Examen Predoctoral de Mecánica Clásica.
Semestre 2016-I.

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Preguntas teóricas

1.1 Pregunta teórica 1

Sobre las formulaciones de la mecánica, discuta los siguientes puntos:

a) Bajo qué condiciones las ecuaciones de Euler-Lagrange determinan todas las aceleraciones del sistema.

b) En el caso Hamiltoniano, cuál es la condición equivalente.

c) Dentro del formalismo de Hamilton-Jacobi qué garantiza el que la funcional generadora proporcione una solución de las ecuaciones de Hamilton.

Solución:

a) R:

La formulación lagrangiana en coordenadas generalizadas es equivalente a la formulación newtoniana, por lo tanto la ley de la naturaleza se expresa como una ecuación diferencial de segundo orden. Por lo tanto, para poder determinar completamente el estado de un sistema mecánico, y definir unívocamente todas las aceleraciones del mismo requerimos conocer simultáneamente las coordenadas y las velocidades en un instante dado. Entonces ya que las ecuaciones de Euler-Lagrange, contienen derivadas sobre la lagrangiana que depende de las coordenadas, las velocidades y posiblemente el tiempo, al conocer simultáneamente las coordenadas y velocidades en un instante dado, podremos determinar todas las aceleraciones del sistema.

b) R:

En el caso de la formulación hamiltoniana, ya que es equivalente a la formulación lagrangiana y por lo tanto a la newtoniana, se cumplen las mismas condiciones. Ahora en este caso, debido a que las ecuaciones de Hamilton contemplan derivadas de la hamiltoniana del sistema, y ésta depende de coordenadas e impulsos, se deben conocer ahora en un instante dado simultáneamente las coordenadas y los impulsos del sistema mecánico para determinar todas las aceleraciones del mismo. Debido a la relación directa entre los impulsos y las velocidades en esta formulación, esta condición se puede considerar idéntica a la anterior, aunque es un poco más formal hablar de impulsos en este caso, ya que la formulación hamiltoniana existe en el ámbito del espacio fase de coordenadas e impulsos.

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

d) R:

Lo que nos garantiza, en la formulación de Hamilton-Jacobi, que la funcional generadora proporcione una solución de las ecuaciones de Hamilton, es que ésta ea una integral completa, es decir que sea una solución de la ecuación en derivadas parciales resultante en esta formulación, que contenga tantas constantes arbitrarias independientes como variables independientes existan. Y debido a que en la ecuación de Hamilton-Jacobi las variables independientes son las coordenadas y el tiempo, para un sistema de n grados de libertad, una integral completa debe contener $n+1$ constantes arbitrarias. Estas constantes que se deben obtener en el ámbito de una integral completa, nos permitirán expresar a las coordenadas y los impulsos como funciones del tiempo, y las constantes, con lo cual se puede demostrar que estas variables cumplirán con ecuaciones diferenciales que tienen forma hamiltoniana.

1.2 Pregunta Teórica 2

Considere un cuerpo rígido con momentos de inercia $I_1 > I_2 > I_3$. Si sobre el cuerpo no se ejercen torcas, ¿qué ejes del cuerpo son estables e inestables bajo pequeñas perturbaciones y por qué?

Solución:

Debemos ver en qué casos, con respecto a la dirección de la velocidad angular, el movimiento será estable y con respecto a qué eje principal. Partimos de las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido al cual no se le aplican torcas,

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = 0, \tag{1.1}$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0, \tag{1.2}$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = 0. \tag{1.3}$$

Estas ecuaciones nos permitirán estudiar, cuando el cuerpo esté en movimiento, qué condiciones deben cumplirse para que el movimiento sea estable.

Si suponemos que la velocidad angular es en dirección al eje x, entonces se cumplirá que $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$. Ahora debido a que ω_2 y ω_3 se mantendrán pequeños con respecto a ω_1, el movimiento será estable y debido a que no hay torque $|\overrightarrow{\omega}| = \text{cte}$, y debido a que $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, tendremos que $\omega_2^2 + \omega_3^2 \ll \omega_1^2$, y entonces $\omega = \sqrt{\omega_1^2} = \omega_1$, y entonces podemos tomar a ω_1 como constante, al menos a primer orden.
Tomando la derivada temporal de (1.2)

$$\frac{d}{dt}\left[I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1)\right] = 0, \tag{1.4}$$

y debido a que ω_1 es constante,

$$I_2\ddot{\omega}_2 - \dot{\omega}_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0, \tag{1.5}$$

$$\therefore \ddot{\omega}_2 = \frac{\dot{\omega}_3\omega_1(I_3 - I_1)}{I_2}. \tag{1.6}$$

