Calcul intégral

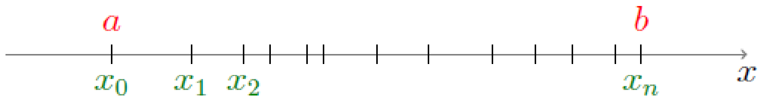
Ce cours est destiné aux étudiants de première année licence informatique. Il peut être aussi utile pour les étudiants d'autres filières comme licence mathématiques, sciences techniques, sciences de la matière où autres. Ce document est une première version qui à été rédigé par **F.AGGOUNE**. Il peut contenir des erreurs de frappe ou autres. Toutes les remarques et commentaires sont les bienvenus de la part des enseignants ainsi que de la part des étudiants. Ces remarques et commentaires nous permettront certainement d'améliorer le contenu de ce document ainsi que la présentation de la version finale. N'hésitez pas à me les signaler à l'adresse mail suivante: fatahagg@gmail.com.

1 Intégral de Riemann

1.1 Subdivision

Définition 1.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de points de $[a, b]$ telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad n \geq 1$$



Une telle subdivision découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalle fermés bornés $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, appelés intervalles partiels de la subdivision σ.

- *Le pas d'une telle subdivision est le réel strictement positif $\delta = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$.*
- *Si on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales, on obtient une subdivision dite régulière (ou bien équidistant) de pas $\delta = \dfrac{b-a}{n}$ et dans ce cas $x_i = a + i\delta,\ 1 \leq i \leq n$.*

Définition 1.2 *Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est* ***plus fine*** *que σ si $\sigma \subset \sigma'$ La subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et σ'.*

Exemple 1.1 *On considère les deux subdivisions de $[0, 1]$, σ et σ' définies par :*

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \text{ et } \sigma' = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

On a $\sigma \subset \sigma'$, alors σ' est plus fine que σ.

1.2 Fonction en escalier

Définition 1.3 *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. On dit que f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]x_{i-1} - x_i[, 1 \leq i \leq n$ est constante c'est-à-dire .*
Une telle subdivision de $[a, b]$ est alors appelée subdivision adaptée à la fonction en escalier f.

Exemple 1.2 *La fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction en escalier.*

Exemple 1.3 *La fonction f définie sur $[0, 1]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 0, \\ \dfrac{1}{2}, & si\ x \in]0, \frac{1}{2}[, \\ 3, & si\ x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une fonction en escalier sur $[0, 1]$.

Définition 1.4 ***(Intégrale d'une fonction en escalier)***
Soient f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ adaptée à f. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on désigne par λ_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ le réel

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, \lambda_i.$$

On note aussi ce réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

Remarque La valeur de $\displaystyle\int_a^b f$ est indépendante du choix de la subdivision σ, ce qui justifie que l'on ne fasse pas référence à σ dans la notation.
Interprétation graphique Le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ représente l'aire algébrique entre la représentation graphique de la fonction en escalier f sur l'intervalle $[a, b]$ et l'axe des abscisses. En effet la quantité$(x_i - x_{i-1})\,\lambda_i$ est l'aire d'un rectangle de longueur $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur λ_i .

Théorème 1.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ définies sur $[a, b]$ telles que*

$$\phi \leq f \leq \psi \ \text{et}\ \psi - \phi \leq \varepsilon$$

Remarque Le théorème au dessus est fondamental pour passer de l'intégrale d'une fonction en escalier à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

1.3 Sommes de Darboux

Soient f une fonction bornée sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, on pose

$$m_i = m_i(f) = m_i(f, \sigma) = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$
$$M_i = M_i(f) = M_i(f, \sigma) = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

Les nombres réels m_i et M_i existent toujours puisque f est bornée sur $[a, b]$.

Définition 1.5 *Les nombres réels*

$$s = s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i - x_{i-1}\right),$$
$$S = S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(x_i - x_{i-1}\right),$$

sont appelés sommes de Darboux, respectivement inférieure et supérieure de f relativement à la subdivision σ.

Proposition 1.1 *Pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on a $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma)$*

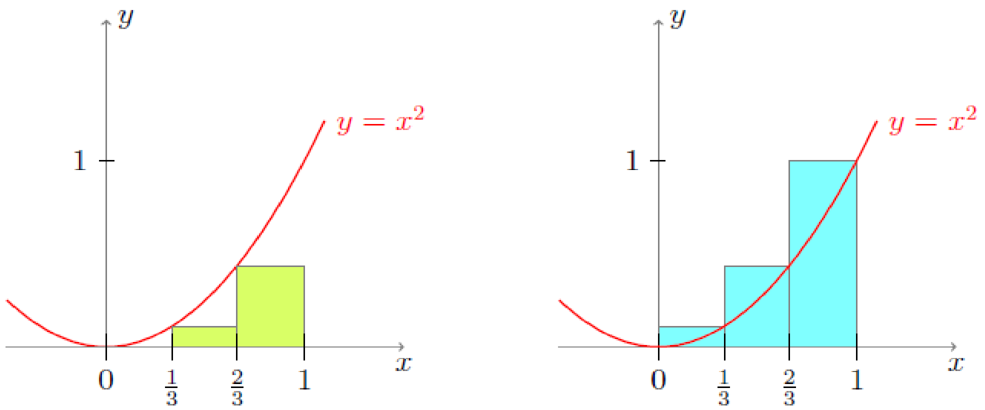
Exemple 1.4 *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. On considère les deux subdivisions σ_1 et σ_2 de $[0, 1]$ définies par*

$$\sigma_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\},$$

et

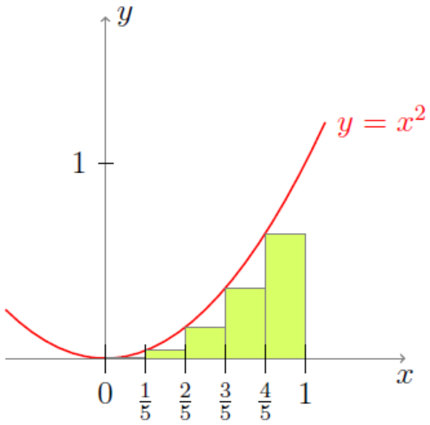
$$\sigma_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}.$$

