Statistica e Analisi dei dati

Università degli studi di Milano - Informatica

Luca Favini , Matteo Zagheno

Ultima modifica: 02/06/2024 - Codice sorgente

Statistica e Analisi dei dati

Insegnamento del corso di laurea triennale in Informatica, Università degli studi di Milano. Tenuto dal Professore Dario Malchiodi, anno accademico 2023-2024.

La statistica si occupa di raccogliere, analizzare e trarre conclusioni su dati, attraverso vari strumenti:

- Statistica descrittiva: esposizione e **condensazione** dei dati, cercando di limitarne l'incertezza;
- Calcolo delle probabilità: creazione e analisi di modelli in situazioni di **incertezza**;
- Statistica inferenziale: **approssimazione** degli esiti mancanti, attraverso modelli probabilistici;
- *Appendice: Cheatsheet Python:* raccolta funzioni/classi Python utili ai fini dell'esame *(e non).*

Indice

1. Statistica descrittiva

Popolazione insieme di elementi da analizzare, spesso troppo numerosa per essere analizzata tutta

Campione parte della popolazione estratta per essere analizzata, deve essere rappresentativo

Campione casuale (semplice) tutti i membri della popolazione hanno la stessa possibilità di essere selezionati

1.1. Classificazione dei dati: qualitativi e quantitativi

Dati quantitativi / Scalari / Numerici l'esito della misurazione è una quantità numerica

- **Discreti** si lavora su valori singoli (spesso interi), ad esempio: *numeri di figli*
- **Continui** si lavora su range di intervalli, ad esempio: *peso* o *altezza*

Dati qualitativi / Categorici / Nominali l'esito della misurazione è un'etichetta

- **Booleani / Binari** due valori possibili, ad esempio: *sesso*
- **Nominali / Sconnessi** valori **non** ordinabili, ad esempio: *nome*
- **Ordinali** valori ordinabili, ad esempio: *livello di soddisfazione*

> **Nota**
>
> Spesso alcuni dati *numerici* vengono considerati *qualitativi*, dato che non ha senso effettuare su di essi considerazioni algebriche o numeriche. Un esempio potrebbe essere la data di nascita.

1.2. Frequenze

1.2.1. Frequenze assolute e relative

1.2.2. Frequenze cumulate

1.2.2.1. Funzione cumulativa empirica

1.2.3. Frequenze congiunte e marginali

1.2.4. Stratificazione

1.3. Grafici

1.4. Indici di centralità

Sono indici che danno un'idea approssimata dell'ordine di grandezza (quindi dove ricadono) dei valori esistenti.

1.4.1. Media campionaria

Viene indicata da $\overline{x}$, ed è la **media aritmetica** di tutte le osservazioni del campione.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

La media opera linearmente, quindi può essere scalata ($\cdot\, a$) e/o traslata ($+b$):

$$\forall i \; y_i = ax_i + b \Rightarrow \overline{y} = a\overline{x} + b$$

Non è un stimatore robusto rispetto agli outlier. Può essere calcolata solo con dati quantitativi.

1.4.2. Mediana campionaria

È il valore a **metà** di un dataset ordinato in ordine crescente, ovvero un valore $\geq$ e $\leq$ di almeno la metà dei dati.

Dato un dataset di dimensione n la mediana è:
- l'elemento in posizione $\frac{n+1}{2}$ se n è dispari
- la media aritmetica tra gli elementi in posizione $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$ se n è pari

È robusta rispetto agli outlier ma può essere calcolata solo su *campioni ordinabili*.

1.4.3. Moda campionaria

È l'osservazione che compare con la maggior frequenza. Se più di un valore compare con la stessa frequenza allora tutti quei valori sono detti modali.

1.5. Indici di dispersione

Sono indici che misurano quanto i valori del campione si discostano da un valore centrale.

1.5.1. Scarto assoluto medio

Per ogni osservazione, lo scarto è la distanza dalla media: $x_i - \overline{x}$. La somma di tutti gli scarti farà sempre 0.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \overline{x} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{x} \quad = \quad n\overline{x} - n\overline{x} \quad = 0$$

1.5.2. Varianza campionaria

Misura di quanto i valori si discostano dalla media campionaria

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Metodo alternativo per calcolare la varianza:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - n\overline{x}^2)$$

> **Nota**
>
> Verrebbe intuitivo applicare il *valore assoluto* ad ogni scarto medio, ma questo causa dei problemi. Per questo motivo la differenza viene elevata al *quadrato*, in modo da renderla sempre positiva.