Sustituyendo $\dot{\omega}_3$ de (1.3),

$$\ddot{\omega}_2 = \frac{\omega_2\omega_1^2(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}. \tag{1.7}$$

Tomando la derivada temporal de (1.3)

$$\frac{d}{dt}\left[I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2)\right] = 0, \tag{1.8}$$

$$I_3\ddot{\omega}_3 - dot\omega_2\omega_1(I_1 - I_2) = 0, \tag{1.9}$$

$$\therefore \ddot{\omega}_3 = \frac{\dot{\omega}_2\omega_1(I_1 - I_2)}{I_3}. \tag{1.10}$$

Sustituyendo $\dot{\omega}_2$ de (1.2), en (1.10)

$$\ddot{\omega_3} = \frac{\omega_3\omega_1^2(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_3 I_2}. \tag{1.11}$$

Ahora como $I_1 > I_2, I_3$, los lados derechos de (1.7) y (1.11) serán negativos y por lo tanto tendremos un equilibrio estable, con un movimiento tipo oscilador armónico, y ω_2 y ω_3 oscilarán al rededor del punto de equilibrio. Vemos entonces que un movimiento en dirección del eje x es estable, y por consiguiente el momento principal de inercia I_1 será estable.

Supongamos ahora que el movimiento es en dirección al eje z, utilizando los mismos argumentos, vemos que debido a que $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$, $|\omega| = \text{cte}$, entonces $\omega = \omega_3$, y podemos considerar que ω_3 es estable, al menos a primer orden.
Tomando la derivada temporal de (1.1)

$$\frac{d}{dt}\left[I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3)\right] = 0, \tag{1.12}$$

y debido a que ω_3 es constante,

$$I_1\ddot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2\omega_3(I_2 - I_3) = 0, \tag{1.13}$$

$$\therefore \ddot{\omega}_1 = \frac{\dot{\omega}_2\omega_3(I_2 - I_3)}{I_1}. \tag{1.14}$$

Sustituyendo $\dot{\omega}_2$ de (1.2),

$$\ddot{\omega_1} = \frac{\omega_1\omega_3^2(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_2 I_1}. \tag{1.15}$$

Tomando la derivada temporal de (1.2)

$$\frac{d}{dt}\left[I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1)\right] = 0, \tag{1.16}$$

$$I_2\ddot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1\omega_3(I_3 - I_1) = 0, \tag{1.17}$$

$$\therefore \ddot{\omega}_3 = \frac{\dot{\omega}_1\omega_3(I_3 - I_1)}{I_2}. \tag{1.18}$$

Sustituyendo $\dot{\omega}_1$ de (1.1), en (1.18)

$$\ddot{\omega_2} = \frac{\omega_2\omega_3^2(I_3 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2}. \tag{1.19}$$

De nuevo como $I_1 > I_2, I_3$, los lados derechos de (1.15) y (1.19) serán negativos y por lo tanto tendremos un equilibrio estable, con un movimiento tipo oscilador armónico, y ω_1 y ω_2 oscilarán al rededor del punto de equilibrio. Vemos entonces que un movimiento en dirección del eje z es estable, y por consiguiente el momento principal de inercia I_3 será estable.

Por último, supongamos que el movimiento es en dirección al eje y, y utilizando los mismos argumentos, vemos que debido a que $\omega_2 \gg \omega_1, \omega_3$, $|\omega| = \text{cte}$, entonces $\omega = \omega_2$, y podemos considerar que ω_2 es estable, al menos a primer orden.
Tomando la derivada temporal de (1.1)

$$\frac{d}{dt}\left[I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3)\right] = 0, \tag{1.20}$$

y debido a que ω_2 es constante,

$$I_1\ddot{\omega}_1 - \dot{\omega}_3\omega_2(I_2 - I_3) = 0, \tag{1.21}$$

$$\therefore \ddot{\omega}_1 = \frac{\dot{\omega}_3\omega_2(I_2 - I_3)}{I_1}. \tag{1.22}$$

Sustituyendo $\dot{\omega}_3$ de (1.3),

$$\ddot{\omega_1} = \frac{\omega_1\omega_2^2(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_3 I_1}. \tag{1.23}$$

Tomando la derivada temporal de (1.3)

$$\frac{d}{dt}\left[I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2)\right] = 0, \tag{1.24}$$

$$I_3\ddot{\omega}_3 - \dot{\omega}_1\omega_2(I_1 - I_2) = 0, \tag{1.25}$$

$$\therefore \ddot{\omega}_3 = \frac{\dot{\omega}_1\omega_2(I_1 - I_2)}{I_3}. \tag{1.26}$$

