

**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**

**Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ**

**Συστήματα Αναμονής - Ροή Δ**



---

**1η Ομάδα Ασκήσεων - Αναφορά**

---

**Ονοματεπώνυμο:**

Σταθά Ευσταθία

**Αριθμοί Μητρώου:**

el16190

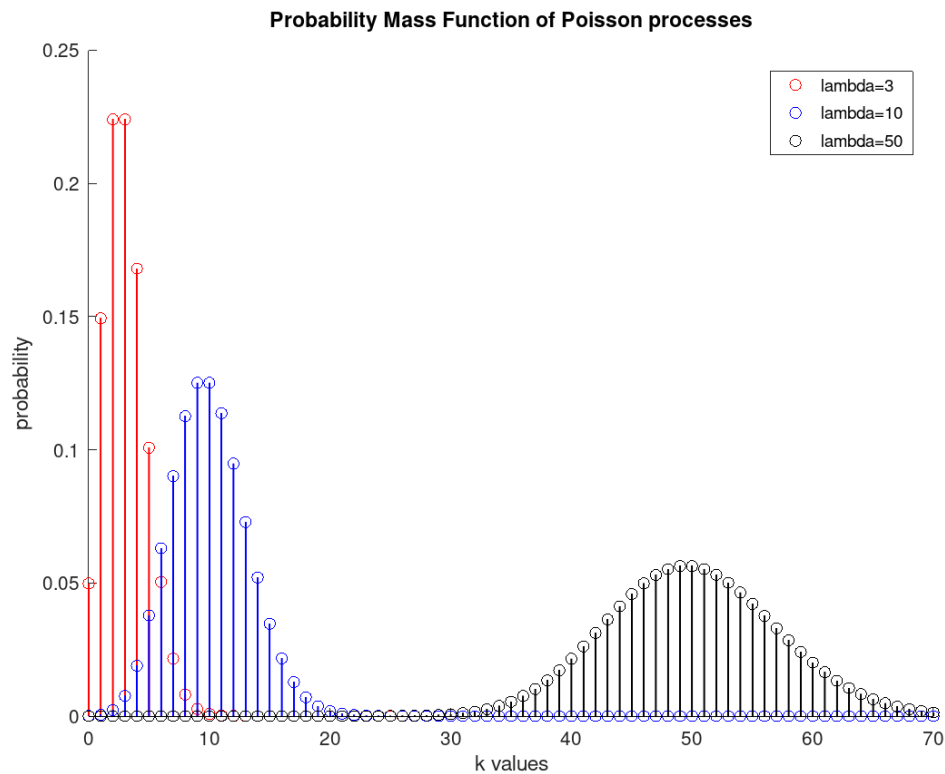
## Πίνακας Περιεχομένων

<b>Άσκηση 1 - Κατανομή Poisson</b>	<b>2</b>
Διαγράμματα - Σχόλια	2
Ερώτημα Α	2
Ερώτημα Β	3
Ερώτημα Γ	4
Ερώτημα Δ	5
Κώδικας	5
<b>Άσκηση 2 - Εκθετική Κατανομή</b>	<b>8</b>
Διαγράμματα - Σχόλια	8
Ερώτημα Α	8
Ερώτημα Β	8
Ερώτημα Γ	9
Κώδικας	9
<b>Άσκηση 3 - Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson</b>	<b>11</b>
Διαγράμματα - Σχόλια	11
Ερώτημα Α	11
Ερώτημα Β	11
Κώδικας	12

# Άσκηση 1 - Κατανομή Poisson

## Διαγράμματα - Σχόλια

### Ερώτημα Α



Όπως παρατηρούμε στο διάγραμμα, όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  της κατανομής Poisson, τόσο αυξάνεται και η διασπορά της. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από τη θεωρία, αφού γνωρίζουμε πως η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί Κατανομή Poisson ισούται με  $\lambda$ . Ουσιαστικά, η ίδια παρουσιάζεται σαν να “απλώνει”, κατά μήκους του άξονα των  $x$ . Παράλληλα, μειώνεται και η μέγιστη τιμή της (το ύψος της), το οποίο παρατηρείται κοντά ή πάνω στην τιμή  $x = \lambda$ . Αυτό είναι λογικό, καθώς, όπως γνωρίζουμε, το άθροισμα της τιμής όλων των σημείων της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της κατανομής Poisson (ως μιας διακριτής κατανομής) πρέπει να είναι 1. Ως εκ τούτου, όσο περισσότερα είναι τα σημεία της κατανομής, τόσο μικρότερες αναμένονται να είναι οι τιμές τους.

