



Projeto - Controlador Digital

Arthur França, Emerson Wesley, Fábio Leoli, Vinicius Malafaya

Introdução

Sistemas de controle estão presente em diversas aplicações essenciais para a vida moderna, sejam nossos carros, processos industriais e sistemas de transportes. Estes são poucos exemplos que já evidenciam a ampla aplicabilidade de sistemas de controle além de sua importância. Quase todas essas aplicações modernas são implementadas em computadores, DSP's e microprocessadores por meio de controladores digitais.

Todos os sistemas digitais citados anteriormente como ferramentas de implementação de controle digital tem a característica de "enxergar" os dados de forma discreta, de forma que os sistemas que ele deve controlar assim como os sinais que vão gerar e receber devem ser dados discretos. Assim surge a necessidade do estudo da discretização de sinais e sistemas assim como o desenvolvimento de modelos suficientemente bons para descrever o comportamento dos sistemas.

Neste contexto, o referido projeto tem como objetivo descrever a trajetória desde a discretização de um sistema contínuo até o desenvolvimento de controladores para a referida planta, passando claro por todos os passos de análise dos parâmetros da planta e controladores.

Etapa 1:

Na primeira etapa do projeto tínhamos por objetivo obter a resolução de certos sistemas em tempo discreto. Visto isso, nos foi proposto a introdução de dois tipos de sinais de entrada $x(t)$, sendo o primeiro uma função degrau e a segunda uma senoide, que deveriam ser introduzidas sobre duas plantas a nossa escolha, cujo único requisito deveria ser a estabilidade de uma e a instabilidade de outra. Cabe mencionar que estaremos resolvendo sistemas SISO(Single Input,Single Output) e em malha aberta para etapa 1, dessa forma, teremos 4 diferentes sistemas a serem observados. Nas subseções a seguir detalharemos melhor cada processo.

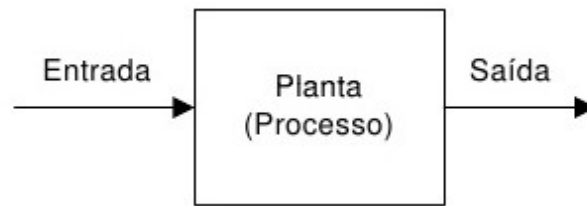


Figura 1: Sistema SISO

Definindo as plantas:

O primeiro passo do projeto se torna a definição da nossa planta, que vai representar uma modelagem de algum fenômeno físico ou matemático da vida real, como um sistema mecânico ou elétrico por exemplo. Visto isso, tomamos duas equações simples, mas que satisfazem os requisitos demandados, sendo elas $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ (Sistema 1) e $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 0.5x(t)$ (Sistema 2).

Teremos que analisar agora suas respectivas estabilidades, e para simplificar esse processo vamos obter as equações de transferência dessas duas equações e observar como seus polos irão se comportar. Vamos analisar abaixo a saída utilizando $h(t)$ e $H(s)$, definidos como a resposta ao impulso no tempo e equação de transferência respectivamente.

- Para calcularmos a saída $y(t)$ de um sistema com entrada $x(t)$ e resposta ao impulso $h(t)$, utilizamos a seguinte expressão de convolução no tempo:

$$x(t) * h(t) = y(t) \quad (1)$$

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2)$$

- Estudar os sistemas no domínio do tempo se torna muito dispendioso e complexo, por essa razão vamos utilizar a ferramenta da transformada de Laplace para transformar um sinal $x(t)$ em $X(s)$:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (3)$$

- Vamos utilizar algumas propriedades da Transformada de Laplace para observarmos como a equação de transferência nos dá várias informações sobre o sistema.

$$x(t) \iff X(s) \quad (4)$$

$$h(t) \Longleftrightarrow H(s) \quad (5)$$

- Propriedade da dualidade convolução do tempo e frequência.

$$x(t) * h(t) \Longleftrightarrow X(s)H(s) \quad (6)$$

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (7)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}[\text{respostadeestadonulo}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \quad (8)$$

- Com a equação (7) podemos perceber que no domínio da frequência podemos isolar a equação de transferência e assim obter informações a respeito da planta isoladamente como a estabilidade do sistema. Aplicando Laplace em nossos dois sistemas obtemos:

$$\mathcal{L}\{\text{Sistema1}\} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (9)$$

$$\mathcal{L}\{\text{Sistema2}\} = \frac{0.5}{(s-1)(s+2)} \quad (10)$$

- Agora podemos observar o lugar das raízes de cada sistema para determinarmos a estabilidade de cada sistema. Nas figuras 2 e 3 temos os sistemas 1 e 2, respectivamente:

