen. Tenemos entonces

$$W = -\frac{eQ}{4}\left|\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{\mathbf{x}=0}, \tag{2.28}$$

$$\therefore W = -\frac{eQ}{4}\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right|_{\mathbf{x}=0}. \tag{2.29}$$

Para calcular esta última derivada parcial necesitamos expresar el potencial obtenido en el inciso anterior en coordenadas cartesianas, que ignorando la parte constante podemos escribir como

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{480\pi\epsilon_0}r^2 P_2(\cos\theta), \tag{2.30}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{960\pi\epsilon_0}r^2(3\cos\theta - 1), \tag{2.31}$$

usando la definición de r y de $\cos\theta$

$$\therefore \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{960\pi\epsilon_0}(2z^2 - x^2 - y^2), \tag{2.32}$$

y diferenciando obtenemos

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{240\pi\epsilon_0}, \tag{2.33}$$

[11] Ver ecuación (2.38) de Marion y Heald [2].

y sustituyendo este resultado en la ecuación para W obtenemos

$$W = \frac{eQ}{960\pi\epsilon_0}, \tag{2.34}$$

ahora para asegurar que las dimensiones están correctas debemos multiplicar por e y dividir por a_0^3, obtenemos entonces

$$\frac{W}{\hbar} = \frac{1}{240}\frac{e^2 Q}{4\pi\epsilon_0 \hbar a_0^3}, \tag{2.35}$$

que podemos escribir como[12]

$$\frac{W}{\hbar} = \frac{1}{240}\frac{\alpha c Q}{a_0^3}, \tag{2.36}$$

y sustituyendo los valores que nos da el texto encontramos

$$\boxed{\frac{W}{\hbar} = 6{,}16 \times 10^6 \text{ rad/s} \simeq 1 \text{ MHz}}. \tag{2.37}$$

[12] Utilizando la ecuación para la constante de estructura fina $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}$.

Problema 3. Problema 4.8 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Un cascarón cilíndrico, muy largo y circular recto, de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radio interno y externo a y b, respectivamente, es colocado en un previamente campo eléctrico uniforme E_0 con su eje perpendicular al campo. El medio adentro y afuera del cilindro tiene una constante dieléctrica de uno.

(a) Determine el potencial y campo eléctrico en las tres regiones, despreciando efectos finales.

(b) Esboce las líneas de fuerza para un caso típico de $b \simeq 2a$.

(c) Discuta las formas limitantes en su solución apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme, y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Solución:

Debido a que el cilindro es muy largo y uniforme sobre su eje, y el campo original es también uniforme, el problema puede reducirse a dos dimensiones, y por la simetría del mismo trabajaremos en coordenadas polares. Supongamos además que el campo apunta hacia el lado positivo del eje x.

Por otra parte, ya que no hay carga libre en ningún lado, y además no hay carga ligada en ningún lado excepto la superficie del cilindro, podemos dividir el problema en tres regiones, y usar la solución a la respectiva ecuación de Laplace en cada región.

Recordemos que la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares cuando se trabaja con un barrido angular total es[13]

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m})(A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}). \tag{3.1}$$

La región interna incluye el origen, por lo que debe tener la forma

$$\boxed{\Phi_{\rho<a} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})}. \tag{3.2}$$

La región externa debe comportarse como un campo uniforme a distancias grandes, entonces recordando que hemos escogido que el campo apunta hacia el lado positivo del eje x

$$-E_0 \rho \cos\phi = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m})(A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}), \tag{3.3}$$

debido a la ortogonalidad tenemos que $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, y solo el término con $m = 1$ no se hace cero, y $A_1 = B_1$, entonces

$$-E_0 = a_1 2B_1, \tag{3.4}$$

por lo que la solución se convierte en

$$\boxed{\Phi_{\rho>b} = (-E_0\rho + b_1\rho^1)\cos\theta}. \tag{3.5}$$

[13] Ver ecuación (2.71) de Jackson [1].