Sustituyendo $\dot{\omega}_1$ de (1.1), en (1.26)

$$\ddot{\omega_3} = \frac{\omega_3\omega_2^2(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_3 I_2}. \tag{1.27}$$

Como $I_2 > I_3$ y $I_1 > I_2$, los lados derechos de (1.23) y (1.27) serán positivos y por lo tanto tendremos un equilibrio inestable. Vemos entonces que un movimiento en dirección del eje y es inestable, y por consiguiente el momento principal de inercia I_2 será estable.

Entonces concluimos que los momentos de inercia estables son el mayor I_1 y el menor I_3, siendo I_2 el intermedio, inestable. Esto puede verse fácilmente si intentamos lanzar una raqueta al aire al mismo tiempo que le imprimimos una rotación, ya sea en torno al eje definido por el mango, al eje perpendicular a la pala o al perpendicular al mango contenido en la pala; en los primeros casos es fácil hacerlo sin producir fuertes bamboleos, en el tercero es prácticamente imposible (que es el eje correspondiente al momento principal de inercia intermedio).

1.3 Pregunta 3

Sobre un piso sin fricción, una partícula puntual choca elásticamente con una mancuerna de dos modos diferentes mostrados en la figura (considere que las partículas de la mancuerna son también puntuales y que la barra tiene masa despreciable). ¿Qué cantidades se conservan en cada caso? ¿En qué caso la rapidez del centro de masa de la mancuerna, después dela colisión, es mayor?

AGREGAR FIGURA

Problemas

2.1 Problema 1

La interacción clásica entre dos átomos de un gas inerte, cada uno de masa m está dada por el potencial

$$V(r) = -\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

con A y B constantes positivas y r la separación entre los dos átomos, $r = |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|$.

a) Obtenga la hamiltoniana para el sistema de los dos átomos.

b) Describa completamente el (los) estado(s) clásico(s) de energía mínima del presente sistema.

c) Si la energía es un poco mayor que la mínima, ¿Cuáles son las posibles frecuencias del movimiento del sistema?

Solución:

2.2 Problema 2

Considere el siguiente sistema

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - af(t)q$$

con $f(t)$ una función arbitraria del tiempo pero integrable.

a) Considerando que una simetría del sistema es aquella que deja invariantes las ecuaciones de movimiento. ¿Existe alguna simetría asociada a este sistema? Si es así, calcule la cantidad conservada correspondiente usando el teorema de Noether.

b) Muestre que, efectivamente su derivada total con respecto del tiempo es cero.

c) Construya el Hamiltoniano del sistema y escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente.

d) Resuelva la ecuación de hamilton-Jacobi y encuentre la funcional generadora de tipo 2.

e) Considere que $f(t) = \exp(-bt)$ con $b > 0$ y las condiciones iniciales $q(0) = \beta$ y $\dot{q}(0) = \rho$. Usando la teoría de Hamilton-Jacobi, encuentre la trayectoria de la partícula.

Solución:

a) R:

Comencemos por obtener las ecuaciones de movimiento con la lagrangiana dada para tener un punto de comparación. Usando las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \tag{2.1}$$

$$m\ddot{q} + af(t) = 0. \tag{2.2}$$

Debido a que la lagrangiana depende explícitamente del tiempo, no existirán integrales de movimiento, sino solo constantes de movimiento. Comúnmente las simetrías asociadas a constantes de movimiento son un poco menos obvias de encontrar, y en general estas no provienen de una simetría en la forma estándar. En este caso podemos ver que la siguiente transformación,

$$Q = q + s, \tag{2.3}$$

deja invariante a las ecuaciones de movimiento. Para ver esto, sustituyamos esta transformación en la lagrangiana original[1],

$$L' = \frac{m}{2}\dot{Q}^2 - af(t)(Q - s), \tag{2.4}$$

y obtengamos las ecuaciones de movimiento desde las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q}, \tag{2.5}$$

que nos dan

$$m\ddot{Q} + af(t) = 0. \tag{2.6}$$

por lo tanto hemos demostrado que la transformación propuesta deja invariante a las ecuaciones de movimiento, y con la definición dada en el enunciado, vemos que es una simetría. Debido a que tratamos con una constante y no una integral de movimiento, la ecuación para obtener la cantidad conservada con el teorema de Noether será

$$I = \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial q}{\partial s}\right)\bigg|_{s=0} - G, \tag{2.7}$$

donde en este caso es fácil ver que $\frac{dG}{dt} = -af(t)$, ya que al sustituir y hacer los cálculos de las derivadas, tenemos que

$$\boxed{I = m\dot{Q} + a\int f(t)dt,} \tag{2.8}$$

y entonces

b) R:

$$\frac{dI}{dt} = m\ddot{Q} + af(t) = 0, \tag{2.9}$$

que es cero debido a la ecuación de movimiento obtenida.

