Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ

Συστήματα Αναμονής - Ροή Δ

5η Ομάδα Ασκήσεων - Αναφορά

Ονοματεπώνυμα:
Σταθά Ευσταθία

Αριθμοί Μητρώου:
el16190

Πίνακας Περιεχομένων

Άσκηση 1 - Δίκτυο με εναλλακτική δρομολόγηση

Λύσεις - Σχόλια

Ερώτημα (1)

Προκειμένου οι γραμμές να μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν ουρές M/M/1 χρειάζεται να ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές:

1. Θα πρέπει η συνολική ροή των πακέτων να ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό λ.
2. Θα πρέπει η διάσπαση της ροής στις δύο γραμμές να γίνεται με τυχαίο τρόπο, προκειμένου η ροή πακέτων στη γραμμή 1 να ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό α*λ και η ροή πακέτων στη γραμμή 2 να ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό (1-α)*λ.
3. Θα πρέπει τα μήκη των πακέτων να είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσο μήκος E[L], το δοθέν.
4. Θα πρέπει οι χρόνοι εξυπηρέτησης σε κάθε μια εκ των δύο γραμμών να είναι εκθετικά κατανεμημένοι.

Μάλιστα, για να μπορέσει το σύστημα να είναι εργοδικό, θα πρέπει σε κάθε γραμμή ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης να είναι μεγαλύτερος από το μέσο ρυθμό άφιξης, δηλαδή η ένταση του φορτίου να είναι μικρότερη της μονάδας. Επομένως,

$$\mu_1 = \frac{C_1}{E(L)} \Rightarrow \mu_1 = 14648 packets/sec$$
$$\mu_2 = \frac{C_2}{E(L)} \Rightarrow \mu_2 = 11718 packets/sec$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\alpha\lambda}{\mu_1} = 0,6827\alpha < 1$$
$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{(1-\alpha)\lambda}{\mu_2} = 0,8533\alpha < 1$$

Καθώς ισχύει α ≤ 1, το σύστημα είναι σίγουρα εργοδικό.

Ερώτημα (2)

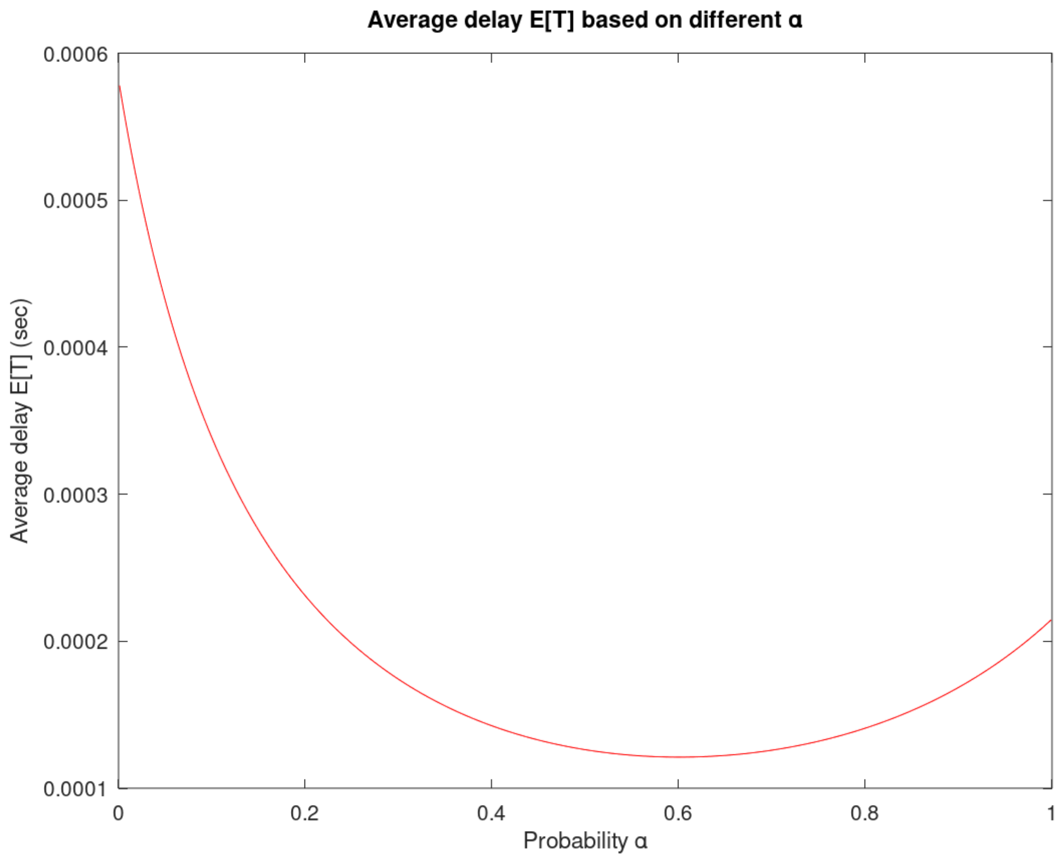
Όπως είναι γνωστό από το θεώρημα του Jackson, το μέσο πλήθος πακέτων στο σύστημα δίνεται από το άθροισμα του μέσου πλήθους πακέτων σε κάθε μια από τις 2 γραμμές.