La región del medio simplemente conecta las otras dos regiones,

$$\boxed{\therefore \Phi_{a<\rho<b} = c_0 + d_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m\rho^m + d_m\rho^{-m})(C_m \mathrm{e}^{im\phi} + D_m \mathrm{e}^{-im\phi})}. \tag{3.6}$$

Debemos ahora calcular estos parámetros que hemos puesto a lo largo de las expresiones para los potenciales; para hacer esto partimos de las condiciones de frontera que deben cumplirse, i.e.

$$(\epsilon_2\mathbf{E}_2 - \epsilon_1\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{n} = \sigma, \tag{3.7}$$

pero debido a que no hay carga libre y que el campo eléctrico se propaga la dirección radial tenemos

$$\epsilon_2\mathbf{E}_2\cdot\hat{\rho} = \epsilon_1\mathbf{E}_1\cdot\hat{\rho}. \tag{3.8}$$

Aplicando esto a la superficie exterior ($\rho = b$) obtenemos

$$\epsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi_{\rho>b}}{\partial\rho}\right|_{\rho=b} = \epsilon \left.\frac{\partial\Phi_{a<\rho<b}}{\partial\rho}\right|_{\rho=b}, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial\rho}\left.\left[(-E_0\rho + b_1\rho^1)\cos\phi\right]\right|_{\rho=b} = \epsilon\frac{\partial}{\partial\rho}\Big[c_0 + d_0\ln\rho \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m\rho^m + d_m\rho^{-m})(C_m\mathrm{e}^{im\phi} + D_m\mathrm{e}^{-im\phi})\Big]\right|_{\rho=b},\end{aligned}$$

$$\therefore \epsilon_0\left[(-E_0 - b_1b^{-2})\cos\phi\right] = \epsilon\left[d_0\frac{1}{b} + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m m b^{m-1} - m d_m b^{-m-1})(C_m\mathrm{e}^{im\phi} + D_m\mathrm{e}^{-im\phi})\right].$$

Debido a la ortogonalidad encontramos que $d_0 = 0$, $D_m = C_m$ y solamente se mantienen los términos con $m = 1$; también podemos despreciar el c_0 ya que es una constante que no afecta el resultado final, entonces

$$\epsilon_0\left[(-E_0 - b_1b^{-2})\cos\phi\right] = \epsilon[(c_1 - d_1b^{-2})C_1 2\cos\phi), \tag{3.10}$$

combinando ahora los factores de c_1 con C_1 encontramos

$$C_1 = \frac{-\epsilon_0(-E_0 - b_1b^{-2})}{2\epsilon(1 - d_1b^{-2}}, \tag{3.11}$$

y la solución del medio se convierte por ahora en

$$\Phi_{a<\rho<b} = -(\rho + d_1\rho^{-1})\frac{-\epsilon_0(-E_0 - b_1b^{-2})}{2\epsilon(1 - d_1b^{-2}}\cos\phi. \tag{3.12}$$

Aplicando la otra condición de frontera en la superficie exterior ($\rho = b$)

$$\left.E_{r,2}\right|_{\rho=b} = \left.E_{r,1}\right|_{\rho=b}, \tag{3.13}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\rho>b}}{\partial\phi}\right|_{\rho=b} = \left.\frac{\partial\Phi_{a<\rho<b}}{\partial\phi}\right|_{\rho=b},$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left[(-E_0\rho+b_1\rho^1)\cos\phi\right]\bigg|_{\rho=b}=\frac{\partial}{\partial\phi}\left[c_0-(\rho+d_1\rho^{-1})\frac{-\epsilon_0(-E_0-b_1b^{-2})}{2\epsilon(1-d_1b^{-2}}\cos\phi\right]\bigg|_{\rho=b}$$

$$\therefore (E_0-b_1b^{-2})\epsilon(1-d_1b^{-2})=(1+d_1b^{-2})\epsilon_0(E_0+b_1b^{-2}), \tag{3.14}$$

y entonces

$$d_1=b^2\frac{b_1(\epsilon+\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon-\epsilon_0)}{b_1(\epsilon-\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon+\epsilon_0)}, \tag{3.15}$$

y la solución en la región central se convierte en

$$\boxed{\Phi_{a<\rho<b}=\frac{1}{2\epsilon b^2}\cos\phi\left\{b_1(\epsilon-\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon+\epsilon_0)\rho+b^2[(b_1(\epsilon+\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon-\epsilon_0)\rho^{-1}]\right\}}.$$