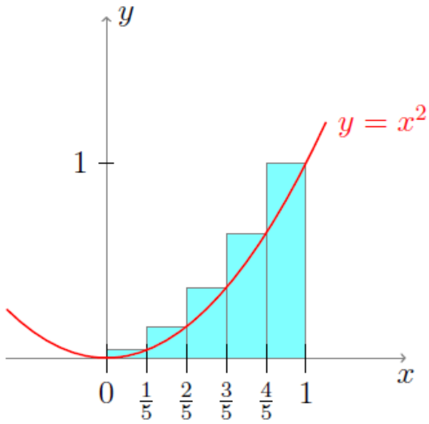
On a



$$s\left(f, \sigma_1\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i - x_{i-1}\right) = 0\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27},$$
$$S\left(f, \sigma_1\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(x_i - x_{i-1}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{41}{27}.$$

et





$$s\left(f,\sigma_2\right)=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=0\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{4}{25}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{9}{25}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{16}{25}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{25},$$
$$S\left(f,p_\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{4}{25}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{9}{25}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{16}{25}\left(\frac{1}{5}\right)+1\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{25}.$$

1.4 Fonctions intégrables et Intégrale de Riemann

Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a,b]$. Si f est continue (ou éventuellement continue par morceaux) sur $[a,b]$, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ définies sur $[a,b]$ telles que

$$\phi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi-\phi \leq \varepsilon$$

Considérons les deux ensembles

$$I^-(f)=\left\{\int_a^b \phi \text{ tels que } \phi \leq f sur[a;b]\right\}$$
$$I^+(f)=\left\{\int_a^b \psi \text{ tels que } \psi \geq f sur[a;b]\right\}$$

L'ensemble $I^-(f)$ est l'ensemble des valeurs des intégrales des fonctions en escalier ϕ qui sont inférieures à f, admet une borne supérieure $\sup I^-(f)$ et l'ensemble $I^+(f)$ est l'ensemble des valeurs des intégrales des fonctions en escalier ψ qui sont supérieures à f, admet une borne inférieure $\inf I^+(f)$ tels que

$$\sup I^-(f) \leq \inf I^+(f).$$

Notons que les valeurs de ces intégrales sont données par les sommes de Darboux suivantes :

$$\int_a^b \phi=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i-x_{i-1}\right) \text{ et } \int_a^b \psi=\sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

Définition 1.6 *Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a,b]$. On dit que f est intégrable (**au sens de riemann**) sur $[a,b]$ si*

$$\sup I^-(f)=\inf I^+(f).$$

on appel ce nombre l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et on note

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sup I^-(f)=\inf I^+(f).$$

1.5 Sommes de Riemann

Définition 1.7 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle somme de Riemann de f correspondant à σ et au système de points $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, la somme*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ où } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n.$$

Définition 1.8 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est intégrable* ***au sens de Riemann*** *si la somme $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ admet une limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 c'est-à-dire $\delta \to 0$.*

Théorème 1.2 *Si la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, alors*

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Remarques :

1. Le plus souvent, ce théorème est appliquée lorsque la subdivision est régulière, et lorsque les ξ_i sont égaux à x_i ou à x_{i-1}. Dans ce cas on a $\delta = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, ainsi si on considère $\xi_i = x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

2. En pratique ce théorème est utilisé pour déterminer une limite à l'aide d'un calcul intégral plutôt que calculer une valeur approchée de l'intégrale (il existe des formules plus performantes pour cela).

Théorème 1.3 *Toute fonction f monotone ou continue sur $[a,b]$ est intégrable (intégrable au sens de Riemann).*

2 Primitives et intégrales indéfinies

Définition 2.1 ***(Primitive d'une fonction)***
Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si et seulement si F est dérivable et pour tout x dans $I, F'(x) = f(x)$.

Exemple 2.1

1. *$F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x,$, car on a : $F'(x) = 2x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.*

2. *$F(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$, car on a : $F'(x) = \cos x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.*

3. *$F(x) = \ln x$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$, car on a : $F'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in]0, +\infty[$.*

4. $F(x) = \arctan x$ *est une primitive de* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *car on a :* $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.1 *Si F est une primitive de f alors pour toute constante réelle c, la fonction $x \longmapsto F(x) + c$ est aussi une primitive de f.*

Proposition 2.2 *Toute fonction f continue sur I admet une primitive F sur I.*

Définition 2.2 ***(Intégrale indéfinie d'une fonction)***
On appelle intégrale indéfinie de f et on note $\displaystyle\int f(x)dx$, toute expression de la forme $F(x) + c$ où F est une primitive de f et c une constante réelle. On écrit:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Le symbole $\int$ est appelé intégrale ou somme.

