Développements limités

Un développement limité d'une fonction en un point x_0 fini ou infini est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point . Ce qui permet l'étude locale de cette fonction (le calcul de limites au voisinage de x_0, la détermination de la tangente à la courbe d'une fonction, les droites asymptotes,...). Nous commençons ce chapitre par les développements limités au voisinage de 0, puis nous généralisons cette notion au voisinage d'un point quelconque x_0 et de l'infini par un changement de variable simple.

I) Développements limités au voisinage de 0

Définition 1 *Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de centre 0 et f une fonction définie sur I sauf peut-être en 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe un polynôme de degré n à coefficients réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et une fonction ε définie sur I tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + x^n \varepsilon(x), \qquad \textit{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarques :

- Le polynôme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ de degré $\leq n$ est appelé partie principale ou régulière du développement limité.
- L'expression $x^n \varepsilon(x)$ est aussi notée par $o\left(x^n\right)$, c'est le reste du développement limité, qui est la partie négligeable c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o\left(x^n\right)}{x^n} = 0$. La notation $o\left(x^n\right)$ fut introduite par le mathématicien Russe Lev Landau.
- On écrit $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{\text{partie principale}} + \underbrace{o\left(x^n\right)}_{\text{reste}}$.
- On écrit en général $DL_n(0)$ pour dire développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

Exemple 1 *Toute fonction polynomiale admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre. Par exemple la fonction polynomiale $f(x) = 2 + 3x + x^3$ admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre 1 , dont la partie principale est $2 + 3x$ et $x^3 = o(x)$ est la partie négligeable.*
Elle admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre 3, dont la partie principale est $2 + 3x + x^3$ et le reste est nul.

Exemple 2 *La fonction $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas définie en 0 et admet un développement* *limité à l'ordre* $1, 2$ *et* 3 *au voisinage de* 0 *. En effet*

$$f(x) = x + \underbrace{x\left(-x + 2x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{o(x)} \text{ DL à lordre } 1, \quad \text{car} \lim_{x\to 0}\left(-x + 2x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

$$f(x) = x - x^2 + \underbrace{x^2\left(2x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{o(x^2)} \text{ DL à lordre } 2, \quad \text{car} \lim_{x\to 0}\left(2x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + \underbrace{x^3\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{o(x^3)}, \quad \text{DL à lordre } 3, \quad \text{car} \lim_{x\to 0}\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

Exemple 3 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \neq 1$*, on a:*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

Donc

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

En posant $\frac{x^{n+1}}{1 - x^n} = x^n\left(\frac{x}{1 - x}\right) = o(x^n)$ *où* $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - x} = 0$*, on obtient un développement limité à l'ordre* n *au voisinage de 0 de la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{1 - x}$*, c'est-à-dire*

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad \cdots (*)$$

Exemple 4 *Développement limité à l'ordre* n *au voisinage de 0 de la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{1 + x}$*.*

En écrivant la fonction $f(x) = \frac{1}{1 + x}$ *sous la forme* $f(x) = \frac{1}{1 - (-x)}$ *et en remplaçant dans* $(*)$ *(x) par* $(-x)$ *qui est aussi au voisinage de 0 , on obtient:*

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad \cdots (**)$$

Exemple 5 *Développement limité à l'ordre* n *au voisinage de 0 de la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{1 + x^2}$*.*
De même, en remplaçant dans (2), (x) *par* (x^2) *et comme* x^2 *est aussi un voisinage de 0 , on obtient :*

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right).$$

Nous avons le résultat suivant qui découle directement de la définition d'un développement limité.

Proposition 1 *Si* f *admet un DL à l'ordre* n *au voisinage de 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + o(x^n),$$

alors $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$ *(existe et finie).*

Remarque : Si $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas ou si elle est égale à $\pm\infty$. Alors, f n'admet pas de DL au voisinage de 0.

Exemple 6 *La fonction $f(x) = \ln x$ n'admet pas de DL au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.*

Proposition 2 ***(Unicité du développement limité)***
Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement est unique.