Ahora aplicando las condiciones de frontera en la superficie interna ($\rho=a$)

$$\epsilon_0\frac{\partial\Phi_{\rho>b}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}=\epsilon\frac{\partial\Phi_{a<\rho<b}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}, \tag{3.16}$$

obtenemos

$$\frac{1}{2b^2}\left\{b_1(\epsilon-\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon+\epsilon_0)+b^2[(b_1(\epsilon+\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon-\epsilon_0)]a^{-2}\right\}=\epsilon_0A_1, \tag{3.17}$$

y

$$\frac{\partial\Phi_{\rho>b}}{\partial\phi}\bigg|_{\rho=a}=\frac{\partial\Phi_{a<\rho<b}}{\partial\phi}\bigg|_{\rho=a}, \tag{3.18}$$

obtenemos

$$\frac{1}{2\epsilon ab^2}\left\{[b_1(\epsilon-\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon+\epsilon_0)]a+b^2[(b_1(\epsilon+\epsilon_0)-E_0b^2(\epsilon-\epsilon_0)]a^{-1}\right\}=A_1, \tag{3.19}$$

Y resolviendo este sistema de ecuaciones con `Mathematica`® obtenemos

$$b_1=E_0b^2\frac{(b^2-a^2)(\epsilon^2-\epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2-a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}, \tag{3.20}$$

y

$$A_1=-\frac{4b^2E_0\epsilon\epsilon_0}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2-a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}. \tag{3.21}$$

Ya tenemos todos los parámetros que necesitamos para escribir las expresiones que encontramos arriba para los potenciales en las tres regiones, que resultan

$$\boxed{\Phi_{\rho<a}=E_0\rho\cos\phi\left[-\frac{4b^2E_0\epsilon\epsilon_0}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2-a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}\right]}, \tag{3.22}$$

$$\boxed{\Phi_{a<\rho<b}=\frac{-2ab^2\epsilon_0}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2-a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}\left[(\epsilon+\epsilon_0)\frac{\rho}{a}+(\epsilon+\epsilon_0)\frac{a}{\rho}\right]E_0\cos\phi}, \tag{3.23}$$

$$\boxed{\Phi_{\rho>b} = E_0 \cos\phi \left[-\rho + \frac{(b^2-a^2)(\epsilon^2-\epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}\frac{b^2}{\rho}\right]}. \tag{3.24}$$

Para obtener los campos eléctricos utilizamos

$$\mathbf{E} = -\hat{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} - \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}, \tag{3.25}$$

y luego de hacer las derivadas y un poco de álgebra, recordando la dirección del campo eléctrico que hemos escogido, obtenemos

$$\boxed{\mathbf{E}_{\rho<a} = E_0\left[-\frac{4b^2E_0\epsilon\epsilon_0}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}\right]\hat{\imath}}, \tag{3.26}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{a<\rho<b} = \frac{2ab^2\epsilon_0E_0}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}\left[(\epsilon+\epsilon_0)\hat{\imath} - (\epsilon-\epsilon_0)\frac{a^2}{\rho^2}(\hat{\imath}+2\hat{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi)\right]}, \tag{3.27}$$

$$\boxed{E_{\rho>b} = E_0\hat{\imath} + \frac{(b^2-a^2)(\epsilon^2-\epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon+\epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}\frac{b^2}{\rho^2}E_0(\hat{\imath}+2\hat{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi)}. \tag{3.28}$$

(b) Para esbozar las líneas de fuerza para un caso típico de $b \simeq 2a$, primero hagamos esta sustitución en los campos eléctricos que hemos encontrado en el inciso anterior

$$\mathbf{E}_{\rho<a} = E_0\left[-\frac{16E_0\epsilon\epsilon_0}{4(\epsilon+\epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon-\epsilon_0)^2}\right]\hat{\imath}, \tag{3.29}$$

$$\mathbf{E}_{a<\rho<b} = \frac{8\epsilon_0E_0}{4(\epsilon+\epsilon_0)^2 - (\epsilon-\epsilon_0)^2}\left[(\epsilon+\epsilon_0)\hat{\imath} - (\epsilon-\epsilon_0)\frac{a^2}{\rho^2}(\hat{\imath}+2\hat{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi)\right], \tag{3.30}$$

$$E_{\rho>b} = E_0\hat{\imath} + \frac{12(\epsilon^2-\epsilon_0^2)}{4(\epsilon+\epsilon_0)^2 - (\epsilon-\epsilon_0)^2}\frac{a^2}{\rho^2}E_0(\hat{\imath}+2\hat{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi). \tag{3.31}$$