La varianza *non* è un operatore lineare: la traslazione non ha effetto mentre la scalatura si comporta:

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

1.5.2.1. Varianza campionaria standard

È possibile applicare alla varianza campionaria la radice quadrata, ottenendo la varianza campionaria standard.

$$s = \sqrt{s^2}$$

> **Attenzione**
>
> Applicando la radice quadrata solo dopo l'elevamento a potenza, non abbiamo reintrodotto il problema dei valori negativi: $\sqrt{a^2} \quad \neq \quad (\sqrt{a})^2 = a$

1.5.3. Coefficiente di variazione

Valore **adimensionale**, utile per confrontare misure di fenomeni con unità di misura differenti.

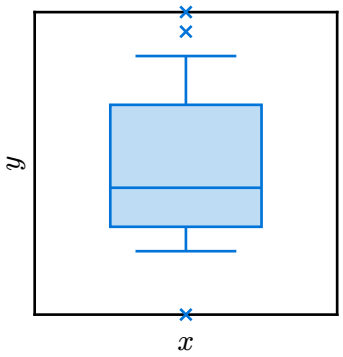
$$s^* = \frac{s}{|\overline{x}|}$$

> **Nota**
>
> Sia la varianza campionaria standard che la media campionaria sono dimensionali, ovverro hanno unità di misura. Dividendoli tra loro otteniamo un valore adimensionale.

1.5.4. Quantile

Il quantile di ordine α (con α un numero reale nell'intervallo $[0, 1]$) è un valore q_α che divide la popolazione in due parti, proporzionali in numero di elementi ad α e (1-α) e caratterizzate da valori rispettivamente minori e maggiori di q_α.

Percentile quantile descritto in percentuale
Decile popolazione divisa in 10 parti con ugual numero di elementi
Quartile popolazione divisa in 4 parti con ugual numero di elementi

> **Nota**
>
> È possibile visualizzare un campione attraverso un **box plot**, partendo dal basso composto da:
> - eventuali *outliers*, rappresentati con le x prima del baffo
> - il *baffo* "inferiore", che parte dal valore minimo e raggiunge il primo quartile
> - il *box* (scatola), che rappresenta le osservazioni comprese tra il primo e il terzo quartile
> - la linea che divide in due il box, che rappresenta la *mediana*
> - il *baffo* "superiore", che parte terzo quartile e raggiunge il massimo
> - eventuali *outliers* "superiori", rappresentati con le x dopo il baffo
>
> 
>
> Figure 1: Grafico boxplot

1.6. Indici di correlazione

Campione bivariato campione formato da coppie $\{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$.
Correlazione relazione tra due variabili tale che a ciascun valore della prima corrisponda un valore della seconda seguendo una certa regolarità.

1.6.1. Covarianza campionaria

È un valore numerico che fornisce una misura di quanto le due variabili varino assieme. Dato un campione bivariato definiamo la **covarianza campionaria** come:

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Metodo alternativo di calcolo:

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - n\overline{xy})$$

Informalmente

Intuitivamente c'è una **correlazione diretta** se al crescere di x cresce anche y o al descrescere di x decresce anche y, dato che il contributo del loro prodotto alla sommatoria sarà positivo. Quindi se x e y hanno segno concorde allora la correlazione sarà *diretta*, altrimenti *indiretta*.

- $\mathrm{Cov}(x,y) > 0$ probabile correlazione diretta
- $\mathrm{Cov}(x,y) \simeq 0$ correlazione improbabile
- $\mathrm{Cov}(x,y) < 0$ probabile correlazione indiretta

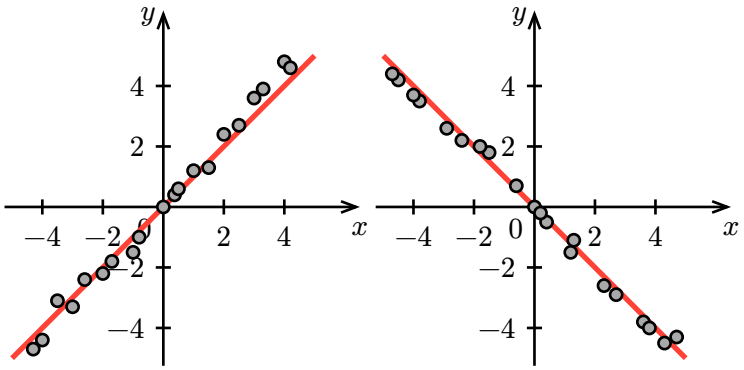


Figure 2: Correlazione lineare *diretta* (sinistra) e *indiretta* (destra)

Nota

Una relazione diretta/indiretta non è necessariamente *lineare*, può essere anche *logaritmica* o seguire altre forme.