## Ερώτημα Β

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
```

Όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο οθόνης που τοποθετήθηκε παραπάνω, η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Poisson με  $\lambda=30$  είναι ίσες με 30, δηλαδή ίσες με  $\lambda$ . Αυτό είναι κάτι που αναμέναμε, καθώς το γνωρίζουμε από τη θεωρία, ενώ η απόδειξη γίνεται εύκολα, αλλά απαιτεί κάποιο μαθηματικό φορμαλισμό.

Αρχικά, για τη μέση τιμή έχουμε:

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{k!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t$$

Ενώ, για τη διασπορά ισχύει:

$$\sigma_n^2 = E[n^2] + (E[n])^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) - (\lambda t)^2$$

Όμως,

$$E[n(n-1)] = E[n^2] - E[n] \Rightarrow E[n^2] = E[n(n-1)] + E[n]$$

και, καθώς,

$$E[n(n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+2}}{k!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = (\lambda t)^2$$

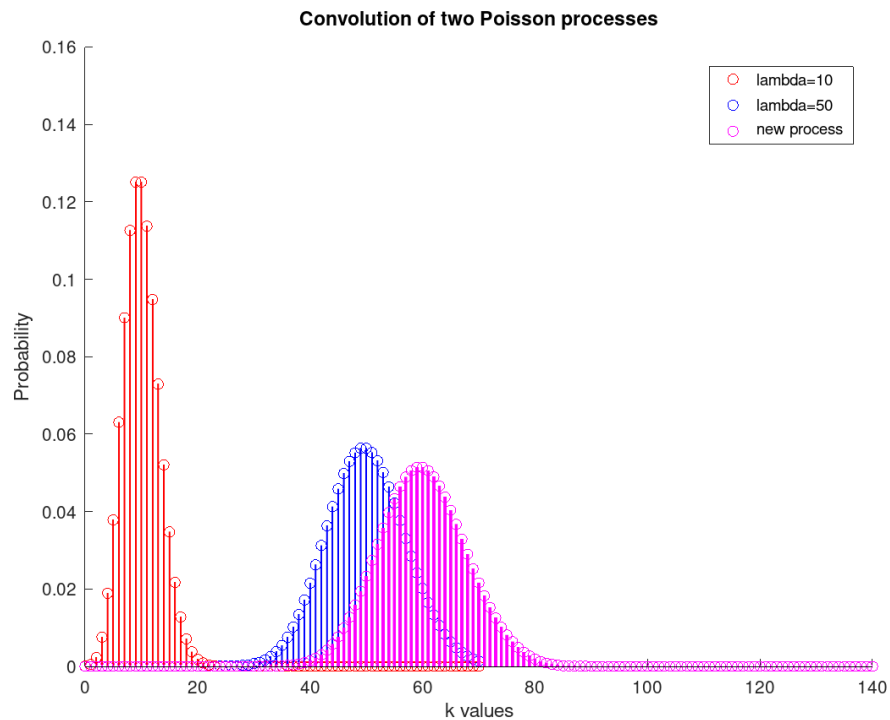
προκύπτει εύκολα πως

$$E[n^2] = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Επομένως,