El gráfico de estas tres regiones es el siguiente

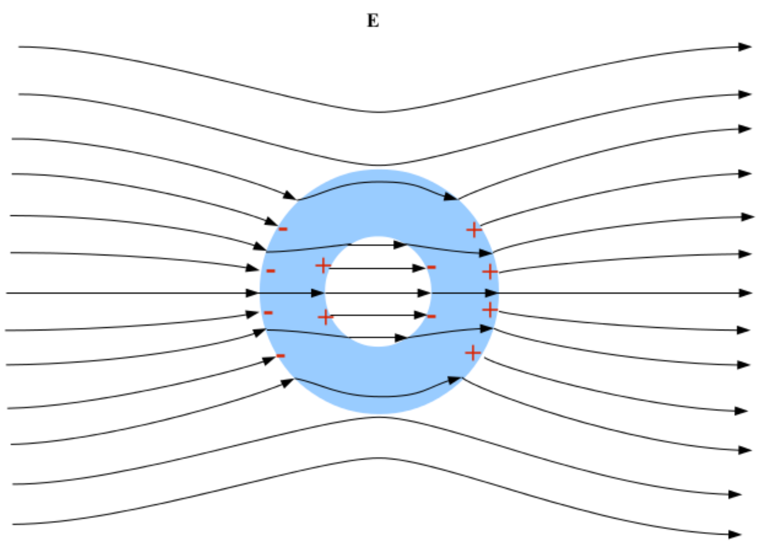


Figura 5: Gráfico del comportamiento del campo eléctrico para el caso $b \simeq 2a$. Notar que la figura no la realicé completamente yo, la tome de http://bit.ly/1pslIha y la modifiqué un poco.

(c) Para un cilindro dieléctrico sólido en un campo, solamente tenemos que hacer $a \to 0$, y tenemos

$$\boxed{\mathbf{E}_{\rho<b} = \frac{2\epsilon_0}{\epsilon+\epsilon_0} E_0 \hat{i}}, \tag{3.32}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{\rho>b} = E_0 \hat{i} + \frac{(\epsilon-\epsilon_0)b^2}{(\epsilon+\epsilon_0)\rho^2} E_0 (\hat{i} + 2\hat{\phi} \operatorname{sen} \phi)}. \tag{3.33}$$

Para una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme, solamente tenemos que hacer $b \to 0$, y obtenemos

$$\boxed{\mathbf{E}_{\rho<a} = \frac{3\epsilon\epsilon_0}{(\epsilon+\epsilon_0)^2} E_0 \hat{i}}, \tag{3.34}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{\rho>a} = \frac{2\epsilon_0}{(\epsilon+\epsilon_0)^2} E_0 \left[(\epsilon+\epsilon_0)\hat{i} - (\epsilon-\epsilon_0)\frac{a^2}{\rho^2}(\hat{i} + 2\hat{\phi} \operatorname{sen} \phi) \right]}. \tag{3.35}$$

Problema 4. Problema 4.9 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Una carga puntual q es colocada en el espacio libre a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a $(a < d)$ y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0.

(a) Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio como una expansión en armónicos esféricos.

(b) Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera.

(c) Verifique que, en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \to \infty$, tu resultado es el mismo que para la esfera conductora.

<u>Solución:</u>

Si colocamos la esfera en el origen y la carga puntual en el eje z a una distancia $z = d$ el problema tendrá simetría azimutal, y por lo tanto $m = 0$ y la solución puede expresarse en términos de los polinomios de Legendre, lo cual será más simple que en armónicos esféricos, y no se pierde generalidad con esta suposición.

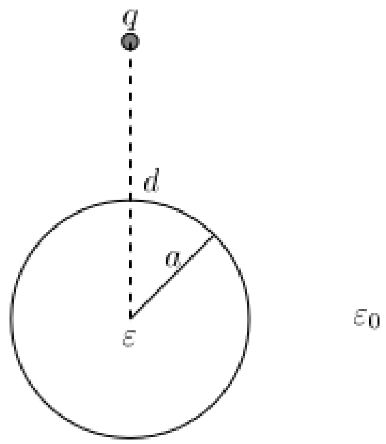


Figura 6: Geometría asumida para el sistema del problema 4.

