

Statistica e Analisi dei dati

Università degli studi di Milano - Informatica

Luca Favini, Matteo Zaghenò

Ultima modifica: 16/06/2024 - [Codice sorgente](#)

Statistica e Analisi dei dati

Insegnamento del corso di laurea triennale in Informatica, Università degli studi di Milano. Tenuto dal Professore Dario Malchiodi, anno accademico 2023-2024.

La statistica si occupa di raccogliere, analizzare e trarre conclusioni su dati, attraverso vari strumenti:

- Statistica descrittiva: esposizione e **condensazione** dei dati, cercando di limitarne l'incertezza;
- Calcolo delle probabilità: creazione e analisi di modelli in situazioni di **incertezza**;
- Statistica inferenziale: **approssimazione** degli esiti mancanti, attraverso modelli probabilistici;
- Appendice: Cheatsheet Python: raccolta funzioni/classi Python utili ai fini dell'esame (*e non*).
- Appendice: Cheatsheet integrali: come svolgere gli integrali.

Indice

1. Statistica descrittiva	4
1.1. Classificazione dei dati: qualitativi e quantitativi	4
1.2. Frequenze	4
1.2.1. Frequenze assolute e relative	4
1.2.2. Frequenze cumulate	4
1.2.2.1. Funzione cumulativa empirica	4
1.2.3. Frequenze congiunte e marginali	4
1.2.4. Stratificazione	4
1.3. Grafici	4
1.4. Indici di centralità	4
1.4.1. Media campionaria	4
1.4.2. Mediana campionaria	4
1.4.3. Moda campionaria	5
1.5. Indici di dispersione	5
1.5.1. Scarto assoluto medio	5
1.5.2. Varianza campionaria	5
1.5.2.1. Varianza campionaria standard	5
1.5.3. Coefficiente di variazione	6
1.5.4. Quantile	6
1.6. Indici di correlazione	6
1.6.1. Covarianza campionaria	6
1.6.2. Indice di correlazione di Pearson (indice di correlazione lineare)	7
1.7. Indici di eterogeneità	8
1.7.1. Indice di Gini (per l'eterogeneità)	8
1.7.2. Entropia	8
1.8. Indici di concentrazione	9
1.8.1. Curva di Lorentz	9
1.8.2. Indice di Gini (per la concentrazione)	10
1.8.3. Analisi della varianza (ANOVA)	10
1.9. Alberi di decisione	12
1.10. Classificatori	12
1.10.1. Casi particolari	13
1.10.2. Classificatori a soglia (Curva ROC)	13
1.11. Trasformazione dei dati	14
1.12. Grafici	14

2. Calcolo delle probabilità	14
2.1. Calcolo combinatorio	14
2.1.1. Disposizioni	14
2.1.2. Combinazioni	14
2.1.3. Permutazioni	15
2.2. Elementi di probabilità	15
2.2.1. Algebra di eventi	16
2.2.2. Assiomi di Kolmogorov	17
2.2.3. Teoremi derivati dagli assiomi	17
2.2.4. Spazi di probabilità ed Esiti equiprobabili	18
2.3. Probabilità condizionata	18
2.3.1. Regola di fattorizzazione	18
2.3.2. Teorema delle probabilità totali	19
2.3.3. Teorema di Bayes	19
2.3.4. Classificatore naive-Bayes	20
2.3.5. Eventi indipendenti	21
2.3.6. Indipendenza a tre o più eventi	21
2.4. Variabili aleatorie	22
2.4.1. Variabili aleatorie discrete	22
2.4.1.1. Funzione indicatrice	22
2.4.1.2. Funzione di massa di probabilità	22
2.4.1.3. Funzione di ripartizione	23
2.4.1.4. Valore atteso	24
2.4.1.5. Varianza	24
2.4.2. Variabili aleatorie multivariate	25
2.4.2.1. Funzione di ripartizione congiunta	25
2.4.2.2. Funzione di massa di probabilità congiunta	26
2.4.2.3. Indipendenza	26
2.4.2.4. Valore atteso	27
2.4.2.5. Covarianza	27
2.4.2.6. Varianza	27
2.4.3. Variabili aleatorie continue	27
2.4.3.1. Funzione densità di probabilità	27
2.4.3.2. Valore atteso	28
2.4.3.3. Varianza	28
2.4.3.4. Disuguaglianza di Markov	29
2.4.3.5. Disuguaglianza di Chebyshev	30
2.4.4. Modelli di distribuzione	31
2.4.4.1. Modello di Bernoulli $X \sim B(p)$	31
2.4.4.2. Modello binomiale $X \sim B(n, p)$	32
2.4.4.3. Modello uniforme discreto $X \sim U(n)$	33
2.4.4.4. Modello uniforme continuo $X \sim U(a, b)$	35
2.4.4.5. Modello geometrico $X \sim G(p)$	37
2.4.4.6. Modello di Poisson $X \sim P(\lambda)$	40
2.4.4.7. Modello ipergeometrico $X \sim H(n, M, N)$	42
3. Statistica inferenziale	45
4. Cheatsheet Python	45
5. Cheatsheet integrali	45

1. Statistica descrittiva

Popolazione insieme di elementi da analizzare, spesso troppo numerosa per essere analizzata tutta

Campione parte della popolazione estratta per essere analizzata, deve essere rappresentativo

Campione casuale (semplice) tutti i membri della popolazione hanno la stessa possibilità di essere selezionati

1.1. Classificazione dei dati: qualitativi e quantitativi

Dati quantitativi / Scalari / Numerici l'esito della misurazione è una quantità numerica

Discreti si lavora su valori singoli (spesso interi), ad esempio: *numeri di figli*

Continui si lavora su range di intervalli, ad esempio: *peso* o *altezza*

Dati qualitativi / Categorici / Nominali l'esito della misurazione è un'etichetta

Booleani / Binari due valori possibili, ad esempio: *sex*

Nominali / Sconnessi valori **non** ordinabili, ad esempio: *nome*

Ordinali valori ordinabili, ad esempio: *livello di soddisfazione*

i Nota

Spesso alcuni dati *numerici* vengono considerati *qualitativi*, dato che non ha senso effettuare su di essi considerazioni algebriche o numeriche. Un esempio potrebbe essere la data di nascita.

1.2. Frequenze

1.2.1. Frequenze assolute e relative

1.2.2. Frequenze cumulate

1.2.2.1. Funzione cumulativa empirica

1.2.3. Frequenze congiunte e marginali

1.2.4. Stratificazione

1.3. Grafici

1.4. Indici di centralità

Sono indici che danno un'idea approssimata dell'ordine di grandezza (quindi dove ricadono) dei valori esistenti.

1.4.1. Media campionaria

Viene indicata da \bar{x} , ed è la **media aritmetica** di tutte le osservazioni del campione.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

La media opera linearmente, quindi può essere scalata ($\cdot a$) e/o traslata ($+b$):

$$\forall i \ y_i = ax_i + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$$

Non è un stimatore robusto rispetto agli outlier. Può essere calcolata solo con dati quantitativi.

1.4.2. Mediana campionaria

È il valore a **metà** di un dataset ordinato in ordine crescente, ovvero un valore \geq e \leq di almeno la metà dei dati.

Dato un dataset di dimensione n la mediana è:

- l'elemento in posizione $\frac{n+1}{2}$ se n è dispari
- la media aritmetica tra gli elementi in posizione $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ se n è pari

È robusta rispetto agli outlier ma può essere calcolata solo su *campioni ordinabili*.

1.4.3. Moda campionaria

È l'osservazione che compare con la maggior frequenza. Se più di un valore compare con la stessa frequenza allora tutti quei valori sono detti modali.

1.5. Indici di dispersione

Sono indici che misurano quanto i valori del campione si discostano da un valore centrale.

1.5.1. Scarto assoluto medio

Per ogni osservazione, lo scarto è la distanza dalla media: $x_i - \bar{x}$. La somma di tutti gli scarti farà sempre 0.

$$\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

1.5.2. Varianza campionaria

Misura di quanto i valori si discostano dalla media campionaria

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Metodo alternativo per calcolare la varianza:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - n\bar{x}^2)$$

Nota

Verrebbe intuitivo applicare il *valore assoluto* ad ogni scarto medio, ma questo causa dei problemi. Per questo motivo la differenza viene elevata al *quadrato*, in modo da renderla sempre positiva.

La varianza *non* è un operatore lineare: la traslazione non ha effetto mentre la scalatura si comporta:

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

1.5.2.1. Varianza campionaria standard

È possibile applicare alla varianza campionaria la radice quadrata, ottenendo la varianza campionaria standard.

$$s = \sqrt{s^2}$$

Attenzione

Applicando la radice quadrata solo dopo l'elevamento a potenza, non abbiamo reintrodotta il problema dei valori negativi: $\sqrt{a^2} \neq (\sqrt{a})^2 = a$

1.5.3. Coefficiente di variazione

Valore **adimensionale**, utile per confrontare misure di fenomeni con unità di misura differenti.

$$s^* = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

i Nota

Sia la varianza campionaria standard che la media campionaria sono dimensionali, ovvero hanno unità di misura. Dividendoli tra loro otteniamo un valore adimensionale.

1.5.4. Quantile

Il quantile di ordine α (con α un numero reale nell'intervallo $[0, 1]$) è un valore q_α che divide la popolazione in due parti, proporzionali in numero di elementi ad α e $(1-\alpha)$ e caratterizzate da valori rispettivamente minori e maggiori di q_α .