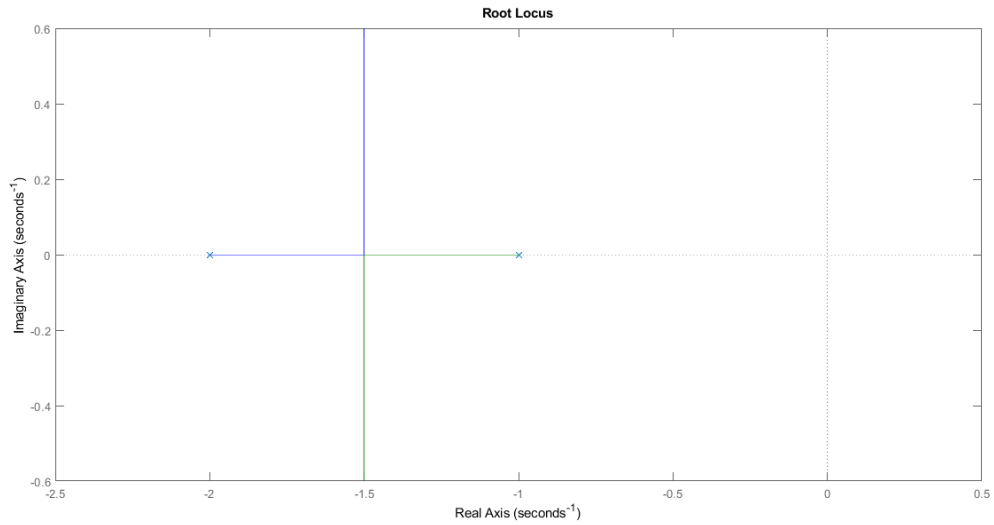


Figura 2: Lugar das raízes sistema 1

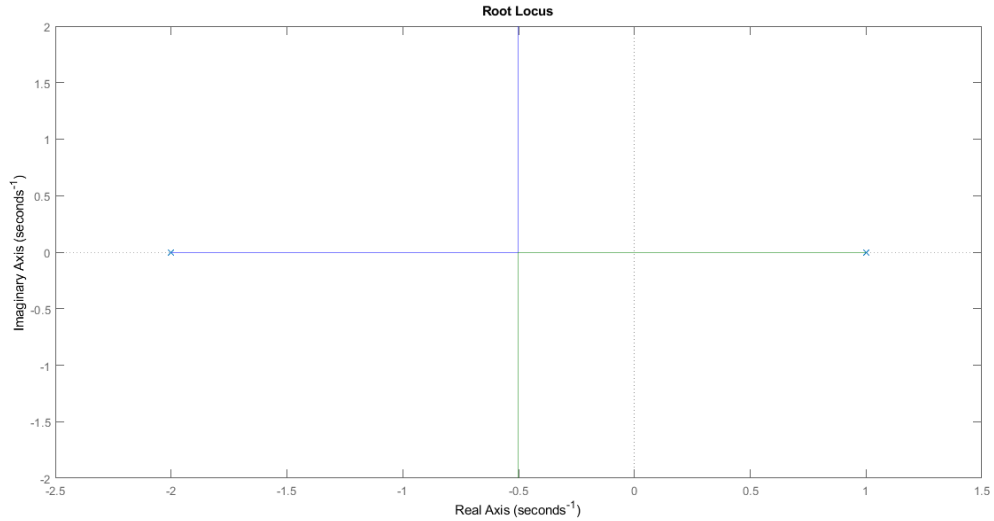


Figura 3: Lugar das raízes sistema 2

- Observamos que na figura 2 os polos estão centrados em -1 e -2, logo o sistema 1 é estável. Na figura 3 temos um polo em -2 e outro em +1, e uma vez que este último se encontra no flanco direito teremos um sistema instável. Isso se deve ao fato de que no domínio da frequência os polos do lugar das raízes explicam como se comporta o crescimento da função no domínio do tempo, então teríamos a resposta ao estado nulo para o $sistema1 = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}$ e para o $sistema2 = K_3e^{-2t} + K_4e^t$, percebe-se que o último termo da resposta no sistema 2 tende ao infinito, por isso se configura em um sistema instável. Explicado como obtemos os dois sistemas podemos partir para o próximo tópico, que trata da discretização.

Discretizando os sistemas pelo método ZOH:

Agora nós vamos transformar nosso sistema definido por uma equação diferencial em tempo contínuo em um sistema discreto por equações diferenças. Em um sistema discreto, a informação só existe nos instantes de amostragem, isto é $t=0h$, $t=1h$, $t=2h$, etc. O segurador de ordem zero é usado para manter o sinal de saída constante entre os instantes de amostragem, para que o sinal possa ser aplicado a um sistema contínuo. Um exemplo de um segurador de ordem zero, é o registrador de saída da porta paralela.

