Prof: N. Benbelkacem
nasreddine.benbelkacem@usthb.edu.dz

le 22/02/2023

Algèbre linéaire
Espaces vectoriels

Cours 02:

3) Famille de vecteurs d'un espace vectoriel ($\overline{ev}$)

3.1 Combinaison linéaire

Définition 3:

Soit E un $\mathbb{K}$ev et $v_1, v_2, \dots, v_n$ ~~une~~ famille de n vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de la famille $v_1, v_2, \dots, v_n$ tout vecteur de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

où les λ_i sont des scalaires.

Remarques:

1. Si un vecteur V est combinaison linéaire de v_i, $(i=1..n)$ il n'y a pas forcément unicité des scalaires λ_i (voir l'exemple 2)

2. En général: $u = \sum \lambda_i x_i = \sum \mu_i x_i \not\Rightarrow \lambda_i = \mu_i$ pour tout $i = 1..n$

Exemples

① Soit (u_1, u_2, u_3) une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec

$u_1 = (1, 2, -3)$, $u_2 = (-1, -2, 3)$ et $u_3 = (-1, 2, 3)$

Le vecteur $U = (0, 4, 2)$ est une Combinaison linéaire de la famille

(u_1, u_2, u_3) car : $U = 1.U_1 + 2.U_2 + 3U_3$

② $x = (1, 4, -1)$ est combinaison linéaire des trois vecteurs :

$u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (-1, 2, -2)$

En effet, on constate que : $x = 1.u_1 + 1.u_2 + 1.u_3 = 2.u_1 - 1.u_2 + 0.u_3$

③ Dans $\mathbb{C}$, (Considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), tout nombre $(z \in \mathbb{C})$ est combinaison linéaire de 1 et i.

④ Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions :

$f : x \mapsto \operatorname{sh} x$, $f_1 : x \longrightarrow e^x$ et $f_2 : x \longrightarrow e^{-x}$

Alors f est combinaison linéaire de f_1 et f_2 dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

Ce qui entraîne la relation : $f = \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2$

⑤ Le polynôme $P(x) = 3 - X + 2X^2 - 3X^3$ est une combinaison linéaire de

$1, X, X^2, X^3$.

Proposition 3:

Soient $V_1, V_2, \dots, V_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $V_1, V_2, \dots, V_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Autrement dit: l'ensemble $F = \{\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_n V_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve: Sans perdre la généralité, on montrons ce résultat dans le cas où $n=3$

On suppose que $F = \{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}\}$, on a:

i) $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot V_1 + 0_{\mathbb{K}} \cdot V_2 + 0_{\mathbb{K}} \cdot V_3 \in F$ donc $F \neq \phi$

ii) Soient $U = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$

$V = \lambda'_1 V_1 + \lambda'_2 V_2 + \lambda'_3 V_3$ avec $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3 \in \mathbb{K}$

U et V deux vecteurs de F et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a:

$$\alpha U + \beta V = \alpha(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3) + \beta(\lambda'_1 V_1 + \lambda'_2 V_2 + \lambda'_3 V_3)$$

$$= \underbrace{(\alpha\lambda_1 + \beta\lambda'_1)}_{\in \mathbb{K}} V_1 + \underbrace{(\alpha\lambda_2 + \beta\lambda'_2)}_{\in \mathbb{K}} V_2 + \underbrace{(\alpha\lambda_3 + \beta\lambda'_3)}_{\in \mathbb{K}} V_3$$

donc $\alpha U + \beta V$ est combinaison linéaire de V_1, V_2 et V_3, d'où F est un s. ev de E.

Le passage au cas général ne présente pas de difficulté ∎

3.2 Famille libre

Définition 04 : Soient E un $\mathbb{K}$ev, $v_1, v_2, \dots, v_n$ des vecteurs de E.
On dit que la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est **libre** ou que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont **linéairement indépendants** (L.I) si pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Sinon, on dit que la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est **liée** ou que les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont **linéairement dépendants**

Remarques :

① Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

② Les vecteurs d'une famille libre sont tous non nuls.

③ $\{V\}$ est libre $\Leftrightarrow V \neq 0_E$

④ Une famille est liée si et seulement si elle contient un vecteur qui est combinaison linéaire des autres. (voir l'exemple 2)

Exemples ① Dans $E = \mathbb{R}^3$, les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ sont linéairement indépendants car $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

② Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u = (1,-2)$ et $v = (-3,6)$ sont liées car

$3 \cdot u + 1 \cdot v = (0,0)$ mais $3 \neq 0$ et $1 \neq 0$

De plus "Remarque ④" on a $v = -3 \cdot u$ donc v est combinaison linéaire de u

③ La famille $\{v_1=(1,1),\ v_2=(2,1)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $\lambda_1(1,1)+\lambda_2(2,1)=(0,0)$

alors : $(\lambda_1+2\lambda_2,\ \lambda_1+\lambda_2)=(0,0)$, en résolvant le système :

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}$$, on obtient : $\lambda_1=\lambda_2=0$

la famille $\{v_1, v_2\}$ est donc libre.

④ la famille $\{v_1=(1,1),\ v_2=(2,1),\ v_3=(-2,-3)\}$ est liée. car :

soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ telsque : $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3=0\end{cases}$

Il s'agit d'un système compatible ("car homogène, donc $(0,0,0)$ est solution"), qui admet plus d'inconnus que d'équations. Il admet donc une infinité de solutions, et donc en particulier il existe une solution $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\neq(0,0,0)$ que l'on pourrait aussi calculer.