1.6.2. Indice di correlazione di Pearson (indice di correlazione lineare)

Utilizziamo l'indice di correlazione di Pearson per avere un valore *adimensionale* che esprime una correlazione. Possiamo definirlo anche come una misura normalizzata della covarianza nell'intervallo $[-1, +1]$. ρ è **insensibile** alle trasformazioni lineari.

$$\rho(x,y) = \frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{s_x s_y} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

Dove s è la varianza campionaria standard.

- $\rho \simeq +1$ probabile correlazione linearmente diretta
- $\rho \simeq 0$ correlazione improbabile
- $\rho \simeq -1$ probabile correlazione linearmente indiretta

> ⚠ **Attenzione**
>
> L'indice di correlazione lineare (ρ) cattura **solo** relazioni dirette/indirette *lineari* ed è insensibile alle trasformazioni lineari.

> ⚠ **Attenzione**
>
> La covarianza campionaria o l'indice di correlazione lineare $\simeq 0$ non implicano l'indipendenza del campione, ma è vero il contrario:
>
> $$\text{Cov}(x,y) \simeq 0 \quad \not\Rightarrow \quad \text{Indipendenza}$$
>
> $$\rho(x,y) \simeq 0 \quad \not\Rightarrow \quad \text{Indipendenza}$$
>
> $$\text{Indipendenza} \quad \Rightarrow \quad \rho(x,y) \simeq \text{Cov}(x,y) \simeq 0$$

1.7. Indici di eterogeneità

Massima eterogeneità il campione è composto da tutti elementi diversi
Minima eterogeneità il campione non contiene due elementi uguali *(campione omogeneo)*

L'eterogeneità può essere calcolata anche su un insieme di dati qualitativi.

1.7.1. Indice di Gini (per l'eterogeneità)

$$I = 1 - \sum_{j=1}^{n} f_j^2$$

Dove f_j è la frequenza relativa di j ed n è il numero di elementi distinti. Quindi $\forall j, 0 \leq f_j \leq 1$.
Prendiamo in considerazione i due estremi:

- eterogeneità *minima* (solo un valore con frequenza relativa 1):

$$I = 1 - 1 = 0$$

- eterogeneità *massima* (tutti i valori hanno la stessa frequenza relativa $\frac{1}{n}$ dove n è la dimensione del campione):

$$I = \quad 1 - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \quad = \quad 1 - \frac{n}{n^2} \quad = \quad \frac{n-1}{n}$$

Generalizzando, I non raggiungerà mai 1:

$$0 \leq I \leq \frac{n-1}{n} < 1$$

Dal momento che l'indice di Gini tende a 1 senza mai arrivarci introduciamo l'**indice di Gini normalizzato**, in modo da arrivare a 1 nel caso di eterogeneità massima:

$$I' = \frac{n}{n-1} I$$

1.7.2. Entropia

$$H = \quad \sum_{j=1}^{n} f_j \log\left(\frac{1}{f_j}\right) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} -f_j \log(f_j)$$

Dove f_j è la frequenza relativa e n è il numero di elementi distinti. L'entropia assume valori nel range $[0, \log(n)]$ quindi utilizziamo l'**entropia normalizzata** per confrontare due misurazioni con diverso numero di elementi distinti n.

$$H' = \frac{1}{\log(n)} H$$

> **Nota**
>
> In base alla base del logaritmo utilizzata, l'entropia avrà unità di misura differente:
> - $\log_2$: bit
> - $\log_e$: nat
> - $\log_{10}$: hartley

> **Informalmente**
>
> Intuitivamente sia l'indice di Gini che l'entropia sono una *"media pesata"* tra la frequenza relativa di ogni elemento ed un peso: la *frequenza stessa* nel caso di Gini e il *logaritmo del reciproco* nell'entropia. La frequenza relativa è già nel range $[0, 1]$, quindi non c'è bisogno di dividere per il numero di elementi.

