

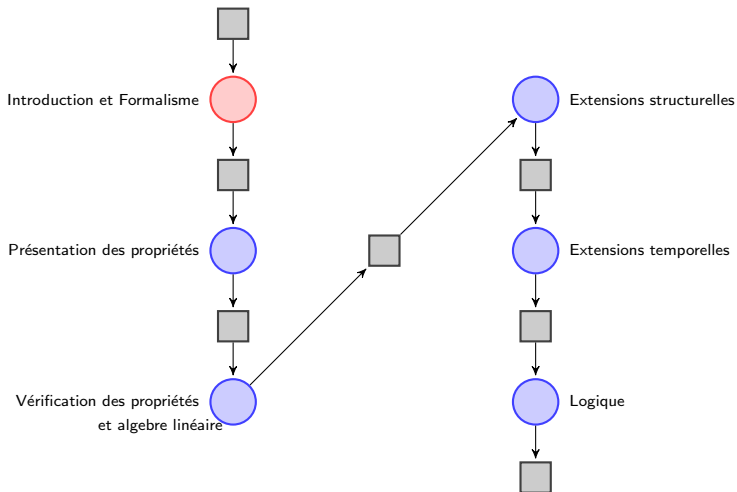
Réseaux de Petri: Formalisme

Pascal Racloz, Didier Buchs

Université de Genève

25 septembre 2017

Le formalisme



Les concepts introduits

- Définitions
- Représentation matricielle
- Fonctionnement
- Séquence de transitions
- Graphes de marquages

Définitions

Un réseau Place/Transition ou simplement réseau, est un quadruplet

$$R = (P, T, \text{Entrée}, \text{Sortie})$$

où

- P est un **ensemble** fini de *places*
- T est un ensemble fini de *transitions*
- Entrée est une application, Entrée : $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *application d'incidence avant*
- Sortie est une application, Sortie : $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *application d'incidence arrière*

Rappel sur les notations formelles :

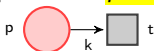


- Ensembles : ensembles, produit cartésien, power-set,
- Fonctions : domaine, co-domaine, fonctions partielles vs totales.
- Logique : prédicats, formules, quantificateurs.

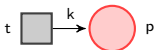
(Cont'd)

- Vocabulaire : Soit p une place ($p \in P$) et t une transition ($t \in T$),

- p est une **place d'entrée** de t si $k = \text{Entrée}(p, t) > 0$:

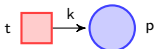


- p est une **place de sortie** de t si $k = \text{Sortie}(p, t) > 0$:

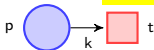


TRANSITIONS :

- t est une **transition d'entrée** de p si $k = \text{Sortie}(p, t) > 0$:



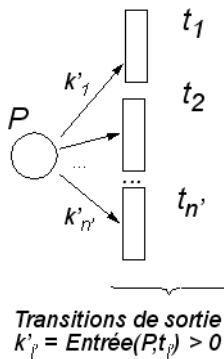
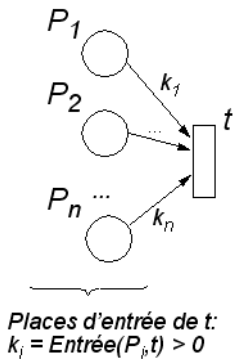
- t est une **transition de sortie** de p si $k = \text{Entrée}(p, t) > 0$:



k, k', l, l' sont les valuations des arcs

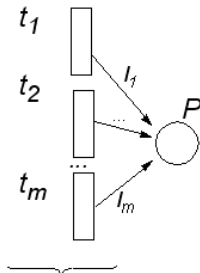
Entrée

Application d'incidence avant

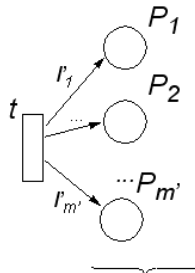


Sortie

Application d'incidence arrière



Transitions d'entrée de P :
 $I_i = \text{Sortie}(P, t_i) > 0$

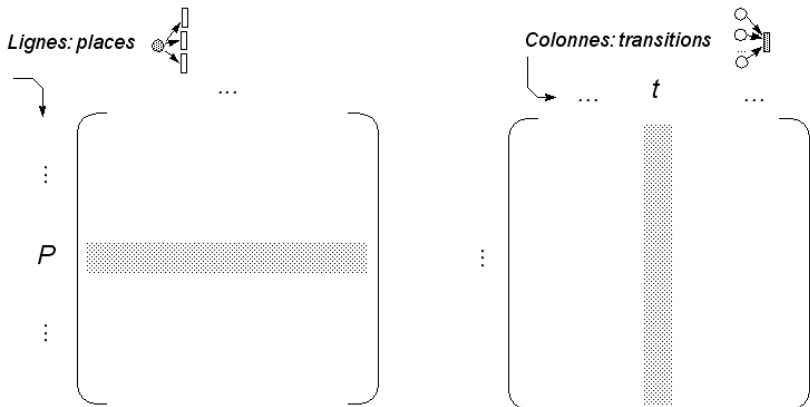


Places de sortie de t :
 $I'_j = \text{Sortie}(P_j, t) > 0$

(Contd)

- Vers une représentation matricielle

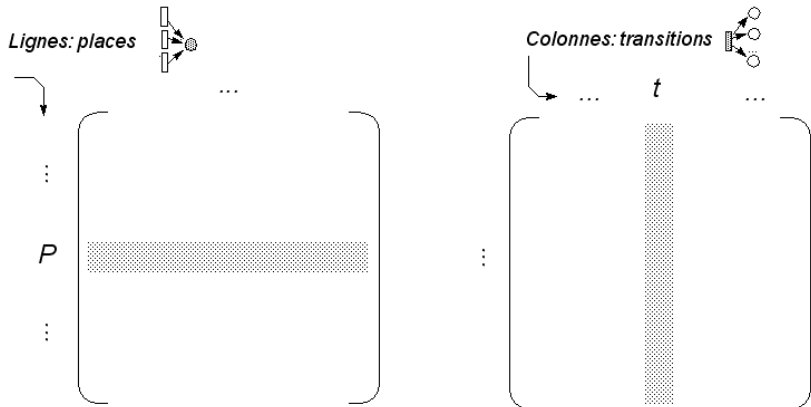
Entrée



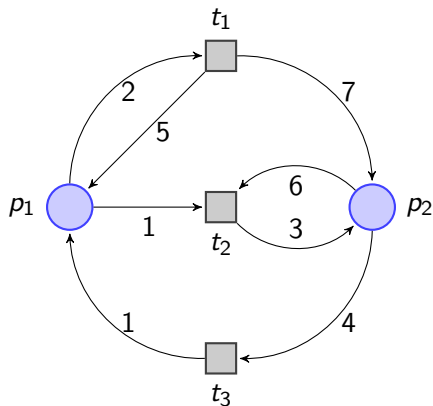
(Cont'd)

- Vers une représentation matricielle

Sortie

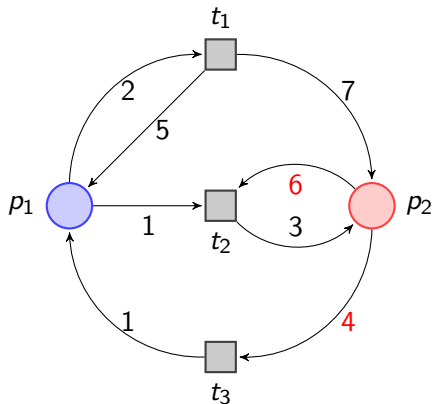


Représentation matricielle



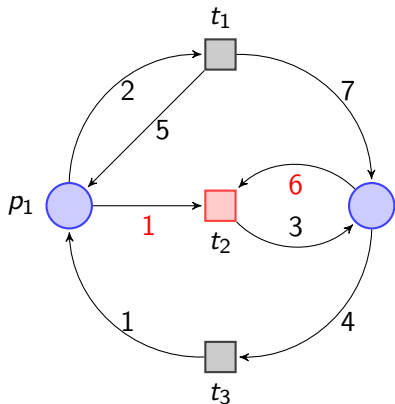
| <i>Entree</i> | <i>Sortie</i> |
|--|--|
| $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ |

Représentation matricielle



Entree

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{array}{c} t_1 \ t_2 \ t_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

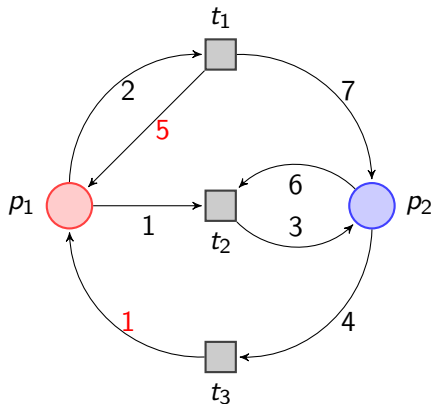


Entree

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{array}{c} t_1 \ t_2 \ t_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

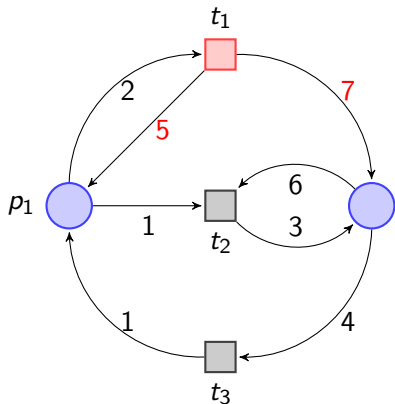
12/33

Représentation matricielle



Sortie

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Sortie

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Exercice

- Représentation graphique d'un réseau

Construire le graphe du réseau décrit par les fonctions d'Entrée et de Sortie suivantes :

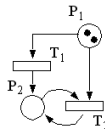
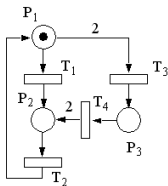
$$\begin{array}{lcl} \text{Entrée} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Sortie} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{matrix} \end{array}$$

Exercice

- Représentation graphique d'un réseau

Donner les matrices d'incidence pour les réseaux ci-dessous



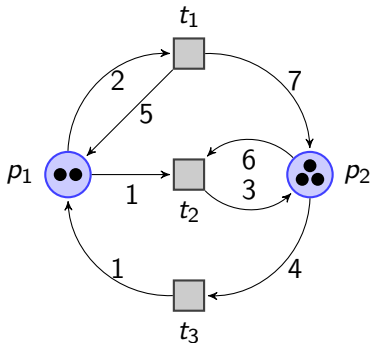
Posent-ils des problèmes ?

Marquage

Le marquage d'un réseau est son état. Formellement, un marquage est une application

$$M : P \rightarrow \mathbb{N}$$

donnant pour chaque place le nombre de jetons qu'elle contient. Le marquage initial est généralement noté M_0 .



$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fonctionnement d'un réseau (sémantique)

- Une transition t est tirable pour un marquage M si et seulement si

$$\forall p \in P, M(p) \geq \text{Entrée}(p, t)$$

Il s'agit de la condition de franchissement de t depuis M .

- Si t est franchissable depuis M , le tir (ou le franchissement) de t produit un nouveau marquage M' donné par

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - \text{Entrée}(p, t) + \text{Sortie}(p, t)$$

(Cont'd)


- Notations

- t tirable depuis M :

$$M \xrightarrow{t}$$

- tir de t depuis M donnant M' :

$$M \xrightarrow{t} M'$$

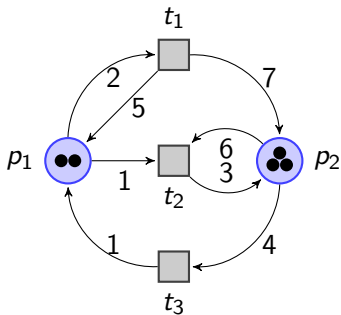
- $M' = M - \text{Entree}(.,t) + \text{Sortie}(.,t)$ 