Percentile quantile descritto in percentuale

Decile popolazione divisa in 10 parti con ugual numero di elementi

Quartile popolazione divisa in 4 parti con ugual numero di elementi

i Nota

È possibile visualizzare un campione attraverso un **box plot**, partendo dal basso composto da:

- eventuali *outliers*, rappresentati con le x prima del baffo
- il *baffo* “inferiore”, che parte dal valore minimo e raggiunge il primo quartile
- il *box* (scatola), che rappresenta le osservazioni comprese tra il primo e il terzo quartile
- la linea che divide in due il box, che rappresenta la *mediana*
- il *baffo* “superiore”, che parte terzo quartile e raggiunge il massimo
- eventuali *outliers* “superiori”, rappresentati con le x dopo il baffo

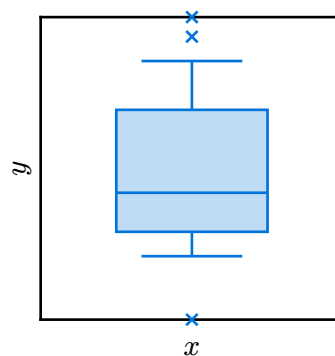


Figure 1: Grafico boxplot

1.6. Indici di correlazione

Campione bivariato campione formato da coppie $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

Correlazione relazione tra due variabili tale che a ciascun valore della prima corrisponda un valore della seconda seguendo una certa regolarità.

1.6.1. Covarianza campionaria

È un valore numerico che fornisce una misura di quanto le due variabili varino assieme. Dato un campione bivariato definiamo la **covarianza campionaria** come:

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Metodo alternativo di calcolo:

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})$$

💡 Informalmente

Intuitivamente c'è una **correlazione diretta** se al crescere di x cresce anche y o al decrescere di x decresce anche y , dato che il contributo del loro prodotto alla sommatoria sarà positivo. Quindi se x e y hanno segno concorde allora la correlazione sarà *diretta*, altrimenti *indiretta*.

- $\text{Cov}(x, y) > 0$ probabile correlazione diretta
- $\text{Cov}(x, y) \simeq 0$ correlazione improbabile
- $\text{Cov}(x, y) < 0$ probabile correlazione indiretta

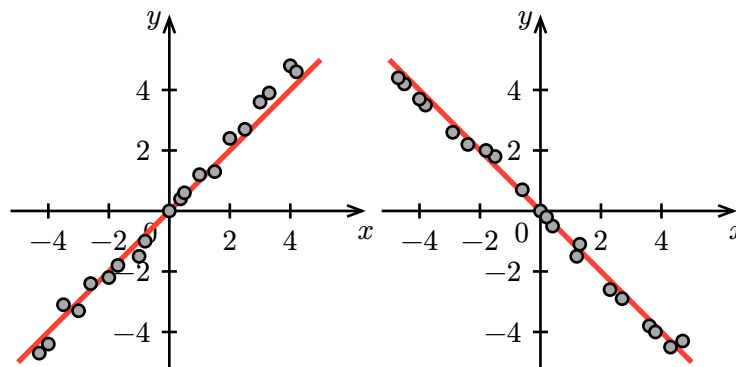


Figure 2: Correlazione lineare *diretta* (sinistra) e *indiretta* (destra)

i Nota

Una relazione diretta/indiretta non è necessariamente *lineare*, può essere anche *logaritmica* o seguire altre forme.

1.6.2. Indice di correlazione di Pearson (indice di correlazione lineare)

Utilizziamo l'indice di correlazione di Pearson per avere un valore *adimensionale* che esprime una correlazione. Possiamo definirlo anche come una misura normalizzata della covarianza nell'intervallo $[-1, +1]$. ρ è **insensibile** alle trasformazioni lineari.

$$\rho(x, y) = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

Dove s è la varianza campionaria standard.

- $\rho \simeq +1$ probabile correlazione linearmente diretta
- $\rho \simeq 0$ correlazione improbabile
- $\rho \simeq -1$ probabile correlazione linearmente indiretta

⚠️ Attenzione

L'indice di correlazione lineare (ρ) cattura **solo** relazioni dirette/indirette *lineari* ed è insensibile alle trasformazioni lineari.

! Attenzione

La covarianza campionaria o l'indice di correlazione lineare $\simeq 0$ non implicano l'indipendenza del campione, ma è vero il contrario:

$$\text{Cov}(x, y) \simeq 0 \not\Rightarrow \text{Indipendenza}$$

$$\rho(x, y) \simeq 0 \not\Rightarrow \text{Indipendenza}$$

$$\text{Indipendenza} \Rightarrow \rho(x, y) \simeq \text{Cov}(x, y) \simeq 0$$

1.7. Indici di eterogeneità

Massima eterogeneità il campione è composto da tutti elementi diversi

Minima eterogeneità il campione non contiene due elementi uguali (*campione omogeneo*)

L'eterogeneità può essere calcolata anche su un insieme di dati qualitativi.

1.7.1. Indice di Gini (per l'eterogeneità)

$$I = 1 - \sum_{j=1}^n f_j^2$$

Dove f_j è la frequenza relativa di j ed n è il numero di elementi distinti. Quindi $\forall j, 0 \leq f_j \leq 1$. Prendiamo in considerazione i due estremi:

- eterogeneità *minima* (solo un valore con frequenza relativa 1):

$$I = 1 - 1 = 0$$

- eterogeneità *massima* (tutti i valori hanno la stessa frequenza relativa $\frac{1}{n}$ dove n è la dimensione del campione):

$$I = 1 - \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{n}{n^2} = \frac{n-1}{n}$$

Generalizzando, I non raggiungerà mai 1:

$$0 \leq I \leq \frac{n-1}{n} < 1$$

Dal momento che l'indice di Gini tende a 1 senza mai arrivarci introduciamo l'**indice di Gini normalizzato**, in modo da arrivare a 1 nel caso di eterogeneità massima:

$$I' = \frac{n}{n-1} I$$

1.7.2. Entropia

$$H = \sum_{j=1}^n f_j \log\left(\frac{1}{f_j}\right) = \sum_{j=1}^n -f_j \log(f_j)$$

Dove f_j è la frequenza relativa e n è il numero di elementi distinti. L'entropia assume valori nel range $[0, \log(n)]$ quindi utilizziamo l'**entropia normalizzata** per confrontare due misurazioni con diverso numero di elementi distinti n .

$$H' = \frac{1}{\log(n)} H$$

Nota

In base alla base del logaritmo utilizzata, l'entropia avrà unità di misura differente:

- \log_2 : bit
- \log_e : nat
- \log_{10} : hartley

Informalmente

Intuitivamente sia l'indice di Gini che l'entropia sono una “*media pesata*” tra la frequenza relativa di ogni elemento ed un peso: la *frequenza stessa* nel caso di Gini e il *logaritmo del reciproco* nell'entropia. La frequenza relativa è già nel range $[0, 1]$, quindi non c'è bisogno di dividere per il numero di elementi.

1.8. Indici di concentrazione

Un indice di concentrazione è un indice statistico che misura in che modo un *bene* è distribuito nella *popolazione*.

Distribuzione del bene a_1, a_2, \dots, a_n indica la quantità ordinata in modo **non decrescente**, del bene posseduta dall'individuo i

Media \bar{a} indica la quantità media posseduta da un individuo

Totale $TOT = n\bar{a}$ indica il totale del bene posseduto

- Concentrazione **massima (sperequato)**: un individuo possiede tutta la quantità $a_{1..n-1} = 0, a_n = n\bar{a}$
- Concentrazione **minima (equo)**: tutti gli individui possiedono la stessa quantità $a_{1..n} = \bar{a}$

1.8.1. Curva di Lorentz

La curva di Lorenz è una rappresentazione **grafica** della *distribuzione* di un bene nella popolazione.

Dati:

- $F_i = \frac{i}{n}$: posizione percentuale dell'osservazione i nell'insieme
- $Q_i = \frac{1}{TOT} \sum_{k=1}^i a_k$

La tupla (F_i, Q_i) indica che il $100 \cdot F_i\%$ degli individui detiene il $100 \cdot Q_i\%$ della quantità totale.

Inoltre: $\forall i, 0 \leq Q_i \leq F_i \leq 1$.

Informalmente

Possiamo vedere F_i come “*quanta*” popolazione è stata analizzata fino all'osservazione i , espressa nel range $[0, 1]$. Q_i è invece una “frequenza cumulata” della ricchezza, fino all'osservazione i .

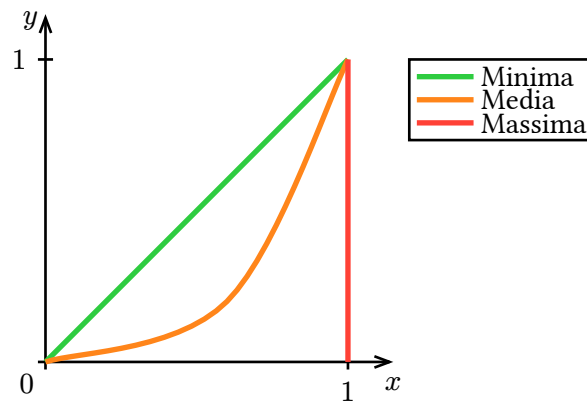


Figure 3: Curva di Lorenz

1.8.2. Indice di Gini (per la concentrazione)

Dato che la curva di Lorenz non assume mai alcun valore nella parte di piano superiore alla retta che collega $(0, 0)$ a $(1, 1)$, allora introduciamo l'**indice di Gini**, che invece assume valori nel range $[0, 1]$.

Anche esso indica la *concentrazione* di un bene nella popolazione.

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} F_i - Q_i}{\sum_{i=1}^{n-1} F_i}$$

È possibile riscrivere il denominatore come:

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{n} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Ottendendo come formula alternativa:

$$G = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} F_i - Q_i$$



Informalmente

Facendo un parallelo con la curva di Lorenz, possiamo vedere $F_i - Q_i$ come la distanza tra la bisettrice (F_i) e la ricchezza dell'osservazione i (Q_i). La somma di queste distanze viene poi "normalizzata", dividendo per $\frac{n-1}{2}$.