1.8. Indici di concentriazione

Un indice di concentrazione è un indice statistico che misura in che modo un *bene* è distribuito nella *popolazione*.

Distruzione del bene $a_1, a_2, ...a_n$ indica la quantità ordinata in modo **non decrescente**, del bene posseduta dall'individuo i
Media $\overline{a}$ indica la quantità media posseduta da un individuo
Totale $\text{TOT} = n\overline{a}$ indica il totale del bene posseduto

- Concentrazione *massima* (**sperequato**): un individuo possiete tutta la quantità $a_{1..n-1} = 0, \quad a_n = n\overline{a}$
- Concentrazione *minima* (**equo**): tutti gli individui possiedono la stessa quantità $a_{1..n} = \overline{a}$

1.8.1. Curva di Lorentz

La curva di Lorenz è una rappresentazione **grafica** della *distribuzione* di un bene nella popolazione.

Dati:
- $F_i = \frac{i}{n}$: posizione percentuale dell'osservazione i nell'insieme
- $Q_i = \frac{1}{\text{TOT}} \sum_{k=1}^{i} a_k$

La tupla (F_i, Q_i) indica che il $100 \cdot F_i\%$ degli individui detiene il $100 \cdot Q_i\%$ della quantità totale.

Inoltre: $\forall i,\ 0 \leq Q_i \leq F_i \leq 1$.

> **Informalmente**
>
> Possiamo vedere F_i come *"quanta"* popolazione è stata analizzata fino all'osservazione i, espressa nel range $[0, 1]$. Q_i è invece una *"frequenza cumulata"* della ricchezza, fino all'osservazione i.

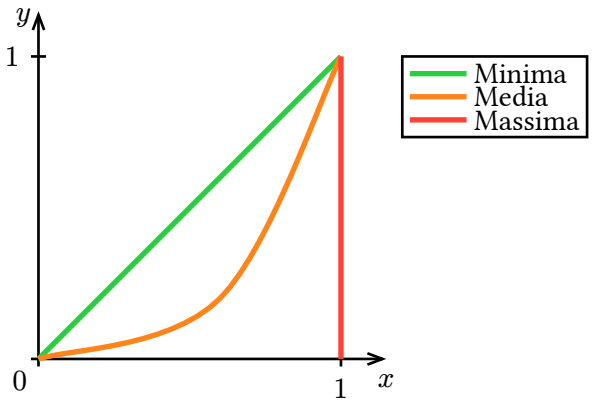


Figure 3: Curva di Lorentz

1.8.2. Indice di Gini (per la concentrazione)

Dato che la curva di Lorenz non assume mai alcun valore nella parte di piano superiore alla retta che collega $(0,0)$ a $(1,1)$, allora introduciamo l'**indice di Gini**, che invece assume valori nel range $[0,1]$.

Anche esso indica la *concetrazione* di un bene nella popolazione.

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} F_i - Q_i}{\sum_{i=1}^{n-1} F_i}$$

È possibile riscrivere il denominatore come:

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_i \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i \quad = \quad \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2} \quad = \quad \frac{n-1}{2}$$

Ottendendo come formula alternatica:

$$G = \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} F_i - Q_i$$

> **Informalmente**
>
> Facendo un parallelo con la curva di Lorenz, possiamo vedere $F_i - Q_i$ come la distanza tra la bisettrice (F_i) e la ricchezza dell'osservazione i (Q_i). La somma di queste distanze viene poi *"normalizzata"*, dividendo per $\frac{n-1}{2}$.

1.8.3. Analisi della varianza (ANOVA)

Dato un campione, è possibile suddividerlo in più *gruppi* ed effettuare delle analisi sulle *diversità* tra i vari gruppi. Ad esempio, dato un campione di dati sulla natalità, si potrebbe analizzare formando gruppi per regione o per reddito.