Exemple 2.2

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :* $\displaystyle\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c, c \in \mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Propriétés des intégrales indéfinies

Soit f et g deux fonctions admettent des primitives, alors

1. $\displaystyle\int (f+g)(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$.
2. $\displaystyle\int \lambda f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Tableau des primitives usuelles

Primitives simples	Primitives composées
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\int u'(x)u(x)^\alpha dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c, \quad x \neq 0$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln\|u(x)\| + c$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c, \quad (x > 0)$	$\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx = \sqrt{u(x)} + c$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad (a \neq 0)$	$\int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + c$
$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c, (a \neq 0)$	$\int u'(x) \cos(u(x)) dx = \sin(u(x)) + c$
$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c, (a \neq 0)$	$\int u'(x) \sin(u(x)) dx = -\cos(u(x)) + c$
$\int \mathrm{ch}(ax+b) dx = \frac{1}{a} \mathrm{sh}(ax+b) + c, (a \neq 0)$	$\int u'(x) \mathrm{ch}(u(x)) dx = \mathrm{sh}(u(x)) + c$
$\int \mathrm{sh}(ax+b) dx = \frac{1}{a} \mathrm{ch}(ax+b) + c, (a \neq 0)$	$\int u'(x) \mathrm{sh}(u(x)) dx = \mathrm{ch}(u(x)) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$	$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} dx = \tan(u(x)) + c$
$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} dx = \mathrm{th}(x) + c$	$\int \frac{u'(x)}{\mathrm{ch}^2(u(x))} dx = \mathrm{th}(u(x)) + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{a^2+u^2(x)} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u(x)}{a}\right) + c \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}} dx = \arcsin\left(\frac{u(x)}{a}\right) + c \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \mathrm{argsh}\left(\frac{x}{a}\right) + c (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2+u^2(x)}} dx = \mathrm{argsh}\left(\frac{u(x)}{a}\right) + c \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \mathrm{argch}\left(\frac{x}{a}\right) + c (a \neq 0)$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-a^2}} dx = \mathrm{argch}\left(\frac{u(x)}{a}\right) + c \quad (a \neq 0)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \text{argsh}(x) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \text{argch}(x) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = -\arg\text{ch}(-x) + c = -\ln\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right) + c,$$
$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \arg th(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c,$$
$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \arg\coth(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + c.$$

3 Intégrales définies

Définition 3.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \subset I$. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors l'intégrale définie de f sur $[a,b]$ est donnée par :*

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 3.1 *Calculons les intégrales définies $I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$ et $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin x)dx$.*

1. *Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est $F(x) = \arctan x$. Ainsi*

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - (\frac{-\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

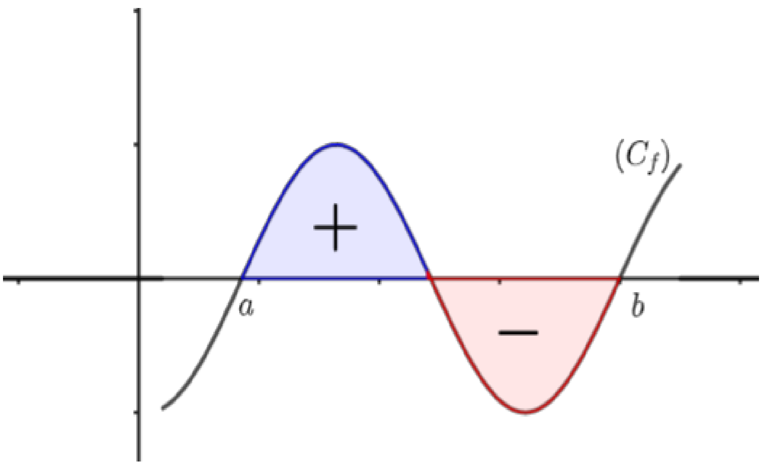
2. *Une primitive de $f(x) = x + \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est $F(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$. D'où*

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{8} - 0\right) - (0-1) = \frac{\pi^2}{8} + 1.$$

Interprétation géométrique

Notons $\int_a^b f(x)\ dx$ est un nombre réel de signe quelconque. Il représente l'aire **algébrique** limitée par la courbe de la fonction f, les droites d'équations $x = a, x = b$ et l'axe des abscisses.

Pour le calcul de l'aire **géométrique**, qui est un nombre positif, on compte **positivement** pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses et **négativement** pour la partie située au-dessous de l'axe des abscisses.



Corollaire 1 *Si f est de classe C^1 sur un intervalle I, alors pour tout a dans I et tout x dans I, on a :*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\ dt.$$

Propriétés des intégrales définies

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
- **Relation de Chasles**: Pour tout c dans $[a, b]$, on a:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
- **Linéarité de l'intégrale:** Pour tous réels α et β, on a :
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$
- Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Si f est paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- Si f est impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

4 Procédés d'intégration

4.1 Méthode immédiate

Cette méthode consiste à intégrer une fonction dont on connait la primitive immédiatement.

Exemple 4.1

1. $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = 2 \arcsin x + c.$
2. $\int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$
3. $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\ dx = \frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x) + c.$

4.2 Intégration par parties

Théorème 4.1 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$\int uv' \; dx = uv - \int u'v \; dx$$

où bien

$$\int_a^b u(x)v'(x) \; dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \; dx.$$

Preuve 4.1 *La preuve est immédiate, elle repose sur la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables. On a*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

donc

$$uv' = (uv)' - u'v$$

ainsi

$$\begin{aligned}\int uv'dx &= \int (uv)'dx - \int u'vdx \\ &= uv - \int u'vdx\end{aligned}$$

Exemple 4.2 *Calculons les intégrales suivantes : $I_1 = \int (1+x)e^x dx$ et $I_2 = \int_1^e \ln x dx$.*

1. *Pour calculer I_1, on utilise la formule d'intégration par parties. Pour cela on pose :*

$$\begin{cases} u(x) = 1+x \\ v'(x) = e^x \end{cases}, \quad d'où \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont bien dérivables, de dérivées continues sur $\mathbb{R}$ et la formule d'intégration par parties donne :

$$I_1 = \int (1+x)e^x dx = (1+x)e^x - \int e^x dx = (1+x)e^x - e^x + c = xe^x + c, c \in \mathbb{R}$$

2. *Pour calculer I_2, on utilise la formule d'intégration par parties. Pour cela on pose :*

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}, \quad d'où \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1, e]$ et la formule d'intégration par parties donne

$$I_2 = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - 1 \ln 1 - [x]_1^e = e - [e-1] = 1$$

Exercice : Calculer les intégrales suivants : $I_1 = \int \arctan x \; dx$ et $I_2 = \int x \sin x \; dx$.