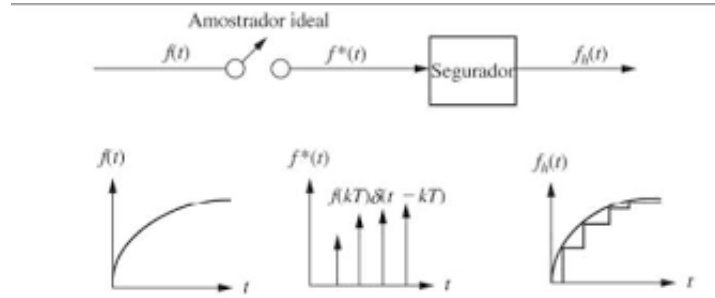


Figura 4: Segurador de ordem zero

- Dessa forma teremos na saída de nosso segurador uma saída com a seguinte resposta no domínio do tempo:

$$\bar{u} = u(t)(1(t) - 1(t - h)) + u(h)(1(t - h) - 1(t - 2h)) + \dots \quad (11)$$

- O que nos trás no domínio da frequência a seguinte expressão:

$$\bar{U}(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-hs}}{s}\right) \sum_{n=0}^{\infty} u(nh)e^{-nhs} \quad (12)$$

- Agora vamos aplicar a equação (12) para nossas duas plantas e obteremos os seguintes resultados para uma taxa de amostragem de 0.1 segundo(será explicado em breve o tempo de amostragem):

$$Planta1 = \frac{0.004528z + 0.004097}{z^2 - 1.724z + 0.7408} \quad (13)$$

$$Planta2 = \frac{0.002423z + 0.002343}{z^2 - 1.924z + 0.9048} \quad (14)$$

Dessa forma obtemos equivalentes em tempo discreto das equações de transferência em tempo contínuo, que são as equações de transferência no domínio z ao invés do s , devemos perceber também que pelo fato da transformada z ser uma aproximação da transformada de Laplace, ela é escrava do tempo de amostragem. Vamos agora partir para resolução de nosso sistema e pensando em termos do projeto, a forma que usaremos para obter a saída do sistema discreto parte da solução pela representação do espaço de estado de um sistema contínuo, em que a resolução passa pelas seguintes equações:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (15)$$

$$y(t) = Cx(t) + du(t) \quad (16)$$

- Para encontramos uma solução para $x(t)$ precisamos fazer o seguinte processo:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t')}Bu(t')dt' \quad (17)$$

Olhando para nossos sistemas 1 e 2 e utilizando as equações (9) e (10) percebemos que teremos para o sistema 1,

$$\mathbf{A1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D1} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

E para o sistema 2 teremos,

$$\mathbf{A2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B2} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

É importante ressaltar que esta é apenas uma das infinitas formas que existem de representar este sistema em forma de Espaço de Estados. Porém estamos interessados em uma análise do sistema em tempo discreto, isto é, a partir de agora estaremos apenas colhendo amostras separadas por um intervalo de tempo h , também chamado de período de amostragem, o que nos leva a representar nossos sinais $x(t)$ e $y(t)$ como $x(nh)$ e $y(nh)$, ou simplesmente $x[n]$ e $y[n]$. Visto isso, decidimos por instaurar um intervalo de amostragem de 0.1s, para que assim possamos introduzir sinais com até 5Hz de frequência, atendendo o princípio de Nyquist, e ao mesmo tempo não sendo um intervalo de tempo muito pequeno, o que nos permite uma visualização mais limpa em tempo discreto. Fazendo as devidas substituições da nossa frequência de amostragem nas equações (15) e (16), vamos obter as seguintes equações:

$$x((n+1)h) = \Phi x(nh) + \Gamma u(nh) \quad (18)$$

$$y(nh) = Cx(nh) + D(nh) \quad (19)$$

- Onde Φ e Γ são respectivamente:

$$\Phi = e^{Ah} \quad (20)$$

$$\Gamma = \int_0^h e^{At'} B dt' \quad (21)$$

- Dessa forma as equações (18) e (19) estão amostradas em um intervalo de tempo h , podendo assim serem escritas sob a forma de uma equação diferença, como mostrado abaixo:

$$x[n+1] = \Phi x[n] + \Gamma u[n] \quad (22)$$

$$y[n] = Cx[n] + Du[n] \quad (23)$$

Portanto, para transformarmos nossos sistemas do tempo contínuo para o discreto, teremos que seguir essas etapas matemáticas. Todavia em ambiente computacional de simulação utilizamos a função `c2d(Sysc,Ts)` onde `Sysc` é o sistema a ser amostrado e `Ts` é o período de amostragem. Essa função vai justamente nos devolver o sistema amostrado no período especificado, bem como devolver todos os parâmetros necessários para o cálculo das equações (22) e (23) recursivamente.

