Prof : N. Benbelkacem
nasreddine.benbelkacem@usthb.edu.dz

15/02/2023

LIC-INFO- Section 03

Algèbre linéaire

Chapitre : Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Cours 01 :
1) Structure d'espace vectoriel. (EV)
1.2) Règles de calcul dans un espace vectoriel
2) Notion de sous-espace vectoriel (SEV)
2.2) Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.

Cours 01 : "1. Structure d'espace vectoriel

Étant donné un corps $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \times_{\mathbb{K}})$ et un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble

Définition 01 :

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si :

1.) $(E, +)$ est un groupe abélien.

2.) $(\cdot)$ une loi de composition externe :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, u) &\longmapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

vérifiant les axiomes suivantes :

A_5 : $\forall u \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$ ($1_{\mathbb{K}}$ est neutre pour $\cdot$)

A_6 : $\cdot$ est distributive à gauche sur l'addition de E :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2,\ \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

A_7 : $\cdot$ est distributive à droite sur l'addition de $\mathbb{K}$:

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E,\ (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$$

A_8 : Associativité mixte : $\cdot$ est compatible avec $\times_{\mathbb{K}}$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E,\ (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$$

Scanned by CamScanner

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Notation : Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$-ev) est noté $(E,+,\cdot)$ ou E.

Exemples :

1) Le singleton $E=\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Montrons que $E=\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définissons d'abord l'addition et la multiplication par un scalaire :

$$+ : \{0\}\times\{0\} \longrightarrow \{0\} \qquad (0,0) \longmapsto 0+0=0$$

et

$$\cdot : \mathbb{R}\times\{0\} \longrightarrow \{0\} \qquad (\lambda,0) \longmapsto \lambda.0=0$$

Vérifions les 8 axiomes :

A_1 : Commutativité de $+$: Soient $u,v\in\{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} u\in\{0\} \Leftrightarrow u=0 \\ v\in\{0\} \Leftrightarrow v=0 \end{array}\right\} \Rightarrow u+v=0+0=0=v+u.$$

A_2 : Associativité de $+$: $(0+0)+0=0+(0+0)$

A_3 : Élément neutre : $0_E=0$. $(0_{\{0\}}=0)$

$0+0=0$, donc 0 est un élément neutre pour l'addition.

A_4 : $0+0=0_E=0$, donc 0 agit bien comme un opposé.

A_5 : On a : $\lambda.0=0$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ ce qui implique : $1_{\mathbb{R}}.0=0$

A_6 : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$; $(\lambda+_{\mathbb{R}}\mu).0=0=0+0=\lambda.0+\mu.0$

A_7 : $\lambda.(0+0)=\lambda.0+\lambda.0=0$

A_8 : $\lambda.(\mu.0)=\lambda.0=0=(\lambda\mu).0$

Conclusion : muni des opérations définies ci-dessus, $\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. ($\mathbb{R}$-ev).

Scanned by CamScanner

2) le Corps $\mathbb{K}$ lui même muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

3) L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un élément de $\mathbb{K}$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Par contre, ce n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathbb{C}$-ev.

4) $\mathbb{K}[X]$: l'ensemble des polynômes à Coefficients dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-ev avec l'addition usuelles des polynômes et la multiplication d'un polynôme par un scalaire.

5) $\mathbb{K}_n[X]$: l'ensemble des polynômes à Coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n, est un $\mathbb{K}$-ev avec l'addition usuelles des polynômes et la multiplication d'un polynôme par un scalaire.

6) $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions dérivables d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec l'addition usuelle des fonctions et la multiplication d'une fonction par un scalaire.

7) $\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puisque par exemple le produit de 5 par le scalaire $-\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.

Scanned by CamScanner

Remarques

1) Un espace vectoriel n'est jamais vide, il contient nécessairement l'élément neutre de son addition.

2) Il n'y a pas, a priori, de produit entre vecteurs. On peut multiplier les scalaires, pas les vecteurs.

3) Ce que l'on appelle ici vecteur peut être un nombre, un polynôme, une fonction, une matrice....