Preuve 1 *Supposons qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ et deux fonctions ε_1 et ε_2 tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x^n), \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$
$$f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x^n), \qquad \textit{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Par soustraction, on obtient

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = x^n(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)). \tag{1}$$

Passant à la limite quand x tend vers 0 dans (1), on obtient

$$a_0 - b_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = b_0.$$

La relation (1) devient

$$(a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = x^n(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)),$$

soit

$$(a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1}(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)).$$

En prenant de nouveau la limite quand x tend vers 0 , on obtient

$$a_1 - b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1.$$

En poursuivant l'opération n fois, on trouve

$$a_n - b_n = \varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x),$$

d'où

$$a_n - b_n = \lim_{x\to 0}(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)) = 0,$$

d'où $a_n = b_n$.

Proposition 3 ***(Développements limités et parité)***
Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0.

- *Si f est paire, alors les coefficients de rang impair de DL sont nuls.*
- *Si f est impaire. alors les coefficients de rang pair de DL sont nuls.*

Preuve 2 *Soit f une fonction paire admettant un $DL_n(0)$. Donc*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

et

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n + (-1)^n x^n \varepsilon(-x).$$

Or f est paire, donc $f(-x) = f(x)$, par conséquent il en résulte de l'unicité du développement limité que

$$a_i = (-1)^j a_i, \quad 0 \leq i \leq n \text{ et } \varepsilon(x) = (-1)^n \varepsilon(-x).$$

D'où, tous les coefficients d'indice impair $(a_1, a_3, \cdots, a_{2k+1}, \cdots)$ sont nuls. Le développement de f s'écrit alors

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + x^{2n} \varepsilon(x).$$

On démontre de la même manière le cas f est impaire.

Proposition 4 ***(Troncature)*** *Si une fonction f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0. alors elle admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre k, pour tout $0 \leq k \leq n$.*

Preuve 3 *Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$. Supposons que la fonction f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 de la forme: :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Alors:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + x^k \underbrace{\left(x a_{k+1} + \cdots + a_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon\left(x^{n-k}\right)\right)}_{\varepsilon_1(x)}$$

où $\varepsilon_1(x) = x^{n-k} \varepsilon\left(x^{n-k}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$, donc

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + x^k \varepsilon_1(x)$$

Ainsi, f admet un DL à l'ordre k au voisinage de 0 .

1) Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young

Théorème 1 ***(Formule de Taylor-Young à l'ordre** n **)*** *Soient I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur I, alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ telle que, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Proposition 5 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si une fonction f est de classe C^n au voisinage de 0 , alors elle admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 donné par :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Où les coefficients du polynôme de la partie régulière du DL, sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Remarque : L'existence de la dérivée n-ième d'une fonction f au point $x = 0$ entraine l'existence du $DL_n(0)$. La réciproque est fausse ; il existe des fonctions admettant un $DL_n(0)$ sans pour autant que la formule de Taylor-Young soit applicable.

Développements limités de quelques fonctions élémentaires obtenus par la formule de Taylor-Young au voisinage de 0

1. $f(x) = e^x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = e^x$ donc $f^{(n)}(0) = 1$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).$$

2. $f(x) = \sin x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o\left(x^{2k+2}\right).$$

3. $f(x) = \cos x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, donc

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o\left(x^{2k+1}\right).$$

Remarque : Dans la partie principale du DL de la fonction $\cos x$, ne figure que les monômes de puissances paires, car la fonction $\cos x$ est paire. De même pour la fonction $\sin x$ qui est impaire, on retrouve que des puissances impaires dans la partie principale de son DL.

4. $f(x) = (1+x)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}.$$

Donc

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o\left(x^n\right).$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}x^n + o\left(x^n\right).$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^n + o\left(x^n\right).$$

2) Opérations sur les développements limités

Théorème 2 *Soient f et g deux fonctions admettant des DL au même ordre n au voisinage de 0 de la forme :*

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right) \quad (d^\circ P \leq n, \quad d^\circ Q \leq n).$$

Alors

1. *La somme $f+g$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 de la forme*

$$f(x) + g(x) = \Big(P(x) + Q(x)\Big) + o\left(x^n\right).$$

2. Le produit $f \times g$ admet un DL a l'ordre n au voisinage de 0 de la forme :

$$f(x) \times g(x) = R(x) + o\left(x^n\right).$$

où $R(x)$ est le polynôme de degré inférieur ou égal à n obtenu en ne gardant dans le produit $P(x)$ par $Q(x)$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

3. Si $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$, alors le quotient $\frac{f}{g}$ admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre n, sa partie régulière est le quotient à l'ordre n dans la division suivant les puissances croissantes de $P(x)$ par $Q(x)$.

