Chapitre 2 : Les applications linéaires

1. Définition d'application linéaire :

Définition : Etant donné deux espaces vectoriels E et F sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$, on appelle application linéaire de E dans F toute application f telle que :

(1) $\forall x, y \in E \ , \ f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} , \forall x \in E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarques :

1. Clairement, l'application linéaire est un homomorphisme du groupe additif $(E,+)$ dans $(F,+)$.
2. La définition (1) et (2) est équivalente à dire :
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} , \forall x, y \in E \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
3. – Si $E = F$ on dit que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
   – Si f est bijective on dit que c'est un isomorphisme de E dans ~~F~~ (sur) F.
   – Si $E = F$ et f bijective on dit que c'est un automorphisme de E
4. On note $Hom_{\mathbb{K}}(E,F)$ ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. En $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel E. $GL_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. Pour l'addition d'applications et la multiplication par un scalaire, ces ensembles forment des espaces vectoriels.

Exemples :

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x+y, y+z, z)$ est une application linéaire (à vérifier)

2. F Sous-espace vectoriel de E sur $\mathbb{K}$ l'application

$$f : E \longrightarrow E/F$$
$$x \longrightarrow f(x) = \dot{x}$$ est une application linéaire

surjective appelé homomorphisme Canonique de E sur F.

3. Soit $E = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définie de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) L'application $f : \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$
$$x(t) \longrightarrow f(x(t)) = x'(t)$$
est un endomorphisme de E.

b) L'application $g : \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x(t) \longrightarrow g(x(t)) = x(t_0)$$
est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

2. Propriétés des applications linéaires:

Théorème 1: L'application Composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Preuve: E, F, G étant 3 e.v sur le même corps $\mathbb{K}$ Considérons 2 applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors $g \circ f$ est une application de E dans G. $\forall x, y \in E$:

$$g \circ f(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y))$$
$$= g \circ f(x) + g \circ f(y).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$:

$$g \circ f(\lambda x) = g(f(\lambda x)) = g(\lambda f(x)) = \lambda g(f(x)) = \lambda g \circ f(x).$$

D'où $g \circ f$ est une application linéaire.

Corollaire: Le composé de deux isomorphismes d'espaces vectoriels est un isomorphisme d'espaces vectoriels. La composé de deux endomorphismes (rsp. automorphismes) d'espaces vectoriels est un endomorphismes (rsp. automorphisme) d'espaces vectoriel.

Théorème 2: Si f est une application linéaire de E dans F:

1. $f(0_E) = 0_F$, $f(-x) = -f(x)$
2. A s-e.v de E, $f(A)$ s-e.v de F.
3. B s-e.v de F, $f^{-1}(B)$ s-e.v de E.

Preuve:

1. $x + 0_E = 0_E + x = x \Rightarrow f(x+0_E) = f(x) + f(0_E) = f(x)$
$= f(0_E) + f(x)$.

ou $x' + f(0_E) = f(0_E) + x' = x'$ $x' = f(x)$ c.à.d que
$f(0_E) = 0_F$. $x + (-x) = 0_E \Rightarrow f(x + (-x)) = f(0_E) = 0_F$
$f(x) + f(-x) = 0_F \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

2. Soit A s-e.v de E, $x', y' \in f(A) \Rightarrow \exists x, y \in A$ tq
$x' = f(x)$ et $y' = f(y)$ d'où pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{l} x' - y' = f(x) - f(y) = f(x-y) \in f(A) \\ \lambda x' = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(A) \end{array}\right\} \Rightarrow f(A) \text{ s-e.v de } F.$$

3. Soient $x, y \in f^{-1}(B)$, ou B s-e.v de F $\Rightarrow f(x), f(y) \in B$

$$\left.\begin{array}{l} f(x-y) = f(x) - f(y) \in B \Rightarrow x - y \in f^{-1}(B) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \in B \Rightarrow \lambda x \in f^{-1}(B) \end{array}\right\} f^{-1}(B) \text{ s-e.v de } E. \square$$

Définition: f étant une application linéaire de E dans F,

On appelle noyau de l'application linéaire le s-e.v:
$f^{-1}(\{0_F\}) = \mathrm{Ker}(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$
$f(E) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in F : \exists x \in E, f(x) = y\}$
$\mathrm{Im}(f)$ est appelle image de l'application linéaire et est un s-e.v de F.

Remarque: $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) \subset E$; $\mathrm{Im}(f) = f(E) \subset F$.