4.3 Intégration par changement de variable

Le changement de variable est une méthode souvent utilisée dans le calcul intégral pour transformer une intégrale en une autre intégrale plus simple à calculer.

Théorème 4.2 ***(Formules de changement de variable)***
Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}, f$ une fonction continue sur I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective sur J, avec $\varphi(J) \subset I$. Alors on a :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Où $x = \varphi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$.
Dans le cas d'une intégrale définie avec $I = [a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Exemple 4.3 *Calculons les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx, \quad I_3 = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx.$$

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx.$
On pose $t = \sqrt{x+1}$, alors $t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1$. Donc $dx = (t^2-1)' = 2tdt$. D'où
$$I_1 = \int \frac{t^2-1}{t} \times 2t\ dt = \int \left(2t^2 - 2\right)\ dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + c = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x+1}) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx.$ *On pose $u = \cos x$, alors $du = -\sin x dx$*
$$x = 0 \Longrightarrow u = \cos 0 = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow u = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
D'où
$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-du}{u} = \Big[-\ln(u)\Big]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln 1 = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx.$ *Posons $x = \varphi(t) = \sin t$. donc $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ et $\varphi^{-1}(0) = 0$, $\varphi^{-1}(1/2) = \pi/6$. On a aussi*
$$dx = \varphi'(t)dt = \cos t dt$$
et
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin t^2} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \quad (\ \textit{car pour tout } t \in [0, \frac{\pi}{6}], \cos t > 0).$$
Par conséquent
$$I_3 = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/6} \cos^2 t dt$$

Puisque

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} dt + \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Exercice : En utilisant un changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivants :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \; dx, \quad I_2 = \int \sqrt{1+x^2}\; dx$$

4.4 Intégration des fractions rationnelles

Définition 4.1 *Soit f une fonction. On dit que f est une fraction rationnelle si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.*

La décomposition en éléments simples permet de décomposer une fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en somme de fractions élémentaires appelées **éléments simples** faciles à intégrer. On distingue deux types d'éléments simples :

- Éléments simples de première espèce :

$$\frac{A}{(x-a)^n},$$

  avec A et a des constantes réelles et n un entier naturel non nul.

- Éléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

  avec $A, B, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

4.4.1 Intégration des éléments simples de première espèce

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$, on pose $y = x - a$ ainsi $dy = dx$, d'où :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \int \frac{A}{y^n} dy = \begin{cases} A \ln|y| + c & \text{si} \quad n = 1, \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \dfrac{A}{(1-n)y^{n-1}} + c & \text{si} \quad n \geq 2, \quad (c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

En remplaçant y par $x - a$ on obtient :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} A \ln|x-a| + c & \text{si} \quad n = 1, \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \dfrac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c & \text{si} \quad n \geq 2, \quad (c \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

4.4.2 Intégration des éléments simples de deuxième espèce

Il s'agit d'intégrer les éléments de deuxième espèce du type :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx.$$

Dans cette partie, nous nous limiterons au cas $n=1$, autrement dit, on calcule l'intégrale

$$I=\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,$$

pour ce faire, on exprime $Ax+B$ en fonction de la dérivée de x^2+px+q à savoir $2x+p$, on a :

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \underbrace{\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx}_{I_1} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{x^2+px+q}dx}_{I_2}$$

Il suffit donc de calculer I_1 et I_2 en passant par les étapes suivantes :

- L'intégrale I_1 est une primitive immédiate, on a :

$$I_1=\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+c_1, \qquad \text{où } c_1\in\mathbb{R}.$$

- Pour calcul de $I_2=\displaystyle\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$, on écrit d'abord le dénominateur x^2+px+q sous forme canonique.
  On a la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c est :

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \text{ où } \Delta=b^2-4ac.$$

  Ainsi, on obtient la forme canonique du polynôme x^2+px+q suivante

$$\mathrm{x}^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2, \quad (\Delta<0).$$

  Posons maintenant le changement de variable $t=x+\dfrac{p}{2}=\dfrac{2x+p}{2}$, ainsi $dx=dt$, d'où

$$I_2=\int \frac{1}{x^2+px+q}dx=\int \frac{1}{t^2+\alpha^2}dt=\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)+c_2, \qquad \text{où } \alpha=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

  Ainsi

$$I_2=\int \frac{1}{x^2+px+q}dx=\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{2x+p}{2\alpha}\right)+c_2, \text{ où } \alpha=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}, c_2\in\mathbb{R}.$$

Finalement, on obtient :

$$I=\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2B-Ap}{2\alpha}\arctan\left(\frac{2x+p}{2\alpha}\right)+c, \text{ où } \alpha=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}, c\in\mathbb{R}.$$

Exemple 4.4 *Calculons* $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+x+1}dx$.
Comme le discriminant de x^2+x+1 *est* $\Delta = -3 < 0$ *la fraction* $f(x) = \frac{2x}{x^2+x+1}$ *est un élément simple de* 2^{eme} *espèce. La dérivée du polynôme* x^2+x+1 *est* $2x+1$, *on écrit ainsi l'intégrale comme suit :*

$$\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx = \underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}_{J_1} - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}dx}_{J_2}.$$

J_1 *est une intégrale immédiate, on a :*

$$J_1 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln\left(x^2+x+1\right) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Pour le calcul de J_2, *on écrit* x^2+x+1 *sous forme canonique :*

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

On pose $t = x + \frac{1}{2}$ *alors* $dt = dx$ *et* $x^2+x+1 = t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. *On obtient :*

$$J_2 = \int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Finalement, on obtient :

$$\int \frac{2x}{x^2+x+1}dx = \ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4.4.3 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Il s'agit de décomposer une fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sous la forme

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = E(x) + \text{ somme d'éléments simples}$$

où $deg^\circ R < deg^\circ Q$. Les polynômes E et R étant respectivement le quotient (appelé partie entière de f) et le reste de la division euclidienne de P par Q.