Remarque : Supposons que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o\left(x^n\right)$$

Si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, c'est-à-dire $b_0 = 0$, on distingue deux cas :

- **Cas 1 :** $a_0 \neq 0$ et $b_0 = 0$, dans ce cas $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers ∞ et donc $\frac{f}{g}$ n'admet pas de DL au voisinage de 0 et on parle d'un développement limité généralisé.
- **Cas 2 :** $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$, on met la plus petite puissance x^p en facteur commun pour f et g, ainsi $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^p \cdot f_1(x)}{x^p \cdot g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ et on se ramène soit au cas $\lim_{x \to 0} g_1(x) = 0$ ou bien $\lim_{x \to 0} g_1(x) \neq 0$.

Exemple 7 *Déterminons le DL à l'ordre $n = 3$ au $V(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1-x} + e^x$. On a :*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right), e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right).$$

Donc

$$f(x) = 2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Exemple 8 *Soit $f(x) = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. En utilisant DL à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions e^x et de e^{-x} donnés par :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

comme $\lim_{x \to 0}(-x) = 0$, alors

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + o\left((-x)^n\right) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \end{aligned}$$

Par sommation des deux DL puis division par 2 , on obtient :

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o\left(x^{2k+1}\right).$$

Exemple 9 *Calculons le DL a l'ordre 4 au $V(0)$ de $\sin x(1-\mathrm{ch}x)$. On a*

$$\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)\\
1-\mathrm{ch}x &= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o\left(x^4\right)\\
\sin x(1-\cosh x) &= \left(x-\frac{1}{6}x^3\right)\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4\right)+o\left(x^4\right)=-\frac{1}{2}x^3+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Comme on cherche à déterminer un DL à l'ordre 4, alors dans le produit des deux parties régulières, on néglige tous les termes de degré supérieur ou égal à 5.

Exemple 10 *Calculons le le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)=\dfrac{e^x}{\cos x}$. On a*

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right),\\
\cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Méthode 1 : *On effectue la division suivant les puissances croissantes de x.*

$$\begin{array}{cc|c}
 & 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 & 1-\frac{1}{2}x^2 \\ \cline{3-3}
- & & \\
 & 1-\frac{1}{2}x^2 & 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3 \\ \cline{2-2}
 & x+x^2+\frac{1}{6}x^3 & \\
- & & \\
 & x-\frac{1}{2}x^3 & \\ \cline{2-2}
 & x^2+\frac{2}{3}x^3 & \\
- & & \\
 & x^2-\frac{1}{2}x^4 & \\ \cline{2-2}
 & \frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4 &
\end{array}$$

Ainsi, on obtient le DL au voisinage de 0 à l'ordre 3 suivant

$$\frac{e^x}{\cos x}=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right).$$

Méthode 2 : *La deuxième méthode consiste à calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\cos x}$ ensuite multiplier le résultat obtenu par le $DL_3(0)$ de la fonction exponentielle. On a*

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)}$$

et

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+o\left(u^3\right).$$

On pose $u(x) = -\frac{1}{2}x^2$, on a $u(0) = 0$ et

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).$$

Puisque

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{\cos x} &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) + o\left(x^3\right)\\ &= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

Proposition 6 ***(Développement limité d'une fonction composée)***
Soient f et g deux fonctions admettant des DL au même ordre n au voisinage de 0 de la forme :

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right) \quad (d^\circ P \leq n, \quad d^\circ Q \leq n).$$

Si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, alors $f \circ g$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est obtenu en ne gardant dans la composée $(P \circ Q)(x)$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 11 *Calculons le DL à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = e^{\sin x}$.*
On a $f(x) = e^{\sin x} = (u \circ v)(x)$ où $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$.
Écrivons d'abord les DL à l'ordre 3 de u et v. On a :

$$u(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad v(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

On a $\lim_{x \to 0} v(x) = 0$. En Posant $t = \sin x$, alors $t \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$, ainsi

$$\begin{aligned}e^{\sin x} = e^t &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o\left(t^3\right)\\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o\left(x^3\right)\\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