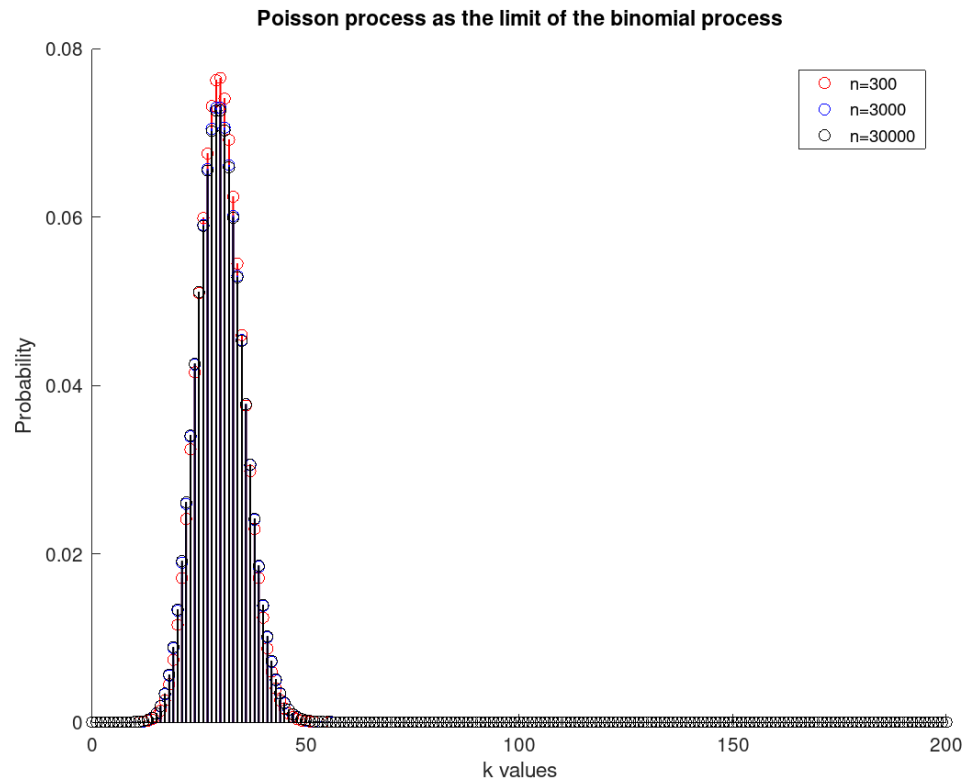
$$\sigma_n^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

### Ερώτημα Γ



Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, η κατανομή που προκύπτει από την υπέρθεση δύο ανεξάρτητων κατανομών Poisson με παραμέτρους  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα είναι, επίσης, μια κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Πράγματι, όπως βλέπουμε στο σχήμα η υπέρθεση των ανεξάρτητων κατανομών Poisson(10) και Poisson(50) μας έδωσε μια Poisson(60).

## Ερώτημα Δ



Για μια τυχαία μεταβλητή  $Y \sim \text{Διων}(N, p)$ , καθώς η παράμετρος  $N$  τείνει στο άπειρο, είναι γνωστό πως οι τιμές της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της, συγκλίνουν στις τιμές της συνάρτησης μάζας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής  $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , όπου  $\lambda = N * p$ . Η προσέγγιση αυτή είναι καλή μόνο εφόσον  $N \geq 100$ . Επομένως, η ίδια η κατανομή Poisson είναι το όριο μιας διωνομικής κατανομής παραμέτρων  $(n, p)$ , όταν  $n \rightarrow \infty$ .

## Κώδικας

