Chapitre I : Matrices et déterminants

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Matrices :

I. 1) Généralité et opérations sur les matrices :

Définition 1 : On appelle matrice de taille $k \times n$ (ou d'ordre $k \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de k lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $k \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$.

Dans le cas où $k = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Notation : Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

ou encore : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$ ou $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$

L'élément a_{ij} est donc placé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et sur la $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array} \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad j^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array}$$

- Pour $k = n$, on dit qu'on a une matrice carrée.
- Lorsque $k = 1$, la matrice de taille $1 \times n$ est appelée vecteur-ligne.
- Si $n = 1$, la matrice de taille $k \times 1$ est appelée vecteur-colonne.
- La matrice de taille $k \times n$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la matrice nulle de $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$.

La matrice nulle est notée $O_{k,n}$ ou bien O_n si elle est carrée.

Exemples:

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ est de taille 4×3 à coefficients réels.

$A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$

2) La matrice $B = \begin{pmatrix} i & -5 \\ 3i+1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

$B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle de taille 2×3

$C = O_{2,3}$

4) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée nulle d'ordre 3.

$D = O_3$

5) $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

E est un vecteur-colonne à 4 éléments.

F est un vecteur-ligne à 4 éléments

$E \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$

Définition 2 : (Addition matricielle et multiplication par un scalaire)

Soient $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit l'addition des matrice par :

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq n}}$$

- On définit le produit d'une matrice par un scalaire comme la matrice : $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq n}}$

- La matrice opposée d'une matrice A est notée $-A$.

Si $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq n}}$, alors $-A=(-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq n}}$

Remarque : La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie.

Exemple :

Soient les matrices : $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 9 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 6+2 & 4+0 & 5+7 \\ 0+9 & 1-1 & 3-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2A=\begin{pmatrix} -2\times 6 & -2\times 4 & -2\times 5 \\ -2\times 0 & -2\times 1 & -2\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & -8 & -10 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$3B=\begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times 0 & 3\times 7 \\ 3\times 9 & 3\times(-1) & 3\times(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 21 \\ 18 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

La matrice opposée de A est $-A=\begin{pmatrix} -6 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Définition 3 : (Produit matriciel)

Soient $A = (a_{i\ell})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq \ell \leq p}}$ une matrice de taille $k \times p$

et $B = (b_{\ell j})_{\substack{1 \leq \ell \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de taille $p \times n$.

On définit le produit matriciel par :

$$AB = \left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}\, b_{\ell j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$$

C'est une matrice de taille $k \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\sum_{\ell=1}^{p} a_{1\ell} b_{\ell 1}} & \cdots & \sum_{\ell=1}^{p} a_{1\ell} b_{\ell n} \\ \vdots & & \\ \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell} b_{\ell 1} & \cdots & \boxed{\sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell} b_{\ell n}} \end{pmatrix}$$

Remarques:

1) Le produit matriciel n'est pas défini s'il n'y a pas comptabilité des formats :

Matrice de taille $k \times p$ X Matrice de taille $p \times n$

= Matrice de taille $k \times n$.

2) Le produit de deux matrices carrées de taille n est encore une matrice carrée de taille n.

3) Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles le soit.

4) Une puissance de matrice non-nulle peut être nulle.

5) Le produit matriciel n'est pas commutatif, même en cas de compabilité de formats.

Exemples:

1) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1+1\times2 & 2\times0+1\times(-1) & 2\times1+1\times3 \\ 1\times1+3\times2 & 1\times0+3\times(-1) & 1\times1+3\times3 \\ 2\times1+0\times2 & 2\times0+0\times(-1) & 2\times1+0\times3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que le produit matriciel est non commutatif.

3) $$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 .$$

C'est à dire que si on a $AB = O$, on n'a pas forcément $A = O$ ou $B = O$.

4) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O_2$$, donc une puissance de matrice non nulle peut être nulle.

Proposition 1: (Propriétés du produit matriciel)

* **Associativité**: $\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$:
$$(AB)C = A(BC)$$
* **Bilinéarité**: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$; $C, D \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$ et $B(\lambda C + \mu D) = \lambda BC + \mu BD$.
* **Elément neutre**: On appelle matrice identité (de taille n) la matrice carrée de taille n: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$: $I_n A = A I_n = A$.

Remarque: Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = BA$, on dit que A et B commutent.

Définition 4 : (Matrice diagonale)

On appelle matrice diagonale toute matrice carrée $D=(d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $i\neq j \Rightarrow d_{ij}=0$. Une matrice diagonale est de la forme :

$$D_n=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

On la note $\mathrm{Diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$.

