Universidad Nacional Autónoma de México

Electrodinámica Clásica

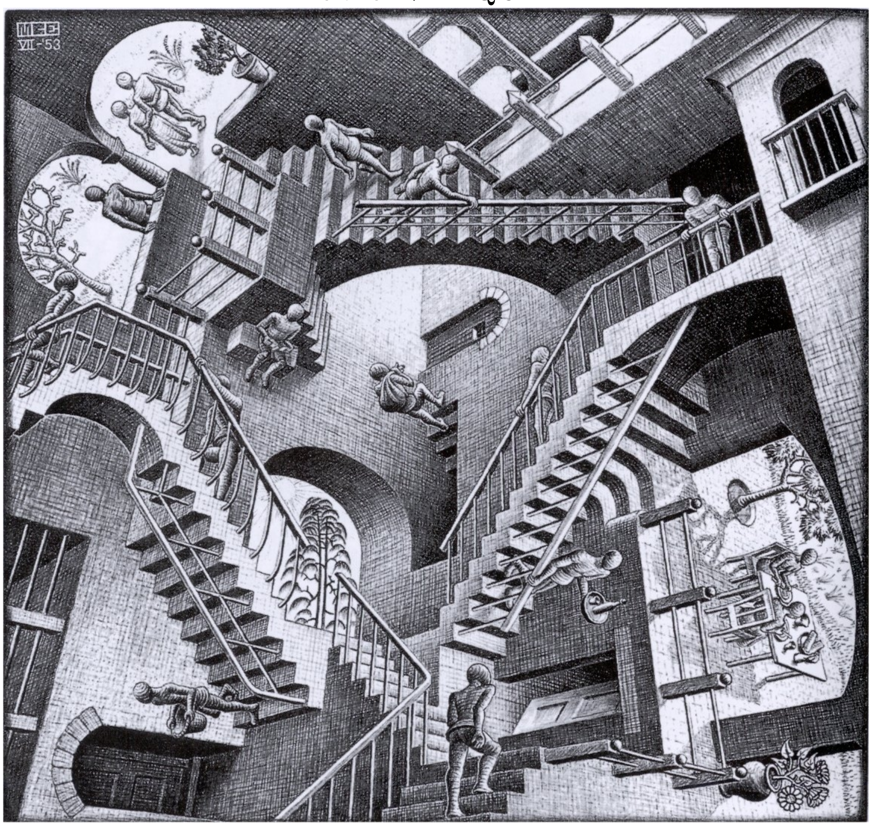
Semestre 2016-II

10 de marzo de 2016

Tarea # 4. Multipolos, Electrostática de Medios Macroscópicos, Dieléctricos.

Autor:

Favio Vázquez†

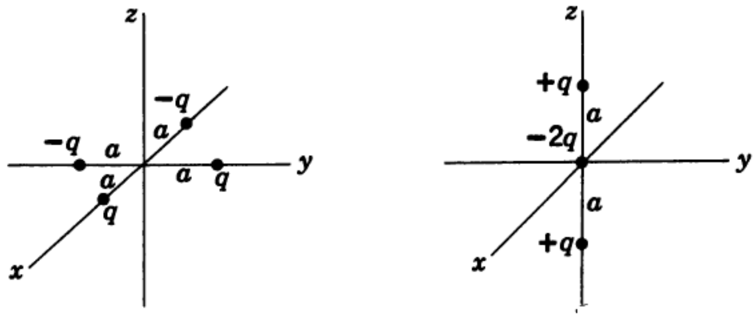


†favio.vazquez@correo.nucleares.unam.mx

GIGANTIUM HUMERIS INSIDENTES

Problema 1. Problema 4.1 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las distribuciones de carga mostradas como las partes a y b. Intente obtener resultados para todo los momentos que no se hacen cero válidos para todo l, pero en cada caso encuentre los primeros dos conjuntos de momentos que no se hacen cero al menos.



(a) **(b)**

Figura 1: Disposición de la distribución de cargas para el problema 1.

(c) Para la distribución de carga del segundo conjunto b escriba la expansión multipolar para el potencial. Manteniendo solo los términos de orden bajo en la expansión, grafique el potencial en el plano $x - y$ como una función de la distancia desde el origen para distancias mayores a a.

(d) Calcule directamente de la ley de Coulomb el potencial exacto para b en el plano $x - y$. Grafíquelo como una función de la distancia y compare con el resultados encontrado en la parte c.

Divida la forma asintótica en las partes c y d para ver el comportamiento a distancias grandes más claramente.

Solución:

Problema 2. Problema 4.7 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Una distribución de carga localizada tiene la densidad de carga

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 \mathrm{e}^{-r} \operatorname{sen}^2 \theta$$

(a) Haga una expansión multipolar del potencial debido a esta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares que no se hacen cero. Escriba el potencial a grandes distancias como una expansión finita en polinomios de Legendre.

(b) Determine el potencial explícitamente en cualquier punto del espacio, y muestre que cerca del origen, correcto a r^2 inclusive,

$$\Phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta)\right]$$

(c) Si existe en el origen un núcleo con un momento cuadrupolar $Q = 10^{-28}$ m^2, determine la magnitud de la energía de interacción, asumiendo que la unidad de carga en $\rho(\mathbf{r})$ arriba es la carga electrónica y que la unidad de longitud es el radio de Bohr del hidrógeno $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar/me^2 = 0{,}529 \times 10^{-10}$ m. Exprese su respuesta como una frecuencia dividida por la constante de Planck h.

La densidad de carga en este problema es la de los estados $m = \pm 1$ del nivel $2p$ en el hidrógeno, mientras que la interacción cuadrupolar es del mismo orden que el encontrado en moléculas.

Solución:

Problema 3. Problema 4.8 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Un cascarón cilíndrico, muy largo y circular recto, de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radio interno y externo a y b, respectivamente, es colocado en un previamente campo eléctrico uniforme E_0 con su eje perpendicular al campo. El medio adentro y afuera del cilindro tiene una constante dieléctrica de uno.

(a) Determine el potencial y campo eléctrico en las tres regiones, despreciando efectos finales.

(b) Esboce las líneas de fuerza para un caso típico de $b \simeq 2a$.

(c) Discuta las formas limitantes en su solución apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme, y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Solución:

Problema 4. Problema 4.9 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Una carga puntual q es colocada en el espacio libre a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a ($a < d$) y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0.

- **(a)** Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio como una expansión en armónicos esféricos.
- **(b)** Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera.
- **(c)** Verifique que, en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \to \infty$, tu resultado es el mismo que para la esfera conductora.

Solución:

Problema 5. Problema 4.13 de Classical Electromagnetic Radiation de Marion y Heald [1].

Dos superficies cilíndricas conductoras, largas y coaxiales, de radios a y b son bajadas verticalmente a un líquido dieléctrico. Si el líquido sube una altura promedio de h entre los electrodos cuando una diferencia de potencial V es establecida entre ellos, muestre que la susceptibilidad del líquido es

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho g h \ln{(b/a)}}{\epsilon_0 V^2}$$

donde ρ es la densidad del líquido, g es la aceleración debida a la gravedad, y la susceptibilidad del aire es depreciada.

<u>Solución:</u>

Referencias

[1] J. Marion, M. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, 2da edición, Academic Press, 1965.