1.8.3. Analisi della varianza (ANOVA)

Dato un campione, è possibile suddividerlo in più *gruppi* ed effettuare delle analisi sulle *diversità* tra i vari gruppi. Ad esempio, dato un campione di dati sulla natalità, si potrebbe analizzare formando gruppi per regione o per reddito.

L'analisi della varianza (**ANOVA** - ANalysis Of VAriance) è un insieme di tecniche statistiche che permettono, appunto, di confrontare due o più *gruppi* di dati. Definiamo a questo scopo:

Numerosità dei gruppi dato un campione diviso in G gruppi, ognuno ha numerosità n_1, \dots, n_G

Osservazione viene definita x_i^g come l' i -esima osservazione del g -esimo gruppo

Media campionaria di tutte le osservazioni la media del campione

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^{n_g} x_i^g$$

Media campionaria di un gruppo la media dei valori del gruppo

$$\bar{x}_g = \frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} x_i^g$$

Somme degli scarti

- Somma **totale** degli scarti (tra ogni elemento e la media di tutto il campione):

$$SS_T = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^{n_g} (x_i^g - \bar{x})^2$$

- Somma degli scarti **entro/within** i gruppi (tra ogni elemento e la media del proprio gruppo):

$$SS_W = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^{n_g} (x_i^g - \bar{x}_g)^2$$

- Somma degli scarti **tra/between** i gruppi (tra la media di ogni gruppo e la media del campione, “pesato” per la numerosità del gruppo):

$$SS_B = \sum_{g=1}^G n_g (\bar{x}_g - \bar{x})^2$$

Vale la seguente regola: $SS_T = SS_W + SS_B$.

Indici di variazione

- **Total** (la varianza totale del campione):

$$\frac{SS_T}{n-1}$$

- **Within** (la varianza di ogni elemento del gruppo):

$$\frac{SS_W}{n-G}$$

- **Between** (la varianza tra ogni gruppo e il campione completo):

$$\frac{SS_B}{G-1}$$

L'ipotesi alla base è che dati G gruppi, sia possibile scomporre la varianza in due componenti: *Varianza interna ai gruppi* (varianza **Within**) e *Varianza tra i gruppi* (varianza **Between**).



Informalmente

Analizzando diversi gruppi attraverso l'ANOVA, si possono raggiungere due conclusioni:

- i gruppi risultano significativamente **diversi** tra loro: la *varianza between* contribuisce più significativamente alla varianza totale (il fenomeno è legato a caratteristiche proprie di ciascun gruppo)
- i gruppi risultano **omogenei**: la *varianza within* contribuisce più significativamente alla varianza totale (il fenomeno è legato a caratteristiche proprie di tutti i gruppi)

```
import numpy as np

def anova(groups):
    all_elements = pd.concat(groups)
    sum_total = sum((all_elements - all_elements.mean())**2)
    sum_within = sum([sum((g - g.mean())**2) for g in groups])
    sum_between = sum([len(g) * (g.mean() - all_elements.mean())**2 for g in groups])
    assert(np.abs(sum_total - sum_within - sum_between) < 10**-5)
    n = len(all_elements)
    total_var = sum_total / (n-1)
    within_var = sum_within / (n-len(groups))
    return (total_var, within_var*(n-len(groups))/(n-1))
```

Python

1.9. Alberi di decisione

1.10. Classificatori

Dato un *classificatore binario* che divide in due classi (positiva e negativa) e un *insieme di oggetti* di cui è **nota** la classificazione, possiamo valutare la sua bontà tramite il numero di casi classificati in modo errato. La classificazione errata può essere:

- **Falso negativo:** oggetto *positivo* classificato come *negativo*
- **Falso positivo:** oggetto *negativo* classificato come *positivo*

i Nota

Il peso di un falso positivo può **non** essere lo stesso di un falso negativo, si pensi al caso di una malattia contagiosa: un *falso negativo* sarà molto più pericoloso di un *falso positivo* (che verrà scoperto con ulteriori analisi).

Introduciamo la **matrice di confusione**, che riassume la bontà del classificatore:

		Valore effettivo		
		Positivo	Negativi	
Predizione del classificatore	Positivo	Veri positivi (VP)	Falsi positivi (FP)	<i>Totali classificati positivi (TOT CP)</i>
	Negativi	Falsi negativi (FN)	Veri negativi (VN)	<i>Totali classificati negativi (TOT CN)</i>
		<i>Totale positivi (TP)</i>	<i>Totale negativi (TN)</i>	<i>Totale casi (TOT casi)</i>

Table 1: Matrice di confusione

```
pd.DataFrame(metrics.confusion_matrix(Y_test, preds))
```

Python

Sensibilità capacità del classificatore di predire bene i positivi $\frac{VP}{TP}$
Specificità capacità del classificatore di predire bene i negativi $\frac{VN}{TN}$

È possibile valutare la bontà di un classificatore attraverso il punto:

$$(1 - \text{Specificità}, \text{Sensibilità}) = \left(1 - \frac{VN}{TN}, \frac{VP}{TP}\right) = \left(\frac{FP}{TN}, \frac{VP}{TP}\right)$$

1.10.1. Casi particolari

Classificatore costante associa indiscriminatamente gli oggetti ad una classe (positiva o negativa)

Classificatori positivi (CP) tutti i casi sono classificati come positivi

- Sensibilità: 1, Specificità: 0, Punto (1, 1) ●

Classificatori negativi (CN) tutti i casi sono classificati come negativi

- Sensibilità: 0, Specificità: 1, Punto (0, 0) ●

Classificatore ideale (CI) tutti i casi sono classificati correttamente

- Sensibilità: 1, Specificità: 1, Punto (0, 1) ●

Classificatore peggiore (CE) tutti i casi sono classificati erroneamente

- Sensibilità: 0, Specificità: 0, Punto (1, 0) ●

Classificatore casuale ogni caso viene assegnato in modo casuale

- Sensibilità: 0.5, Specificità: 0.5, Punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ●

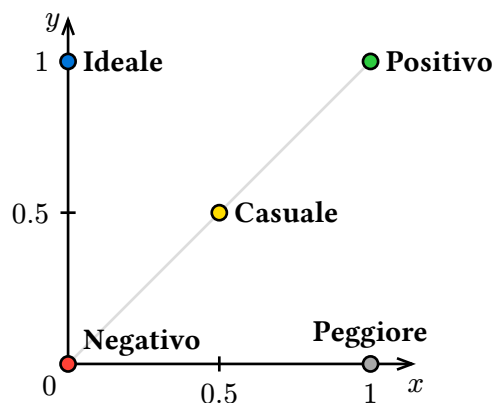


Figure 4: Rappresentazione classificatori

1.10.2. Classificatori a soglia (Curva ROC)

Un classificatore a soglia discrimina un caso in base ad una **soglia** stabilita a priori, in caso la misurazione sia *superiore* alla soglia allora verrà classificato *positivamente*, altrimenti *negativamente*.

Per trovare il valore con cui *fissare* la soglia, possiamo sfruttare questo metodo:

- definiamo θ come una generica soglia
- è necessario stabilire un intervallo $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$
 - utilizzando θ_{\min} tutti i casi saranno positivi, ottenendo un classificatore positivo ●
 - utilizzando θ_{\max} tutti i casi saranno negativi, ottenendo un classificatore negativo ●
- definiamo D come una discretizzazione di questo intervallo continuo

Per ogni soglia $\theta \in D$ è possibile calcolare la *sensibilità* e *specificità*. Questo classificatore viene quindi *rappresentato* sul piano cartesiano attraverso il punto $(1 - \text{Specificità}, \text{Sensibilità})$.

Il risultato è una **curva**, detta **ROC** (Receiver Operator Characteristic) —, che ha sempre come estremi in $(0, 0)$ (caso in cui viene usato θ_{\max}) e $(1, 1)$ (caso in cui viene usato θ_{\min}).

Per misurare la *bontà* del classificatore viene misurata l'area di piano sotto la curva (**AUC** - Area Under the ROC Curve ■■■), più si avvicina a 1, *migliore* è il classificatore.

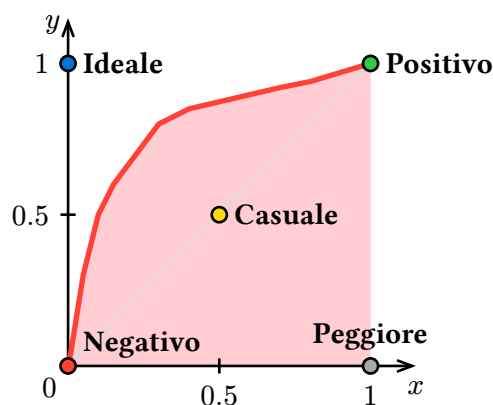


Figure 5: Curva ROC

1.11. Trasformazione dei dati

1.12. Grafici

2. Calcolo delle probabilità

2.1. Calcolo combinatorio

Analizzare *come* e in *quanti* modi si possono effettuare raggruppamenti di elementi.

Principio di enumerazione (principio fondamentale del calcolo combinatorio) se dobbiamo compiere t esperimenti e per ognuno di essi ci possono essere s_i possibili risultati, il numero di risultati totali è $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_t$



Informalmente

Vogliamo selezionare k elementi da un insieme A di n elementi:

Disposizioni l'ordine è importante $(a, b) \neq (b, a)$

Combinazioni l'ordine *non* è importante $(a, b) = (b, a)$

Permutazioni tutti gli elementi vengono disposti $k = n$

È possibile sia *avere* che *non avere* delle **ripetizioni** in tutti i casi.

2.1.1. Disposizioni

Dato un insieme di n oggetti distinti $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, vogliamo selezionare k oggetti (con $k \leq n$), tenendo in considerazione l'**ordine**.