On déduit que $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$

3) Dérivation et intégration d'un développement limité

Théorème 3 *Soient I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, admettant au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant :*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o\left(x^n\right) = P(x) + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f (c'est-à-dire pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$), alors F admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ au voisinage de 0 donné par

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right) = F(0) + \int_0^x P(t)\ dt + o(x^{n+1}).$$

Exemple 12 *Soit F la fonction définie par $F(x) = \ln(1+x)$, dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 tel que $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.*
La fonction f admet au voisinage de 0 le DL suivant

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right).$$

alors par intégration, on obtient

$$F(x) = F(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

comme $F(0) = 0$, alors

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Exemple 13 *Soit F la fonction définie par $F(x) = \arctan x$, dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 tel que $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.*
La fonction f admet au voisinage de 0 le DL suivant

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Par intégration, on obtient

$$F(x) = F(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

comme $F(0) = 0$, alors

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

Exemple 14 *Soit F la fonction définie par $F(x) = \arcsin(x)$, dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 tel que $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $F(0) = 0$.*
On a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

En utilisant le DL de la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{-1}{2}$, on obtient

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^{2n} + o\left(x^{2n}\right).$$

Ce qui donne par intégration

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Proposition 7 ***(Dérivation d'un développement limité)***
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0 admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = P(x) + o(x^n).$$

Si f' admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, alors

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}) = P'(x) + o(x^{n-1}).$$

Exemple 15 *Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, tel que $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.*
La fonction f admet au voisinage de 0 le DL suivant

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

Comme f' admet un DL au voisinage de 0 , alors

$$\frac{1}{(1-x)^2} = x + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

II) Développements limités au voisinage de x_0

Définition 2 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, si la fonction $t \longmapsto f(t + x_0)$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, c'est-à-dire*

$$f(t + x_0) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots a_n t^n + t^n \varepsilon(t), \qquad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

que l'on peut écrire en utilisant le changement de variable $t = x - x_0$ sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0), \qquad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

Remarque :

- L'expression $(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$ est aussi notée par $o((x - x_0)^n)$, ainsi

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

- Les propriétés qui ont été données pour les développements limités en 0 se généralisent aux développements limités en x_0.
- Pour déterminer un *DL* au voisinage de x_0, il suffit de considérer le changement de variable $t = x - x_0$ pour ce ramener au voisinage de 0.

Exemple 16 *Soit $f(x) = e^x$. Calculons le DL à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 1$. On pose $t = x - 1$. alors $t \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 1$. On a:*

$$\begin{aligned} f(1 + t) &= e^{1+t} = e^1 \cdot e^t \\ &= e^1 \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right) \end{aligned}$$

Donc

$$e^x = e^1 + e^1(x - 1) + e^1 \frac{(x-1)^2}{2} + e^1 \frac{(x-1)^3}{6} + o\left((x - 1)^3\right).$$

Exemple 17 *Soit $f(x)=\ln x$, calculons le DL à l'ordre 3 au voisinage de $x_0=2$. On pose $y=t-2$. alors $t \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 2$. On a*

$$\begin{aligned}
f(2+t) = \ln(2+t) &= \ln 2\left(1+\frac{t}{2}\right) \\
&= \ln 2+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right), \quad \frac{t}{2} \longrightarrow 0 \\
&= \ln 2+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{24}+o\left(t^3\right) \qquad \text{d' après le DL de} \ln(1+x)
\end{aligned}$$

d'où

$$\ln x=\ln 2+\frac{(x-2)}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(x-2)^3}{24}+o\left((x-2)^3\right).$$

Exemple 18 *Soit $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, calculons le DL à l'ordre $n=3$ au voisinage de $x_0=1$. On pose $t=x-1$. alors $t \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 1$. On a:*

$$f(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2}=\frac{t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o\left(t^3\right)}{1+2t+t^2}$$

En faisant une division suivant les puissances croissantes de t, on obtient:

$$\frac{t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o\left(t^3\right)}{1+2t+t^2}=y-\frac{5}{2}t^2+\frac{13}{3}t^3+o\left(t^3\right)$$

ainsi,

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}=(x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{13}{3}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).$$