Théorème 3: f étant une application linéaire de E dans F:

1. f injective $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f surjective $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Preuve:

1. $f(x)=f(y) \Rightarrow f(x-y)=0_F$ c.à.dire $x-y \in \ker(f)$, donc $x=y \Longleftrightarrow \ker(f)=\{0_E\}$.
2. Simplement l'énoncé de la définition d'une application surjective.

Théorème 4: Si f est un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel F. Alors, f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Preuve:

f est bijective, donc f^{-1} existe et bijective. Il suffit de montrer que f^{-1} est linéaire. Soient $x', y' \in F \Rightarrow \exists x, y \in E$ tq $f(x)=x'$ et $f(y)=y'$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y) = x'+y' \Rightarrow f^{-1}(x'+y') = x+y = f^{-1}(x')+f^{-1}(y') \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda x' \Rightarrow f^{-1}(\lambda x') = \lambda x = \lambda f^{-1}(x') \end{cases}$$

d'où f^{-1} est linéaire. $\square$

Théorème 5: Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, Si E_2 est un supplémentaire de $E_1=\ker(f)$ par rapport à E, alors $f(E_2)=f(E)$. Et la restriction g de f à E_2 prenant ses valeurs dans $f(E)$ est un isomorphisme de E_2 sur $f(E)$.

Preuve: $\forall x \in E = E_1 \oplus E_2$ $(E_1=\ker(f))$ nous avons la décomposition unique: $x = x_1+x_2$ $\quad x_1 \in \ker(f) \Rightarrow f(x_1)=0_F \quad x_2 \in E_2$

d'où $\forall x \in E$ $f(x) = f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) = 0_F + f(x_2) = f(x_2)$

donc $f(E_2)=f(E)$. Soit g la restriction de f à E_2

$[(g: E_2 \longrightarrow F)$ ici $g: E_2 \to f(E))$. g surjective:

$\forall x' \in f(E), \exists x \in E, f(x)=x'$ $\quad x = x_1+x_2 \Rightarrow$

$x' = f(x) = f(x_1+x_2) = f(x_2) = g(x_2)$.

g injective

$$g(x_2)=g(y_2) \Rightarrow g(x_2-y_2)=0$$

$x_2-y_2 \in \ker(f)=E_1$ (car $g(x_2-y_2)=f(x_2-y_2)$) et $x_2-y_2 \in E_2 \Rightarrow x_2=y_2$.

Car E_1 et E_2 sont supplémentaire. Enfin, g est bien une application linéaire (à vérifier). Donc, g est un isomorphisme. $\square$

3. Images de Parties d'un espace vectoriel :

Soit f une application linéaire de E dans F (2 $\mathbb{K}$-e.v) et une Combinaison linéaire de p élément de E, $\{x_1, \dots, x_p\}$ nous avons :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i)$$

de même pour tous combinaison linéaire fini d'une famille I quelconque de E :

$$f\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i f(x_i)$$

[Ici seul un nombre fini de scalaires est non nule]

Remarquons que l'application $i \longrightarrow x_i$ est bijective, il n'en est pas en générale de même pour $i \longrightarrow f(x_i)$.

<u>Théorème 6</u> : f étant une application linéaire de E dans F, si G est une partie génératrice de E, $f(G)$ est une partie génératrice de $f(E)$. Autrement dit, si $G = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $E = \langle G \rangle$. Alors

$$f(E) = f(\langle G\rangle) = f(\langle x_1, \dots, x_n\rangle) = \langle f(x_1), \dots f(x_n)\rangle = \langle f(G)\rangle.$$

<u>Preuve</u> : G peut être finie ou infinie. Soit $x' \in f(E) \Rightarrow$
$\exists x \in E,\ f(x) = x' \Rightarrow$

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \Rightarrow f(x) = x' = \sum_{i\in I} \alpha_i f(x_i)$$

Donc $f(x)$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de $f(G)$. $\square$

<u>Remarque</u> :

- Si $f(x) = 0$ pour tous $x \in G \Rightarrow f = 0$ pour tous $x \in E$. Cette remarque est connue sous le nom Principe de Prolongement des identités linéaires. Si f et g sont deux application linéaires de E dans F, tellque $f(x) = g(x)$ pour tous $x \in G \Longrightarrow f = g$.

<u>Corollaire</u> : f étant une application linéaire de E dans F Alors :

1. $A \subset E$ une famille liée $\Longrightarrow f(A)$ st liée dans F.
2. $A \subset E$ $f(A)$ st libre $\Longrightarrow A$ st libre dans E.