Disposizione senza ripetizioni (semplici) gli oggetti di A possono essere usati una volta sola

$$d_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizione con ripetizione gli oggetti di A possono essere usati più di una volta

$$D_{n,k} = n^k$$

2.1.2. Combinazioni

Dato un insieme di n oggetti distinti $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, vogliamo selezionare k oggetti (con $k \leq n$), **senza** considerare l'ordine.

i Nota

Il numero di combinazioni $c_{n,k}$ è sempre minore del numero di disposizioni $d_{n,k}$, dato che l'ordine non conta.

Combinazione senza ripetizioni (semplici) gli oggetti di A possono essere usati una volta sola

$$c_{n,k} = \frac{d_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

i Nota

$\binom{n}{k}$ viene detto **coefficiente binomiale**

Combinazione con ripetizioni gli oggetti di A possono venir usati più di una volta

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

2.1.3. Permutazioni

Dato un insieme di n oggetti $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, una **permutazione** è una sequenza *ordinata* in cui compaiono *tutti* gli oggetti (quindi vogliamo selezionare k elementi).

Permutazioni semplici (senza ripetizioni) l'insieme A non contiene elementi duplicati

$$P_n = n!$$

Permutazioni di oggetti distinguibili a gruppi (con ripetizioni) l'insieme A contiene k gruppi di oggetti indistinguibili, ognuno con numerosità n_1, \dots, n_k (con $\sum_{i=1}^k n_i = n$), allora dobbiamo disporre tutti questi elementi

$$P_{n:n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!} = \binom{n}{(n_1, \dots, n_k)}$$

i Nota

$\binom{n}{(n_1, \dots, n_k)}$ viene detto **coefficiente multinomiale**

2.2. Elementi di probabilità

Esito $\omega \in \Omega$ risultato effettivo di un esperimento

Evento $E \subseteq \Omega$ è un qualsiasi insieme formato da tutti, alcuni o nessuno dei possibili esiti di un esperimento

Probabilità quantificazione dell'incertezza di un evento

Spazio campionario Ω (**insieme degli esiti o insieme universo**) è l'insieme di tutti gli esiti possibili. Può essere *finito* o *infinito*, *continuo* o *discreto*

Informalmente

Esempio: lanciando un dado, l'*esito* è il numero risultante, un *evento* può essere “esce 3 o 6” e la *probabilità* di questo evento è $\frac{2}{6}$.

Evento certo $E = \Omega$ si verifica sempre

Evento impossibile $E = \emptyset$ non si verifica mai

i Nota

Indichiamo sempre con una *minuscola* un *esito*, mentre con una *maiuscola* un *evento*.

Dati degli eventi, è possibile applicare le operazioni e proprietà degli insiemi su di essi:

Unione $E \cup F$ quando si verifica l'evento E o l'evento F

Intersezione $E \cap F$ quando si verificano entrambi gli eventi E ed F

Mutualmente esclusivi $E \cap F = \emptyset$ i due eventi sono *mutualmente esclusivi*

Differenza $E - F$ si verifica l'evento E , ma l'evento F non si verifica (l'operazione di sottrazione non è commutativa, $E - F \neq F - E$)

Complemento $\Omega - E = E^c = \overline{E}$ quando l'evento E non si verifica

Sottoinsieme $E \subseteq F = E \rightarrow F$ quando si verifica E , allora si verifica anche F

Proprietà per unione e intersezione

Commutatività $E \cup F = F \cup E$

Associatività $(D \cup E) \cup F = D \cup (E \cup F)$

Distributività $D \cup (E \cap F) = (D \cup E) \cap (D \cup F)$

De Morgan $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F}$: l'evento che si verifica quando non si verifica E o F è lo stesso evento che si verifica quando non si verifica E e non si verifica F

È possibile dare diverse *interpretazioni* alla probabilità:

Approccio soggettivista la probabilità di un esito non è oggettiva: è il livello di *fiducia* che un soggetto (*lo studioso*) ripone nel verificarsi di un evento

Approccio frequentista la probabilità di un esito è una *proprietà* dell'esito stesso: viene calcolata come il rapporto tra il numero di casi *favorevoli* e il numero di casi *possibili* ripetendo l'esperimento un numero di volte tendente all'infinito

2.2.1. Algebra di eventi

Un algebra di eventi A è un insieme di eventi $\{E_1, E_2, \dots\}$ a cui sono associate delle operazioni che soddisfa le proprietà:

- $\forall E \in A, E \subseteq \Omega$: ogni evento appartenente all'*algebra* A appartiene all'insieme di tutti gli *eventi possibili* Ω
- $\Omega \in A$: l'insieme di tutti gli *eventi possibili* Ω appartiene all'*algebra* A
- $\forall E \in A, \overline{E} \in A$: chiusura rispetto al *complemento*
- $\forall E, F \in A, E \cup F \in A$: chiusa rispetto all'*unione*
- $\forall E, F \in A, E \cap F \in A$: chiusura rispetto all'*intersezione*

i Nota

La chiusura rispetto all'*intersezione* non è una vera proprietà, ma deriva dalla chiusura rispetto all'*unione* a cui viene applicata la *legge di De Morgan*

i Nota

Se la chiusura sull'*unione* vale anche per $|\Omega| = \infty$, allora \mathcal{A} viene chiamata σ -algebra

💡 Informalmente

L'algebra degli eventi non è un *vero* insieme di eventi, ma è un “*dizionario*” che sfruttiamo per definire quali *operazioni* e *variabili* sono ammesse su un Ω

2.2.2. Assiomi di Kolmogorov

Definiamo la funzione **probabilità** $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, che stabilisce la probabilità che un evento avvenga.

$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ è una funzione di probabilità se e solo se:

1. $\forall E \in \mathcal{A}, 0 \leq P(E) \leq 1$: la frequenza è sempre *positiva* e compresa tra 0 e 1
2. $P(\Omega) = 1$: un evento che si verifica tutte le n volte: $\frac{n}{n} = 1$
3. $\forall E, F \in \mathcal{A}, (E \cap F) = \emptyset \Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

i Nota

La probabilità che accadano diversi eventi *distinti* E_i, E_j e *disgiunti* $E_i \cap E_j = \emptyset$ è la *somma* delle loro probabilità:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

i Nota

Formalmente la funzione probabilità è definita $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (numeri *reali positivi*), applicando gli assiomi il *codominio* viene ristretto a $[0, 1]$.

In modo analogo, il *primo assioma* stabilisce che il risultato dell'applicazione della funzione debba essere *positiva*, senza imporre un *limite superiore*, che poi viene aggiunto dal *secondo assioma*

2.2.3. Teoremi derivati dagli assiomi**Probabilità del complemento**

$$\forall E \in \mathcal{A}, P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Probabilità dell'evento impossibile

$$P(\emptyset) = 0$$

Proprietà di monotonicità

$$\forall E, F \in \mathcal{A} \mid E \subseteq F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$$

Probabilità dell'unione di eventi

$$\forall E, F \in A, P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

2.2.4. Spazi di probabilità ed Esiti equiprobabili

Definiamo lo **spazio di probabilità** come la tripla (Ω, A, P) composta dallo spazio di *esiti possibili* Ω , l'*algebra* A e la *funzione probabilità* P .

Spazio equiprobabile uno spazio è *equiprobabile* se gli eventi elementari (gli elementi Ω) hanno tutti la stessa probabilità:

$$P(E) = \frac{1}{N} \quad P(\{E_1, \dots, E_k\}) = \frac{k}{N}$$

Si dimostra con il secondo assioma di *Kolmogorov*:

$$P(\Omega) = 1 = P(\{e_1\}) + \dots + P(\{e_N\}) = \sum_{i=1}^N P(\{e_i\})$$

Nota

Uno spazio può essere *equiprobabile* solo se Ω è un *insieme finito*

2.3. Probabilità condizionata

Dati due eventi E, F , la probabilità che si verifichi l'evento E sapendo che *si è verificato* l'evento F è detta **probabilità condizionata**:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Nota

- $P(E|F)$ si legge “*probabilità di E dato F*”
- E si dice evento *condizionato*
- F si dice evento *condizionante*

Attenzione

In caso $P(F) = 0$, ovvero $F = \emptyset$, allora $P(E|F) = \text{indefinita}$

Informalmente

Intuitivamente $P(E|F)$ è la probabilità che preso un punto qualsiasi all'interno di F , il punto appartenga a $E \cap F$, quindi $\frac{E \cap F}{F}$

2.3.1. Regola di fattorizzazione

Dati due eventi $E, F \in \Omega$, la probabilità che accadano *entrambi* (la loro intersezione) è data dalla regola di *fattorizzazione*:

$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E|F)$$

**Informalmente**

A differenza di una possibilità condizionata “semplice”, *non sappiamo* se F si sia già verificato o meno, quindi dobbiamo considerare anche la *sua possibilità* oltre a quella condizionata di E

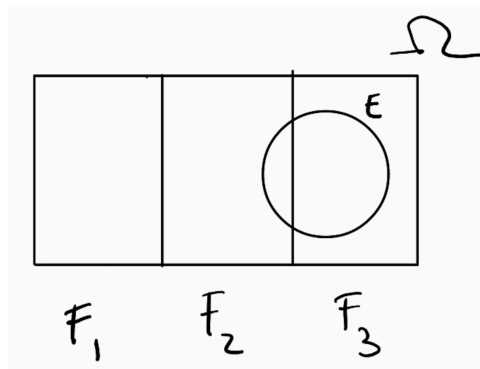
2.3.2. Teorema delle probabilità totali

Dato Ω partizionato in F_1, \dots, F_n partizioni disgiunte, la probabilità che accada un evento $E \in \Omega$ è:

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(F_i) \cdot P(E|F_i)$$

**Nota**

Insieme A partizionato: $\bigcup_{i=1}^n F_i = A$ con $\forall i, j, i \neq j, F_i \cap F_j = \emptyset$. L'unione di tutte le partizioni è uguale all'insieme iniziale e tutte le partizioni sono *disgiunte*

Figure 6: Probabilità di E :

$$\begin{aligned} P(E) &= (P(F_1) \cdot P(E|F_1)) + (P(F_2) \cdot P(E|F_2)) + (P(F_3) \cdot P(E|F_3)) \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 0\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

È possibile esprimere E come:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F}) \\ &= P(E | F)P(F) + P(E | \bar{F})P(\bar{F}) \\ &= P(E | F)P(F) + P(E | \bar{F})P(1 - P(F)) \end{aligned}$$

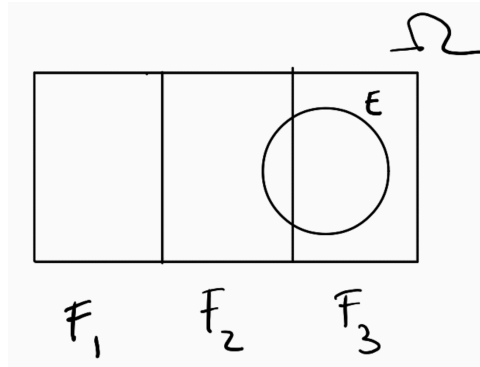
Altre trasformazioni utili:

$$\begin{aligned} (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F}) &= E \cap (F \cup \bar{F}) = E \cap \Omega = E \\ (E \cap F) \cap (E \cap \bar{F}) &= E \cap (F \cap \bar{F}) = E \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

2.3.3. Teorema di Bayes

Dato Ω partizionato in F_1, \dots, F_n partizioni disgiunte, e un evento E , la probabilità che accada una certa $F_k \subseteq \Omega$ è:

$$\begin{aligned}
 P(F_k | E) &= \frac{P(E | F_k)P(F_k)}{P(E)} \\
 &= \frac{P(E | F_k)P(F_k)}{\sum_{i=1}^n P(E | F_i)P(F_i)}
 \end{aligned}$$

Figure 7: Probabilità di F_2 :

$$\begin{aligned}
 P(F_2) &= P(E|F_2) \cdot \frac{P(F_2)}{P(E)} \\
 &= \frac{\frac{P(E \cap F_2)}{P(F_2)} P(F_2)}{(P(F_1) \cdot P(E|F_1)) + (P(F_2) \cdot P(E|F_2)) + (P(F_3) \cdot P(E|F_3))} \\
 &= \frac{\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

2.3.4. Classificatore naive-Bayes

Possiamo generalizzare il *teorema di Bayer* per ricavarne un **classificatore**: date delle *caratteristiche* X_1, \dots, X_n che assumono valore x_1, \dots, x_n , vogliamo assegnare l'oggetto y_k alla *classe* che massimizza la probabilità:

$$P(Y = y_k | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Applicando il teorema di Bayes:

$$= \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | Y = y_k) \cdot P(Y = y_k)}{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}$$

La formula viene semplificata in modo “ingenuo” (*naive*), assumendo che le caratteristiche siano eventi indipendenti $P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2 | Y) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2)$:

$$\begin{aligned}
 &P(Y = y_k) \cdot \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i | Y = y_k) \\
 &= \frac{\quad}{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}
 \end{aligned}$$



Informalmente

Questa *assunzione* è, appunto, *ingenua*: ad esempio, una persona con i capelli chiari è *più probabile* che abbia anche gli occhi chiari rispetto ad una persona con i capelli scuri. Le due caratteristiche *non* sono *indipendenti*.

Come capire *formalmente* se due eventi (o più) eventi sono *indipendenti* è descritto nel [paragrafo successivo](#).

Per trovare la classe alla quale *assegnare* l'oggetto, bisogna calcolare la probabilità per ogni possibile y_k e trovare il massimo:

$$= \arg \max_k P(Y = y_k) \cdot \prod_i^n P(X_i = x_i \mid Y = y_k)$$

i Nota

Dato che ci interessa solo y_k massimo e il *denominatore* non dipende da k , allora possiamo *ignorarlo* dato che non influenzerà la scelta del massimo

2.3.5. Eventi indipendenti

Quando il verificarsi di un evento F *non influenza* la probabilità del verificarsi di un altro evento E , allora gli eventi si dicono **indipendenti**:

$$P(E \mid F) = P(E)$$

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

i Nota

Sfruttando le formule viste in precedenza, è possibile verificare che i conti tornino:

$$P(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E) \cdot \cancel{P(F)}}{\cancel{P(F)}} = P(E)$$

Informalmente

È molto difficile rappresentare *graficamente* attraverso *diagrammi di Venn* eventi indipendenti, meglio non farlo :)

Proprietà

- Se E è indipendente da F , F è indipendente da E
- Se E e F sono indipendenti, allora anche E e \overline{F} sono indipendenti

2.3.6. Indipendenza a tre o più eventi

Tre eventi E, F, G sono *indipendenti* se valgono le proprietà:

- $P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F) \cdot P(G)$
- $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$
- $P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G)$
- $P(E \cap G) = P(E) \cdot P(G)$

È possibile *estendere* la definizione ad un numero *arbitrario* di eventi:

Gli eventi E_1, \dots, E_n si dicono indipendenti se per ogni loro sottogruppo E_{a_1}, \dots, E_{a_r} con $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq n$ vale l'equazione:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^r E_{a_i}\right) = \prod_{i=1}^r P(E_{a_i})$$

2.4. Variabili aleatorie

Una *variabile aleatoria* o *casuale* (random variable) è una variabile che assume un valore *diverso* ogni osservazione. Permettono di codificare gli *eventi* in termini di numeri reali.

Dato uno spazio di probabilità (Ω, A, P) , una variabile aleatoria è $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni esito un *numero reale*.

⚠ Attenzione

Non tutte le funzioni definite come $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rappresentano una *variabile aleatoria*

Specificazioni valori che possono essere assunti da una variabile aleatoria

Supporto l'insieme delle *specificazioni*, dove la probabilità non sia nulla $P(X = x_i) \neq 0$

i Nota

È possibile calcolare il *supporto* di una variabile aleatoria **discreta** calcolando l'insieme di punti in cui la funzione di massa non assuma valore nullo

2.4.1. Variabili aleatorie discrete

Una variabile aleatoria si dice discreta se il suo supporto è finito e numerabile (ovvero ha un numero finito di valori possibili). Dato $[m, n]$ il range di valori che possono essere assunti dalla variabile X , vale:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=m}^n \{X = i\}\right) = \sum_{i=m}^n P(X = i)$$

2.4.1.1. Funzione indicatrice

Dati A, B due insiemi tali che $A \subseteq B$, la funzione indicatrice di A rispetto a B è la funzione $I : B \rightarrow \{0, 1\}$ che vale:

$$I_{A(x)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

💡 Informalmente

La *funzione indicatrice* agisce da *filtro*, “limitando il dominio”. Quando viene *moltiplicata* con una probabilità la *annulla* o la *lascia inalterata*.

Ad esempio, la probabilità di un *dado* è: $P(X = x) = \frac{1}{6} \cdot I_{\{1, \dots, 6\}}(x)$, la funzione indicatrice *annulla* la probabilità di $\frac{1}{6}$ in caso x non sia nel “dominio” del dado ($1 \leq x \leq 6$)

2.4.1.2. Funzione di massa di probabilità

Data una variabile aleatoria discreta X con supporto D , la sua *funzione di massa di probabilità* $P_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è la funzione che associa ad ogni valore $x \in \mathbb{R}$ la probabilità che l'esito di X ne sia uguale:

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_X(x) = P(X = x) \cdot I_D(x)$$

! Attenzione

La funzione di massa di probabilità **NON** vale per le variabili aleatorie continue

Proprietà che la funzione di massa di probabilità deve *rispettare*:

- $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0$: non può essere negativa
- $\sum_{x \in D} f_X(x) = 1$: la somma della funzione di massa per tutti i valori che x può assumere deve fare 1

2.4.1.3. Funzione di ripartizione

Data una variabile aleatoria X , la sua *funzione di ripartizione* o *distribuzione cumulativa* $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è la funzione che associa ad ogni valore $x \in \mathbb{R}$ la probabilità che l'esito di X ne sia minore o uguale:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

! Attenzione

La funzione di ripartizione è *valida* sia per le variabili aleatorie discrete che per le variabili aleatorie continue

i Nota

È possibile calcolare la probabilità per un *valore maggiore* di una certa soglia sfruttando il complementare:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

i Nota

È possibile calcolare la probabilità per un valore *compreso* tra due estremi:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

La funzione di ripartizione può essere vista come la *somma* applicando alla *funzione di massa* tutti i valori minori uguali di un certo valore a :

$$F(a) = \sum_{x \leq a} p(x)$$

💡 Informalmente

Per una variabile aleatoria discreta, F è una *funzione a gradini*, costante tra gli intervalli dei valori assunti da X , che salta di $p(x)$ ad ogni nuovo valore

2.4.1.4. Valore atteso

Il *valore atteso* di una variabile aleatoria X è un *indice dimensionale* di centralità delle *specificazioni* della variabile aleatoria.