4) Il faut bien distinguer 0_E, l'élément neutre pour la loi +. Par exemple pour $E=\mathbb{R}^2$, $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$ à distinguer de 0.

1.2) **Proposition 01:** "Règles de Calcul dans un espace vectoriel"

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1) $\forall x \in E,\ 0.x = 0_E$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.0_E = 0_E$

3) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$

4) Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, la notation nx désigne :

- soit le vecteur $\underbrace{x+x+\dots+x}_{n \text{ termes}}$ si $n>0$
- soit le vecteur $\underbrace{(-x)+(-x)+\dots+(-x)}_{-n \text{ termes}}$ si $n<0$

Dans ce cas $n.x = nx$

5) $\forall (x,y,z) \in E^3$, si $x+y=x+z$ alors $y=z$

Scanned by CamScanner

② Notion de sous-espace vectoriel

Définition 2 :

Soit E un espace vectoriel et F un sous ensemble de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est aussi un espace vectoriel. Autrement dit, il faut que :

i) $0_E \in F$, $(F \neq \phi)$

ii) $\forall x, y \in F$, $x+y \in F$ (F est stable par somme)

iii) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda . x \in F$ (F est stable par multiplication par un scalaire).

Exemples :

① $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ~~vectoriel de~~ E.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

i) $F \subset \mathbb{R}^2$

ii) $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F$ si on prend $x = 0 \in \mathbb{R}$

iii) Soient $u = (x,0)$, $v = (x',0) \in F$,

$u + v = (x,0) + (x',0) = (x+x', 0) \in F$

iv) Soient $u = (x,0) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda . u = \lambda . (x,0) = (\lambda x, 0) \in F$

Conclusion : F est un $\mathbb{R}$- sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Scanned by CamScanner

2) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x+y=z\}$

i) $F \subset \mathbb{R}^3$

ii) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et $0+0=0$

iii) Soient u et v deux éléments de F

$$\begin{cases} u \in F : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } u = (x,y,z) \text{ avec } x+y=z \\ v \in F : \exists (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } v = (x',y',z') \text{ avec } x'+y'=z' \end{cases}$$

Donc :

$$u+v = (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$$

Or : $x+y=z$ et $x'+y'=z'$, on a donc :

$$(x+x') + (y+y') = z+z'$$

Ce qui prouve que $u+v \in F$

iv) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soit $u \in F$, $\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$ avec $x+y=z$

donc

$$\lambda . u = \lambda . (x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Or : $x+y=z$, on a donc $\lambda x + \lambda y = \lambda z = \lambda(x+y)$

d'où $\lambda . u \in F$

Conclusion : F est un $\mathbb{R}$-sev de $\mathbb{R}^3$.

Scanned by CamScanner

Proposition 2 : " Caractérisation d'un sous-espace vectoriel "

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble.

F est un sous-espace vectoriel de E ; (F s.e.v E) si et seulement si :

i) $F \subset E$

ii) $F \neq \phi$ $(0_E \in F)$

iii) F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (u,v) \in F^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda . u + \mu . v \in F$$

Exemples :

(1) L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x + 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

i) $F \subset \mathbb{R}^3$

ii) le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $0 + 2.0 + 0 = 0$

iii) Soient $u = (x,y,z) \in F$, $v = (x',y',z') \in F$

et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

on a $\lambda . u + \mu . v = \lambda . (x,y,z) + \mu . (x',y',z')$

$= (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (\mu x', \mu y', \mu z')$

$= (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$

or : $(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(\underbrace{x + 2y + z}_{0}) + \mu(\underbrace{x' + 2y' + z'}_{0})$

$= \lambda . 0 + \mu 0 = 0$

Donc $\lambda . u + \mu v \in F$ $\square$

Scanned by CamScanner

Conclusion : F est un sev de $\mathbb{R}^3$

(2) $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+t=1 \text{ et } y+z=0\}$

On remarque que $0_E = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \notin F$

car $x+t = 0+0 = \boxed{0 \neq 1}$

Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Scanned by CamScanner