```
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;

# TASK A: In a common diagram, design the Probability Mass Function of Poisson
Distribution
# with lambda parameters 3, 10, 30, 50. In the horizontal axes, choose k
parameters
# between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3, 10, 30, 50];
```

```

lambda_new = [3, 10, 50];

for i=1:columns(lambda_new)
    poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lambda_new)
    stem(k,poisson(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3","lambda=10","lambda=50");

# TASK B: regarding the poisson process with parameter lambda 30, compute its
mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index,:);
mean_value = 0;

for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
    p_new = poisson(index, i+1);
    mean_value = mean_value + i.*poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
    second_moment = second_moment + i.*i.*poisson(index,i+1);
endfor

variance = second_moment - mean_value.^2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);

# TASK C: consider the convolution of the Poisson distribution with lambda 20
with
# the Poisson distribution with lambda 30.

first = find(lambda_new==10);

```

```

second = find(lambda_new==50);
poisson_first = poisson(first,:);
poisson_second = poisson(second,:);

composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);

figure(2);
hold on;
stem(k,poisson_first(:),colors(1),"linewidth",1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),"linewidth",1.2);
stem(new_k,composed,"mo","linewidth",2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10","lambda=50","new process");

# TASK D: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution.
k = 0:1:200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;

n = [lambda.*10, lambda.*100, lambda.*1000];
p = lambda./n;

figure(3);

hold on;
for i=1:3
    binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
    stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor
hold off;
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("n=300", "n=3000", "n=30000");

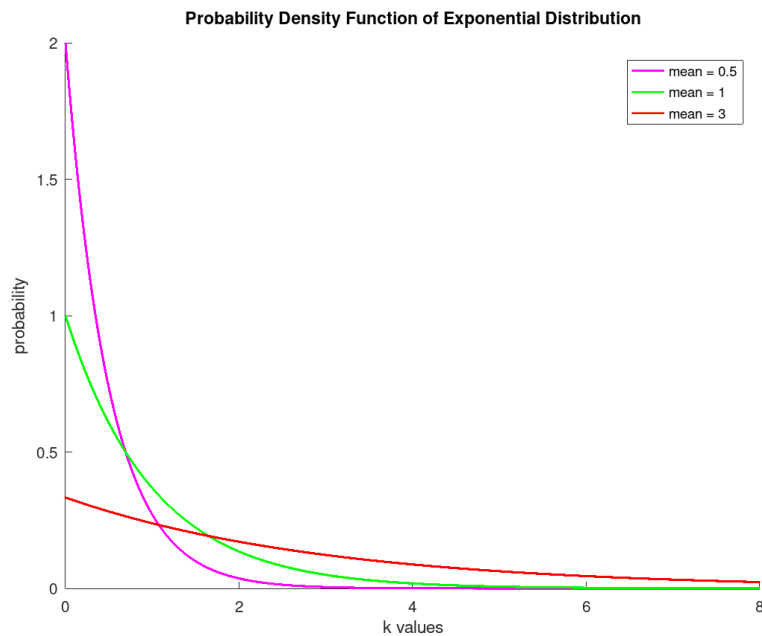
```



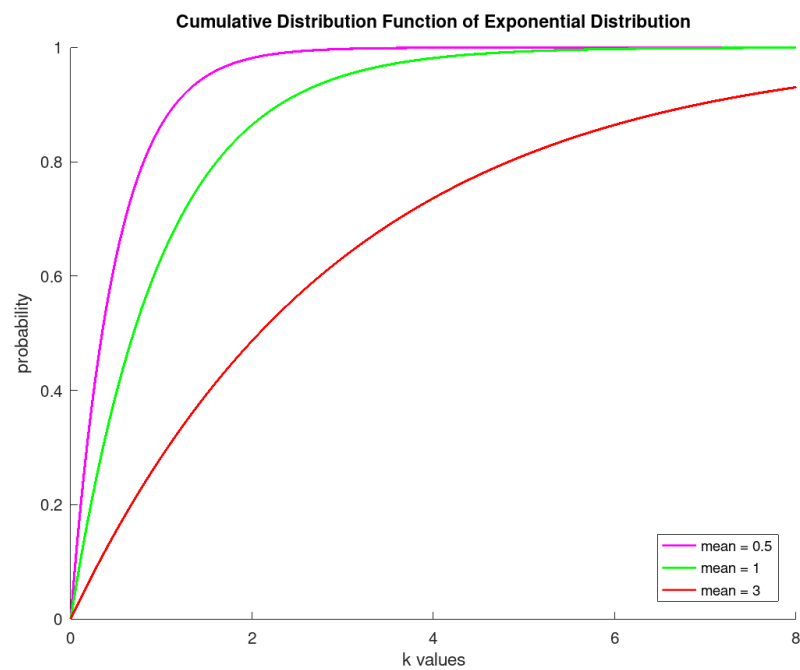
## Άσκηση 2 - Εκθετική Κατανομή

### Διαγράμματα - Σχόλια

#### Ερώτημα Α



#### Ερώτημα Β



## Ερώτημα Γ