Les étapes à suivre pour déterminer la décomposition de f sont:

1. Si P et Q ont des racines communes, simplifier la fraction.

2. Extraire, la partie entière de F : Si $deg^\circ P \geq deg^\circ Q$, on effectue la division euclidienne de P par Q, on trouve $P = QE + R$, on a donc $f = E + R/Q$: Le polynôme E est appelé partie entière de f. On se ramène donc à déterminer la décomposition de R/Q avec $deg^\circ R < deg^\circ Q$. Si $deg^\circ P < deg^\circ Q$, alors la partie entière de F est nulle, on passe à l'étape 3.

3. Factoriser Q en un produit de termes irréductibles (selon le corps $\mathbb{K}$). Sur $\mathbb{K} = R[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ayant un discriminant strictement négatif.
   Dons si Q est de la forme

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_p)^{k_p} \left(x^2+\lambda_1 x+\beta_1\right)^{n_1} \ldots \left(x^2+\lambda_m x+\beta_m\right)^{n_m}$$

   avec $k_1, \cdots, k_p \in \mathbb{N},\ n_1, \cdots, n_m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \cdots, p\}$ et $\lambda_j,\ \beta_j$ sont dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lambda_j^2 - 4\beta_j < 0$ pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$. Alors, la décomposition de f est de la forme:

$$\begin{aligned}
f(x) = {} & \frac{a_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{a_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} \\
& + \frac{a_{21}}{(x-\alpha_2)} + \frac{a_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& + \frac{a_{p1}}{(x-\alpha_p)} + \frac{a_{p2}}{(x-\alpha_p)^2} + \cdots + \frac{a_{pk_p}}{(x-\alpha_p)^{k_p}} \\
& + \frac{b_{11}x + c_{11}}{(x^2+\lambda_1 x+\beta_1)} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2+\lambda_1 x+\beta_1)^2} + \cdots + \frac{b_{1n_m}x + c_{1n_m}}{(x^2+\lambda_m x+\beta_m)^{n_1}} \\
& + \frac{b_{21}x + c_{21}}{(x^2+\lambda_1 x+\beta_1)} + \frac{b_{22}x + c_{22}}{(x^2+\lambda_1 x+\beta_1)^2} + \cdots + \frac{b_{2n_m}x + c_{2n_m}}{(x^2+\lambda_m x+\beta_m)^{n_2}} \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& + \frac{b_{m1}x + c_{m1}}{(x^2+\lambda_1 x+\beta_1)} + \frac{b_{m2}x + c_{m2}}{(x^2+\lambda_1 x+\beta_1)^2} + \cdots + \frac{b_{mn_m}x + c_{mn_m}}{(x^2+\lambda_m x+\beta_m)^{n_m}}
\end{aligned}$$

   avec a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des constantes réels à déterminer.

4. Déterminer les coefficients de la décomposition en utilisant certaines techniques.

Exemple 4.5 *Calculons l'intégrale* $\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} dx$.
On pose $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ *, la fraction rationnelle* f *se décompose en éléments simples comme suit :*

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \qquad (\star).$$

Les constantes A, B *et* C *sont à déterminer. Pour les calculer, on utilise la technique suivante: Calcul de* A *: On multiplie les deux côtés de l'égalité (* $\star$*) par* $x+1$*, on obtient :*

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = A + \frac{B(x+1)}{x-1} + \frac{C(x+1)}{x-2} \qquad (1)$$

Puis on pose $x = -1$ *dans (1), on obtient* $A = \frac{-1}{6}$. *Calcul de* B *: On multiplie les deux côtés de l'égalité* $(\star)$ *par* $x-1$*, on obtient :*

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B + \frac{C(x-1)}{x-2} \qquad (2)$$

Puis on pose $x=1$ dans (2) on obtient $B=\frac{-1}{2}$. Calcul de C : On multiplie les deux côtés de l'égalité $(\star)$ par $x-2$, on obtient :

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{A(x-2)}{x+1}+\frac{B(x-2)}{x-1}+C$$

Puis on pose $x=2$ dans (3) on obtient $C=\frac{2}{3}$. D'où

$$f(x)=\frac{-1}{6}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-2}$$

Ainsi l'intégrale de f donne:

$$\int f(x)dx=\frac{-1}{6}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-2}dx.$$

On obtient par intégration :

$$\int\frac{x}{\left(x^2-1\right)(x-2)}dx=\frac{-1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Exemple 4.6 *Soit $I=\displaystyle\int\frac{x^3+2x+1}{x^2-3x+2}dx$.*
Par division euclidienne $P(x)=x^3+2x+1$ par $Q(x)=x^2-3x+2$ on obtient

$$x^3+2x+1=(x+3)\left(x^2-3x+2\right)+9x-5,$$

donc

$$\frac{x^3+2x+1}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{9x-5}{x^2-3x+2}$$