Preuve: 1. D'aprés le th 5 Chapitre 1 $\exists$ un élément $x \in A$ Combinaison linéaire fini de $A - \{x\} \Rightarrow f(x)$ st une Combinaison linéaire fini de $f(A) - \{f(x)\} \Rightarrow f(A)$ liée.
2. Par contraposé de 1. $\square$

Supposons maintenant que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ et désignons par $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une base de E. On á les résultats suivants:

Théorème 7: Il existe une application linéaire unique f d'un espace vectoriel E de dim n sur $\mathbb{K}$ dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{K}$ telle que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad f(a_i) = b_i$$

$b_1, b_2, \dots, b_n \in F$ élément quelconque.

Preuve: On á d'une manière unique que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

donc si f existe, elle st unique. Réciproquement: l'application $x \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ st linéaire. Donc f existe, et unique, elle st déterminée par ses valeurs pour les éléments de la base. $\square$

Théorème 8 et définition: f étant une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension fini sur $\mathbb{K}$ dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{K}$, $f(E)$ st de dimension fini sur $\mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E)$

La dimension de $Im(f)$ st le rang de l'application linéaire f, il st noté $rg(f)$, de plus

$$\boxed{rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f))}$$

Preuve: Si $\dim_{\mathbb{K}}(E)=n$, toute base B de E a n éléments, c'est une partie génératrice de E, donc $f(B)$ est une partie génératrice de $f(E)$ ayant au plus n éléments. Donc $f(E)$ est de dimension fini et toute base de $f(E)$ est une partie génératrice minimale de $f(E) \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n$

D'autre part en utilisant Th5, si $E_2 = \ker(f)$ et $E = E_1 \oplus E_2$ nous aurions d'après Th Chapitre

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(E_2)$$

Or E_2 est isomorphe à $f(E)=\mathrm{Im}(f)$, alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_2) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f)) = rg(f)$$

Ainsi

$$rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)).$$

Corollaire 1:

1. $rg(f) = n \Longleftrightarrow f$ est injective.
2. $rg(f) = \dim_{\mathbb{K}}(F) \Longleftrightarrow f$ est surjective

Remarque: Si F est de dimension fini et $\dim(F) = p$ alors $rg(f) \leqslant \mathrm{Inf}(n,p)$.

Corollaire 2: f étant une application linéaire de E dans F

Alors :

1. f est bijective $\Leftrightarrow$ f injective $(\ker(f)=\{0_E\}) \Leftrightarrow f$ surjective $\mathrm{Im}(f)=F$.

Exemples: 1. Déterminer l'application linéaire f tel que :

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $f(e_1)=(1,1)$; $f(e_2)=(1,0)$; $f(e_3)=(1,2)$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $X \in \mathbb{R}^3$. Alors $X=(x,y,z)$

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x,y,z) = f\big((x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)\big) \\ &= f\big(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\big) \\ &= x\, f(1,0,0) + y\, f(0,1,0) + z\, f(0,0,1) \end{aligned}$$

$= x(1,1) + y(1,0) + z(1,2) = (x+y+z, x+2z)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ donc $f(\{e_1, e_2, e_3\})$ est une partie génératrice de $f(\mathbb{R}^3)$, or que

$(1,2) = 2(1,1) + (-1)(1,0)$ cette partie est liée donc $rg(f) < 3$. La partie $\{(1,1), (1,0)\}$ est libre (à vérifier) $\Rightarrow$ est une base de $f(\mathbb{R}^3)$ $\Rightarrow$

$$rg(f) = 2, \; f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2 \; \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2 \Rightarrow$$

$$f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2.$$ f est surjective.

Corollaire: f étant une application linéaire de rang r d'un espace vectoriel E de dimension fini n sur $\mathbb{K}$ dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{K}$. Alors, toute base $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de E telle que $\{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ est une base de $Ker(f)$ et telle que $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_r)\}$ soit une base de $f(E)$.

Preuve: Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une base de E, f une application linéaire de rang r. donc Th (8)

$$\dim_{\mathbb{K}}(Ker(f)) = n - r$$

Supposons que la base est choisi de sorte que $\{a_1, \dots, a_r\}$ est une base du supplémentaire de $Ker(f)$, alors $\{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ est une base de $Ker(f)$. $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_r)\}$ est une partie libre de $f(E)$ car:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(a_i) = 0_F \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i\right) = 0_E$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i \in Ker(f) \cap E_2$ supplémentaire de $Ker(f) \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i = 0$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$. D'autre part comme $f(a_i) = 0$ pour $i \in \{r+1, \dots, n\}$ alors $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_r)\}$ est une partie génératrice de $f(E)$. Donc, $\{f(a_1), \dots, f(a_r)\}$ est une base de $f(E)$. $\square$