# I. Définitions et terminologie

## I.1 Introduction

Les équations différentielles permettent de donner une description mathématique de l'évolution de phénomènes étudiés dans plusieurs domaines tels qu'en physique, biologie, économie, etc.
Par exemple : la détermination de la vitesse d'un corps en chute libre, la décharge d'un condensateur dans un circuit électrique, la dynamique des populations, etc.

On appelle équation différentielle ordinaire d'ordre $n$ ou (EDO) une équation de la forme :

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $F$ est une fonction de plusieurs variables et $y$ est une fonction inconnue définie de $I$ dans $\mathbb{R}$.
Il s'agit d'une équation qui lie une fonction inconnue $y$ d'une variable réelle $x$ avec ses dérivées successives.
Une EDO est dite d'ordre $n$ si elle contient des dérivées de $y$ jusqu'à l'ordre $n$.
Il est d'usage de noter cette fonction inconnue par $y$ au lieu de $y(x)$ dans l'équation différentielle.
Par exemple :

1. L'équation $x^2y' + (x-1)y^2 - 4x = 0$ est une EDO du premier ordre.
2. L'équation $y'' + xy' = \ln x$ est une EDO du second ordre.
3. L'équation $-y^{(3)} + 2x(y-1) = e^x$ est une EDO d'ordre 3.

Dans ce chapitre, on s'intéresse dans la première partie aux **équations différentielles linéaires du premier ordre** et dans la deuxième partie aux **équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants**.

## I.2 Définition d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

**Définition 1.**
*On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme :*

$$\boxed{a(x)y' + b(x)y = f(x) \qquad (E)}$$

*où :*

- *$a$ et $b$ sont des fonctions données continues sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ avec $a(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$ et elles sont appelées coefficients de l'équation $(E)$.*
- *$f$ est une fonction donnée continue sur $I$ appelée second membre de l'équation $(E)$.*
- *$y$ est une fonction inconnue de classe $C^1$ sur $I$ à déterminer.*

**Définition 2.**
*On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre* ***homogène*** *ou* ***équation sans second membre associée à*** *$(E)$, l'équation de la forme :*

$$\boxed{a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (H)}$$

**Exemple 1.**

1. *$(x^2-1)y' + xy = e^x$. C'est une EDO linéaire du premier ordre avec second membre.*
2. *$(chx)y' + (shx)y = 0$. C'est une EDO linéaire du premier ordre sans second membre.*

# II. Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

## II.1 Résolution de l'équation homogène ou sans second membre

Soit $(H)$ l'équation sans second membre ou homogène suivante :

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (H)$$

Le théorème suivant donne l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$.

**Théorème 1.**
*Soient $a$, $b$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ avec $a(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$.*
*Les solutions sur $I$ de l'équation différentielle homogène $(H)$ sont données par :*

$$\boxed{y_h(x) = \lambda e^{-F(x)},}$$

*où $F(x)$ est une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$ et $\lambda$ est une constante réelle.*

**Preuve** :

- On ramène l'équation $(H)$ sous la forme :

$$y' = -\frac{b(x)}{a(x)}\,y. \qquad (\star)$$

- On écrit la dérivée $y'$ sous la forme :

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

- L'équation $(\star)$ devient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b(x)}{a(x)}\,y.$$

- Dans l'égalité précédente, on sépare les variables $x$ et $y$, on obtient :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx \quad \text{avec} \quad y \neq 0.$$

- On intègre ensuite de part et d'autre par rapport à $y$ et à $x$, on obtient :

$$\ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx = -F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- On déduit l'expression de l'inconnue $y$ ($y \neq 0$), ainsi :

$$y(x) = \lambda e^{-F(x)}, \qquad \text{où} \quad \lambda = \pm e^c \in \mathbb{R}^\star.$$

- D'autre part, nous remarquons que $y=0$ est une solution triviale de l'équation $a(x)y'+b(x)y=0$. Ainsi, nous obtenons :

$$\boxed{y_h(x)=\lambda e^{-F(x)}, \qquad \text{où} \quad \lambda\in\mathbb{R}.}$$

**Remarque 1.**
*L'équation homogène $(H)$ est aussi appelée équation différentielle à variables séparées.*

**Exemple 2.**

1. *Soit l'équation homogène : $xy'-2y=0$. Pour $x\neq 0$, d'après le Théorème 2, les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}^\star$ sont données par :*

$$\boxed{y_h(x)=\lambda e^{\int \frac{2}{x}\,dx}=\lambda x^2, \quad \lambda\in\mathbb{R}.}$$

2. *Soit l'équation homogène : $(\cos x)y'+(\sin x)y=0$.*
*Pour $\cos x\neq 0$, c'est-à-dire pour $x\in\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, d'après le Théorème 2, les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ sont données par :*

$$\boxed{y_h(x)=\lambda e^{\int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx}=\lambda e^{\ln(|\cos x|)}=\lambda|\cos x|, \quad \lambda\in\mathbb{R}.}$$

## II.2 Solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Pour les équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre, le théorème suivant donne la forme de la solution générale.