III) Développements limités au voisinage de l'infini

Définition 3 *On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$ si la fonction $t \longmapsto f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, c'est-à-dire*

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots a_nt^n+t^n\varepsilon(t), \qquad \text{avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

que l'on peut écrire en utilisant le changement de variable $t=\dfrac{1}{x}$ sous la forme

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\frac{a_n}{x^n}+\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{avec } \lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Remarque :

- L'expression $\dfrac{1}{x^n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est aussi notée par $o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$, ainsi

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

- Les propriétés qui ont été données pour les développements limités en 0 se généralisent aux développements limités en $\pm\infty$.
- Pour déterminer un DL au voisinage de $\pm\infty$, il suffit de considérer le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ pour ce ramener au voisinage de 0.

Exemple 19 *Calculons le DL à l'ordre 4 au voisinage de $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.*
On pose $t = \dfrac{1}{x}$, donc $t \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ et $x = \frac{1}{y}$, alors

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1} = \frac{1}{1-t}.$$

En utilisant le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$, on obtient

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + o\left(t^4\right),$$

d'où

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

IV) Développement limité généralisé

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0 . On suppose que f n'admet pas de DL au voisinage de 0 mais que la fonction $x \longmapsto x^\alpha f(x)$, (avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$) en admet un DL au voisinage de 0. Alors on peut écrire

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

D'où

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\left[a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)\right].$$

Un tel développement est appelé développement limité généralisé ou développement asymptotique.

Exemple 20 *La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-x^2}$ n'admet pas de DL au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, mais la fonction $xf(x) = \dfrac{1}{1-x}$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0, donné par*

$$xf(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right),$$

ainsi

$$f(x) = \frac{1}{x-x^2} = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right),$$

Exemple 21 *Calculer le développement limité généralisé d'ordre 3 au $V(0)$ de $x \longmapsto \operatorname{cotg} x$. La fonction $x \longmapsto \operatorname{cotg} x$ définie sur $\mathbb{R}^* n'$ admet pas de $DL(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotg} x = \infty$. On a*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o\left(x^4\right)}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o\left(x^4\right)\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Exemple 22 *Calculer le développement limité généralisé d'ordre 2 au $V(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{[\ln(1+x)]^2}$.*
On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \cdots \Rightarrow [\ln(1+x)]^2 = x^2 + \cdots$$

On calcule par conséquent le $DL(0)$ de $x \longmapsto x^2\dfrac{1}{[\ln(1+x)]^2}$ l'ordre 4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln(1+x)} &= \frac{x}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right)} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + o\left(x^4\right)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{19}{720}x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^2 &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{19}{720}x^4\right)^2 + o\left(x^4\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{240}x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{240}x^2 + o\left(x^2\right).$$

V) Continuité, dérivabilité et prolongement

Proposition 8 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 contenant x_0 ($f(x_0)$ est défini).*

- *f admet un DL à l'ordre 0 au voisinage de x_0 si et seulement si elle est continue en x_0 et dans ce cas, on a :*
$$f(x) = f(x_0) + o\left((x - x_0)^0\right) = f(x_0) + o(1).$$
- *f admet un DL à l'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0 et dans ce cas, on a:*
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Remarque : Pour $k \geq 2$, une fonction peut admettre un DL à l'ordre k au voisinage de 0 sans être k fois dérivable en 0 . Prenons l'exemple de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f admet un DL à l'ordre 2 en 0 qui s'écrit :

$$f(x) = x + \underbrace{x^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}_{o(x^2)} \quad \text{où } \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Cependant f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = 1 + 3x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi f' n'a pas de limite en 0, donc f' n'est pas dérivable en 0.

Dans le cas où f est définie dans un voisinage de x_0 sauf en x_0, grâce à un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0, on peut dire si la fonction f est prolongeable par continuité en x_0 et si son prolongement dérivable en x_0.

Proposition 9 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I\backslash\{x_0\}$ tel que $x_0 \in \bar{I}$. On suppose que f admet un DL d'ordre 1 au voisinage de x_0 de la forme :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Alors

1. *la fonction f est prolongeable par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$*
2. *le prolongement de f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$.*

Exemple 23 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

VI) Application des développements limités

1) Calculs de limites

Les développements limités au voisinage de x_0 (ou au voisinage de $\pm\infty$) d'une fonction f sont très utiles pour calculer des limites ayant des formes indéterminées quand x tend vers x_0.