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$$



Informalmente

Il *valore atteso* è semplicemente la “*media pesata*” per ogni possibile valore nel *dominio* (specificazione) di una variabile aleatoria



Nota

Il valore atteso può essere indicato con E o con μ

Proprietà del valore atteso:

- il *valore atteso* di una funzione indicatrice è uguale alla *probabilità dell'evento*:

$$E[I_A] = P(A)$$

- il *valore atteso* di una variabile aleatoria discreta X opera in modo *lineare*:

$$Y = a \cdot X + b \quad E[Y] = a \cdot E[X] + b$$

- data una qualsiasi *funzione* reale g e una variabile aleatoria X con funzione di massa p , allora vale:

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p(x_i)$$

- data una qualsiasi *funzione* reale g di due variabili e due variabili aleatorie discrete X, Y , allora vale:

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot p(x, y)$$

2.4.1.5. Varianza

Sia X una variabile aleatoria di media μ , la *varianza* di X è:

$$\text{Var}(X) = G_X^2 = E[(X - \mu)^2]$$



Nota

Formula alternativa per la varianza:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\
&= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2 \\
&= \sum_i x_i^2 \cdot P(X = x_i) - \left(\sum_i x_i \cdot P(X = x_i) \right)^2
\end{aligned}$$

Proprietà varianza:

- la varianza della funzione indicatrice è la probabilità dell'*evento* moltiplicata per la probabilità dell'*evento complementare*

$$\text{Var}(I) = P(A) \cdot P(\overline{A})$$

- la varianza non opera in modo lineare:

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Deviazione standard $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$

2.4.2. Variabili aleatorie multivariate

Oltre alle variabili aleatorie **univariate**, è possibile utilizzare un *vettore* di lunghezza arbitraria, ottenendo una variabile aleatoria **multivariata**.

i Nota

Quando il vettore è lungo 2 elementi, la variabile aleatoria si dice **bivariata**

2.4.2.1. Funzione di ripartizione congiunta

Sia A una variabile aleatoria bivariata formata da X, Y variabili aleatorie *univariate discrete*, allora la loro *funzione di ripartizione congiunta* è:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

i Nota

La virgola dentro la probabilità denota l'intersezione:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

È possibile *estendere* a variabili aleatorie *multivariate* di dimensione arbitraria:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

i Nota

Si dice *funzione di ripartizione (o massa) marginale* quando da una *funzione di ripartizione (o massa) congiunta* estraggo una *funzione di ripartizione (o massa)* di una variabile **univariata**

Possiamo ottenere una $F_X(x)$ **funzione di ripartizione marginale** di X nel seguente caso:

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X \leq x) \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} P(Y \leq y) \\ &= P(X \leq x) \cdot \Omega \\ &= P(X \leq x) \\ &= F_X(x)\end{aligned}$$

2.4.2.2. Funzione di massa di probabilità congiunta

Siano X, Y due variabili aleatorie *univariate discrete*, allora la loro *funzione di massa di probabilità congiunta* $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è:

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

È possibile *estendere* a variabili aleatorie *multivariate* di dimensione arbitraria:

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Possiamo ottenere una $p_X(x)$ **funzione di massa di probabilità marginale** di X nel seguente caso:

$$\begin{aligned}\sum_{y_i \in D} p_{X,Y}(x, y) &= \sum_{y_i \in D} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \\ &= P\left(\{X = x\} \cap \bigcup_{y_i \in D} \{Y = y\}\right) \\ &= P(\{X = x\} \cdot \Omega) \\ &= P(\{X = x\}) \\ &= p_X(x)\end{aligned}$$

2.4.2.3. Indipendenza

Due variabili aleatorie X, Y si dicono **indipendenti** se $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$, $X \in A$ e $Y \in B$ sono indipendenti:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

$$P(X \leq A, Y \leq B) = P(X \leq A) \cdot P(Y \leq B)$$

$$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$F(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$$

i Nota

Questi risultati sono *dimostrabili* usando gli *assiomi delle probabilità*

È possibile *estendere* a variabili aleatorie *multivariate* di dimensione arbitraria:

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

2.4.2.4. Valore atteso

Il valore atteso della *somma* di variabili aleatorie discrete è:

$$E\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i E[X_i]$$

Il valore atteso del *prodotto* di variabili aleatorie discrete è:

$$E\left[\prod_i X_i\right] = \prod_i E[X_i]$$

2.4.2.5. Covarianza

Siano X e Y due variabili aleatorie di media μ_X e μ_Y , la loro *covarianza* è:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Nota

Formula alternativa:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= [XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y] \\ &= E[XY] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + \mu_X \mu_Y \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]\end{aligned}$$

Proprietà della covarianza:

- simmetria: $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- generalizzazione concetto di varianza: $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- linearità:
 - $\text{Cov}(aX, Y) = \text{Cov}(X, aY) = a \text{Cov}(X, Y)$
 - $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$

2.4.2.6. Varianza

Siano X e Y due variabili aleatorie la loro *varianza* della loro *somma* è:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

È possibile *estendere* a variabili aleatorie *multivariate* di dimensione arbitraria:

$$\text{Var}\left(\sum_i^n X_i\right) = \sum_i^n \text{Var}(X_i) + \sum_i^n \sum_{j, j \neq i}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$$

2.4.3. Variabili aleatorie continue

Una variabile aleatoria si dice **continua** quando ha un *supporto non numerabile*.

2.4.3.1. Funzione densità di probabilità



Informalmente

La funzione di massa (come spiegato sotto) non ha più senso per le *variabili aleatorie continue*, quindi lo stesso concetto prende il nome di *funzione densità di probabilità*

Siccome X deve per forza assumere un valore in \mathbb{R} , allora la *funzione di densità* ($f_X(x)$) deve rispettare:

$$P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

Per variabili aleatorie *continue* non ha senso cercare la probabilità assunta da un *singolo valore*, infatti:

$$P(X = a) = \int_a^a f_X(x) dx = 0$$

Per questo motivo si ragiona in termini di *intervalli* di probabilità:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Esiste una relazione tra la funzione di ripartizione F (che **vale anche** per le variabili aleatorie continue) con la funzione di densità f :

$$\begin{aligned} F(a) &= P(X \leq a) \\ &= P(X \in (-\infty, a]) \\ &= \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \end{aligned}$$

Quindi la **funzione di densità** è uguale alla derivata della funzione di ripartizione F :

$$f_X(a) = F'(a)$$

2.4.3.2. Valore atteso

Il *valore atteso* di una variabile aleatoria continua vale:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

i Nota

Formula alternativa per il valore atteso:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(x) dx$$

2.4.3.3. Varianza

La *varianza* di una variabile aleatoria continua vale:

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$$

2.4.3.4. Disuguaglianza di Markov

**Informalmente**

Permette di ottenere un limite superiore alla probabilità dalla sola conoscenza del valore atteso

Sia X una *variabile aleatoria* $X \geq 0$, allora $\forall a > 0 \in \mathbb{R}$, vale:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

**Nota**

Possiamo trarre che:

$$P(X < a) = 1 - P(X \geq a) \geq 1 - \frac{E[x]}{a}$$

**Dimostrazione**

Variabili aleatorie **discrete**:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x \geq 0} x \cdot p(x) \\ &= \sum_{x \leq a} x \cdot p(x) + \sum_{x \geq a} x \cdot p(x) \geq \sum_{x \geq a} x \cdot p(x) = \\ &\geq \sum_{x \geq a} a \cdot p(x) = \\ &\geq a \cdot \sum_{x \geq a} p(x) = \\ &\geq a \cdot P(X \geq a) \end{aligned}$$

Quindi

$$E[X] \geq a \cdot P(X \geq a) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

**Dimostrazione**

Variabili aleatorie **continue**:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \\
&= \int_0^a x f_X(x) dx + \int_a^{+\infty} x f_X(x) dx \geq \int_a^{+\infty} x f_X(x) dx = \\
&\geq \int_a^{+\infty} a f_X(x) dx = \\
&\geq a \int_a^{+\infty} f_X(x) dx = \\
&\geq a \cdot P(X \geq a)
\end{aligned}$$

Quindi

$$E[X] \geq a \cdot P(X \geq a) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

2.4.3.5. Disuguaglianza di Chebyshev



Informalmente

Permette di ottenere un limite superiore alla probabilità che il valore di una variabile aleatoria si discosti dal suo valore atteso di una quantità maggiore o uguale a una soglia scelta

Sia X una *variabile aleatoria* di valore atteso $E[X] = \mu$ e varianza $\text{Var}(X) = \sigma^2$, allora:

$$\forall r > 0, \quad P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$



Informalmente

$|X - \mu|$ è la distanza tra la variabile aleatoria e il suo valore atteso



Nota

Un'applicazione della *disuguaglianza di Chebyshev* riguarda la *deviazione standard*: esprime l'andamento della probabilità allontanandosi dal valore atteso di quantità ripetute della deviazione standard:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$



Dimostrazione

$$|X - \mu| \geq r \iff (X - \mu)^2 \geq r^2$$

dunque:

$$P(|X - \mu| \geq r) = P((X - \mu)^2 \geq r^2)$$

$$P((X - \mu)^2 \geq r^2) \leq E\left[\frac{(X - \mu)^2}{r^2}\right] \text{ per Markov}$$

$$P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

2.4.4. Modelli di distribuzione

Alcune distribuzioni/modelli di variabili aleatorie sono molto *frequenti*, di conseguenza esistono dei risultati notevoli.