**Théorème 2.**
*Soient $a$, $b$ et $f$ des fonctions continues sur l'intervalle $I$ avec $a(x)\neq 0$, pour tout $x\in I$. Les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sont les fonctions de la forme :*

$$\boxed{y_g(x)=y_h(x)+y_p(x)}$$

*où*

- *$y_h$ représente **les solutions** de l'équation homogène associée à l'équation $(E)$: $a(x)y'+b(x)y=0$.*
- *$y_p$ est **la solution particulière** de l'équation $(E)$.*
- *$y_g$ est appelée **solution générale** de l'équation $(E)$.*

**Remarque 2.**
*À travers ce théorème, on remarque que pour résoudre l'équation différentielle $(E)$, on passe par deux étapes.*

- *La résolution de l'équation homogène $(H)$ associée à l'équation $(E)$.*
- *La détermination de la solution particuilère de l'équation $(E)$.*

## II.3 Solution particulière

**Définition 3.**
*On appelle **solution particulière** de l'équation différentielle $(E)$, toute fonction de classe $C^1$ sur $I$ et vérifiant l'équation $(E)$.*

**Exemple 3.**

- *La fonction $y_p(x) = x^3$ est une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$xy' - 2y = x^3. \qquad (1)$$

*Ainsi, en utilisant le Théorème 1 et la première équation homogène de l'exemple 2, on déduit que la solution générale de (1) est donnée par :*

$$\boxed{y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underbrace{\lambda x^2}_{y_h(x)} + \underbrace{x^3}_{y_p(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

- *La fonction $y_p(x) = \sin x$ est une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = 1. \qquad (2)$$

*Ainsi, en revenant au Théorème 1 et la deuxième équation homogène de l'exemple 2, on déduit que la solution générale de (2) est donnée par :*

$$\boxed{y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underbrace{\lambda|\cos x|}_{y_h(x)} + \underbrace{\sin x}_{y_p(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Dans le cas général où une solution particulière n'est pas simple à déduire on utilise **la méthode de variation de la constante**. C'est une méthode pour déterminer la solution particulière de l' équation différentielle avec second membre $(E)$ (ou l'équation complète), connaissant la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) $y_h$.

### II.3.1 Méthode de variation de la constante :

Soit l'équation différentielle

$$a(x)y' + b(x)y = f(x), \qquad (E)$$

où $a$, $b$ et $f$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $I$. Soit $y_h(x) = \lambda e^{-F(x)}$ la solution de l'équation homogène $a(x)y' + b(x)y = 0$ associée à $(E)$. Alors, $y_p(x) = \lambda(x)e^{-F(x)}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre $a(x)y' + b(x)y = f(x)$, où $\lambda(x)$ est une fonction de classe $C^1$ sur $I$ vérifiant :

$$\lambda'(x) = \frac{f(x)}{a(x)e^{-F(x)}}.$$

En effet :
Si la fonction $y_p(x) = \lambda(x)e^{-F(x)}$ est solution de l'équation complète $a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (E)$, elle vérifie donc cette équation. On a :
$y_p'(x) = \lambda'(x)\, e^{-F(x)} - \lambda(x)\, F'(x)\, e^{-F(x)} = \lambda'(x)\, e^{-F(x)} - \lambda(x)\, \dfrac{b(x)}{a(x)} e^{-F(x)} = e^{-F(x)}\left(\lambda'(x) - \lambda(x)\, \dfrac{b(x)}{a(x)}\right).$
En injectant dans l'équation $(E)$, on obtient :

$$\begin{aligned} a(x)e^{-F(x)}\lambda'(x)\cancel{-b(x)\lambda(x)e^{-F(x)}} + \cancel{b(x)\lambda(x)e^{-F(x)}} &= f(x) \\ &\Longrightarrow \lambda'(x) = \frac{f(x)}{a(x)e^{-F(x)}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour déterminer une solution particulière $y_p$, on calcule une primitive de $\lambda$.

**Exemple 4.**
*Soit l'équation différentielle suivante :*

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}. \qquad (3)$$

Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, on commence par résoudre l'équation homogène associée à l'équation différentielle (3).
D'après le Théorème 2, on a :

$$y_h(x) = \lambda e^{-\int 2x dx} = \lambda e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière $y_p$ de l'équation (3).
Pour cela, utilisons la méthode de variation de la constante et posons : $y_p(x) = \lambda(x)e^{-F(x)} = \lambda(x)e^{-x^2}$, alors $y_p'(x) = \lambda'(x)e^{-x^2} - 2x\lambda(x)e^{-x^2}$.
En injectant $y_p(x)$ et $y_p'(x)$ dans l'équation (3), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\lambda(x)e^{-x^2}\right)' + 2x\lambda(x)e^{-x^2} &= 2xe^{-x^2} \\ \lambda'(x)e^{-x^2} \cancel{-2x\lambda(x)e^{-x^2}} + \cancel{2x\lambda(x)e^{-x^2}} &= 2xe^{-x^2}. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\lambda'(x) = 2x \Rightarrow \lambda(x) = x^2.$$