L'analisi della varianza (**ANOVA** - ANalysis Of VAriance) è un insieme di tecniche statistiche che permettono, appunto, di confrontare due o più *gruppi* di dati. Definiamo a questo scopo:

Numerosità dei gruppi dato un campione diviso in G gruppi, ognuno ha numerosità $n_1, \ldots, n_G$

Osservazione viene definita x_i^g come l'i-esima osservazione del g-esimo gruppo

Media campionaria di tutte le osservazioni la media del campione

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g} x_i^g$$

Media campionaria di un gruppo la media dei valori del gruppo

$$\overline{x}_g = \frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g} x_i^g$$

Somme degli scarti

- Somma **totale** degli scarti (tra *ogni elemento* e la *media di tutto il campione*):

$$\mathrm{SS}_T = \sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g} \left(x_i^g - \overline{x}\right)^2$$

- Somma degli scarti **entro/within** i gruppi (tra *ogni elemento* e la *media del proprio gruppo*):

$$\mathrm{SS}_W = \sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g} \left(x_i^g - \overline{x}^g\right)^2$$

- Somma degli scarti **tra/between** i gruppi (tra la *media di ogni gruppo* e *la media del campione*, "pesato" per la *numerosità* del gruppo):

$$\mathrm{SS}_B = \sum_{g=1}^{G} n_g(\overline{x}^g - \overline{x})^2$$

Vale la seguente regola: $\mathrm{SS}_T = \mathrm{SS}_W + \mathrm{SS}_B$.

Indici di variazione

- **Total** (la varianza totale del campione):

$$\frac{\mathrm{SS}_T}{n-1}$$

- **Within** (la varianza di ogni elemento del gruppo):

$$\frac{\mathrm{SS}_W}{n-G}$$

- **Between** (la varianza tra ogni gruppo e il campione completo):

$$\frac{\mathrm{SS}_B}{G-1}$$

L'ipotesi alla base è che dati G gruppi, sia possibile scomporre la varianza in due componenti: *Varianza interna ai gruppi* (varianza **Within**) e *Varianza tra i gruppi* (varianza **Between**).

> 💡 **Informalmente**
>
> Analizzando diversi gruppi attraverso l'ANOVA, si possono raggiungere due conclusioni:
> - i gruppi risultano significativamente **diversi** tra loro: la *varianza between* contribuisce più significativamente alla varianza totale (il fenomeno è legato a caratteristiche proprie di ciascun gruppo)
> - i gruppi risultano **omogenei**: la *varianza within* contribuisce più significativamente alla varianza totale (il fenomeno è legato a caratteristiche proprie di tutti i gruppi)

```python
import numpy as np

def anova(groups):
    all_elements = pd.concat(groups)
    sum_total = sum((all_elements - all_elements.mean())**2)
    sum_within = sum([sum((g - g.mean())**2) for g in groups])
    sum_between = sum([len(g) * (g.mean()-all_elements.mean())**2 for g in groups])
    assert(np.abs(sum_total - sum_within - sum_between) < 10**-5)
    n = len(all_elements)
    total_var = sum_total / (n-1)
    within_var = sum_within / (n-len(groups))
    return (total_var, within_var*(n-len(groups))/(n-1))
```

1.9. Alberi di decisione

1.10. Classificatori

Dato un *classificatore binario* che divide in due classi (positiva e negativa) e un *insieme di oggetti* di cui è **nota** la classificazione, possiamo valutare la sua bontà tramite il numero di casi classificati in modo errato. La classificazione errata può essere:

- **Falso negativo**: oggetto *positivo* classificato come *negativo*
- **Falso positivo**: oggetto *negativo* classificato come *positivo*

> **Nota**
>
> Il peso di un falso positivo può **non** essere lo stesso di un falso negativo, si pensi al caso di una malattia contagiosa: un *falso negativo* sarà molto più pericoloso di un *falso positivo* (che verrà scoperto con ulteriori analisi).

Introduciamo la **matrice di confusione**, che riassume la bontà del classificatore:

		Valore effettivo		
		Positivo	Negativi	
Predizione del classificatore	Positivo	Veri positivi (VP)	Falsi positivi (FP)	*Totali classificati positivi (TOT CP)*
	Negativi	Falsi negativi (FN)	Veri negativi (VN)	*Totali classificati negativi (TOT CN)*
		Totale positivi (TP)	*Totale negativi (TN)*	*Totale casi (TOT casi)*

Table 1: Matrice di confusione

```python
pd.DataFrame(metrics.confusion_matrix(Y_test, preds))
```

Sensibilità capacità del classificatore di predire bene i positivi $\frac{\text{VP}}{\text{TP}}$
Specificità capacità del classificatore di predire bene i negativi $\frac{\text{VN}}{\text{TN}}$