Exemple 24 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{6} + o(1) = -\frac{1}{6}$.

Exemple 25 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$, *on a*

$$\begin{aligned}\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} &= \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}\\ &= \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -2 + o(1)\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = -2$.

Exemple 26 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^5\left(\operatorname{argsh}\dfrac{1}{x} + \arcsin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right)$. *On pore $y = \dfrac{1}{x}$, ce qui donne:*

$$x^5\left(\operatorname{argsh}\frac{1}{x} + \arcsin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{y^5}(\operatorname{argsh} y + \arcsin y - 2y).$$

Le DL de argsh$y$ *à l'ordre 5 au voisinage de* $y=0$ *est obtenu par intégration terme à terme du DL à l'ordre 4 de la fonction* $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}=(1+(y^2))^{\frac{1}{2}}$.

On trouve $\operatorname{argsh} y = y-\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{40}y^5+o\left(y^5\right)$ *ainsi*

$$\begin{aligned}
x^5\left(\operatorname{argsh}\frac{1}{x}+\arcsin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right) &= \frac{1}{y^5}(\operatorname{argsh} y+\arcsin y-2y)\\
&= \frac{1}{y^5}\left[\left(y-\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{40}y^5\right)+\left(y+\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{40}y^5\right)-2y+o\left(y^5\right)\right]\\
&= \frac{1}{y^5}\left(\frac{3}{20}y^5+o\left(y^5\right)\right)=\frac{3}{20}+o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5\left(\operatorname{argsh}\dfrac{1}{x}+\arcsin\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{y^5}(\operatorname{argsh} y+\arcsin y-2y)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{3}{20}+o(1)\right)=\dfrac{3}{20}$.

2) Fonctions équivalentes

Définition 4 *Deux fonctions* f *et* g *sont dites équivalentes au voisinage de* x_0 *(*x_0 *peut être égal à* $\pm\infty$ *) si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. *On écrit* $f\underset{x_0}{\sim}g$.

Exemple 27 *On a* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, *donc* $\sin x\underset{0}{\sim}x$

Proposition 10 *Si* f *une fonction admet un DL d'ordre* n *au voisinage de* x_0 *de la forme*

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

Notons p *le plus petit entier tel que* $a_p\neq 0$, *alors* $f(x)\underset{x_0}{\sim}a_p(x-x_0)^p$

Remarque : Le développement limité d'une fonction f au voisinage de x_0 permet de trouver un équivalent à f au voisinage de x_0 en prenant le premier terme non nul du DL au voisinage de x_0.

Exemple 28 *Les équivalences suivantes sont directement déduites des différents DL calculés dans les exemples précédents.*

1. *On a* $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)$, *donc* $\cos x\underset{0}{\sim}1$.
2. *On a* $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, *donc* $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$.
3. *On a* $\sin x(1-\cosh x)=-\frac{1}{2}x^3+o\left(x^4\right)$ *donc* $\sin x(1-\cosh x)\underset{0}{\sim}-\frac{1}{2}x^3$.

3) Équation de la tangente

Proposition 11 *Soit* f *une fonction définie en* x_0. *Si* f *admet un DL au voisinage de* x_0 *(*x_0 *finie) de la forme:*

$$f(x)=\underbrace{a_0+a_1\left(x-x_0\right)}_{\text{Equation de las tangente}}+\underbrace{a_k\left(x-x_0\right)^k}_{\text{Terrne indicateur de las position}}+o\left(\left(x-x_0\right)^k\right),\quad k\in\mathbb{N},k\geq 2.$$

Alors $y=a_0+a_1\left(x-x_0\right)$ *est l'équation de la tangente à la courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *de* f *au point* $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$. *De plus la position de cette tangente par rapport à la courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *dépend du signe de* $a_k\left(x-x_0\right)^k$ *c'est-à-dire dépend de la parité de* k *et du signe de* a_k.