Dessa forma teremos uma representação digital de um sistema. Neste contexto utilizaremos um período de amostragem T de 0.1s, de forma que obteremos um Φ e um Γ para cada sistema. Para o primeiro sistema resolvendo as formulas para os valores de ϕ e γ temos:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0.7326 & -0.1722 \\ 0.0861 & 0.9909 \end{pmatrix}, \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0.0861 \\ 0.0045 \end{pmatrix}$$

E para o sistema 2 temos:

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0.9142 & 0.1910 \\ 0.0955 & 1.0097 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0.0477 \\ 0.0024 \end{pmatrix}$$

Com isso, temos uma descrição discreta dos sistemas e podemos tomar as respostas destes a determinadas excitações. Implementamos, assim, um código recursivo como mostrado abaixo. Na figura 5 podemos ver uma comparação entre a resposta ao degrau em tempo contínuo e pelo método ZOH para observarmos graficamente essa mudança de análise:

```
for i = 2:N
    x1(:,i) = phi1*x1(:,i-1) + gama1*stepD(i-1);
    y1(i) = C1*x1(:,i) + D1*stepD(i);
end
```

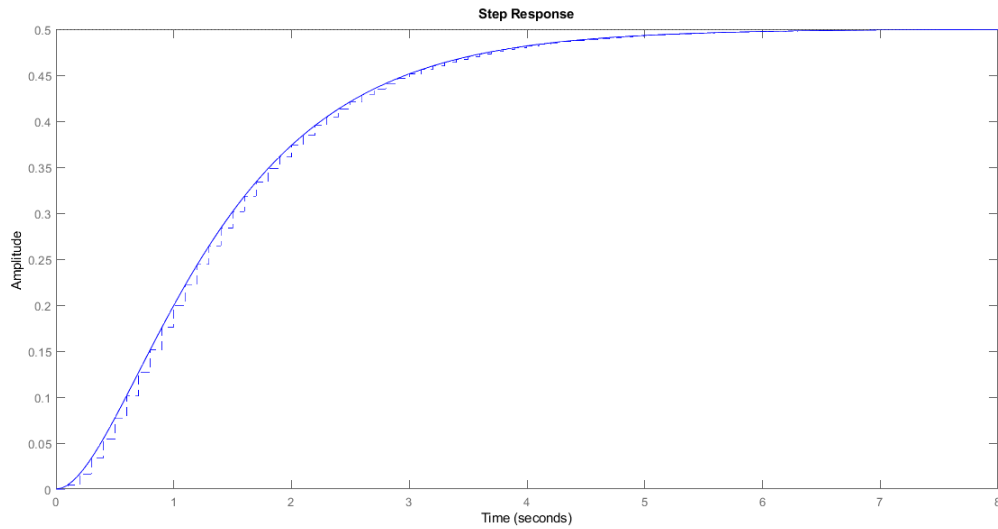


Figura 5: Resposta ao degrau do sistema 1 em tempo discreto(método ZOH) e contínuo

Análise das saídas contínuas e discretas:

Agora que já descrevemos todo o processo de discretização de um sistema para posterior análise computacional, e sabemos como obter a resposta a uma entrada causal, podemos observar as saídas de nosso sistema para duas entradas sendo uma um degrau e a outra uma senoide com frequência 0.2Hz para o sistema 1, e de 1.5Hz para o sistema 2. As frequências (contínuas) dessas senoides foram escolhidas a partir do diagrama de bode do sistema contínuo, exibidos na figuras 6 e 7. No primeiro caso, escolhemos pelo baixo valor da atenuação que o sistema proporciona. No segundo caso o sistema se instabiliza muito rápido, e por isso decidimos escolher uma frequência que conseguisse preservar também a exibição da senoide de entrada para curtos períodos de tempo (a frequência não poderia ser muito baixa, desta forma), para que pudéssemos exibi-la no mesmo gráfico.