De plus

$$\frac{9x-5}{x^2-3x+2}=\frac{9x-5}{(x-1)(x-2)}=\frac{13}{x-2}-\frac{4}{x-1}$$

donc

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x^3+2x+1}{x^2-3x+2}dx=\int\left(x+3-\frac{4}{x-1}+\frac{13}{x-2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}x^2+3x-4\ln|x-1|+13\ln|x-2|+c\end{aligned}$$

Remarque : parfois pour intégrer une fraction rationnelle, il est préférable de voir s'il n'y a pas plus simple que de se lancer dans une décomposition en éléments simples. Par exemple

$$I=\int\frac{x}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}dx$$

On pose $y=x^2\Rightarrow dy=2dx$, donc

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{(y-1)(y+1)}dy\\&=\int\frac{1}{2(y-1)}-\frac{1}{2(y+1)}dy\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+c\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+c\end{aligned}$$

5 Intégration de fonctions se ramenant à des intégrales de fractions rationnelles

Ce sont des intégrales de la forme :

$$\int \mathcal{R}\left(e^{x}\right)\ dx, \int \mathcal{R}(\cos x, \sin x)\ dx, \int \mathcal{R}(chx, shx)\ dx, \int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{1-x^{2}}\right)\ dx$$

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{x^{2}-1}\right)\ dx, \int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{1+x^{2}}\right)\ dx,$$

où $\mathcal{R}$ est une fraction rationnelle.
En utilisant un changement de variable adéquat à chaque type d'intégrale, on se ramène à des fractions rationnelles qu'on intègre par la méthode de la décomposition en éléments simples. (Voir tableau Annexe II)

5.1 Intégrale d'une fonction rationnelle en e^x

Pour calculer l'intégrale de la forme $\int \mathcal{R}\left(e^{x}\right)\ dx$ (intégrale d'une fonction rationnelle en e^x), on utilise le changement de variable $t = e^x$ pour ce ramener à une intégrale d'une fonction rationnelle.
En posant $t = e^x$, on obtient $dt = e^x dx$, ce qui donne $dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}$.

Exemple 5.1 *Calculer l'intégrale* $I = \displaystyle\int \frac{e^{x}+2}{e^{x}\left(e^{2x}+1\right)}dx$. *Posons le changement de variable* $t = e^x$, *alors* $dx = \dfrac{dt}{t}$. *Ainsi*

$$I = \int \frac{e^{x}+2}{e^{x}\left(e^{2x}+1\right)}dx = \int \frac{t+2}{t^{2}\left(1+t^{2}\right)}dt$$

On pose $f(t) = \dfrac{t+2}{t^{2}\left(1+t^{2}\right)}$. *La fraction rationnelle* f *se décompose en éléments simples comme suit :*

$$f(t) = \frac{t+2}{t^{2}\left(t^{2}+1\right)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^{2}} + \frac{Ct+D}{t^{2}+1} \qquad (\star)$$

où A, B, C *et* D *des constantes à déterminer. Pour calculer* B, *on multiplie l'égalité* $(\star)$ *par* t^2 *puis on pose* $t = 0$ *dans l'égalité obtenue, on trouve* $B = 2$.
Pour calculer les autres constantes, on multiplie d'abord l'égalité $(\star)$ *par* t, *on obtient :*

$$\frac{t+2}{t\left(t^{2}+1\right)} = A + \frac{B}{t} + \frac{Ct^{2}+Dt}{t^{2}+1} \qquad (\star\star)$$

En passant à la limite quand t *tend vers* $+\infty$ *dans l'égalité* $(\star\star)$, *on obtient l'équation :*

$$A + C = 0$$

Dans l'égalité $(\star)$ *on remplace* t *par 1 puis par -1 , on trouve les deux équations :*

$$\begin{cases} t = 1 \quad\ \Longrightarrow 2A + C + D = -1 \\ t = -1 \Longrightarrow -2A - C + D = -3 \end{cases}$$

De l'équation (1) on a $C=-A$. En remplaçant C par $-A$ dans les équations (2) et (3), on obtient :

$$\begin{cases} A+D=-1 \\ -A+D=-3 \end{cases}$$

Ce qui donne: $D=-2$, $\quad A=1$ et $C=-1$. D'où :

$$f(t)=\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}-\frac{t+2}{t^2+1}$$

Par intégration, on trouve :

$$\int \frac{1}{t}dt+2\int \frac{1}{t^2}dt-\int \frac{t}{t^2+1}dt-2\int \frac{1}{t^2+1}dt=\ln|t|-\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-2\arctan(t)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Finalement, on obtient :

$$I=\int \frac{e^x+2}{e^x\left(e^{2x}+1\right)}dx=x-\frac{2}{e^x}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-2\arctan\left(e^x\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

5.2 Intégrale d'une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$

Pour calculer l'intégrale de la forme $\int \mathcal{R}(\cos x,\sin x)\,dx$ (intégrale d'une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$) , on utilise **en général** le changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, pour se ramener à une intégrale d'une fonction rationnelle. En posant $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Exemple 5.2 *Calculer $I_2=\int \frac{1}{\sin x}dx$.*

Posons le changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ et $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$. Ainsi l'intégrale I_2 devient

$$\begin{aligned} I_2=\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{1+t^2}{2t}\times\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+c \\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c. \end{aligned}$$

Remarque : En général, le changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonctionne mais conduit dans certains cas à des calculs assez lourds. Pour cela dans certain cas il est préférable d'utiliser d'autres changements de variables selon la fonction, plus simples pour calculer l'intégrale. Par exemple pour calculer l'intégrale

$$I=\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx.$$

On pose $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$, donc

$$\begin{aligned} I=\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx &= \int \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \operatorname{arctg} t+c=\operatorname{arctg}(\sin x)+c. \end{aligned}$$

5.2.1 Règles de Bioche

Les règles de Bioche sont des règles pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus $\displaystyle\int \mathcal{R}(\cos x, \sin x)\ dx$, en les ramenant à des intégrales de fractions rationnelles. Précisément, posons $w(x) = \mathcal{R}(\cos x, \sin x)\ dx$ l'intégrande (avec l'élément différentiel). Alors

- si $w(-x) = w(x)$, on pose $t = \cos x$,
- si $w(\pi - x) = w(x)$, on pose $t = \sin x$,
- si $w(\pi + x) = w(x)$, on pose $t = \tan x$.

Si aucune des propriétés n'est vérifiée, on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exemple 5.3 *Soit* $I = \displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$.
On a $w(-x) = \dfrac{\cos^3(-x)}{\sin(-x)}\ d(-x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin x}\ dx = w(x)$, *alors on pose* $t = \cos x$, *ainsi* $dt = -\sin x\ dx$.
D'où

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \sin x\ dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos x} \sin x\ dx \\ &= \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)(-\sin x)\ dx \\ &= \int \left(t - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 - \ln|t| + c \\ &= \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + c. \end{aligned}$$

Exemple 5.4 *Soit* $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\ dx$. *On a*

$$w(x+\pi) = \frac{1}{1+\cos^2(x+\pi)}\ d(x+\pi) = \frac{1}{1+\cos^2 x}\ dx = w(x).$$

On pose

$$t = \tan x \Rightarrow dt = \left(1+\mathrm{tg}^2\, x\right) dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+1} \times \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+1} \times \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \int \frac{1}{2+\tan^2 x} \times \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

5.3 Intégrale d'une fonction rationnelle en ch$x$ et sh$x$

Pour calculer l'intégrale de la forme $\displaystyle\int \mathcal{R}(\text{ch}x, \text{sh}x)\ dx$ (intégrale d'une fonction rationnelle en ch$x$ et sh$x$) , on utilise **en général** le changement de variable $t = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$, pour se ramener à une intégrale d'une fonction rationnelle. En posant $t = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2}, \quad \text{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \text{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \text{th}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Exemple 5.5 *Calculer* $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\text{ch}x} dx$.

5.4 Intégrale d'une fonction rationnelle en x et $\sqrt{x^2 \pm 1}$ (où $\sqrt{1-x^2}$)

Pour calculer ce genre d'intégrale nous utiliserons les changements de variable indiquées dans le tableau ci dessous.

	Types d'intégrales:	Méthodes d'intégration
1	$\displaystyle\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle contenant $\sqrt{x^2+1}$	On pose le changement de variable $t = \text{argsh}x$ on a $x = \text{sh}t,\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $x^2+1 = \text{ch}^2 t,\ \text{ch}(\text{argsh}x) = \sqrt{x^2+1}$
2	$\displaystyle\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{x^2-1}\right) dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle contenant $\sqrt{x^2-1}$	On pose le changement de variable Si $x > 1$ on pose $t = \text{argch}x,\ x = \text{ch}t$ $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ et $x^2-1 = \text{sh}^2 t$ Si $x < -1$ on pose $t = \text{argch}(-x),\ x = -\text{ch}t$, $dt = \dfrac{-dx}{\sqrt{x^2-1}}$, et $x^2-1 = \text{sh}^2 t$
3	$\displaystyle\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) dx$ $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle contenant $\sqrt{1-x^2}$	On pose le changement de variable $t = \arcsin x$ (ou bien $t = \arccos x$) on a $x = \sin t,\ \ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \ 1-x^2 = \cos^2 t$

Exemple 5.6 *Calculons l'intégrale* $I = \displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$.
Posons le changement de variable

$$t = \text{argsh}x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \textit{ et } x = \text{sh}t,$$

on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int (2\text{sh}t - 1)dt \\ &= 2\text{ch}t - t + c = 2\text{ch}(\text{sh}x) - \text{argsh}x + c \\ &= 2\sqrt{1+x^2} - \text{argsh}x + c \end{aligned}$$

Exemple 5.7 *Calculons l'intégrale* $I = \displaystyle\int \frac{5+x}{\sqrt{x^2-1}} dx$, $(x > 1)$.
Posons le changement de variable

$$t = \text{argch}x \Rightarrow x = \text{ch}t \textit{ et } dt = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int (5 + \text{ch}t)\ dt = (5t + \text{sh}t) + c \\ &= 5\text{argch}x + \text{sh}(\text{argch}x) + c. \end{aligned}$$

Exemple 5.8 *Calculer l'intégrale* $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ dx.$

Posons $t = \arcsin x$, $x = \sin t$, *alors* $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ dx = \int \frac{1-x^2}{x} \times \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\ dt = \int \frac{1}{\sin t} - \sin t\ dt \\ &= \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t + c \\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)\right| + \cos(\arcsin x) + c \end{aligned}$$

En utilisant les identités suivantes : $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *et* $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, *on obtient*

$$I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ dx = \sqrt{1-x^2} + \ln|x| - \ln(1 + \sqrt{1-x^2}) + c$$

Exemple 5.9 *Soit* $I = \displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx, x > 2.$

Généralement, pour calculer ce genre d'intégrale on effectue un changement de variable pour ce ramener à une intégrale d'une fonction rationnelle en x *et* $\sqrt{x^2 \pm 1}$ *(où* $\sqrt{1-x^2}$*). Pour ce la nous commençons par donner la forme canonique de* $x^2 - 3x + 2$ *.*