Debemos resolver el problema para las dos regiones, y utilizar las condiciones de frontera para así encontrar una solución completa. Tenemos las siguientes dos regiones:

$$\Phi_{r<a} \qquad \text{donde tenemos } \epsilon, \tag{4.1}$$

$$\Phi_{r>a} \qquad \text{donde tenemos } \epsilon_0. \tag{4.2}$$

Resolvamos primero la región $r > a$ utilizando el método de imágenes. Para esto colocamos una carga imagen q' en $z = a^2/d$ para dar cuenta de los efectos de la esfera dieléctrica, y la posición que hemos escogido ha sido basada en los resultados obtenidos en la sección 2.2 de Jackson [1], específicamente la ecuación (2.4). El potencial en la región exterior debido a la carga puntual y la carga imagen es

$$\Phi_{r>a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{r} - d\hat{z}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - (a^2/d)\hat{z}|}\right), \tag{4.3}$$

ahora expandiendo en series de polinomios de Legendre y combinando

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_>^l}{r_<^{l+1}} P_l(\cos\theta), \tag{4.4}$$

donde $r_<$ es el más pequeño entre (r, r_0). Entonces si $r > d$

$$\Phi_{r>a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta \frac{1}{r^{l+1}} \left(qd^l + q' \frac{a^{2l}}{d^l} \right), \tag{4.5}$$

y si $r < d$

$$\Phi_{r>a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta \left(q \frac{r^l}{d^{l+1}} + q' \frac{a^{2l}}{d^l r^{l+1}} \right). \tag{4.6}$$

Resolvamos ahora para el potencial adentro de la esfera. Ya que no hay carga adentro de la esfera, solo necesitamos una carga imagen q'' afuera de la esfera en $z = d$ para simular los efectos de el material dieléctrico. Tenemos entonces

$$\Phi_{r<a} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q''}{|\mathbf{r} - d\hat{z}|} \right). \tag{4.7}$$

Ahora ya que r siempre es más pequeño que d'', solo necesitamos una expansión

$$\Phi_{r<a} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\sum_{l=0}^{\infty} q'' \frac{r^l}{d^{l+1}} P_l(\cos\theta) \right). \tag{4.8}$$

Para encontrar expresiones para q' y q'' debemos aplicar la condición de frontera en $r = a$ que nos dice que $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot n_{12} = \sigma$, y debido a que no hay densidad de carga libre en la superficie de la esfera, esta condición se convierte en[14]

$$(\epsilon_0 \mathbf{E}_{r>a} - \epsilon \mathbf{E}_{r<a}) \cdot \hat{r} = 0, \tag{4.9}$$

que implica usando la definición de campo eléctrico dado el potencial eléctrico

$$\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{r>a}}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial \Phi_{r<a}}{\partial r}, \tag{4.10}$$

y derivando obtenemos

$$\boxed{ql + q'(-l-1)\frac{d}{a} = q''l}. \tag{4.11}$$

Aplicando la segunda condición de frontera en $r = a$ que nos dice que $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{12} = 0$ tenemos

$$E_{r<a}|_\theta = E_{r>a}|_\theta\,, \tag{4.12}$$

$$\therefore \frac{\partial \Phi_{r>a}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{r<a}}{\partial r}, \tag{4.13}$$

y derivando encontramos

$$\boxed{q'' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} q + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} q' \frac{d}{a}}. \tag{4.14}$$

[14] Donde estamos usando el hecho de que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ en este caso.

Resolviendo las ecuaciones en cajas con `Mathematica`® encontramos

$$q' = \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1}{d\left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1) + l\right]}, \tag{4.15}$$

y

$$q'' = \frac{q(2l+1)}{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1) + l}. \tag{4.16}$$