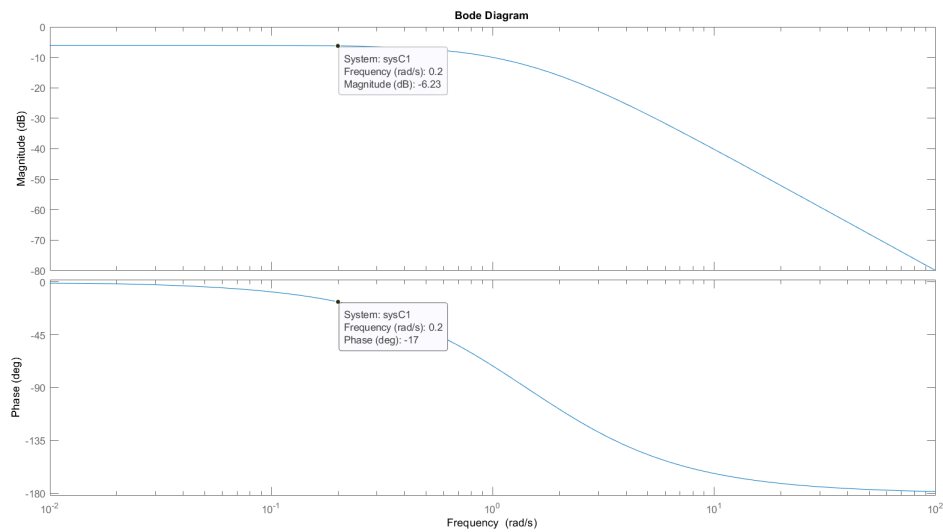


Figura 6: Diagrama de Bode para o sistema 1

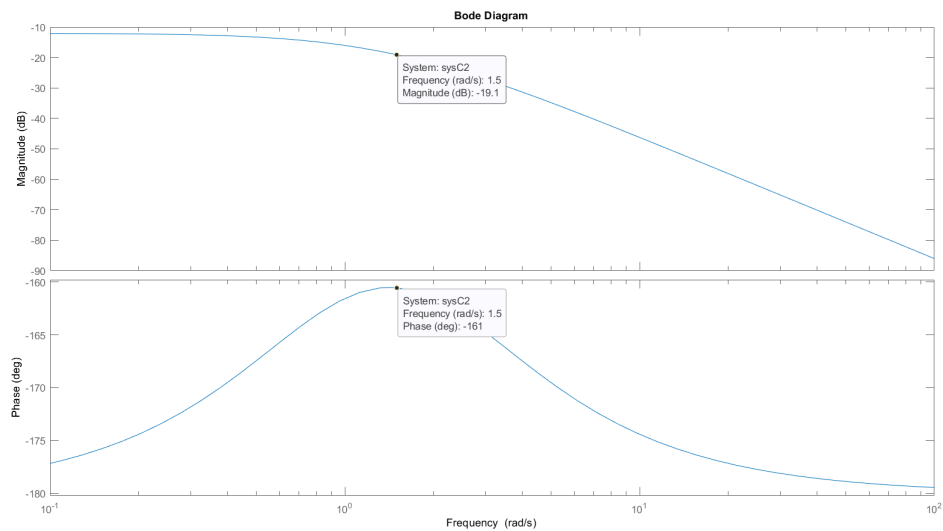


Figura 7: Diagrama de Bode para o sistema 2

Sendo assim, apresentamos nas figuras abaixo as respectivas respostas aos de-

graus e senoides de cada sistema, contínuo e discreto. É importante ressaltar que para o sistema 2, a resposta à entrada nula do sistema é muito pequena, dadas as devidas proporções, se comparada à resposta ao

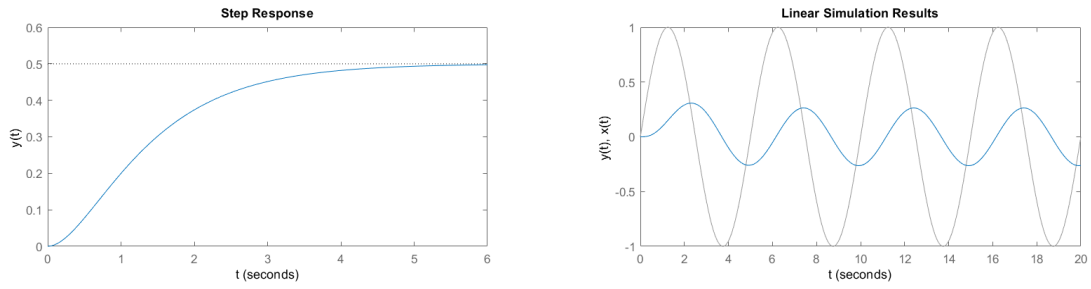


Figura 8: Resposta ao degrau e à senoide do sistema 1(contínuo)

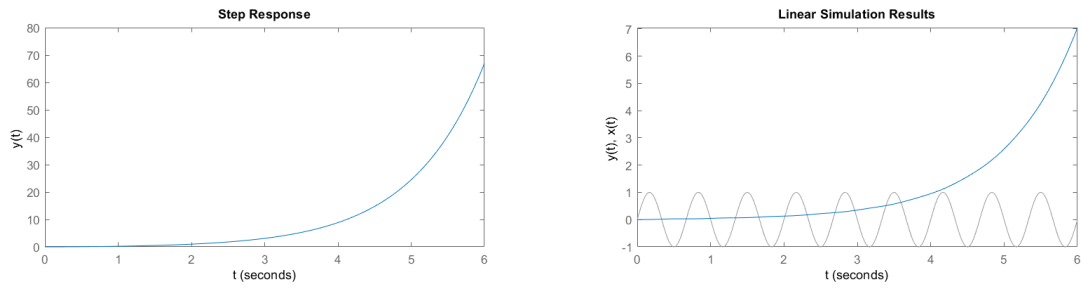


Figura 9: Resposta ao degrau e à senoide do sistema 2(contínuo)