È possibile valutare la bontà di un classificatore attraverso il punto:

$$(1 - \text{Specifità}, \text{Sensibilità}) \quad = \quad \left(1 - \frac{\text{VN}}{\text{TN}}, \frac{\text{VP}}{\text{TP}}\right) \quad = \quad \left(\frac{\text{FP}}{\text{TN}}, \frac{\text{VP}}{\text{TP}}\right)$$

1.10.1. Casi particolari

Classificatore costante associa indiscriminatamente gli oggetti ad una classe (positiva o negativa)

Classificatori positivi (CP) tutti i casi sono classificati come positivi

- *Sensibilità*: 1, *Specificitià*: 0, *Punto* $(1, 1)$ ●

Classificatori negativi (CN) tutti i casi sono classificati come negativi

- *Sensibilità*: 0, *Specificitià*: 1, *Punto* $(0, 0)$ ●

Classificatore ideale (CI) tutti i casi sono classificati correttamente

- *Sensibilità*: 1, *Specificitià* 1, *Punto* $(0, 1)$ ●

Classificatore peggiore (CE) tutti i casi sono classificati erroneamente

- *Sensibilità*: 0, *Specificitià* 0, *Punto* $(1, 0)$ ●

Classificatore casuale ogni caso viene assegnato in modo casuale

- *Sensibilità*: 0.5, *Specificitià* 0.5, *Punto* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ●

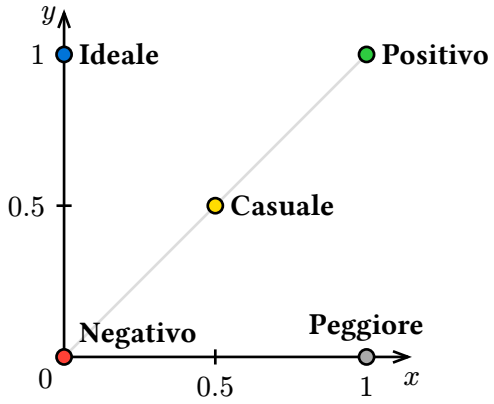


Figure 4: Rappresentazione classificatori

1.10.2. Classificatori a soglia (Curva ROC)

Un classificatore a soglia discrimina un caso in base ad una **soglia** stabilita a priori, in caso la misurazione sia *superiore* alla soglia allora verrà classificato *positivamente*, altrimenti *negativamente*.

Per trovare il valore con cui *fissare* la soglia, possiamo sfruttare questo metodo:

- definiamo θ come una generica soglia
- è necessario stabilire un intervallo $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$
  - utilizzando $\theta_{\min}$ tutti i casi saranno positivi, ottenento un classificatore positivo ●
  - utilizzando $\theta_{\max}$ tutti i casi saranno negativi, ottenento un classificatore negativo ●
- definiamo D come una discretizzazione di questo intervallo continuo

Per ogni soglia $\theta \in D$ è possibile calcolare la *sensibilità* e *specificità*. Questo classificatore viene quindi *rappresentato* sul piano cartesiano attraverso il *punto* $(1 - \text{Specifità}, \text{Sensibilità})$.

Il risultato è una **curva**, detta **ROC** (Receiver Operator Carapteristic) ▬, che ha sempre come estremi in $(0, 0)$ (caso in cui viene usato $\theta_{\max}$) e $(1, 1)$ (caso in cui viene usato $\theta_{\min}$).

Per misurare la *bontà* del classificatore viene misurata l'area di piano sotto la curva (**AUC** - Area Under the ROC Curve ▬), più si avvicina a 1, *migliore* è il classificatore.

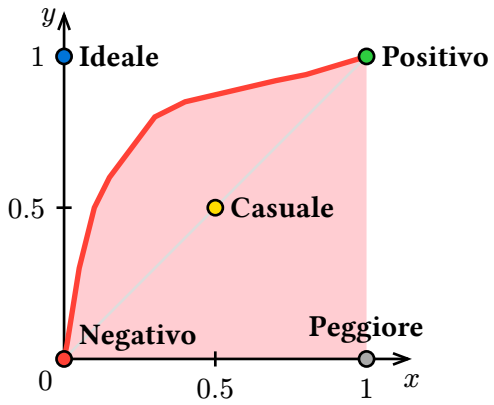


Figure 5: Curva ROC

1.11. Trasformazione dei dati

1.12. Grafici

2. Calcolo delle probabilità

3. Statistica inferenziale

4. Cheatsheet Python