Podemos escribir el resultado final para los potenciales como

$$\boxed{\Phi_{r<a} = \frac{q}{4\pi\epsilon d}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{q(2l+1)}{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1)+l}\left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos\theta)\right]}, \tag{4.17}$$

$$\boxed{\Phi_{r>a} = \frac{q}{4\pi\epsilon d}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{d^{l+1}}{r^{l+1}}\left[1 + \frac{l\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}-1\right)}{\left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1)+l\right]}\left(\frac{a}{d}\right)^{2l+1}\right] \qquad \text{si } r > d}, \tag{4.18}$$

$$\boxed{\Phi_{r>a} = \frac{q}{4\pi\epsilon d}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left[\left(\frac{r}{d}\right)^l + \frac{l\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}-1\right)}{\left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1)+l\right]}\left(\frac{a}{d}\right)^l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\right] \qquad \text{si } r < d}. \tag{4.19}$$

(b) Cerca del centro de la esfera tenemos $r \ll d \rightarrow r/d \ll 1$. Debido a que el campo interno está en términos de potencias de r/d, los órdenes superiores pueden despreciarse

$$\Phi_{r \ll d} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\left[1 + \frac{3}{1+2\epsilon_0/\epsilon}\frac{r}{d}\cos\theta\right], \tag{4.20}$$

que podemos escribir como

$$\Phi_{r \ll d} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\left[1 + \frac{3}{2+\epsilon/\epsilon_0}\frac{z}{d}\right]. \tag{4.21}$$

El campo eléctrico lo calculamos con

$$\mathbf{E}_{r \ll d} = -\nabla\Phi_{r \ll d}, \tag{4.22}$$

que resulta en

$$\boxed{\mathbf{E}_{r \ll d} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\left[\frac{3}{2+\epsilon/\epsilon_0}\right]\hat{z}}. \tag{4.23}$$

El campo eléctrico cera del centro de la esfera apunta haca el lado contrario de la carga puntual, en la dirección negativa del eje z.

(c) En el límite en que ϵ/ϵ_0, vemos que todos los términos de la serie se hacen cero menos el término con $l = 0$, entonces

$$\boxed{\Phi_{r<a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}}, \tag{4.24}$$

exactamente lo que encontramos para una esfera conductora. Y el otro caso, comenzamos por reescribir $\Phi_{r>a}$ como

$$\Phi_{r>a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{rd} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\theta) - \frac{qa}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l}}{(rd)^{l+1}}P_l(\cos\theta), \tag{4.25}$$

pero según la ecuación (3.38) de Jackson [1]

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - d\mathbf{z}|}, \tag{4.26}$$

y

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l}}{(rd)^{l+1}} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{|a^2\mathbf{z} - d\mathbf{r}|}, \tag{4.27}$$

por lo tanto

$$\boxed{\Phi_{r>a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{a}{rd} + \frac{1}{|\mathbf{r} - d\mathbf{z}|} - \frac{a/d}{|\frac{a^2}{d}\mathbf{z} - d\mathbf{r}|}\right]}, \tag{4.28}$$

que también tiene la misma forma que la ecuación (2.8) de Jackson [1] donde se calcula este potencial.

Problema 5. Problema 4.13 de Classical Electromagnetic Radiation de Jackson [1].

Dos superficies cilíndricas conductoras, largas y coaxiales, de radios a y b son bajadas verticalmente a un líquido dieléctrico. Si el líquido sube una altura promedio de h entre los electrodos cuando una diferencia de potencial V es establecida entre ellos, muestre que la susceptibilidad del líquido es[15]

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\xi g h \ln{(b/a)}}{\epsilon_0 V^2}$$

donde ξ es la densidad del líquido, g es la aceleración debida a la gravedad, y la susceptibilidad del aire es depreciada.

Solución:

Hay dos regiones que considerar en este problema, una entre los cilindros con aire y la otra entre los cilindros con agua. Aunque existan dos permitividades distintas, el campo **D** debe ser el mismo en las dos regiones. Por conveniencia colocaremos el eje del cilindro en el eje z, y debido a que el cilindro es largo, podemos ignorar la dimensión z y podemos resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Recordemos que esta tiene la forma[16]

$$\Phi(\rho,\phi) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m})(A_m \mathrm{e}^{im\phi} + B_m \mathrm{e}^{-im\phi}). \tag{5.1}$$