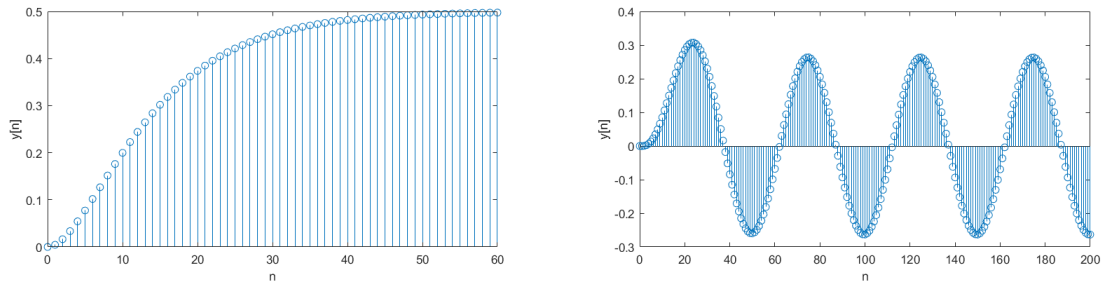


Figura 10: Resposta ao degrau e à senoide do sistema 1(discreto)

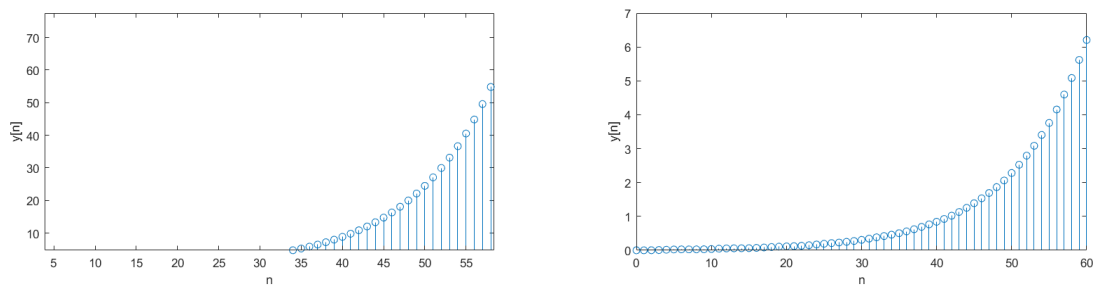


Figura 11: Resposta ao degrau e à senoide do sistema 2(discreto)

No caso do segundo sistema, a resposta senoidal (ao estado nulo), é razoavelmente pequena, e por isso a característica exponencial é mais predominante, devido à rápida instabilização do sistema.

Com exceção da resposta à entrada senoidal do sistema 1, nos gráficos podemos observar as saídas dos sistemas em malha aberta para um tempo de 6 segundos e com um total de 60 amostras por gráfico, uma vez que definimos o $h=0.1s$. No caso da exceção, o tempo final é de 20s, para que possamos observar melhor a senoide, que possui baixa frequência, totalizando 200 amostras. Na próxima seção explicaremos melhor como se deu a análise de regime permanente, estabilidade, transitório e alguns outros parâmetros importantes de nossos sistemas.

Etapa 2:

Na etapa anterior debatemos diversos parâmetros característicos (estabilidade, resposta em frequência, etc) da nossa equação de transferência no domínio s , vimos que era necessário discretizar nossa planta com o segurador de ordem zero para podermos realizar a conversão analógico-digital a uma taxa $h=0.1s$ e, dessa forma, obtermos uma transformada Z equivalente.

Em seguida, o objetivo torna-se a análise no domínio Z e diferentemente da etapa anterior vamos fazer nossas análises em um sistema realimentado em malha fechada, para assim projetarmos controladores de acordo com parâmetros de projeto. Enquanto a estabilidade e a resposta transitória em sistemas analógicos dependem dos valores dos ganhos e dos componentes, no domínio Z a taxa de amostragem vai interferir também nesses parâmetros. Assim, com a transformada Z equivalente vamos poder desenvolver melhor erro em regime, resposta transitória e tempo de estabilização para o caso discreto nas seções subsequentes.

Estabilidade:

Para iniciar nosso estudo da estabilidade devemos primeiro nos recordar de como a transformada Z se relaciona com a transformada de Laplace:

- Vamos inicialmente imaginar um sinal contínuo $x(t)$ que objetivamos discretizar convolucionando este com uma série de deltas espaçados de h .

