Prof: N. Benbelkacem

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Cours 03: 4) Opérations sur les sous-espaces vectoriels

4) Opérations sur les sous-espaces vectoriels

4.1 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 06 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Preuve

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E,

et $F = F_1 \cap F_2 = \{x \in E \,;\, x \in F_1 \text{ et } x \in F_2\}$. On a :

i) $F_1 \subset E$ et $F_2 \subset E$, donc $F = F_1 \cap F_2 \subset E$.

ii) $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, donc $0_E \in F_1 \cap F_2 = F \Rightarrow 0_E \in F$

} Puisque F_1 et F_2 deux s.ev de E.

Scanned by CamScanner

iii) Soient $u, v \in F$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$

Comme $\begin{cases} u \in F = F_1 \cap F_2 \\ v \in F = F_1 \cap F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in F_1 \text{ et } v \in F_1 \\ u \in F_2 \text{ et } u \in F_2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda u + \beta v \in F_1 \\ \text{et} \\ \lambda u + \beta v \in F_2 \end{cases}$ alors

$$\lambda u + \beta v \in F_1 \cap F_2 = F,$$ d'où $F = F_1 \cap F_2$ est un s.ev de E.

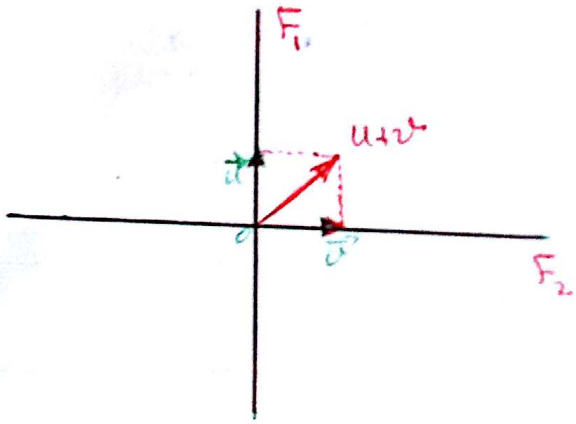
Remarque: La réunion de deux sous-espaces vectoriels $(F_1 \cup F_2)$ n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

Exemple:

Soient F_1 et F_2 deux s.ev de $\mathbb{R}^2$:

$$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

$$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$



si on prend par exemple deux vecteurs :

$u = (0,1) \in F_1$ et $v = (1,0) \in F_2$

Donc $u \in F_1 \cup F_2$ et $v \in F_1 \cup F_2$; on a

$u + v = (1,1)$, on remarque $u+v \notin F_1 \cup F_2$ car $u+v \notin F_1$ et $u+v \notin F_2$

donc $F_1 \cup F_2$ n'est pas stable par addition.

d'où $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.ev de $\mathbb{R}^3$.

4.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev E.
On appelle somme des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2, l'ensemble :

$$F_1 + F_2 = \{x + y \mid x \in F_1, y \in F_2\}$$

Exemple : Considérons les deux s-ev de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \text{ et } G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

On a donc

$$F + G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} + \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

$$= \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} + \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x,0,z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$$

Proposition 07 :

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Autrement dit, $F + G$ est le plus s.ev de E contenant F et G, donc

$F + G$ est le s.ev de E engendré par $F \cup G$

Remarque Ne pas confondre somme et réunion !

La somme est un s.ev, mais pas la réunion (en général).

II.3 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 07 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux s.ev de E. On dit que $F+G$ est une **somme directe** si tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $x+y$, avec $x \in F$ et $y \in G$, c-à-d :

$$\forall z \in F+G, \exists! (x,y) \in F \times G, \; z = x+y$$

Lorsque la somme $F+G$ est directe, on la note $F \oplus G$

Proposition 08 : E un $\mathbb{K}$ ev et F, G deux s.ev de E "Caractérisation des sommes directes"

La somme des sous-espaces vectoriels F et G est directe si et seulement si :

$$F \cap G = \{0_E\}$$

Autrement dit,

$$F+G \text{ est directe} \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Preuve : $\Rightarrow$) Supposons que la somme $F+G$ soit directe et montrons que $F \cap G = \{0_E\}$

On a : $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$ d'où $\{0_E\} \subset F \cap G$ ....(*)

Soit $x \in F \cap G$, alors $x \in F$ et $x \in G$, d'où $(-x) \in G$ "car F et G s.ev de E".

Par suite $x + (-x) = 0$ avec $x \in F$ et $(-x) \in G$. La somme de F et G étant directe, on déduit que $x = (-x) = 0$, ceci prouve que $F \cap G \subset \{0_E\}$ ...(**)

d'où $F \cap G = \{0_E\}$

$\Leftarrow$) Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme de F et G est directe.

Soit $z \in F+G$ et $x, x' \in F$; $y, y' \in G$ tels que :

$z = x + y$ et $z = x' + y'$. Alors $x + y = x' + y'$, donc :

$x - x' = y' - y$ avec $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$.

Ainsi, $x - x' = y' - y \in F \cap G = \{0_E\}$ donc $x - x' = y - y' = 0_E$

donc $x = x'$ et $y = y'$, on a prouvé donc l'unicité de l'écriture de z comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

d'où la somme $F+G$ est directe ■

Remarque 01 : Comme vu dans la preuve, l'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$ est toujours vraie (On dit que c'est une inclusion triviale).

On ne montrera donc que l'inclusion $F \cap G \subset \{0_E\}$ lorsque l'on utilisera cette proposition, cela revient donc à montrer que

Astuce 02 : $\{x \in F \cap G \Rightarrow x = 0_E\}$

Remarque 02 : Pour montrer que $F+G$ est une somme directe, il suffit de montrer que :

Astuce 03 : $\forall (x,y) \in F \times G$; $x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E$

Exemples :

① $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x,y,z) \in E \mid x - z = 0\}$; $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$

On remarque que :

$$(1,2,3) = \underbrace{(3,4,3)}_{\in F} + \underbrace{(-2,-2,0)}_{\in G} = \underbrace{(2,3,2)}_{\in F} + \underbrace{(-1,-1,1)}_{\in G}$$

Ce qui prouve que la somme $F+G$ n'est pas directe ■

② $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0,y) ; y \in \mathbb{R}\}$

Montrons que $F + G$ est directe.

Soit $z = (x,y) \in F \cap G$, Comme $z \in F$ alors $y = 0$
Comme $z \in G$ alors $x = 0$ $\Big\}$ Ainsi $z = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Donc $F \cap G = \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

d'où la somme $F + G$ est directe

③ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(1) = 0\}$, $G = \{$l'ensemble des fonctions constantes$\}$.

Montrons que $F + G$ est directe.

Soit $f \in F \cap G$. Alors Comme $f \in G$, f est une fonction constante, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c.}$ --(*)

De plus, $f \in F$, donc $\boxed{f(1) = 0}$ --(**)

Comme $f(1) = c = 0$, on a donc, $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = c = 0$

Donc f est la fonction nulle. Ainsi : $F \cap G = \{0_E\}$

d'où F et G sont en somme directe

4.4) Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 8: Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux s-ev de E.

On dit que F et G sont <u>supplémentaires</u> dans E si :

la somme $F+G$ est directe et vaut E, i.e si : $F \oplus G = E$.

En d'autres termes F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit de manière unique sous la forme $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Autrement dit :

$$E = F \oplus G \iff \forall z \in E, \exists! (x,y) \in F \times G \ ; \ z = x+y$$

Proposition 09 " Caractérisation des supplémentaires "

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F+G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Astuce 04 !!

Remarques :

1. le fait que la somme $F+G$ vale E assure l'existence de l'écriture
2. le fait que la somme $F+G$ soit directe assure l'unicité de l'écriture
3. L'inclusion $F+G \subset E$ est triviale, on ne montrera donc que l'autre inclusion quand on voudra montrer $F+G = E$.
4. En général, un sous-espace vectoriel admet plusieurs supplémentaires.
5. Le sous-espace nul $\{0_E\}$ admet E comme supplémentaire

Exemples ① $E=\mathbb{R}^2$, $F=\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(0,y) : y\in\mathbb{R}\}$

Montrons que $\underset{\mathbb{R}^2}{E}=F\oplus G$

$\mathbb{R}^2=F\oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F\cap G=\{0_E\} : \text{Nous avons déjà prouver que la somme } F+G \text{ est directe} \\ E=F+G : \text{Il nous reste de montrer que } E=\mathbb{R}^2\subset F+G \end{cases}$

car l'inclusion $F+G\subset\mathbb{R}^2$ est forcément vérifiée.

Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on cherche $v\in F$ et $w\in G$ tels que : $u=v+w$

Posons : $v=(x,0)$ et $w=(0,y)$ Alors $v\in F$, $w\in G$ et $u=v+w$

donc $u\in F+G$, d'où : $\mathbb{R}^2\subset F+G$. on a donc $\mathbb{R}^2=F\oplus G$

Conclusion : $\mathbb{R}^2=F\oplus G$

---

② $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(1)=0\}$

G := l'ensemble de fcts constantes

Montrons que $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=F\oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F\cap G=\{0_E\} & \text{DV} \\ E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=F+G \end{cases}$

Montrons que $E=F+G$

$\supset)$ l'inclusion $F+G\subset E$ est vérifiée.

$\subset)$ Montrons que $E\subset F+G$:

Soit $f\in E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il existe une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

On cherche $g\in F$ et $h\in G$ deux fonctions telles que $\underline{f=g+h}$!!

On raisonne par analyse | synthèse

Analyse :

Comme $h\in G$, h doit être une fonction constante, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=c$

De plus puisque $g \in F$, on a : $g(1) = 0$

Comme $f = g + h$, on a en particulier $f(1) = g(1) + h(1) = 0 + c = c$

donc h est forcément la fonction constante égale à $f(1)$, et donc

g est définie par : $g(x) = f(x) - f(1)$

on a alors bien $g(1) = 0$ donc $g \in F$

Synthèse :

Soit $x \in \mathbb{R}$, Posons $g : x \rightarrow f(x) - f(1)$ et $h : x \rightarrow f(1)$

Alors on a : $f = g + h$, avec $g \in F$ et $h \in G$

on a donc : $F + G \subset E$ et $E \subset F + G$

Ainsi, on obtient : $E = F \oplus G$

Conclusion : $E = F \oplus G$