c) R:

Para encontrar el hamiltoniano usamos la definición de impulso

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \tag{2.10}$$

para con esta cantidad, poder expresar la velocidad en término del impulso, y luego sustituir su valor en la lagrangiana para obtenerla en términos de las posiciones e impulsos, construimos así la hamiltoniana con la ecuación

$$H = p\dot{q}(q,p,t) - L(q,p,t). \tag{2.11}$$

[1] $\frac{d}{dt}(Q - s) = \dot{Q}$

Tenemos entonces que

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \tag{2.12}$$

y

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \tag{2.13}$$

$$\therefore L = \frac{p^2}{2m} - af(t)q, \tag{2.14}$$

y

$$H = p\frac{p}{m} - \frac{p^2}{2m} - af(t)q, \tag{2.15}$$

$$\boxed{\therefore H = \frac{p^2}{2m} - af(t)q.} \tag{2.16}$$

Para construir la ecuación de Hamilton-Jacobi, transformamos los impulsos por $\frac{\partial S}{\partial q}$ y hacemos uso de la ecuación

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \tag{2.17}$$

donde S es una función generadora de transformaciones canónicas y una solución completa de la ecuación. Entonces

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - af(t)q = -\frac{\partial S}{\partial t}.} \tag{2.18}$$

d) R:

Debido a que la ecuación de Hamilton-Jacobi es dependiente del tiempo, proponemos una solución del tipo

$$S(q,t) = A(t)q + B(t), \tag{2.19}$$

entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi se transforma en

$$\frac{1}{2m}A^2 - af(t)q + \dot{A}q + \dot{B} = 0, \tag{2.20}$$

$$\therefore [af(t) + \dot{A}]q + \left[\frac{1}{2m}A^2 + \dot{B}\right] = 0, \tag{2.21}$$

y para que esta ecuación los coeficientes de q y de 1 deben ser idénticamente cero, por lo tanto[2]

$$\dot{A} + af(t) = 0 \Rightarrow dA = -a\int f(t)dt \tag{2.22}$$

$$\therefore A = -aF(t) + A_0. \tag{2.23}$$

Y por otra parte, utilizando que $A^2 = a^2F^2 - 2aFA_0 + A_0^2$,

$$\dot{B} + \frac{1}{2m}A^2 = 0 \Rightarrow dB = -\frac{1}{2m}\int [a^2F^2 - 2aFA_0 + A_0^2]dt \tag{2.24}$$

[2]Llamaremos $\int f(t)dt = F(t)$

Y entonces

$$\boxed{S = [-aF(t) + A_0]q - \frac{1}{2m}\int [a^2F^2 - 2aFA_0]dt - \frac{1}{2m}A_0^2 t.} \tag{2.25}$$

Como es de costumbre en la formulación de Hamilton-Jacobi, calculamos el impulso con

$$\boxed{p = \frac{\partial S}{\partial q} = -aF(t) + A_0,} \tag{2.26}$$

y terminamos de calcular la trayectoria con

$$\xi = \frac{\partial S}{\partial A_0} = q + \frac{a}{m}\int F dt - \frac{A_0 t}{m}, \tag{2.27}$$

por lo tanto

$$\boxed{q = \xi - \frac{a}{m}\int F dt + \frac{A_0 t}{m}.} \tag{2.28}$$

e) R:

Si $f(t) = \exp(-bt)$, tenemos que $F(t) = -\frac{1}{b}\exp(-bt)$, y

$$\boxed{p = a\frac{1}{b}\exp(-bt) + A_0,} \tag{2.29}$$

$$\boxed{q = \xi - \frac{a}{mb^2}\exp(-bt) + \frac{A_0 t}{m}.} \tag{2.30}$$

Para aplicar las condiciones iniciales calculamos primero

$$\dot{q} = \frac{a}{mb}\exp(-bt) + \frac{A_0}{m}, \tag{2.31}$$

Aplicando la primera condición inicial $q(0) = \beta$, tenemos que

$$\xi - \frac{a}{mb^2} = \beta \Rightarrow \xi = \beta + \frac{a}{mb^2}, \tag{2.32}$$

y aplicando la segunda $\dot{q}(0) = \rho$,

$$\frac{a}{mb} + \frac{A_0}{m} = \rho \Rightarrow A_0 = m\rho - \frac{a}{b}, \tag{2.33}$$

entonces

$$\boxed{q(t) = \beta + \frac{a}{mb^2} - \frac{a}{mb^2}\exp(-bt) + \left(\rho - \frac{a}{mb}\right)t.} \tag{2.34}$$