$$E[n] = E[n_1] + E[n_2]$$

Παράλληλα, με βάση το νόμο του Little, γνωρίζουμε πως ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα εξαρτάται από το μέσο πλήθος των πελατών σε αυτό και τη ρυθμαπόδοση του. Ωστόσο, στην περίπτωση μας, όπου έχουμε άπειρη ουρά και, άρα, δεν υπάρχει πιθανότητα μπλοκαρίσματος κάποιου πακέτου, η ρυθμαπόδοση ισούται με το μέσο ρυθμό άφιξης πακέτων στο σύστημα, επομένως:

$$E[T] = \frac{E[n]}{\gamma} = \frac{E[n_1] + E[n_2]}{\lambda}$$

Δουλεύοντας με τα προαναφερθέντα και με χρήση της έτοιμης ουράς M/M/1, όπως αυτή δίνεται από το πακέτο queueing, εύκολα παράχθηκε το ζητούμενο διάγραμμα και υπολογίστηκε η ελάχιστη μέση καθυστέρηση και η τιμή της πιθανότητας α για την οποία καταφέρνουμε την επίτευξη της.




```
Minimum delay is: 0.0001212 for α = 0.601
```

```
pkg load queueing;

a = 0.001:0.001:0.999;

lambda = 10^4;
mu_1 = 15*10^6/(128*8);
mu_2 = 12*10^6/(128*8);

lambda_1 = lambda*a;
lambda_2 = lambda*(1-a);

min = 10^8;
min_a = 1;

for i = 1:columns(lambda_1)
    [U_1(i), R_1(i), Q_1(i), X_1(i), P0_1(i)] = qsmm1(lambda_1(i),
```

```
mu_1);
    [U_2(i), R_2(i), Q_2(i), X_2(i), P0_2(i)] = qsmm1(lambda_2(i),
mu_2);
    Q_all(i) = Q_1(i) + Q_2(i);
    avg_delay(i) = Q_all(i)/lambda;
    if avg_delay(i) < min
      min = avg_delay(i);
      min_a = a(i);
    endif
endfor

figure(1);

plot(a, avg_delay, 'r');

title("Average delay E[T] based on different α");
xlabel("Probability α")
ylabel("Average delay E[T] (sec)");

display(['Minimum delay is: ', num2str(min), ' for α = ',
num2str(min_a)]);
```

Άσκηση 2 - Ανοιχτό δίκτυο ουρών αναμονής

Λύσεις - Σχόλια

Ερώτημα (1)

Προκειμένου το δίκτυο να μπορεί να μελετηθεί ως ένα ανοιχτό δίκτυο με το θεώρημα Jackson θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές:

1. Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης όλων των ουρών Q_i θα πρέπει να ακολουθούν εκθετική κατανομή, με μέση τιμή μ_i.
2. Όλοι οι ρυθμοί άφιξης στις ουρές θα πρέπει να ακολουθούν κατανομή Poisson, με μέση τιμή λ_i. Αυτό ισχύει τόσο για τις εξωγενείς ροές, όσο και για τις ενδογενείς. Θα πρέπει, ακόμα, οι ροές αυτές να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.
3. Η εσωτερική δρομολόγηση θα πρέπει να γίνεται με τυχαίο τρόπο και όλες οι πιθανότητες δρομολόγησης από έναν κόμβο προς κάθε άλλον, με τον οποίο ο ίδιος συνδέεται, να αθροίζουν στη μονάδα.
4. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών δεν θα πρέπει να διατηρούν τη τιμή τους, αλλά να εξαρτώνται από την κατανομή κάθε εξυπηρετητή (memoryless), συμφωνώντας με το Kleinrock's Independence Assumption.

Ερώτημα (2)

Όπως γνωρίζουμε, σε κάθε ουρά M/M/1 ισχύει:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Επομένως, για κάθε μια εκ των 5 ουρών προκύπτει:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2 + \frac{2}{7}\lambda_1}{\mu_2}$$

$$\rho_3 = \frac{\frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_3}$$

$$\rho_4 = \frac{\frac{1}{7}\lambda_1 + \frac{1}{2}\frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_4} = \frac{\frac{3}{7}\lambda_1}{\mu_4}$$

$$\rho_5 = \frac{\lambda_2 + \frac{2}{7}\lambda_1 + \frac{1}{2}\frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_2 + \frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_5}$$

Ο κώδικας της συνάρτησης intensities παρατίθεται στη συνέχεια:

```
function [rho, is_ergodic] = intensities(lambda, mu)
  rho(1) = lambda(1)/mu(1);
  rho(2) = (lambda(2) + 2/7 * lambda(1)) / mu(2);
  rho(3) = 4/7 * lambda(1) / mu(3);
  rho(4) = 3/7 * lambda(1) / mu(4);
  rho(5) = (lambda(2) + 4/7 * lambda(1)) / mu(5);
  is_ergodic = true;
  for i = 1:5
    display(['ρ',num2str(i),' = ', num2str(rho(i))])
    is_ergodic = is_ergodic && (rho(i) < 1);
  endfor
endfunction
```

Ερώτημα (3)

Ο κώδικας της συνάρτησης mean_clients παρατίθεται στη συνέχεια:

```
function result = mean_clients(lambda, mu)
  [rho, ~] = intensities(lambda, mu)
  result = rho./(1-rho);
endfunction
```

Ερώτημα (4)

Ο κώδικας που κάνει τους ζητούμενους υπολογισμούς είναι ο ακόλουθος:

```
lambda = [4,1];
mu = [6,5,8,7,6];

# a
[rho, ~] = intensities(lambda, mu);

#b
mc = mean_clients(lambda, mu);
avg_time = sum(mc)/sum(lambda);

display(['Average service time = ', num2str(avg_time), ' sec']);
```

Το display αναφορικά με την ένταση του φορτίου σε κάθε ροή παραλείπεται, διότι συμπεριλαμβάνεται μέσα στην συνάρτηση intensities -όπως ζητήθηκε-.

Τα αποτελέσματα, όπως εκτυπώνονται στο terminal του Octave είναι:

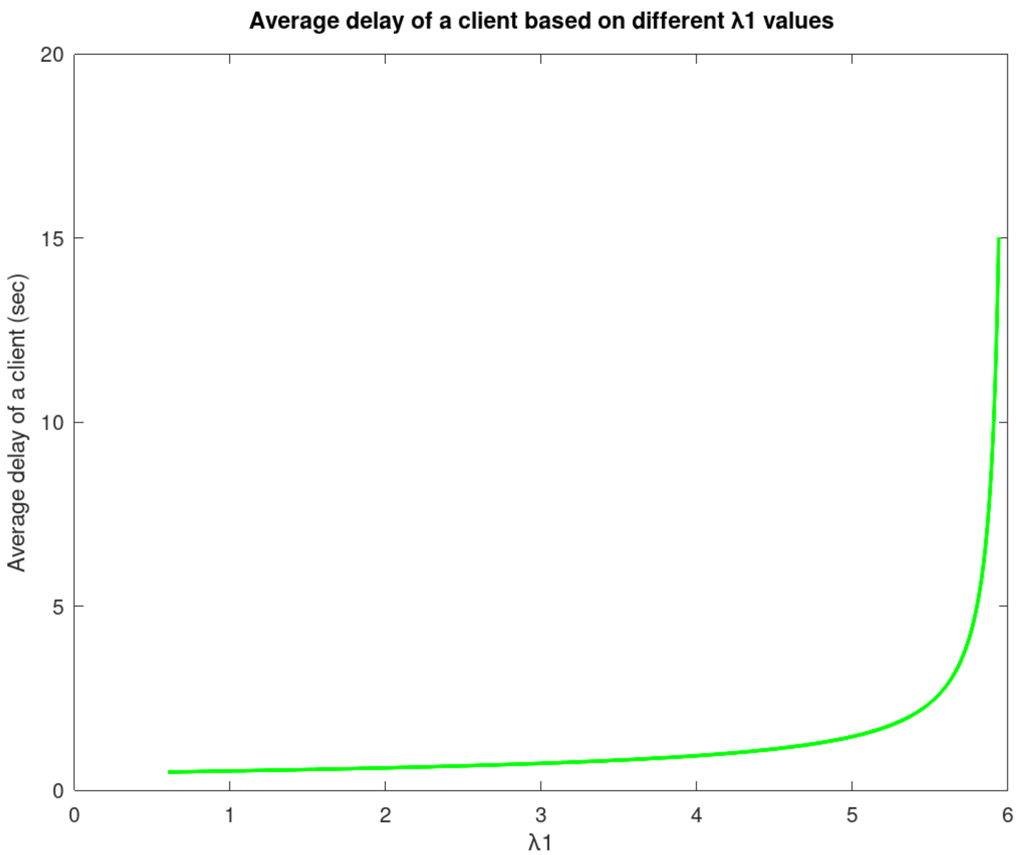
```
ρ1 = 0.66667
ρ2 = 0.42857
ρ3 = 0.28571
ρ4 = 0.2449
ρ5 = 0.54762
rho =

   0.66667   0.42857   0.28571   0.24490   0.54762

Average service time = 0.93697 sec
```

Ερώτημα (5)

Η στενωπός ουρά, ή αλλιώς η ουρά που προκαλεί τη μεγαλύτερη συμφόρηση, είναι αυτή που έχει τη μεγαλύτερη ένταση φορτίου. Με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος εύκολα συμπεραίνουμε πως αυτή ταυτίζεται με την Q_1. Για να μένει το σύστημα εργοδικό θα πρέπει η ένταση του φορτίου στη στενωπό ουρά να είναι μικρότερη ή ίση της μονάδας. Η μέγιστη, λοιπόν, αποδεκτή τιμή του λ_1 που επιτρέπει στο σύστημα να παραμένει εργοδικό είναι ίση με το γινόμενο της μέγιστης αποδεκτής τιμής του ρ_1, δηλαδή της μονάδα, με το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης της ουράς Q_1, $\mu_1 = 6$. Επομένως, έχουμε $\lambda_{max} = 6$ πελάτες$/sec$.

Ερώτημα (6)

Το ζητούμενο διάγραμμα μαζί με τον κώδικα του Octave που το παράγει παρατίθενται στη συνέχεια:



```
intervals = 0.1:0.001:0.99;
lambda_1 = 6*intervals;
mu = [6,5,8,7,6];
lambda_2 = 1;

for i = 1:length(lambda_1)
  lambda = [lambda_1(i), lambda_2];
  mc = mean_clients(lambda, mu);
  avg_time(i) = sum(mc)/sum(lambda);
endfor

plot(lambda_1, avg_time, 'g', 'linewidth', 2);

title("Average delay of a client based on different λ1 values");
xlabel("λ1")
ylabel("Average delay of a client (sec)");
```