```
P(X>30000) when X~Exp(1/2.5) is
probab_1 = 0.88692
P(X>50000|X>20000) when X~Exp(1/2.5) is
probab_2 = 0.88692
```

Όπως παρατηρούμε οι δύο πιθανότητες είναι ίδιες, ακριβώς όπως περιμέναμε με βάση τη θεωρία. Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε πως η Εκθετική Κατανομή χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης, μάλιστα είναι η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με αυτή την ιδιότητα. Μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα το αποτέλεσμα αυτό, χρησιμοποιώντας λίγο μαθηματικό φορμαλισμό:

Έστω  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  και  $s, t > 0$  τότε:

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s \cap X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

## Κώδικας

```
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;
nfig = 1;
colors = "mgrbk";

# TASK A: In a common diagram, design the Probability Density Function
of Exponential Distribution
# with mean 0.5, 1, 3. In the horizontal axes, choose k parameters
between 0 and 8.

k = 0:0.00001:8;
mean = [0.5, 1, 3];

for i = 1:3
    exp(i,:) = exppdf(k, mean(i));
endfor

figure(nfig);
hold on;
for i = 1:3
    plot(k, exp(i,:), colors(i), 'LineWidth', 1.5);
```

```

endfor
hold off;

title("Probability Density Function of Exponential Distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("mean = 0.5", "mean = 1", "mean = 3");

# TASK B: In a common diagram, design the Cumulative Distribution
Function of Exponential Distribution
# with mean 0.5, 1, 3. In the horizontal axes, choose k parameters
between 0 and 8.

for i = 1:3
    exp(i,:) = expcdf(k, mean(i));
endfor

nfig = nfig + 1;
figure(nfig);
hold on;
for i = 1:3
    plot(k, exp(i,:), colors(i), 'LineWidth', 1.5);
endfor
hold off;

title("Cumulative Distribution Function of Exponential Distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("mean = 0.5", "mean = 1", "mean = 3", 'location', 'southeast');

# TASK C: calculate the probabilities  $P(X > 30000)$  and  $P(X > 50000 | X > 20000)$ 
with  $1/\lambda = 2.5$  sec
# to show memory loss property of exponential distribution

exp_c = expcdf(k, 2.5);

probab_1 = 1 - exp_c(30000);
display("P( $X > 30000$ ) when  $X \sim \text{Exp}(1/2.5)$  is")
display(probab_1)

probab_2 = (1 - exp_c(50000))/(1 - exp_c(20000));
display("P( $X > 50000 | X > 20000$ ) when  $X \sim \text{Exp}(1/2.5)$  is")
display(probab_2)