Y ya que el problema tiene simetría azimutal, esta ecuación se reduce a

$$\Phi(\rho,\phi) = a_0 + b_0 \ln\rho. \tag{5.2}$$

Si asumimos ahora que la diferencia de potencial V establecida entre las superficies cilíndricas conductoras es tal que en la de adentro es cero el potencial, y en la de afuera es V, tenemos que

$$\Phi(\rho = a) = 0, \tag{5.3}$$

$$0 = a_0 + b_0 \ln a, \tag{5.4}$$

$$\therefore q_0 = -b_0 \ln_a, \tag{5.5}$$

y la solución se convierte por ahora en (utilizando las propiedades de los logaritmos)

$$\Phi(\rho,\phi) = b_0 \ln(\rho/a), \tag{5.6}$$

para obtener la forma de b_0 hacemos,

$$\Phi(\rho = b) = V, \tag{5.7}$$

$$V = b_0 \ln(\rho/a), \tag{5.8}$$

$$\therefore b_0 = \frac{V}{\ln{(b/a)}}. \tag{5.9}$$

[15] Hemos cambiado la letra usada para la densidad por conveniencia.
[16] Ver ecuación (2.71) de Jackson [1].

Y el potencial es entonces

$$\Phi(\rho,\phi) = V\frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)}. \tag{5.10}$$

El campo eléctrico será

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -V\frac{1}{\ln(b/a)}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}. \tag{5.11}$$

Ahora, debido a que se debe conservar la energía, la energía potencial W que había cuando la región entre los cilindros estaba completamente llena de aire y la energía potencial después que se introducen los cilindros en el agua y se llega al equilibrio W', debe ser tal que se mantenga la diferencia de potencial V entre ellos, es decir que debe proveerse energía externa al sistema para mantener el potencial mientras el sistema cambia. Tenemos entonces

$$\Delta W = W - W', \tag{5.12}$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}d^3\mathbf{x} - \frac{1}{2}\int \mathbf{E}'\cdot\mathbf{D}'d^3\mathbf{x}, \tag{5.13}$$

y ya que esta ecuación debe depender de las propiedades del líquido en que las superficies cilíndricas son introducidas podemos escribir esta ecuación como[17]

$$\Delta W = \frac{1}{2}h\epsilon_0\int E_{\text{aire}}^2 d^2\mathbf{x} + \frac{1}{2}h\epsilon_0(1+\chi_e)h\int E_{\text{líquido}}^2 d^2\mathbf{x}. \tag{5.14}$$

Y ya que el campo eléctrico debe ser el mismo en las dos regiones tenemos

$$\Delta W = \frac{h\epsilon_0\chi_e}{2}\int E^2 d^2\mathbf{x}, \tag{5.15}$$

$$\therefore \Delta W = \frac{h\epsilon_0\chi_e}{2}2\pi\int_a^b E^2\rho d\rho, \tag{5.16}$$

e introduciendo la expresión para el campo eléctrico que obtuvimos

$$\therefore \Delta W = \frac{h\epsilon_0\chi_e}{2}2\pi\int_a^b \left(V^2\frac{1}{\ln^2(b/a)}\frac{1}{\rho^2}\right)\rho d\rho, \tag{5.17}$$

e integrando obtenemos

$$\Delta W = \frac{\pi h\epsilon_0\chi_e V^2}{\ln^2(b/a)}. \tag{5.18}$$

Esta es la energía potencial ganada en los campos resultante de introducir las superficies cilíndricas en el líquido dieléctrico a una altura h. También podemos ver el cambio de energía potencial como una energía potencial gravitacional, en este caso

$$\Delta W = mhg, \tag{5.19}$$

y usando la definición de densidad $\xi = m/V$ podemos escribir

$$\Delta W = \xi hAgh, \tag{5.20}$$

[17] Ver ecuación (4.38) de Jackson [1].

pero el área $A = \pi(b^2 - a^2)h$,

$$\therefore \Delta W = \xi\pi(b^2 - a^2)h^2 g, \tag{5.21}$$

Ahora claramente estas dos diferencias de energía cinética deben ser iguales, por lo tanto

$$\frac{\pi h \epsilon_0 \chi_e V^2}{\ln^2(b/a)} = \xi\pi(b^2 - a^2)h^2 g, \tag{5.22}$$

y resolviendo para χ_e encontramos

$$\boxed{\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\xi g h \ln(b/a)}{\epsilon_0 V^2}}. \tag{5.23}$$

Referencias

[1] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. John Wiley and Sons, Inc. 1999.

[2] J. Marion, M. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, 2da edición, Academic Press, 1965.

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES