Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ

Συστήματα Αναμονής - Ροή Δ

2η Ομάδα Ασκήσεων - Αναφορά

Ονοματεπώνυμο:
Σταθά Ευσταθία

Αριθμοί Μητρώου:
el16190

Πίνακας Περιεχομένων

Άσκηση 1 - Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

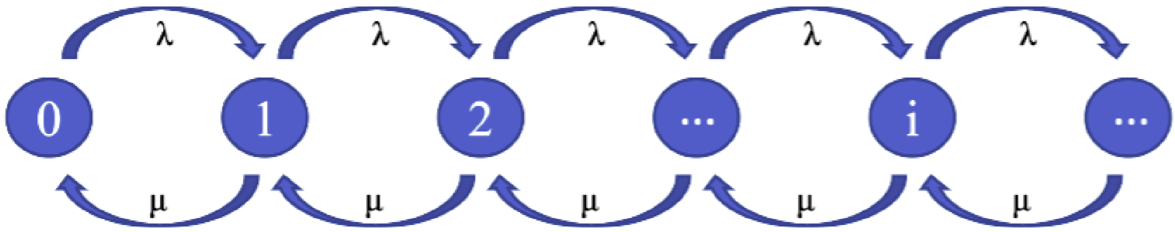
Λύσεις - Σχόλια

Ερώτημα A

Λόγω της άπειρης χωρητικότητας της συγκεκριμένης ουράς, για να είναι η ίδια εργοδική θα πρέπει ο μέσος ρυθμός άφιξης πελατών στο σύστημα, να είναι μικρότερος από το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης πελατών του συστήματος. Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει:

$$\rho < 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \lambda < \mu$$

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1, όπως είδαμε και στο μάθημα, έχει την ακόλουθη μορφή:



Από το οποίο προκύπτουν οι ακόλουθες συναρτήσεις ισορροπίας:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \rho P_0$$

$$(\lambda + \mu)P_i = \lambda P_{i-1} + \mu P_{i+1} \Rightarrow P_i = \rho^k P_0,\ for\ i > 0$$

Όμως, εξ ορισμού χρειάζεται το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των καταστάσεων να ισούται με 1. Με βάση αυτή την ιδιότητα, προκύπτουν οι εργοδικές πιθανότητες των καταστέσεων του συστήματος:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow P_0(1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = 1 \Rightarrow P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \rho$$

$$P_i = (1-\rho)\rho^i,\ for\ i \geq 0$$

Αποτέλεσμα που προκύπτει χάρη στο γεγονός πως η ουρά είναι εργοδική, κι έτσι η δυναμοσειρά συγκλίνει, ειδάλλως κάτι τέτοιο δεν θα ίσχυε.

Ερώτημα Β

Όπως γνωρίζουμε, ο μέσος χρόνος που δαπανά ένας πελάτης στο σύστημα μπορεί να συσχετιστεί με το μέσο όρο πελατών στο σύστημα, με τη χρήση του τύπου του Little. Έτσι, καθώς γνωρίζουμε πως όταν η ουρά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας ισχύει η σχέση που δίνεται στην εκφώνηση, με χρήση του τύπου του Little θα βρούμε το μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα ως ακολούθως:

$$E[T] = \frac{E[n(t)]}{\gamma}$$

όπου για το γ έχουμε:

$$\gamma = \lambda(1 - P(blocking)) \Rightarrow \gamma = \lambda,\ since\, P(blocking) = 0$$

κι, έτσι, προκύπτει τελικά:

$$E[T] = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda(1-\rho)} \Rightarrow$$
$$E[T] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Ερώτημα Γ

Όπως υπολογίστηκε, η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε μια οποιαδήποτε κατάσταση i είναι:

$$P_i = (1-\rho)\rho^i,\ for\, i \geq 0$$

Οπότε, για i = 57 έχουμε:

$$P_{57} = (1-\rho)\rho^{57} > 0$$

Αφού, λοιπόν, η κατάσταση κατά την οποία το σύστημα μας έχει 57 πελάτες έχει μη μηδενική πιθανότητα κι, εφόσων, αφήσουμε το σύστημα να λειτουργεί επ' άπειρο, είναι βέβαιο πως κάποια στιγμή το σύστημα θα επέλθει σε αυτή την κατάσταση.

Άσκηση 2 - Ανάλυση Ουράς M/M/1 με Octave

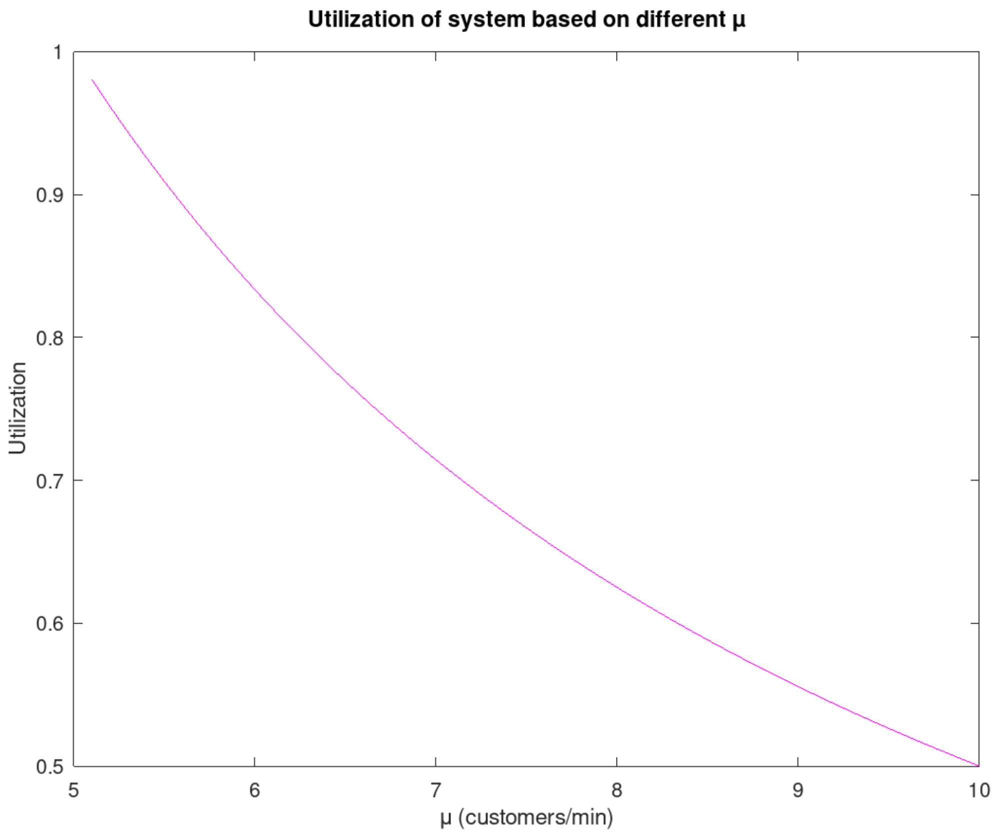
Διαγράμματα - Σχόλια

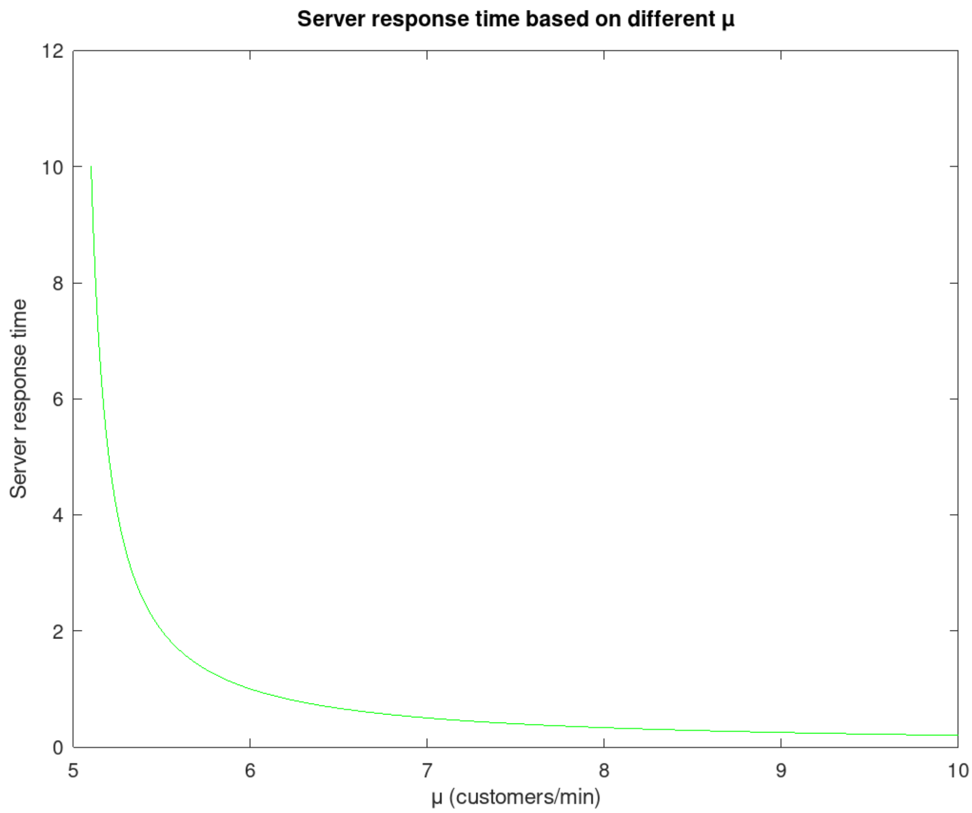
Ερώτημα Α

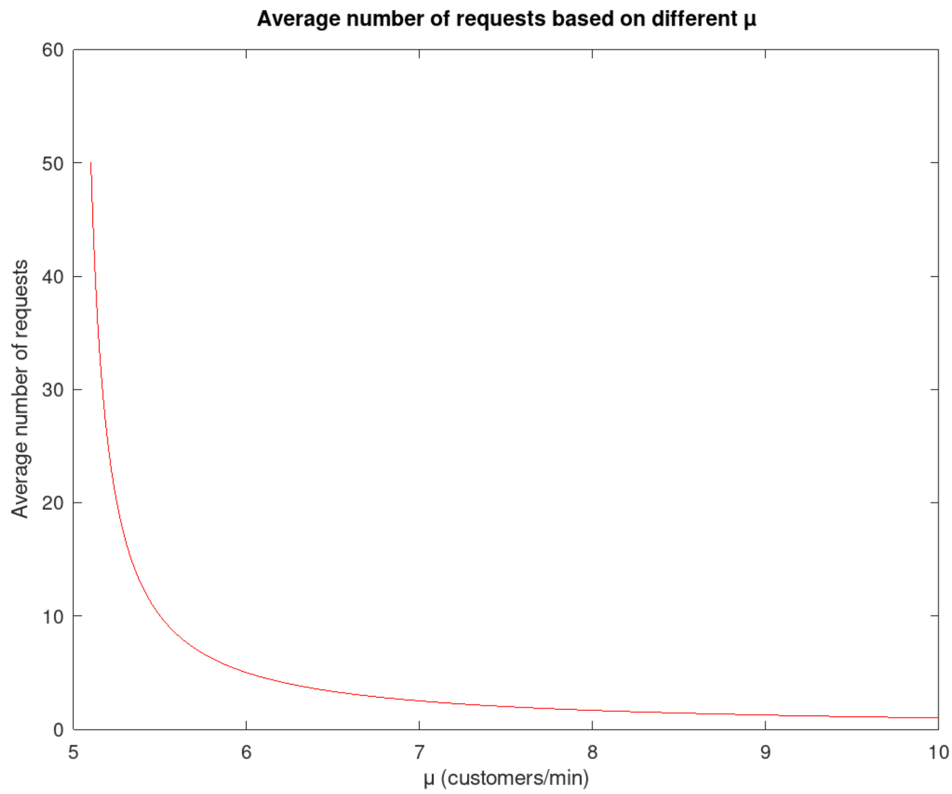
Όπως αναφέρθηκε και στην άσκηση 6, για να είναι εργοδική η ουρά M/M/1, θα πρέπει ο μέσος ρυθμός άφιξης πελατών στο σύστημα να είναι μικρότερος του μέσου ρυθμού εξυπηρέτησης των πελατών από αυτό. Επομένως, από τους δοθέντες μέσους ρυθμούς εξυπηρέτησης, αποδεκτοί είναι οι:

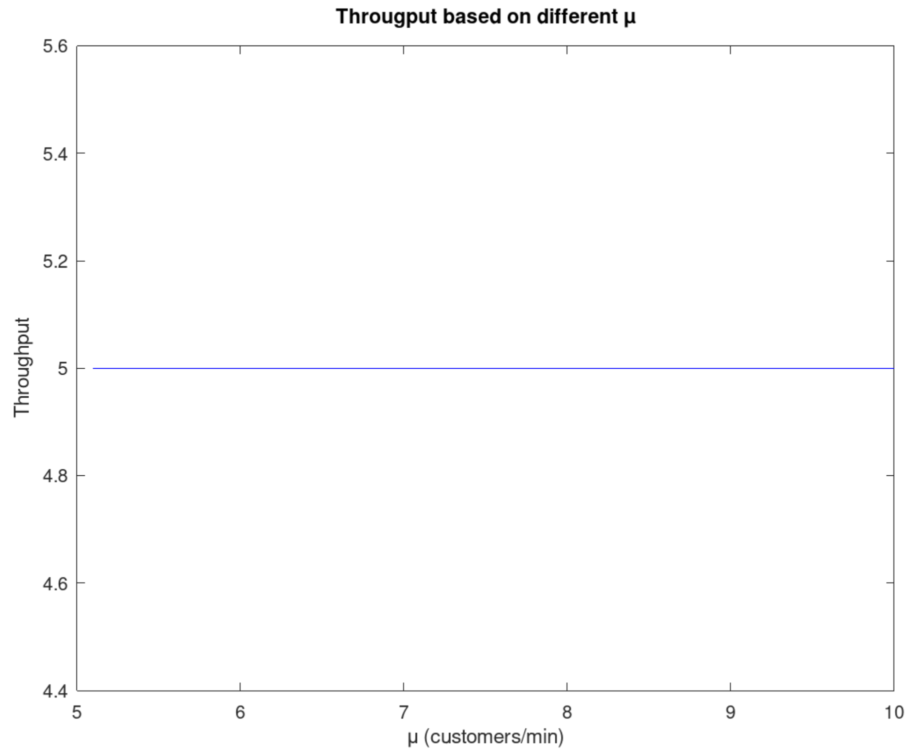
$\mu > 5$ πελάτες/min, δεδομένου πως $\lambda = 5$ πελάτες/min.

Ερώτημα Β




Server response time based on different μ
Server response time
μ (customers/min)
0
2
4
6
8
10
12
5
6
7
8
9
10


Average number of requests based on different μ
Average number of requests
μ (customers/min)
0
10
20
30
40
50
60
5
6
7
8
9
10



Ερώτημα Γ

Παρατηρώντας την καμπύλη του μέσου χρόνου καθυστέρησης των πελατών στο σύστημα, γρήγορα βλέπουμε πως ο ίδιος μειώνεται εκθετικά, με αποτέλεσμα όσο μεγαλύτερος είναι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης, τόσο λιγότερη επίδραση να έχει στο μέσο χρόνο καθυστέρησης η περαιτέρω αύξηση του. Παράλληλα, μεγαλύτερος ρυθμός εξυπηρέτησης σημαίνει και μεγαλύτερο κόστος για το σύστημα. Ως εκ τούτου, θα θέλαμε να επιλέξουμε έναν ρυθμό εξυπηρέτησης ο οποίος θα αξιοποιεί το πλεονέκτημα της εκθετικής μείωσης του μέσου χρόνου καθυστέρησης, καταφέρνοντας έτσι να εξοικονομήσουμε χρήματα προσεγγίζοντας τη βέλτιση λύση κι όχι επιλέγοντας την. Μια τέτοια επιλογή είναι το μ = 8 πελάτες/min.

Ερώτημα Δ

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη άσκηση, στην ουρά M/M/1 για το throughput των πελατών ισχύει πως:

$$\gamma = \lambda(1 - P(blocking)) \Rightarrow \gamma = \lambda,\ since\, P(blocking) = 0 .$$

Όπου προφανώς, ισχύει P(blocking) = 0, επειδή έχουμε άπειρη ουρά. Ως εκ τούτου, αναμένουμε ανεξαρτήτως του μ, η ρυθμαπόδοση να είναι σταθερή και ίση με λ = 5 πελάτες/min, κάτι το οποίο πράγματι παρατηρούμε και στο αντίστοιχο διάγραμμα.

Κώδικας

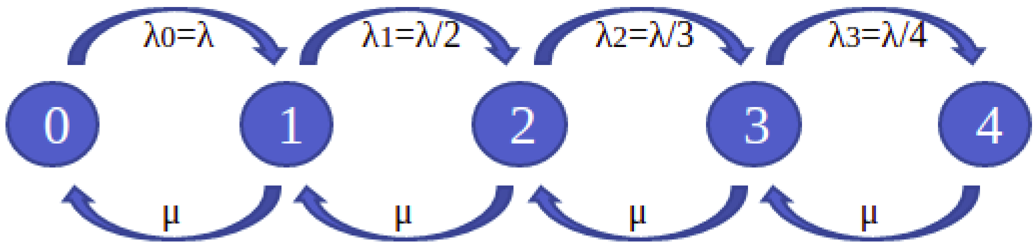
```
clc;
clear all;
close all;

pkg load queueing;

lambda = 5;
mu = 5.1:0.001:10;

U = zeros(1, 500);
R = zeros(1, 500);
Q = zeros(1, 500);
X = zeros(1, 500);
P0 = zeros(1, 500);

colors = "mgrbk";

for i = 1:columns(mu)
  [U(i), R(i), Q(i), X(i), P0(i)] = qsmm1(lambda, mu(i));
endfor

nfig = 1;
figure(nfig);

plot(mu, U, colors(nfig));

title("Utilization of system based on different μ");
xlabel("μ (customers/min)")
ylabel("Utilization");

nfig = nfig + 1;
figure(nfig);

plot(mu, R, colors(nfig));

title("Server response time based on different μ");
xlabel("μ (customers/min)")
ylabel("Server response time");

nfig = nfig + 1;
figure(nfig);

plot(mu, Q, colors(nfig));

title("Average number of requests based on different μ");
xlabel("μ (customers/min)")
ylabel("Average number of requests");

nfig = nfig + 1;
```

```
figure(nfig);

plot(mu, X, colors(nfig));

title("Througput based on different μ");
xlabel("μ (customers/min)")
ylabel("Throughput");
```

Άσκηση 3 - Διαδικασία γεννήσεων - θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

Διαγράμματα - Σχόλια

Ερώτημα Α



Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος είναι:

$$\lambda_0 P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda_i + \mu)P_i = \lambda_{i-1}P_{i-1} + \mu P_{i+1}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\mu P_4 = \lambda_3 P_3$$

από τις οποίες, και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των καταστάσεων, πρέπει να ισούται με 1, θα υπολογίσουμε τις εργοδικές πιθανότητες του συστήματος:

$$P_0 = \frac{24}{24 + 24\rho + 12\rho^2 + 4\rho^3 + \rho^4} = 0.60663$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu}P_0 = \rho P_0 = \frac{24\rho}{24 + 24\rho + 12\rho^2 + 4\rho^3 + \rho^4} = 0.30331$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu^2}P_0 = \frac{\rho^2}{2}P_0 = \frac{12\rho^2}{24 + 24\rho + 12\rho^2 + 4\rho^3 + \rho^4} = 0.07583$$

$$P_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu^3}P_0 = \frac{\rho^3}{6}P_0 = \frac{4\rho^3}{24 + 24\rho + 12\rho^2 + 4\rho^3 + \rho^4} = 0.01263$$

$$P_4 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\mu^4}P_0 = \frac{\rho^4}{24}P_0 = \frac{24}{24+24\rho+12\rho^2+4\rho^3+\rho^4} = 0.00157$$

Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη ισούται με την πιθανότητα της κατάστασης 4, αφού όταν φτάσουμε σε αυτή απορρίπτουμε οποιονδήποτε πελάτη έρθει. Άρα, η πιθανότητα απόρριψης πελάτη είναι 0.00157, δηλαδή αρκετά μικρή.

Ερώτημα Β

Υποερώτημα i

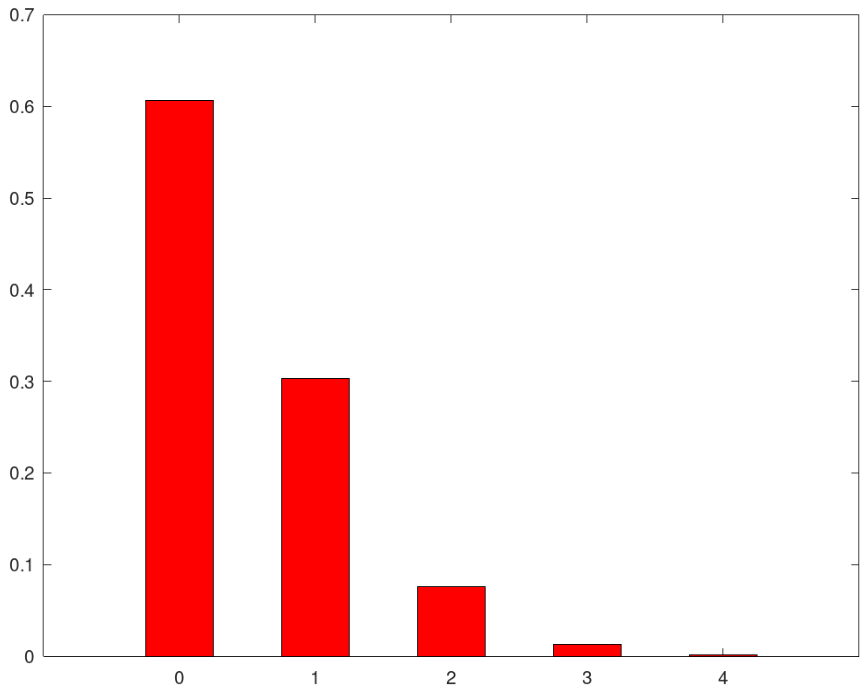
Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων του συστήματος φαίνεται στο ακόλουθο στιγμιότυπο οθόνης που λήφθηκε από το Octave.

