⚠ **Attention :** $AB \neq BA$ en général.

* $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$, ni même $BA = 0$.
* On ne peut pas en général simplifier un produit de matrices : on peut avoir $AB = AC$ mais $B \neq C$, même si $A \neq 0$.

I-2) Puissances de matrices carrées :

Définition 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k un entier.
On définit les puissances de A de la façon suivante :
$$A^0 = I_n, \text{ et } \forall k \geq 1, A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$$

Exemple :
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} (-1)^2 & (-1)^2 \\ (2)^2 & (3)^2 \end{pmatrix}$$

Proposition 6 : Pour tous entiers k et m, on a :
$$A^{k+m} = A^k A^m \quad \text{et} \quad (A^k)^m = A^{km}$$
Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a également : $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Remarques :
* En général, $(AB)^k \neq A^k B^k$:
$$(AB)^k = AB\,AB\,AB \cdots AB \neq A^k B^k = AA \cdots A\,BB \cdots B.$$
Mais si A et B commutent : $(AB)^k = A^k B^k$.
Par conséquent, les identités remarquables sont fausses sur les matrices, donc il faut faire attention quand on développe.
* Les puissances d'une même matrice commutent entre elles c-à-d :
$$A^k \cdot A^m = A^m \cdot A^k.$$

Définition 11 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

Exemple : Vérifions que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = B \cdot B^2 = 0$

D'où : $\forall k \geqslant 3$, $B^k = 0$.
Donc la matrice B est nilpotente.

Puissance d'une matrice diagonale : Pour trouver la puissance n-ième d'une matrice diagonale, il suffit d'élever à la puissance n les coefficients de la diagonale, tous les autres coefficients restent nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} , \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^n \end{pmatrix}$$

Exemple :
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$$

Il existe de différentes façon pour calculer la puissance n-ième d'une matrice carrée, parmi elles on trouve :

- Le calcul de puissances : en utilisant la formule du binôme de Newton, à l'aide d'un polynôme annulateur, ou bien en procédant par récurrence.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculons A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1ère méthode : en utilisant la formule du binôme :

On doit écrire la matrice A sous forme d'une somme de deux matrices, qui commutent. De plus il faut que le calcul des puissances de ces deux matrices là soit simple.

Nous avons vu que la matrice identité commute avec toutes les matrices carrés de même taille que I_n.

Plus généralement, les matrices scalaire (de type λI_n) commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

On remarque que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + B$.

Calculons la puissance k-ième de la matrice B.

On procède par <u>récurrence</u>.

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2B$

$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4B$

On remarque par récurrence que :

$$B^k = \begin{cases} 2^{k-1} B & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ I_2 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Démontrons ce résultat par récurrence :

Initialisation : Pour $k=1$, on a :

$$B^1 = 2^0 B = B \text{ vraie.}$$

Hérédité : Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

$$B^{k+1} = B^k \cdot B = 2^{k-1} B \cdot B = 2^{k-1} \cdot B^2 = 2^{k-1} \cdot 2B$$
$$= 2^k \cdot B.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, $B^k = 2^{k-1} B \ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Utilisant maintenant la formule du binôme de Newton :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot B^{n-k}.$$

$$A^n = (I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} B^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$$
$$= \binom{n}{0} I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k$$
$$= I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} B.$$

$$A^n = (I+B)^n = I_2 + B\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\binom{n}{k}$$

$$= I_2 + B\sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}\binom{n}{k} - B\cdot 2^{-1}$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}B + B\sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}\binom{n}{k}$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}B + B\sum_{k=0}^{n} 2^{-1}\cdot 2^{k}\binom{n}{k}$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 2^{k}\cdot 1^{n-k}\binom{n}{k}}$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B\cdot(2+1)^n$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}B + \frac{3^n}{2}B$$

$$= I_2 + \frac{3^n-1}{2}B.$$

Il nous reste qu'à remplacer les matrices I_2 et B, pour obtenir à la fin :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3^n-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^n-1}{2}+1 & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n-1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

Certains étudiants remarquent que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 I_2 + J$$

$$A^n = (2I_2 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} J^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2^{n-k} J^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 J^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k$$

$I_2^{n-k} = I_2$

$I_2 \cdot J^k = J^k$

Calculons J^k en raisonnant par récurrence :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$J^3 = J . J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

On obtient donc :

$$J^k = \begin{cases} I & \text{si } k \text{ est un entier naturel pair} \\ J & \text{si } k \text{ est un entier naturel impair} \end{cases}$$

On poursuit le calcul de A^n :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k$$

Dans ce cas, on peut remplacer J^k directement puisque $J^0 = I$ avec 0 pair.