⑤ Les vecteurs $(1,1)$ et $(-2,-2)$ sont colinéaire, donc la famille $\{(1,1),(-2,-2)\}$ est liée $\quad (1,1)=-\frac{1}{2}(-2,-2)$

Remarque : Une famille de deux vecteurs non colinéaires (ou non proportionnels) est libre (

" Deux vecteurs u et v sont colinéaires s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, telque $\boxed{u=\alpha . v}$ " voir l'exemple 5

3.3 Famille génératrice

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et H partie de E. Un sous espace vectoriel contenant H c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de contenant H, et on le note $\text{vect}(H)$

Autrement dit :

$\text{Vect}(H) :=$ L'intersection de tous les s.ev de E contenant H

$:=$ le plus petit s.ev de E contenant H.

ou encore

$\text{Vect}(H) :=$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de H.

Exemples

① $\mathbb{K}[X] = \text{vect}(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, Puisque un vecteur $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit sous la forme : $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$, $X^i \in \mathbb{K}[X]$

② si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$\text{vect}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\text{Vect}(1, i) = \{a.1 + b.i \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$

si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$\text{Vect}(1) = \{a.1 \mid a \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$

③ Soit $F = \{(x-y, y+x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, alors,

$F = \{(x, x, 0) + (-y, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,0) + y(-1,1,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

d'où $F = \text{Vect}((1,1,0), (-1,1,1))$ est un s.ev.

Proposition 4: Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$-ev de E. Alors :

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $Vect(F) = F$

Astuce : Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, il suffit très souvent de l'écrire comme un Vect.

Exemple Montrons que $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y-z=0 \text{ et } x-y+t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Solution : Pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a : $(x,y,z,t) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-y+t=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x+2y = 3x+2t \\ y = x+t \end{cases}$

Donc :

$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y-z=0 \text{ et } x-y+t=0\}$

$= \{(x, x+t, 3x+2t, t) \mid x,t \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,3,0) + t(0,1,2,1) \mid x,t \in \mathbb{R}\}$

$= Vect((1,1,3,0), (0,1,2,1))$.

d'où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1,1,3,0), (0,1,2,1))$

Définition 05: Une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ ev de E est dite :

génératrice de E (ou engendre E) si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_n$, c'est-à-dire : $Vect(v_1, \dots, v_n) = E$

Ce qui se réécrit :

$\forall v \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \; v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

Remarques :

① La décomposition du vecteur v n'est pas nécessairement unique, il peut y avoir plusieurs combinaisons linéaires de $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ égales au même vecteurs.

② $Vect(v_1, v_2, \dots, v_n) \subset E$ étant une inclusion toujours vérifiée, on ne montrera que la réciproque.

Exemples

① la famille $((1,1))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$. Par exemple le vecteur $(2,5)$ de $\mathbb{R}^2$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $(1,1)$.

② la famille $((1,0),(0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$. car

Soit $u=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $u=(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in Vect((1,0),(0,1))$

Donc $\mathbb{R}^2 \subset Vect((1,0),(0,1))$. Puisque l'inclusion réciproque est vérifiée alors $\mathbb{R}^2 = Vect((1,0),(0,1))$ et la famille $((1,0),(0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$

③ $(1+X+X^2, 1-X^2, 2X+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, en effet

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on cherche λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P(X) = \lambda_1(1+X+X^2) + \lambda_2(1-X^2) + \lambda_3(2X+1)$$

ce qui est équivalent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c & \dots (1) \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = b & \dots (2) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = a & \dots (3) \end{cases}$$

$(1)+(3) \Rightarrow 2\lambda_1 + \lambda_3 = a + c \quad \dots (4)$

$(4) - 2(2) \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{3}(2b - a - c)$

$(2) \Rightarrow \lambda_1 = b - \frac{1}{3}(2b - a - c)$

$(1) \Rightarrow \lambda_2 = c - \lambda_1 - \lambda_3$

Le système admet une solution, donc : $P \in Vect(1+X+X^2, 1-X^2, 2X+1)$

Ainsi la famille est génératrice

Proposition 5

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

Exemple

$\{(1,2),(2,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, donc il en est de même de $\{(1,2),(2,-1),(3,1)\}$.

3.4 Base d'un espace vectoriel

Définition 06 : (Base)

Soit $\mathcal{B}=(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev de E.

On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E, si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E

Exemples :

① $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (dite base canonique de $\mathbb{R}^2$).

② Dans $\mathbb{C}$, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(1,i)$ est une base de $\mathbb{C}$.

Ce qui signifie que tout complexe s'écrit de façon unique sous la forme

$$1\cdot a+i\cdot b=a+bi \quad ,\text{où } a,b\in\mathbb{R}$$

③ Dans $\mathbb{K}[X]$, $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ est une base (dite base canonique de $\mathbb{K}[X]$).

④ $\{P_1(x)=X(X-1),\ P_2(x)=X(X-2),\ P_3(x)=(X-1)(X-2)\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Remarque

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la généralisation de la base "Classique" du plan (dans $\mathbb{R}^2$) ou de l'espace (dans $\mathbb{R}^3$).

Propostion 6:

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un K. espace vectoriel E.

Alors les 04 énoncés suivant sont équivalents:

① $\mathcal{B}$ est une base de E

② $\mathcal{B}$ est libre maximale, c'est-à-dire $\mathcal{B}$ est libre et $\forall x \in E$, $\mathcal{B} \cup \{x\}$ n'est pas libre.

③ $\mathcal{B}$ est génératrice minimale, c-à-d $\mathcal{B}$ est génératrice de E mais $\forall j \in I$, $(u_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ ne l'est pas

④ $\forall x \in E, \exists! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, x = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$

Les scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ sont appelés les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$