-5.00000	5.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10.00000	-12.50000	2.50000	0.00000	0.00000
0.00000	10.00000	-11.66667	1.66667	0.00000
0.00000	0.00000	10.00000	-11.25000	1.25000
0.00000	0.00000	0.00000	10.00000	-10.00000

Υποερώτημα ii

Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα, ενώ τοποθετείται και στιγμιότυπο οθόνης από το Octave, όπου φαίνεται ότι οι ίδιες συμφωνούν με αυτές που υπολογίστηκαν προηγουμένως.

0.6066351	0.3033175	0.0758294	0.0126382	0.0015798



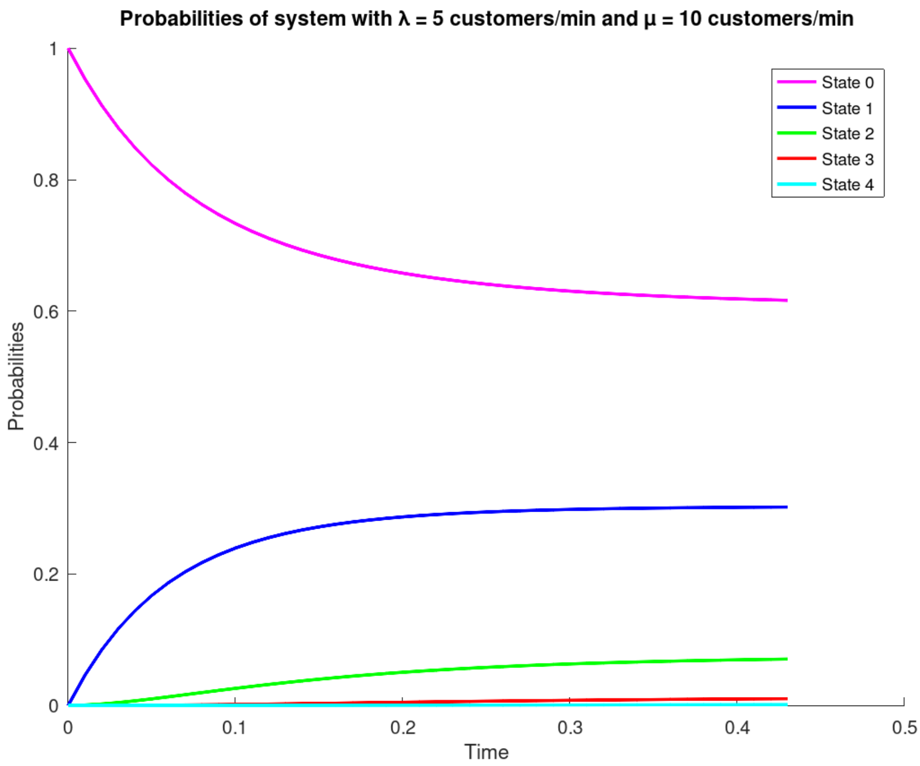
Υποερώτημα iii

```
Average number of customers in the system: 0.49921
```

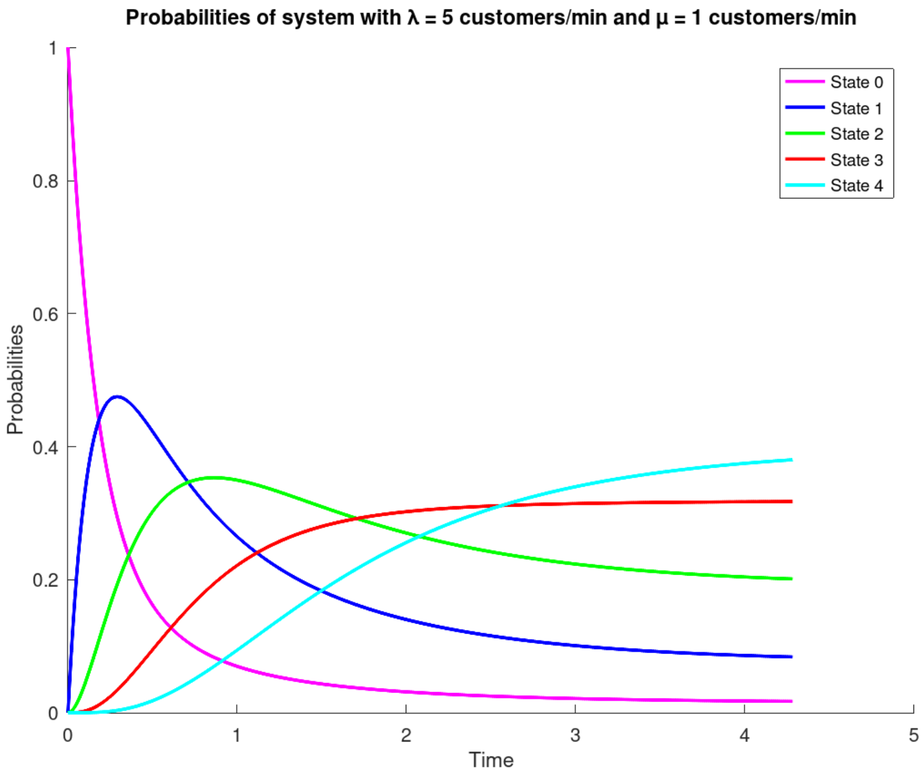
Υποερώτημα iv

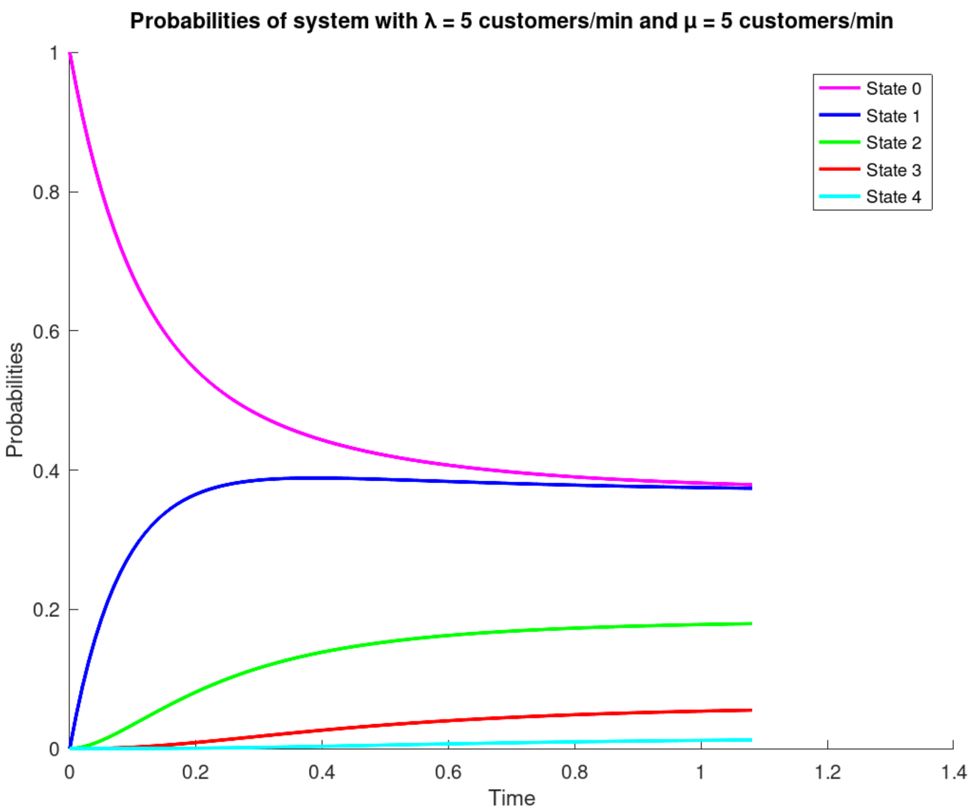
```
P(blocking) = 0.0015798
```

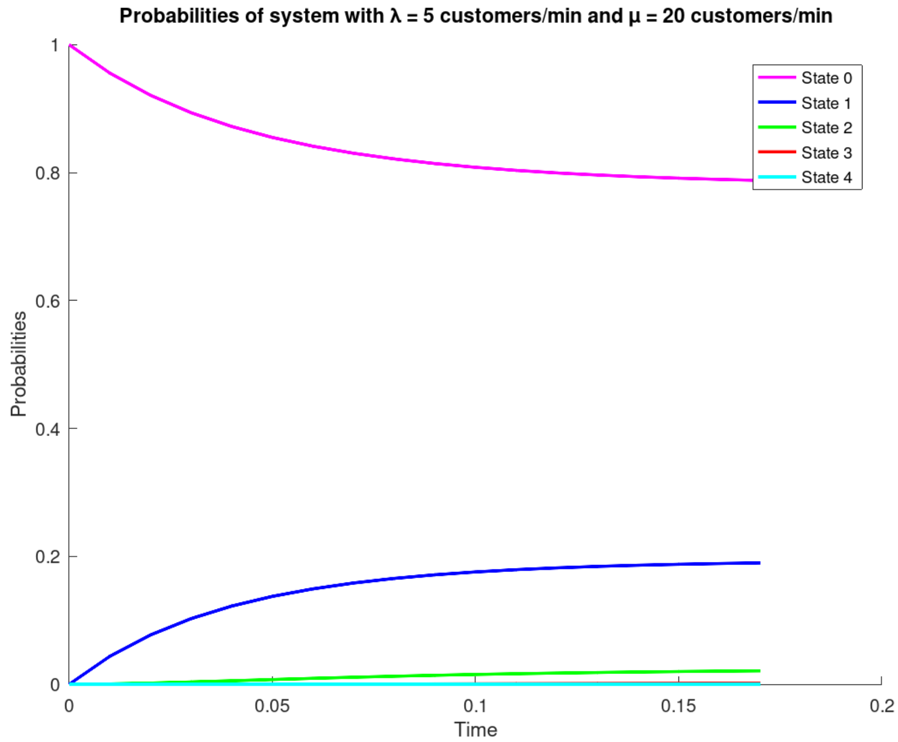
Υποερώτημα v



Υποερώτημα vi







Παρατηρώντας τα διαγράμματα, συμπαιρένουμε πως κρατώντας σταθερό το λ και αυξάνοντας το μ η ταχύτητα σύγκλισης αυξάνεται, αφού το σύστημα συγκλίνει στην εργοδική κατάσταση σε πολύ μικρότερο χρόνο. Επίσης, παρατηρούμε πως όσο μεγαλύτερο είναι το μ, τόσο μεγαλύτερη είναι η εργοδική πιθανότητα της κατάστασης 0 και τόσο μικρότερη της κατάστασης 4, άρα τόσο μικρότερη και η πιθανότητα απόρριψης πακέτων, με αντίστοιχο μοτίβο να παρατηρείται και για τις ενδιάμεσες καταστάσεις. Αυτή η συμπεριφορά κρίνεται λογική, καθώς όσο μεγαλύτερος είναι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης σε σχέση με το μέσο ρυθμό άφιξης πελατών, τόσο λιγότερους πελάτες αναμένουμε να έχουμε κάθε στιγμή στο σύστημα, άρα τόσο μεγαλύτερη πιθανότητα αναμένουμε για τις χαμηλότερες καταστάσεις και τόσο μικρότερη για τις υψηλές.

Κώδικας

```
clc;
clear all;
close all;
pkg load queueing

lambda = 5;
mu = 10;%1, 5, 20
nfig = 1;
states = [0, 1, 2, 3, 4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
```

```
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

% get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display(transition_matrix);

% get the ergodic probabilities of the system
P = ctmc(transition_matrix);
display(P);

% plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
figure(nfig);
bar(states, P, "r", 0.5);

% calculate average number of customers in the system
avg_cust = sum(P.*[0,1,2,3,4]);
display(["Average number of customers in the system: ", num2str(avg_cust)]);

% calculate P(blocking)
P_blocking = P(5);
display(["P(blocking) = ", num2str(P_blocking)]);

% transient probability of state 0 until convergence to ergodic probability. Convergence takes place P0 and P
differ by 0.01
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  for i=1:5
    Prob(i,index) = P0(i);
  endfor
  if P0 - P < 0.01
    break;
  endif
endfor

nfig = nfig+1;
colors = "mbgrc";

T = 0 : 0.01 : T;
figure(nfig);
hold on;
for i=1:5
  plot(T,Prob(i,:),colors(i),"linewidth",2);
endfor
hold off;

title(["Probabilities of system with λ = ", num2str(lambda), " customers/min and μ = ", num2str(mu), "
customers/min"])
legend("State 0", "State 1", "State 2", "State 3", "State 4");
xlabel("Time");
ylabel("Probabilities");
```