Exemple : Soit la matrice identité d'ordre 3 :

$$I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_3=\mathrm{Diag}(1,1,1)$.

Proposition 2 : (Produit par blocs)

Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de tailles indiquées ci-dessous :

$$\begin{array}{c|cc} & q & q' \\ \hline p & A & C \\ p' & B & D \end{array} \times \begin{array}{c|cc} & r & r' \\ \hline q & A' & C' \\ q' & B' & D' \end{array} = \begin{pmatrix} AA'+CB' & AC'+CD' \\ BA'+DB' & BC'+DD' \end{pmatrix}$$

Remarque : Tout se passe avec les blocs comme si chacun d'entre eux était un scalaire.

Remarque : La matrice I_n, et de manière plus générale, la matrice λI_n, $\lambda\in\mathbb{K}$ commute à toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 5 : (Transposée d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, la matrice $(a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq k}}$ de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$, que l'on note : ${}^tA$ ou A^T.

Exemples :

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} i & -2i \\ 3 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ -2i & 4i \end{pmatrix}$$

Proposition 3 : (Propriétés de la transposition)

- **Linéarité :** $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB.$$
- **Involutivité :** $\forall\ A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$: ${}^t({}^tA) = A$
- **Effet sur un produit :** $\forall A \in \mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:
$${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$$

Définition 6 : (Matrice symétrique / antisymétrique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On dit que A est symétrique si : ${}^tA = A$.

On dit que A est antisymétrique si : ${}^tA = -A$.

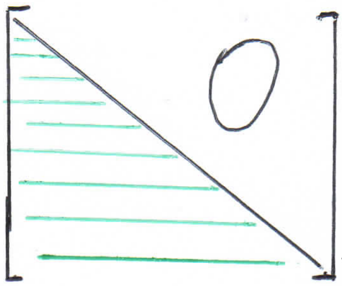
Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique (sa diagonale est nulle, donc tout coefficient diagonal est égal à son opposé).

Définition 7 : (Matrice scalaire, matrice triangulaire)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

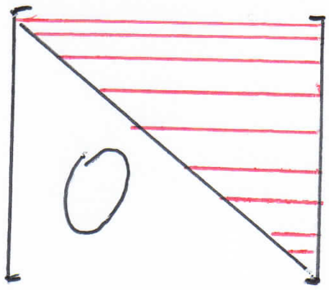
* On dit que A est une matrice scalaire si elle s'écrit sous la forme : $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et I_n est la matrice identité d'ordre n

* On dit que A est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ (resp. $i > j$).



$a_{ij} = 0$ si $i < j$

matrice triangulaire inférieur



$a_{ij} = 0$ si $i > j$

matrice triangulaire supérieure

Exemples:

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est de la forme $A = 3 I_3$, donc c'est une matrice scalaire.

On remarque qu'une matrice scalaire est un cas particulier de la matrice diagonale.

2) La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

3) La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure

Définition 8: (Egalité de matrices)

Soient $A=[a_{ij}]\in\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ et $B=[b_{ij}]\in\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ (les deux matrices sont de même format).

Les matrice A et B sont égales lorsque :

$$a_{ij}=b_{ij} \quad \text{pour tout } i=1,\dots,k \text{ et } j=1,\dots,n.$$

Définition 9: (Trace d'une matrice carrée)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, le scalaire :

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

C'est la somme des éléments de la diagonale principale de A.

Exemple:

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$

$tr(A)=-1+1+5=5$

Proposition 4: (Propriétés de la trace)

1) Linéarité : Pour tous $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$:

$$tr(\lambda A+\mu B)=\lambda\, tr(A)+\mu\, tr(B)$$

2) Effet sur un produit : Pour tous $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:

$$tr(AB)=tr(BA).$$

Preuve :

1) On a : $tr(\lambda A+\mu B)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}+\mu b_{ii})=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\mu\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$

$$=\lambda\, tr(A)+\mu\, tr(B)$$

2) La matrice AB est carrée de taille n, alors que la matrice BA est carrée de taille p, mais elles ont même trace, car :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (BA)_{kk}$$

$$= \operatorname{tr}(BA)$$

Explication de la $1^{\text{ère}}$ ligne de la démonstration :
Nous avons vu déjà que : $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
Donc : $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ki}$

Proposition 5 : (Formule du binôme de Newton et formule "$A^n - B^n$")

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commutent, i.e. que : $AB = BA$. On a :

1) $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ (formule du binôme de Newton)

2) $A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-k-1}$.

Rappel : $\binom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.