Ainsi, la solution particulière de l'équation (3) est $y_p(x) = x^2e^{-x^2}$.
On conclut que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (3) est donnée par :

$$\boxed{y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = \lambda e^{-x^2} + x^2e^{-x^2} = \left(\lambda + x^2\right) e^{-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

## III. Principe de la superposition

Dans le cas où le second membre s'écrit comme somme de deux fonctions, on peut déterminer une solution particuilière de l'équation sans second membre en utilisant le principe de la superposition. Le Théorème suivant donne le résultat.

**Théorème 3.**
*Soient $a, b, f_1, f_2$ des fonctions continues sur un intervalle $I$. Supposons que $y_{p_1}$ et $y_{p2}$ sont des solutions particulières respectives des équations différentielles linéaires suivantes :*

$$a(x)y' + b(x)y = f_1(x),$$

*et*

$$a(x)y' + b(x)y = f_2(x).$$

*Alors, la fonction $y_p$ définie par : $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$a(x)y' + by = f_1(x) + f_2(x).$$

**Exemple 5.**

*Résolvons l'équation différentielle suivante :*

$$y' + y = 1 + x + cos(x). \qquad (4)$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée à l'équation (4) sont données par :

$$y_h(x) = \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, appliquons le principe de la superposition pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (4).

Posons $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = cos(x)$. On cherche d'abord une solution particulière pour l'équation :

$$y' + y = 1 + x. \qquad (4.1)$$

On a $y_{p_1}(x) = x$ une solution particulière évidente.

Ensuite, cherchons une solution particulière de l'équation :

$$y' + y = cos(x). \qquad (4.2)$$

Pour cela, appliquons la méthode de variation de la constante.
Soit $y_{p_2}(x) = \lambda(x)e^{-x}$, on a $y'_{p_2}(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$. On injecte $y_{p_2}(x)$ et $y'_{p_2}(x)$ dans l'équation (4.2), on obtient :

$$\lambda'(x) = e^x cos(x) \Longrightarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}(cos(x) + sin(x))e^x.$$

D'où, $y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}(cos(x) + sin(x))$.
Ainsi, une solution particulière de l'équation (4) est :

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = x + \frac{1}{2}(cos(x) + sin(x)).$$

On déduit que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de (4), est donnée par :

$$\boxed{y_g(x) = \underbrace{\lambda e^{-x}}_{y_h(x)} + \underbrace{x + \frac{1}{2}(cos(x) + sin(x))}_{y_p(x)}, \lambda \in \mathbb{R}.}$$

**Remarque 3.**
*Le principe de la superposition est aussi utilisé dans le cas où le second membre $f$ est somme de plusieurs fonctions. Autrement dit :*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

# IV. Problème de Cauchy

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir, entre les différentes solutions, celle qui décrit le problème physique, il faut considérer d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple la valeur prise par la solution et/ou éventuellement ses dérivées en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration. On parlera de **conditions initiales.**

## IV.1 Définition

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0$ un point de $I$. On appelle **problème de Cauchy** le problème suivant :
Trouver une fonction $y$ dérivable sur l'intervalle $I$ telle que :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{rcll} a(x)y' + b(x)y & = & f(x), & \forall x \in I \\ y(x_0) & = & y_0, & x_0 \in I \end{array} \right.$$

avec $y_0$ une valeur donnée appelée **condition initiale**.
Nous avons le Théorème suivant :

**Théorème 4.**
*Soient $I$ un intervalle, $a$, $b$ et $f$ des fonctions continues sur $I$. Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ admet une unique solution.*

**Exemple 6.**
*Résolvons le problème de Cauchy suivant :*

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{rcl} (x^2 + 1)y' + 2xy & = & 3x^2 + 1 \\ y(0) & = & 3 \end{array} \right.$$

Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, commençons par déterminer la solution générale de l'équation différentielle.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée sont :

$$y_h(x) = \lambda e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = \lambda e^{-ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{x^2+1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Par la méthode de variation de la constante, déterminons une solution particulière de la forme $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x^2+1}$. En injectant dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$\lambda'(x) = 3x^2 + 1 \Longrightarrow \lambda(x) = x^3 + x.$$

D'où, une solution particulière est donnée par $y_p(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+1} = x$.
Ainsi, la solution générale sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{y_g(x) = \frac{\lambda}{x^2+1} + x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3. Déterminons la solution qui vérifie la condition $y(0) = 3$.

$$y(0) = \lambda = 3.$$

Donc, l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$ est :

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{x^2+1} + x.}$$