On a

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[(2x-3)^2 - 1\right].$$

D'où

$$I = 2\int \frac{1+x}{\sqrt{(2x-3)^2 - 1}}dx.$$

On pose

$$y = 2x - 3 \Rightarrow dy = 2dx \ \textit{et}\ x = \frac{y+3}{2}.$$

On obtient

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{5+y}{\sqrt{y^2-1}}dy$$

On effectue maintenant le changement de variable

$$t = \text{argch}\, y \Rightarrow y = \text{ch}\, t \ \textit{et}\ dt = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}dy,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int (5 + \text{ch}\, t)dt = \frac{1}{2}(5t + \text{sh}\, t) + c \\ &= \frac{5}{2}\text{argch}\, y + \frac{1}{2}\text{sh}(\text{argch}\, y) + c. \end{aligned}$$

utilisons maintenant la relation : $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}y) = \sqrt{y^2-1}, \forall y \in [1,+\infty[$, *on trouve*

$$\begin{aligned} I &= \frac{5}{2}\mathrm{argch}y + \frac{1}{2}\sqrt{y^2-1} + c \\ &= \frac{5}{2}\mathrm{argch}(2x-3) + \frac{1}{2}\sqrt{(2x-3)^2-1} + c \end{aligned}$$

6 Intégration des fonctions trigonométriques et hyperboliques

Dans cette sous-section nous nous intéresserons aux intégrales de type

$$\int \cos^{2n+1} x dx, \int \sin^{2n+1} x dx, \int \cos^{2n} x dx, \int \sin^{2n} x dx, \int \cos^n x \sin^m x dx, \text{ où } m,n \in \mathbb{N}^\star$$

$$\int \mathrm{ch}^{2n+1} x dx, \int \mathrm{sh}^{2n+1} x dx, \int \mathrm{ch}^{2n} x dx, \int \mathrm{sh}^{2n} x dx, \int \mathrm{ch}^n x \, \mathrm{sh}^m x dx, \text{ où } m,n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour calculer ce type d'intégrales nous utiliserons les techniques indiquées dans le tableau ci-dessous

	Types d'intégrales	Méthodes d'intégration
1	$\int \cos(px)\cos(qx)\ dx \quad (p,q) \in \mathbb{R}^*$	$= \frac{1}{2}\int \Big[\cos(p+q)x + \cos(p-q)x\Big]\ dx$
2	$\int \sin(px)\sin(qx)\ dx, \quad (p,q) \in \mathbb{R}^*$	$= \frac{-1}{2}\int \Big[\cos(p+q)x - \cos(p-q)x\Big]\ dx$
3	$\int \sin(px)\cos(qx)\ dx \quad (p,q) \in \mathbb{R}^*$	$= \frac{1}{2}\int \Big[\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\Big]\ dx$
4	$\int \cos^{2n+1} x\ dx = \int \cos^{2n} x \cos x dx, n \in \mathbb{N}^*$	On pose $y = \sin x,\ \cos^{2n} x = \left(1-\sin^2 x\right)^n$
5	$\int \sin^{2n+1} x\ dx = \int \sin^{2n} x \sin x dx, n \in \mathbb{N}^*$	On pose $y = \cos x,\ \sin^{2n} x = (1-\cos^2 x)^n$
6	$\int \cos^{2n} x dx, \quad \int \sin^{2n} x dx, n \in \mathbb{N}$	On utilise les formules de linéarisation $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
7	$\int \cos^n x \sin^m x\ dx,\ n,m \in \mathbb{N}^*$	On linéarise l'expression $\cos^n x \sin^m x$

Remarque : Dans le cas de l'intégrale de type $\int \cos^n x \sin^m x\ dx,\ n,m \in \mathbb{N}^*$ avec n pair et m impair (ou le contraire), nous pouvons calculer l'intégrale sans linéarisation (voir exemple I_3).

Exemple 6.1 *Calculer les intégrales*

$$I_1 = \int \cos^4 x\ dx,\ I_2 = \int \mathrm{sh}^3 x\ dx,\ I_3 = \int \sin^3 x \cos^4 x\ dx,\ I_4 = \int \cos^2 x \sin^2 x\ dx.$$

1. *Pour calculer l'intégrale I_1 on utilise la technique de linéarisation comme mentionnée dans tableau précédent. On a*

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\cos^2(2x) + 2\cos(2x)\right)$$

On linéarise à nouveau $\cos^2(2x)$. *En appliquant la même formule, on obtient:* $\cos^2(2x) = \dfrac{1+\cos(4x)}{2}$. *Ce qui donne finalement*

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) + 2\cos(2x)\right] = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

Ainsi, l'intégrale I_1 *est calculée immédiatement*

$$I_1 = \int \frac{3}{8}dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. *On écrit l'intégrale* I_2 *sous la forme:*

$$I_2 = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x dx = \int \left(\operatorname{ch}^2 x - 1\right) \operatorname{sh} x dx.$$

On pose le changement de variable $t = chx$, *alors* $dt = \operatorname{sh} x dx$. *On obtient ainsi :*

$$I_2 = \int \left(t^2 - 1\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - t + c = \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. *On écrit l'intégrale* I_3 *sous la forme:*

$$I_3 = \int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\cos^4 x \sin x dx$$

On pose ensuite le changement de variable $t = \cos x$, *alors* $dt = -\sin x dx$. *On obtient ainsi :*

$$I_3 = \int \left(1 - t^2\right) t^4(-dt) = \int \left(t^6 - t^4\right) dt = \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + c = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4. *On linéarise* $\cos^2 x$ *et* $\sin^2 x$.
On a

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Donc

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\left[1 - \cos^2(2x)\right].$$

Or

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\cos^2 x \sin^2 x &= \frac{1}{4}\left[1 - \cos^2(2x)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}I_4 &= \int \cos^2 x \sin^2 x \ dx = \int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{8}\int 1 - \cos(4x)dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + c.\end{aligned}$$