- Définition La *matrice d'incidence* d'un réseau, notée C , est définie par

$$\forall p \in P, \forall t \in T \quad C(p, t) = \text{Sortie}(p, t) - \text{Entree}(p, t)$$

Si $M \xrightarrow{t} M'$ alors $M' = M + C(.,t)$

Exemple



$$\text{Entrée}(\cdot, t_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \leq M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

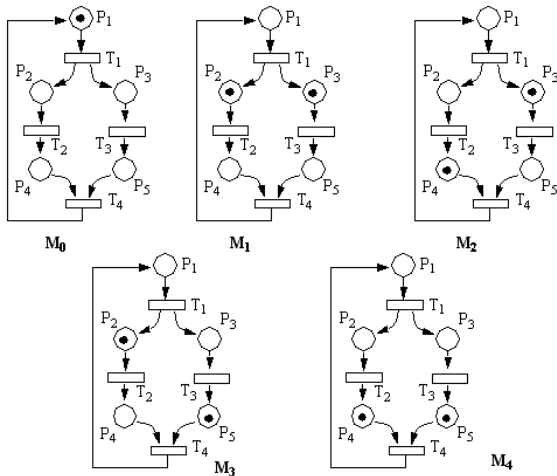
$$M_0 \xrightarrow{t_1} M$$

Exemple(cont'nd)

$$\begin{aligned}M &= M_0 - \text{Entrée}(\cdot, t_1) + \text{Sortie}(\cdot, t_1) \\&= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M &= M_0 + C(\cdot, t_1) \\&= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Séquence de transitions : un exemple



(Cont'd)

La séquence $T_1 T_2$ est une séquence de franchissements. On peut écrire

$$s = T_1 T_2$$
$$\text{et } M_0 \xrightarrow{s} M_2$$

- La séquence est définie à partir d'un marquage donné.
- C'est une suite de transitions franchissables successivement.

La séquence $T_1 T_2$ n'est pas une séquence de franchissement à partir de $M_0 \xrightarrow{s} M_3$

Vecteur caractéristique :

où \bar{s} est le *vecteur caractéristique* de la séquence de transitions

$$s = t_1 t_2 \dots t_n$$

tel que $\bar{s}(t)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t dans s

$$\bar{s} : T \rightarrow \mathbb{N}$$

Etant donné la séquence $t_1 t_2 t_2 t_3 t_1$

le vecteur caractéristique est : $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Propriétés :

$$s = s_1 . s_2$$

$$\Rightarrow \bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$$

Séquence de transitions

- Etant donnée la situation où

$$M \xrightarrow{t_1} M_1, M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \dots M_n \xrightarrow{t_n} M'$$

alors

$$M' = M + C.\bar{s}$$

où \bar{s} est le *vecteur caractéristique* de la séquence de transitions

$$s = t_1 t_2 \dots t_n$$

tel que $\bar{s}(t)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t dans s

$$\bar{s} : T \rightarrow \mathbb{N}$$

On note

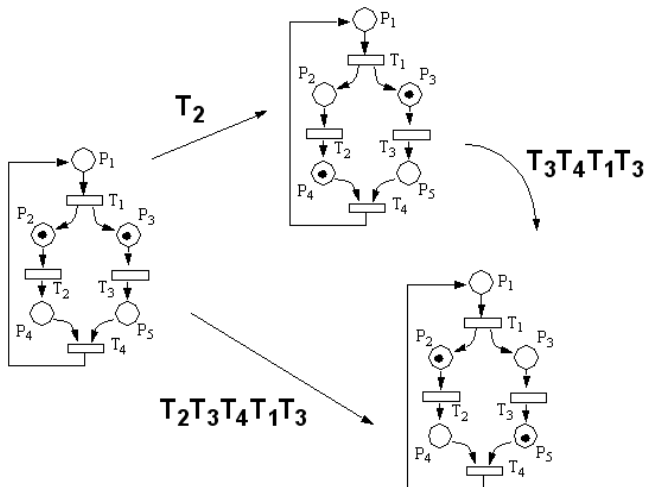
$$M \xrightarrow{s} M'$$

Equation Fondamentale

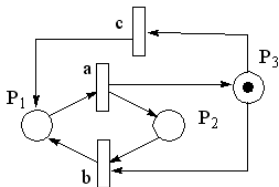
$$M' = M + C \cdot \bar{s}$$

- Rqs : $s = s1.s2 \Rightarrow \bar{s} = \bar{s1} + \bar{s2}$
 $\bar{s1} = \bar{s2} \Rightarrow M + C.\bar{s1} = M + C.\bar{s2}$