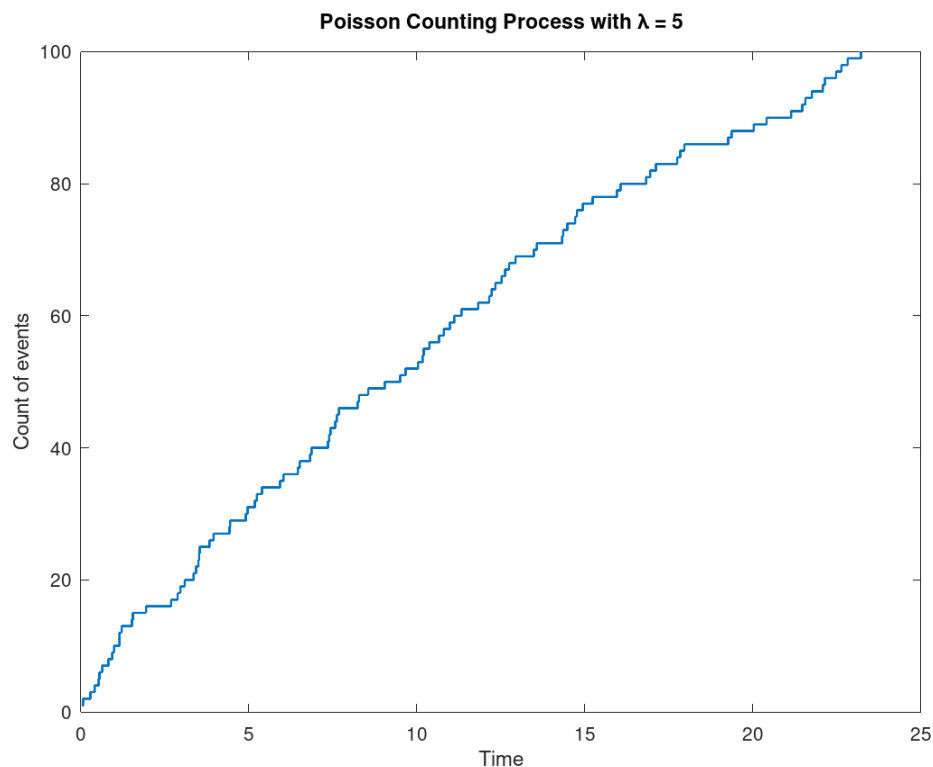
```

## Άσκηση 3 - Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

### Διαγράμματα - Σχόλια

#### Ερώτημα Α

Όπως γνωρίζουμε, οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Δημιουργήσαμε 100 τέτοια διαδοχικά τυχαία γεγονότα και παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα που αντιστοιχεί στη διαδικασία καταμέτρησης Poisson.



#### Ερώτημα Β

Ο αριθμός γεγονότων Poisson( $\lambda$ ) σε ένα χρονικό παράθυρο  $\Delta T = T_1 - T_2$  συνιστά μια τυχαία μεταβλητή  $v$ , η οποία ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή  $E_T[v] = \lambda * \Delta T$ . Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η μέση τιμή μιας κατανομής Poisson με παράμετρο  $\lambda$  είναι και η ίδια  $\lambda$ , επομένως περιμένουμε ανεξαρτήτως του πλήθους των τυχαίων γεγονότων, ο μέσος αριθμός γεγονότων που εμφανίζονται στη μονάδα του χρόνου να συγκλίνει στη μέση τιμή της κατανομής που ο ίδιος ακολουθεί, δηλαδή στην τιμή  $E_T[v] = \lambda * \Delta T = 5 * 1 = 5$ . Πράγματι, κάνοντας όλα τα απαιτούμενα πειράματα παρατηρήσαμε πως αυτό ισχύει, όπως φαίνεται και στο στιγμιότυπο οθόνης που λήφθηκε από την κονσόλα του Octave.

Mean value of poisson events in unit of time for 100 events, is 4.098.  
Mean value of poisson events in unit of time for 200 events, is 4.6718.  
Mean value of poisson events in unit of time for 300 events, is 5.0328.  
Mean value of poisson events in unit of time for 500 events, is 4.867.  
Mean value of poisson events in unit of time for 1000 events, is 5.0361.  
Mean value of poisson events in unit of time for 100000 events, is 4.9704.

## Κώδικας

```
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;

nfig = 1;

number_of_events = [100, 200, 300, 500, 1000, 100000];

for j=1:6
    random_intervals = exprnd(1/5, 1, number_of_events(j));

    event_time = zeros(1, number_of_events(j));
    counts = ones(1, number_of_events(j));
    event_time(1) = random_intervals(1);

    for i=2:number_of_events(j)
        event_time(i) = event_time(i-1) + random_intervals(i);
        counts(i) = counts(i-1) + 1;
    endfor

    if (j == 1)
        figure(nfig);
        stairs(event_time, counts, 'linewidth', 1.5);

        title("Poisson Counting Process with  $\lambda = 5$ ");
        ylabel("Count of events");
        xlabel("Time");
    endif

    mean_value_of_events = number_of_events(j)/event_time(number_of_events(j));

    disp(["Mean value of poisson events in unit of time for ",
num2str(number_of_events(j)),...])
```

```
                                " events, is ", num2str(mean_value_of_events), ".");  
endfor
```