- *Si k est pair et $a_k > 0$ alors la courbe de f reste localement en-dessus de sa tangente en $(x_0, f(x_0))$.*
- *Si k est pair et $a_k < 0$ alors la courbe de f reste localement en-dessous de sa tangente en $(x_0, f(x_0))$.*
- *Si k est impair, alors la courbe de f traverse sa tangente en $(x_0, f(x_0))$ (il s'agit d'un point d'inflexion).*

Exemple 29 *Déterminons l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f définie par $f(x) = e^x$ au point d'abscisse $x_0 = 1$ ainsi que sa position par rapport à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.*
Le DL de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 1 est donné par :

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).$$

On déduit que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $(1, e)$ une tangente (T) d'équation $y = e + e(x-1)$.
De plus sa position dépend du signe de $\frac{e}{2}(x-1)^2$ qui est positif, donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est en-dessus de la tangente (T) au voisinage de 1 .

Exemple 30 *Déterminons l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sin x$ au point d'abscisse $x_0 = 0$ ainsi que sa position par rapport à la courbe (C_f).*
Le DL de la fonction f à l'ordre 3 au voisinage de 0 est donné par :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

On déduit que la droite (T) d'équation $y = x$ est la tangente à la courbe (Cf) au point $(0, 0)$.
De plus, le terme $-\frac{1}{6}x^3 < 0$ change de signe donc la tangente traverse la courbe (Cf) et on a

- *Au voisinage de 0^+, le terme $-\frac{1}{6}x^3 < 0$ alors la droite (T) est en-dessous de la courbe (Cf).*
- *Au voisinage de 0^-, le terme $-\frac{1}{6}x^3 > 0$ alors la droite (T) est en-dessus de la courbe (Cf).*

Par conséquent le point $(0, 0)$ est un point d'inflexion.

4) Branches infinies

Soient I un intervalle non borné et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet au $V(+\infty)$ un DL généralisé de type

$$f(x) = a_0x + a_1 + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right), p \geq 1, a_p \neq 0.$$

Alors la fonction f admet au $V(+\infty)$ une asymptote d'équation

$$y = a_0x + a_1$$

De plus le signe de $\frac{a_p}{x^p}$ indique la position de la courbe (C_f) de f par rapport à cette asymptote. Il en est de même pour l'équation de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

Exemple 31 *Déterminer les équations des éventuelles asymptotes au voisinage de $\pm\infty$ et leurs positions par rapport à la courbe de la fonction*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$. Pour déterminer son $DL(\infty)$, on pose $t = \frac{1}{x}$, donc $x = \dfrac{1}{t}$ et on a

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 2} = \sqrt{\frac{1 - 3t + 2t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1 - 3t + 2t^2}}{|t|}$$

Au voisinage de $+\infty$ ***:*** *lorsque $x \to +\infty$, $t \to 0^+$ donc $t > 0$, ainsi*

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{1 - 3t + 2t^2}}{t}.$$

Pour trouver l'équation de l'asymptote on doit calculer le DL $(+\infty)$ de f à l'ordre 1 (au moins) pour cela on calcule le $DL(0)$ en la variable y à l'ordre 1 et donc on calcule le $DL(0)$ de $y \mapsto \sqrt{1 - 3t + 2t^2}$ à l'ordre 2 (au moins). En utilisant la formule

$$\sqrt{1 + v} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + o\left(v^2\right)$$

avec $v = -3t + 2t^2$, on obtient $v^2 = 9t^2 + o\left(t^2\right)$ et donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t}\left[1 + \frac{1}{2}\left(-3t + 2t^2\right) - \frac{1}{8}\left(9t^2\right) + o\left(t^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{t}\left[1 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o\left(t^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{t} - \frac{3}{2} - \frac{1}{8}t + o(t). \end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = x - \frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ est donnée par

$$y = x - \frac{3}{2}.$$

De plus, $f(x) - y = -\dfrac{1}{8x} < 0$, d'où la courbe de f se trouve en-dessous de l'asymptote.

A u voisinage de $-\infty$ ***:*** *lorsque $x \to -\infty$, $t \to 0^-$ donc $t < 0$, ainsi*

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{1 - 3t + 2t^2}}{-t}.$$

Répétant les mêmes calculs mais en divisant cette fois par $-y$, on obtient

$$f(x) = -x + \frac{3}{2} + \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ est donnée par

$$y = -x + \frac{3}{2}.$$

De plus, $f(x) - y = \dfrac{1}{8x} < 0$, d'où la courbe de f se trouve en-dessous de l'asymptote.