2.3 Problema 3

Una partícula de masa m está restringida a moverse en el interior de un riel circular de radio R. El riel circular está fijado al piso en posición vertical. Un pequeño motor hacer girar el riel en torno al eje de simetría vertical con rapidez angular constante ω (ver figura). Considere el cero de energía potencial en el piso y sea θ el ángulo que forma el radio vector de posición de la partícula con el eje de rotación.

a) Determine el Lagrangiano del sistema con constricción y la ecuación de movimiento en θ para la partícula.

b) Para que exista una órbita a $\theta_{eq} = $ cte y distinta de cero, ω tiene que ser mayor que cierta ω_0. Determine ω_0.

Solución:

a) R:

Debido a que la única fuerza que existe es la gravitacional, el potencial se escribiría como (utilizando coordenadas polares)

$$V = mgz = mgR\cos\theta, \tag{2.35}$$

ahora debido a que se solicita que el cero de la energía potencial esté en el piso, hay que cambiar el punto de referencia para el potencial, y ya que al potencial gravitacional solo le importa la diferencia entre el punto de referencia y el suelo, para acomodar esta condición hacemos primero,

$$V = mg(z - z_0), \tag{2.36}$$

donde el z_0 en este caso será $-R$ ya que el eje z se ha tomando como positivo hacia arriba, entonces

$$V = mg(z + R) = mg(R\cos\theta + R), \tag{2.37}$$

$$\therefore V = mgR(\cos\theta + 1). \tag{2.38}$$

La energía cinética del sistema se escribe como

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{2.39}$$

debido a que existe la constricción de que $R = $ cte, y recordamos que estamos usando coordenadas esféricas, tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= R\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - R\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\\
\dot{y} &= R\dot{\theta}\cos\theta\operatorname{sen}\phi + R\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\phi,\\
\dot{z} &= -R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Entonces la energía cinética se transforma en (usando el hecho de que la velocidad angular es constante y por lo tanto $\dot{\phi} = \omega$),

$$T = \frac{1}{2}m\left[R\dot{\theta} + R^2\omega^2\operatorname{sen}^2\theta\right], \tag{2.40}$$

por lo que la lagrangiana del sistema será

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[R\dot{\theta} + R^2\omega^2\operatorname{sen}^2\theta\right] - mgR(\cos\theta + 1). \tag{2.41}$$

Y las ecuaciones de movimiento las obtenemos con la ecuación de Lagrange para θ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \tag{2.42}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\theta}R^2\right) - -mR^2\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + mgR\operatorname{sen}\theta = 0, \tag{2.43}$$

$$\boxed{\therefore R\ddot{\theta} - R\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + g\operatorname{sen}\theta = 0.} \tag{2.44}$$

b) R:

La energía total del sistema es

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\left[R\dot{\theta} + R^2\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta\right] + mgR(\cos\theta + 1), \tag{2.45}$$

de donde vemos que podemos estudiar este sistema como uno con potencial efectivo

$$V_{ef} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta + mgR(\cos\theta + 1), \tag{2.46}$$

para calcular ω_0, debemos derivar V_{ef} con respecto a θ e igualar a cero, con lo cual obtendremos el ángulo de equilibrio y con esto podemos saber en que rangos se encontrará la frecuencia solicitada.

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta + mgR(\cos\theta + 1)\right] = 0, \tag{2.47}$$

$$\cancel{m}R^{\cancel{2}}\omega^2\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta - \cancel{m}\cancel{R}g\cancel{\operatorname{sen}\theta} = 0, \tag{2.48}$$

$$R\omega^2\cos\theta - g = 0, \tag{2.49}$$

de donde vemos que

$$\theta = \arccos\left[\frac{g}{R\omega^2}\right], \tag{2.50}$$

con lo cual, debido a la definición de arc cos que

$$\frac{g}{R\omega^2} < 1, \tag{2.51}$$

y entonces

$$\boxed{\omega_0 > \sqrt{\frac{g}{R}}.} \tag{2.52}$$