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J$$

Pour séparer les k pairs et les k impairs, il vaut mieux utiliser la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)\binom{n}{k} A^k B^{n-k}}_{\text{le cas pair}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right)\binom{n}{k} A^k B^{n-k}}_{\text{le cas impair}}$$

Vérifions chacune des deux sommes :

* Cas pair :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)\binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \binom{n}{0} A^0 B^n + 0.\binom{n}{1} B^{n-1}.A^1 + \binom{n}{2} A^2 B^{n-2}$$
$$+ 0.\binom{n}{3} A^3 B^{n-3} + \binom{n}{4} A^4 B^{n-4} + \dots$$
$$= \binom{n}{0} A^0 B^n + \binom{n}{2} A^2 B^{n-2} + \binom{n}{4} A^4 B^{n-4} + \dots$$

* Cas impair :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right)\binom{n}{k} A^k B^{n-k} = 0.\binom{n}{0} A^0 B^n + \binom{n}{1} A^1 B^{n-1} + 0.\binom{n}{2} A^2 B^{n-2}$$
$$+ \binom{n}{3} A^3 B^{n-3} + \dots$$
$$= \binom{n}{1} A^1 B^{n-1} + \binom{n}{3} A^3 B^{n-3} + \dots$$

Utilisons maintenant ces formules pour le calcul de A^n.

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)\binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right) 2^{n-k} J \binom{n}{k}$$

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} J + \sum_{k=0}^{n} \frac{-(-1)^k}{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} J$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} I_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} J$$

$$= \frac{1}{2} \Big[I_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} + I_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k$$

$$+ J \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k - J \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} \Big]$$

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} = ((-1)+2)^n = 1^n = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k = (2+1)^n = 3^n.$$

Donc la puissance n-ième de A s'obtient par le calcul suivant :

$$A^n = \frac{1}{2} \left[I_2 + 3^n I_2 + 3^n J - J \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(3^n+1) I_2 + (3^n-1) J \right]$$

$$= \frac{3^n+1}{2} I_2 + \frac{3^n-1}{2} J = \frac{3^n+1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3^n-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

$2^{ème}$ méthode : à l'aide du polynôme annulateur :

Avant de commencer le calcul de la puissance n-ième de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, définissons d'abord le polynôme de matrice et le polynôme annulateur.

Définition : (Polynôme de matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On associe à X^k, la matrice A^k ; à 1, on associe la matrice identité I_n. Plus généralement, pour un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_m X^m \in \mathbb{K}_m[X]$, on définit la matrice : $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - 2X + 5$

$$P(A) = A^2 - 2A + 5I_2 .$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Définition : (Polynôme annulateur)

On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice A si $P(A) = 0$.

Pour notre matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, vérifions si $P(X) = X^2 - 4X + 3$ est un polynôme annulateur de A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = A^2 - 4A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

donc P est un polynôme annulateur de A.

On peut poser cette question "pour trouver le polynôme annulateur" d'une autre manière :

Calculer A^2. Que peut-on remarquer ?

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 4A - 3I$.

On a : $A^2 = 4A - 3I \Rightarrow A^2 - 4A + 3I = 0$.

Donc on remarque que le polynôme annulateur de A est :

$$P(X) = X^2 - 4X + 3.$$

Afin d'utiliser le polynôme annulateur pour le calcul de A^n, effectuons la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X + 3$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^n = \begin{cases} Q(X)\,(X^2 - 4X + 3) + R(X) \\ \deg(R(X)) \leq 1 \end{cases}$$

donc le reste s'écrit sous la forme $R(X) = aX + b$.

Calculons les racines de $P(X)$.

$\Delta = 16 - 12 = 4$ $\qquad x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$

Les racines de $P(X)$ sont 1 et 3.

En évaluant X^n en 1 et 3, on obtient :

$$\begin{cases} 1^n = R(1) = a + b \quad \cdots\cdots (1) \\ 3^n = R(3) = 3a + b \quad \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$ nous donne : $-2a = 1 - 3^n \Rightarrow a = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Par la suite, on trouve : $b = \dfrac{-3^n + 3}{2}$.

D'où : $X^n = Q(X)(X^2 - 4X + 3) + \dfrac{3^n - 1}{2} X + \dfrac{3 - 3^n}{2}$.

En évaluant le polynôme X^n en A, on obtient :

$$A^n = Q(A)\underbrace{(A^2 - 4A + 3)}_{= 0} + \left(\frac{3^n - 1}{2}\right) A + \left(\frac{3 - 3^n}{2}\right) I$$

$$= \frac{3^n - 1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3 - 3^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(3^n - 1) & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 2(3^n - 1) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 - 3^n & 0 \\ 0 & 3 - 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2.3^n - 2 + 3 - 3^n & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 2.3^n - 2 + 3 - 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $A^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.