Exemple

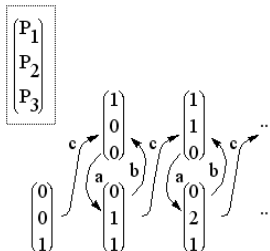


Exercice : Séquence de transitions



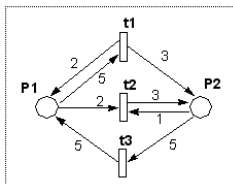
Matrice d'incidence:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



- Vérifier que la séquence de transitions 'cabacacab' est franchissable
- Donner le marquage résultat en utilisant son vecteur caractéristique

Exercice (...)



- Quels sont les marquages minimums de ce réseau tels que respectivement les séquences suivantes soient franchissables ?
 - $s_1 = t_2 t_3$
 - $s_2 = t_3 t_2$
- Pouvez-vous 'généraliser' ?

Vérifier avec la séquence $s = t_2 t_2 t_3 t_1$. Que dire de

$$M_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Corrections :

$$s_{i+1} = s_i t_i$$

Supposons M_i solution du problème pour S_i

$$M_i + C.\overline{s_i} + C.\overline{t_i} = M_i + C.\overline{s_{i+1}}$$

M_i est une solution ssi

$$Entree(., t_i) \leq M_i + C.\overline{s_i}$$

Encore quelques définitions...

- Marquages accessibles (ou successeurs)

Un marquage M' est un *marquage accessible* (successeur de M) s'il existe une suite de transitions $s \in T^*$ tel que

$$M \xrightarrow{s} M'$$

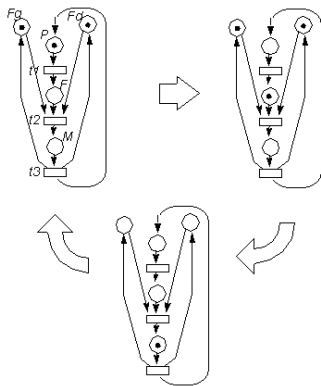
L'ensemble des marquages accessibles depuis M est noté $A(R, M)$

- Graphe des marquages accessibles

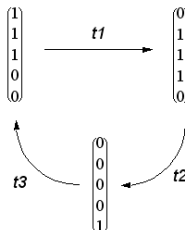
Le *graphe des marquages accessibles*, noté $GA(R, M)$, est le graphe ayant comme sommets les marquages de $A(R, M)$ et tel qu'il existe un arc entre deux sommets M_1 et M_2 si et seulement si

$$M_1 \xrightarrow{t} M_2 \text{ ou } t \in T$$

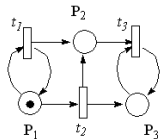
Graphe des marquages accessibles et fonctionnement



$$\begin{pmatrix} P \\ Fg \\ Fd \\ F \\ M \end{pmatrix}$$



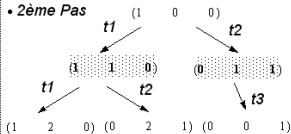
Marquages accessibles : exemple



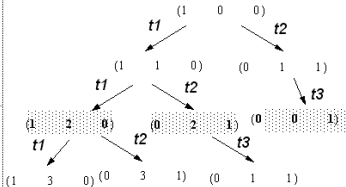
• 1er Pas



• 2ème Pas



• 3ème Pas



Résumé

- Définition des fonctions Entrée, Sortie et Marquage
- Représentation sous forme de matrices et vecteurs
- Tirabilité et tir d'une transition
- Séquence de transitions et son utilisation dans l'équation fondamentale
- Marquages accessibles et graphe de ces marquages