2.4.4.1. Modello di Bernoulli $X \sim B(p)$

La variabile aleatoria può assumere solo due specificazioni: **fallimento** o **successo**, ovvero il loro supporto è $D_X = \{0, 1\}$. Il parametro p indica la probabilità che $X = 1$ con $p \in [0, 1]$

$$X \sim B(p)$$

Funzione di massa

$$\begin{aligned} p_X(x) = P(X = x) &= p^x(1-p)^{(1-x)} I_{\{0,1\}}(x) \\ &= \begin{cases} 1-p & \text{per } x = 0 \\ p & \text{per } x = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Funzione di ripartizione

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= (1-p)I_{[0,1]}(x) + I_{(1,+\infty)}(x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Valore atteso

$$E[X] = p$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot P(X = x) \\ &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) \\ &= 1 \cdot P(X = 1) = p \end{aligned}$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = p(1-p)$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\
&= E[(X - p)^2] \\
&= \sum_x (x - p)^2 \cdot P(X = x) \\
&= (0 - p)^2 \cdot P(X = 0) + (1 - p)^2 \cdot P(X = 1) \\
&= p^2(1 - p) + p(1 - p)^2 \\
&= p(1 - p)(p + 1 - p) = p(1 - p)
\end{aligned}$$

2.4.4.2. Modello binomiale $X \sim B(n, p)$

Il modello ripete n volte un **esperimento bernulliano indipendente** di probabilità p , dove n e p sono i due parametri del modello. Il supporto del modello è $D_X = \{0, 1, \dots, n\}$.

$$X \sim B(n, p)$$

Funzione di massa

$$p_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)} I_{\{0, \dots, n\}}(x)$$

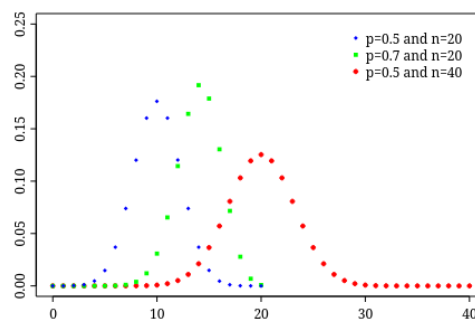


Figure 8: Funzione di massa modello binomiale

Funzione di ripartizione

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) = \\
&= \sum_{i=0}^x p_X(i) \cdot I_{[0, n]}(x) + I_{(n, +\infty)}(x) \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^x p_X(i) & \text{per } x \leq n \\ 1 & \text{per } x > n \end{cases}
\end{aligned}$$

⚠ Attenzione

Nella formula della funzione di ripartizione, p_X indica la *funzione di massa*, solo p indica la *probabilità di successo*

Valore atteso

$$E[X] = n \cdot p$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[X_i] = n \cdot p
 \end{aligned}$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = n \cdot p(1 - p)$$

Relazioni

Siano $X_1 \sim B(n, p)$ e $X_2 \sim B(m, p)$ indipendenti, allora:

$$X_1 + X_2 = \sum_{i=1}^n X_{1,i} + \sum_{j=1}^m X_{2,j} = \sum_{i=1}^{n+m} Y_i = Y$$

dove $Y \sim B(n + m, p)$

2.4.4.3. Modello uniforme discreto $X \sim U(n)$

Tutti gli esiti della variabile aleatoria discreta sono **equiprobabili**, dove il parametro n è il numero dei possibili esiti, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il supporto del modello è $D_X = [1, n]$.

$$X \sim U(n)$$

Funzione di massa

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{n} I_{\{1, \dots, n\}}(x)$$

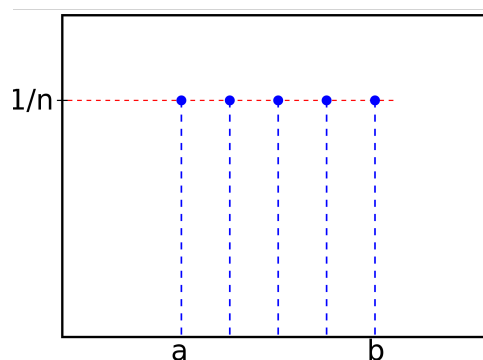


Figure 9: Funzione di massa modello uniforme discreto

Funzione di ripartizione

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{n} I_{[1, n]}(x) + I_{(n, +\infty)}(x)$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 \forall x \leq n \quad F_X(x) &= P(X \leq x) \\
 &= \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} P(X = i) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i \\
 &= 1^{\lfloor x \rfloor} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{n}
 \end{aligned}$$

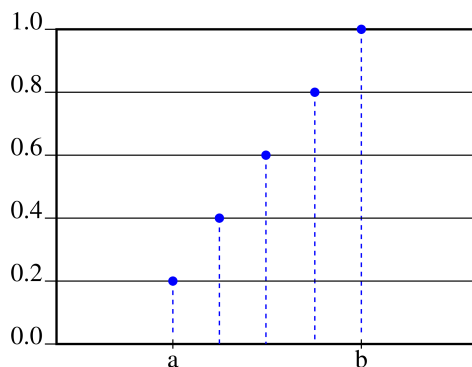


Figure 10: Funzione di ripartizione modello uniforme discreto

Valore atteso

$$E[x] = \frac{n+1}{2}$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{i=1}^n i \cdot P(X = i) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}
 \end{aligned}$$

i Nota

$$E[X^2] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
 &= (n+1) \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{n} \right) \\
 &= (n+1) \left(\frac{4n+2-3n-3}{12} \right) \\
 &= (n+1) \left(\frac{n-1}{12} \right) = \frac{n^2-1}{12}
 \end{aligned}$$

2.4.4.4. Modello uniforme continuo $X \sim U(a, b)$

Tutti gli esiti della variabile aleatoria discreta sono **equiprobabili**. Il supporto del modello è $D_X = [a, b]$.

$$X \sim U(a, b)$$

Funzione di densità di probabilità

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

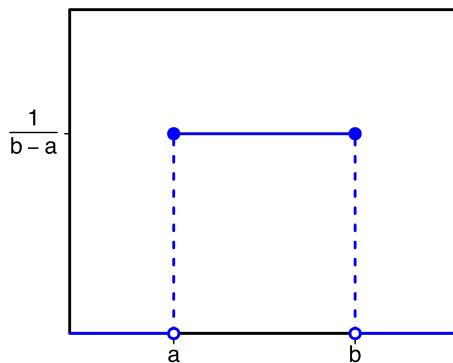


Figure 11: Funzione di densità modello uniforme continuo

! Dimostrazione

Sappiamo che la $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx$ deve essere uguale a 1, quindi possiamo ricavare la funzione di densità f_X , sostituendola con l'incognita α :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} a &= \int_a^b \alpha \, dx \\
 &= \alpha \int_a^b 1 \, dx \\
 &= \alpha [x]_a^b \\
 &= \alpha(b-a) \\
 &= \alpha = \frac{1}{b-a}
 \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare f_X :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

Funzione di ripartizione

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} I_{[a,b]}(x) + I_{(b,+\infty)}(x)$$

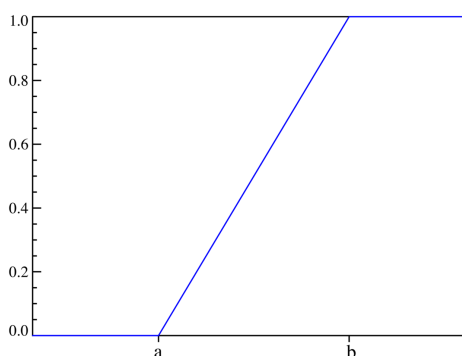


Figure 12: Funzione di ripartizione modello uniforme continuo

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_a^x f_X(y) \, dy \\
 &= \int_a^x \frac{1}{b-a} \, dy \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^x 1 \, dy \\
 &= \frac{1}{b-a} [y]_a^x = \frac{x-a}{b-a}
 \end{aligned}$$

Valore atteso

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_a^b f_X(x) \, dx \\
&= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \, dx \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \\
&= \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{(a+b)(\cancel{b-a})}{2} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

i Nota

$$E[X^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.4.4.5. Modello geometrico $X \sim G(p)$

Il numero di **insuccessi successivi** prima che si verifichi un esperimento positivo in una serie di esperimenti Bernoulliani indipendenti e identicamente distribuiti (i.i.d.) di parametro $p \in (0, 1]$.

Il supporto del modello è $D_X = [0, \dots, +\infty)$.

$$X \sim G(p)$$

Funzione di massa

$$p_X(x) = P(X = x) = p(1-p)^x I_{[0, +\infty)}(x)$$

💡 Informalmente

La funzione di massa equivale a calcolare le probabilità che accadano x *insuccessi*, quindi $(1-p)^x$ a cui succede un *successo* $\cdot p$, ottenendo $p \cdot (1-p)^x$.

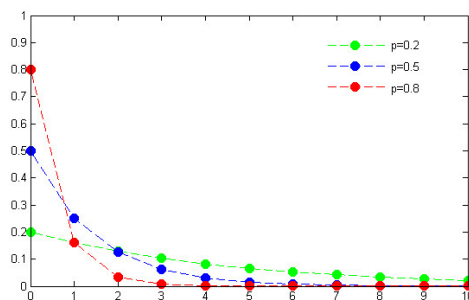


Figure 13: Funzione di massa modello geometrico

Funzione di ripartizione

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \left(1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor + 1}\right) I_{[0, +\infty)}(x)$$

i Nota

$$F_X(x) = F_X(\lfloor x \rfloor)$$

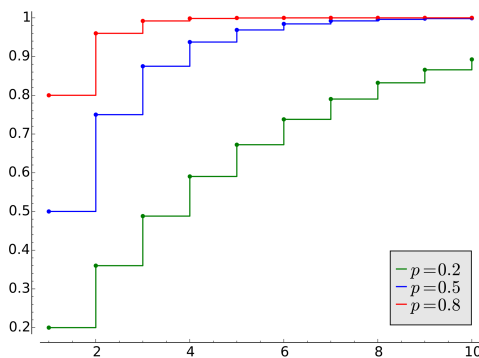


Figure 14: Funzione di ripartizione modello geometrico

! Dimostrazione

Possiamo calcolare la funzione di ripartizione $P(X \leq x)$ come $1 - P(X > x)$:

$$\begin{aligned}
 P(X > x) &= \sum_{i=x+1}^{+\infty} p_X(i) \\
 &= \sum_{i=x+1}^{+\infty} p(1-p)^i \\
 &= p(1-p)^{x+1} \cdot \sum_{i=x+1}^{+\infty} (1-p)^{i-(x+1)} \\
 &= p(1-p)^{x+1} \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i \\
 &= p(1-p)^{x+1} \cdot \frac{1}{1 - (1-p)} \\
 &= p(1-p)^{x+1} \cdot \frac{1}{p} = (1-p)^{x+1}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$

Valore atteso

$$E[X] = \frac{1-p}{p}$$

! Dimostrazione

Usando la definizione:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot p_X(i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} i p (1-p)^i \\ &= p \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} i (1-p)^i \\ &= p \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

i Nota

Nel punto [evidenziato di blu](#) abbiamo usato il lemma:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i \alpha^i = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Proprietà di assenza di memoria

Il numero di *fallimenti consecutivi* (anche se elevato) durante la ripetizione dell'esperimento Bernoulliano non ci fornisce *nessuna informazione* sugli esperimenti successivi.

Quindi la probabilità di costante insuccesso dell' $i + j$ -esimo esperimento non è condizionata dalle probabilità di costante insuccesso dell' i -esimo:

$$P(X \geq x + y \mid X \geq x) = P(X \geq y)$$

! Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 P(X \geq x + y \mid X \geq x) &= \frac{P(X \geq x + y, X \geq x)}{P(X \geq x)} \\
 &= \frac{P(X \geq x + y)}{P(X \geq x)} \\
 &= \frac{(1-p)^{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor}}{(1-p)^{\lfloor x \rfloor}} \\
 &= (1-p)^{\lfloor y \rfloor} = P(X \geq y)
 \end{aligned}$$

2.4.4.6. Modello di Poisson $X \sim P(\lambda)$

È un tipo di distribuzione **discreta** che esprime le probabilità che un certo **numero di eventi** si verificano **contemporaneamente** in un dato intervallo di tempo, sapendo che **mediamente** se ne verifica un numero λ . Tutti gli eventi sono **indipendenti**. Il modello ha supporto $D_X = [0, +\infty)$ e $\lambda \in (0, +\infty)$

$$X \sim P(\lambda)$$



Informalmente

Ad esempio, si utilizza una distribuzione di Poisson per misurare il numero di chiamate ricevute in un call-center in un determinato arco temporale.

Un dataset segue il *modello di Poisson* se possiede le seguenti *caratteristiche*:

- la distribuzione ha una forma *asimmetrica* con una lunga *coda verso destra*
- al crescere di λ corrisponde *maggiore concentrazione* di dati intorno al parametro
- la *media* campionaria è vicina al parametro λ e la *varianza* è uguale a λ

Funzione di massa

$$p_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} I_{[0, +\infty]}(x)$$

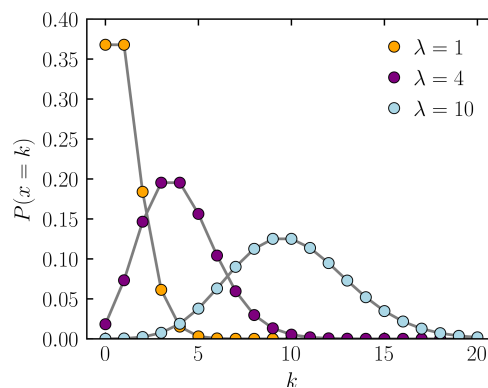


Figure 15: Funzione di massa modello di Poisson

Valore atteso

$$E[X] = \lambda$$



Dimostrazione

Usando la definizione:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot p_X(i) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \cancel{i} \frac{\lambda^{\cancel{i}}}{\cancel{i}(i-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda^{i-1})}{(i-1)!} \\
 &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}
 \end{aligned}$$

Poniamo $j = i - 1$ e applichiamo lo sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned}
 &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
 &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
 \end{aligned}$$

i Nota

Dal secondo passaggio in poi l'indice della sommatoria i parte da 1 e non da 0. Questo perché moltiplicando tutto per i se $i = 0$ il contributo alla sommatoria sarà nullo.

Varianza

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

! Dimostrazione

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

Relazione tra il modello di Poisson e il modello binomiale

Proprietà di riproducibilità

Date due variabili aleatorie $X_1 \sim P(\lambda_1)$ e $X_2 \sim P(\lambda_2)$ indipendenti, allora:

$$X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Se le due variabili aleatorie sono anche identicamente distribuite allora:

$$X_1 + X_2 \sim P(2\lambda)$$

2.4.4.7. Modello ipergeometrico $X \sim H(n, M, N)$

Descrive l'**estrazione** di oggetti binari da un'urna **senza reimmissioni** (in caso ci fossero reimmissioni, potremmo usare il [modello binomiale](#)). I parametri sono:

- n : numero di estrazioni
- N : numero di oggetti "corretti"
- M : numero di oggetti "errati"

Il supporto del modello è $[\max(0, n - M), \min(n, N)]$.

$$X \sim H(n, M, N)$$



Informalmente

Il **minor numero** di oggetti *corretti* estraibili è: $\max(0, \text{estrazioni} - \text{errati}) = \max(0, n - M)$.

Il **massimo numero** di oggetti *corretti* estraibili è: $\min(\text{estrazioni}, \text{corretti}) = \min(n, N)$.

Di conseguenza, il supporto del modello è:

$$[\max(0, n - M), \min(n, N)]$$



Nota

È possibile indicare il modello anche come $X \sim I(n, M, N)$

Funzione di massa

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{N}{x} \binom{M}{n-x}}{\binom{N+M}{n}} I_{[0,n]}(x)$$

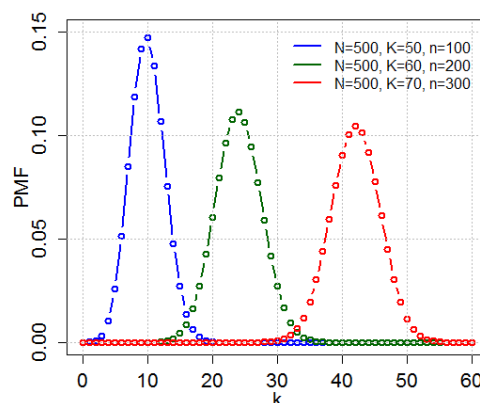


Figure 16: Funzione di massa modello ipergeometrico



Dimostrazione

Per dimostrare la funzione di massa di basiamo sul calcolo delle disposizioni semplici di T oggetti su w posti.

i Nota

Stiamo usando nuovi nomi per le variabili, che andremo a riconvertire alla fine:

- Oggetti totali: $T = N + M$
- Posti totali (estrazioni): $w = n$
- Oggetti corretti: $C = N$
- Oggetti errati: $T - C = M$
- Posti oggetti corretti: $g = x$
- Posti oggetti errati: $w - g = n - x$

Dato che siamo in uno spazio equiprobabile, vale la legge:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Dove l'insieme degli eventi possibili è:

$$|\Omega| = \frac{T!}{(T-w)!}$$

E tutte le possibili sequenze di w oggetti di cui g corretti:

$$|E| = o_1 \cdot o_2 \cdot o_3$$

Dove:

- o_1 sono tutti i modi di scegliere le g posizioni in cui compare un oggetto corretto

$$o_1 = \binom{w}{g}$$

- o_2 è il numero di scelte possibili per gli oggetti corretti da destinare alle g posizioni senza che siano reimmessi

$$o_2 = \frac{C!}{(C-g)!}$$

- o_3 è il numero di scelte possibili per gli oggetti errati da destinare alle posizioni rimanenti

$$o_3 = \frac{(T-C)!}{((T-C)-(w-g))!}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{|E|}{|\Omega|} = \binom{w}{g} \cdot \frac{C!}{(C-g)!} \cdot \frac{(T-C)!}{((T-C)-(w-g))!} \cdot \frac{(T-w)!}{T!} \\ &= \frac{\binom{C}{g} \binom{T-C}{w-g}}{\binom{T}{w}} = \frac{\binom{N}{x} \binom{M}{n-x}}{\binom{N+M}{n}} \end{aligned}$$

Valore atteso

$$E[X] = n \cdot p = n \cdot \frac{N}{N+M}$$

! Dimostrazione

Scomponiamo la variabile in n variabili aleatorie bernoulliane *NON indipendenti* definite:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{oggetto corretto} \\ 0 & \text{oggetto errato} \end{cases}$$

Essendo bernoulliane, vale:

$$P(X_i = 1) = \frac{M}{N + M} = E[X_i] = p$$

Quindi:

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] = n \cdot p \end{aligned}$$

Varianza

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right) \\ &= \left(n \frac{N}{N+M}\right) \left(1 - \left(\frac{N}{N+M}\right)\right) \left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right) \end{aligned}$$

i Nota

Per $N + M \rightarrow \infty$ il modello si semplifica in un modello binomiale

! Dimostrazione

Scomponiamo la variabile in n variabili aleatorie bernoulliane *NON indipendenti* come per il valore atteso.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_i) &= E[X_i](1 - E[X_i]) \\ &= \left(\frac{N}{N+M}\right) \left(1 - \frac{N}{N+M}\right) \\ &= \frac{M}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \\ &= \frac{NM}{(N+M)^2} \end{aligned}$$

Non essendo indipendenti, è necessario usare la formula generale della somma di variabili aleatorie:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_i^n \sum_{i \neq j}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Sappiamo che:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_i, X_j) &= E[X_i \cdot X_j] - E[X_i] \cdot E[X_j] \\ &= \frac{NM}{(N+M-1)(N+M)^2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= n \frac{NM}{(N+M)^2} - n(n-1) \cdot \frac{-NM}{(N+M-1)(N+M)^2} \\ &= np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{N+M-1} \right)\end{aligned}$$

3. Statistica inferenziale

4. Cheatsheet Python

5. Cheatsheet integrali