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t - nh) \quad (24)$$

- Para esse sinal $\bar{x}(t)$ também deveremos ter uma equivalente no domínio da frequência, dessa forma:

$$\bar{x}(t) \iff \bar{X}(s) \quad (25)$$

$$\bar{X}(s) = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t - nh)\right] \quad (26)$$

- Como a transformada de Laplace de $\delta(t - nh)$ é e^{-snh} :

$$\bar{X}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)e^{-snh} \quad (27)$$

- Se definirmos $z = e^{hs}$ teremos a própria transformada z :

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (28)$$

Visto isso, fica claro que se em tempo contínuo temos, por exemplo, $e^{-at} \iff \frac{1}{s+a}$ tendendo a zero para valores de $a > 0$, para $e^{-anh} \iff \frac{1}{z-e^{-ah}}$ teremos uma função tendendo a zero para $-1 < e^{-ah} < 1$. Vamos agora fazer um mapeamento do plano s em z para termos uma melhor visualização do processo.

- Fazendo $s = \alpha + j\omega$:

$$z = e^{h(\alpha + j\omega)} = e^{\alpha h}(\cos\omega h + j\sin\omega h) = e^{\alpha h} \angle \omega h \quad (29)$$

Assim podemos mapear uma região do plano s em uma região correspondente no plano z , e desta forma os pontos que possuem valores positivos de α estarão no semiplano direito do plano s , conseqüentemente teremos $e^{\alpha h} > 1$, sendo mapeadas fora do círculo unitário no plano z . Pontos do plano s sobre o eixo imaginário tem valores nulos de α , representando uma magnitude 1 no plano z e dessa forma caminhando sobre o círculo unitário. Por fim, pontos que possuem valores negativos de α estarão no semiplano esquerdo do plano s e conseqüentemente teremos $e^{\alpha h} < 1$ portanto sendo mapeadas dentro do círculo unitário no plano z . Assim podemos concluir se tivermos um sistema em malha fechada com polos fora do círculo unitário esse sistema será instável. Caso os polos estejam sobre o círculo unitário será marginalmente estável e se estiver dentro do mesmo será estável.

Existe uma diferença evidente entre sistemas de controle com realimentação analógicos para sistemas com realimentação digital, sendo esta o efeito que a taxa de amostragem tem na resposta transitória. Alterações na taxa de amostragem podem vir a instabilizar um sistema estável ou ainda mudar a natureza de sua resposta. Observamos os polos em tempo discreto para os dois sistemas que vimos na etapa 1 com as equações de transferência Z (13) e (14), como é mostrado abaixo:

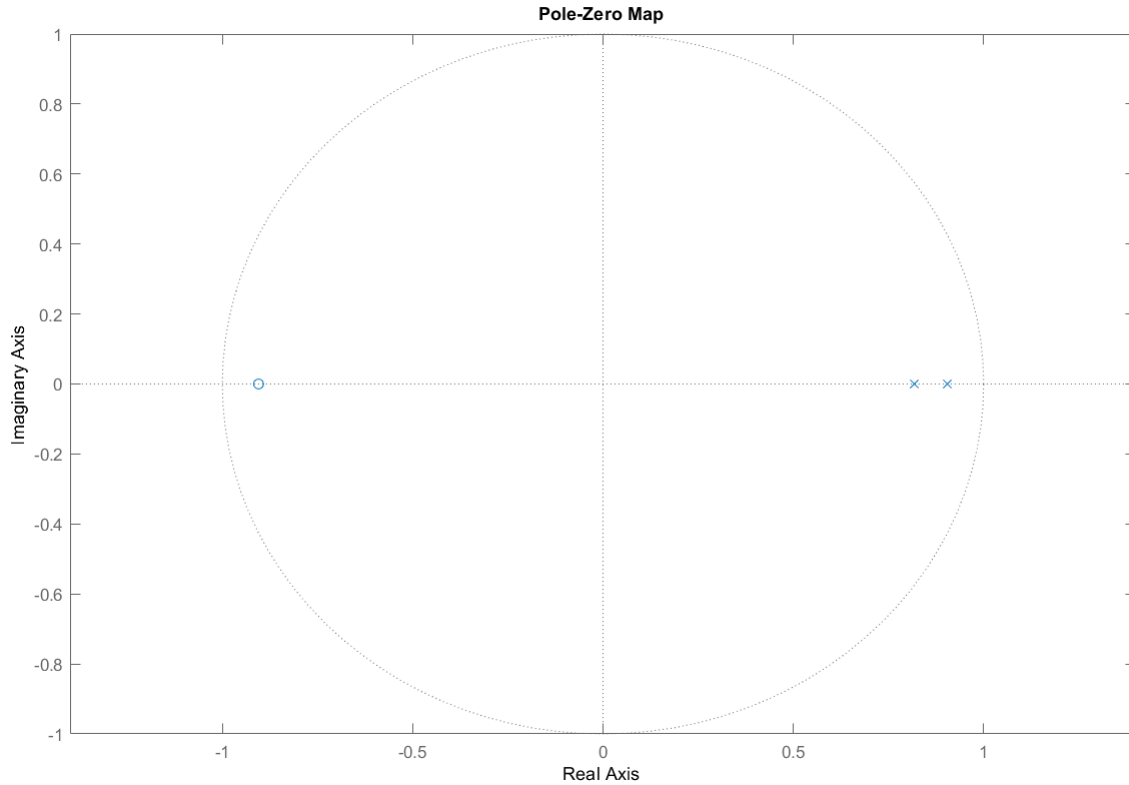


Figura 12: Polos do sistema discreto 1, mostrado na equação (13)

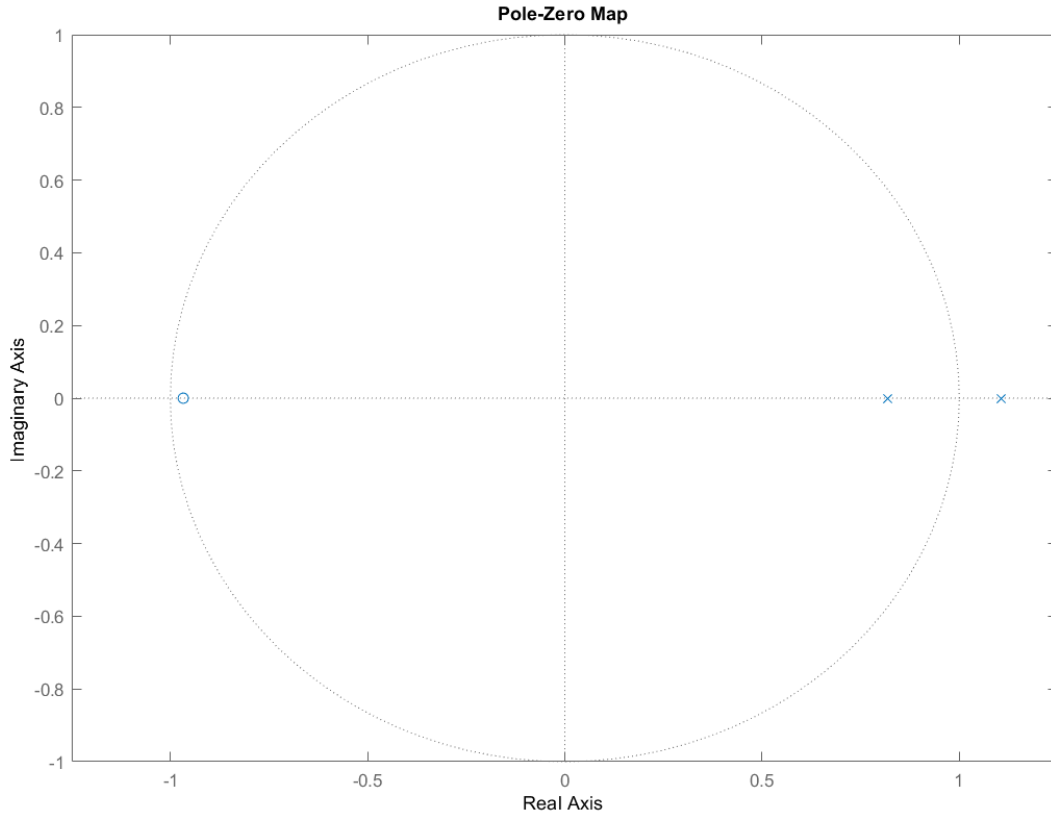


Figura 13: Polos do sistema discreto 2,mostrado na equação (14)

Aqui utilizamos a função pole do Matlab para encontrar os polos das nossas equações e utilizamos a função pzmap para fazer a plotagem no círculo unitário. Como esperado percebemos para o sistema 1 polos em 0.819 e em 0.9048 aproximadamente, com um zero em -0.905, ou seja temos polos dentro do círculo unitário e o sistema é estável. No sistema 2 fizemos o mesmo processo e obtemos um zero em -0.967, polos em 0.819 e em 1.11, sendo este último fora do círculo unitário o que vem a comprovar a instabilidade do sistema e a boa aproximação realizada em tempo discreto.

Regime permanente:

Temos também que analisar como se comportam nossos sistemas em regime permanente e observar se o comportamento que estamos obtendo é adequado para entradas comuns (no nosso caso, o degrau), e a partir disso podemos estudar a viabilidade de se inserir controladores que objetivem compensar esse erro e nos garantir uma saída mais satisfatória.

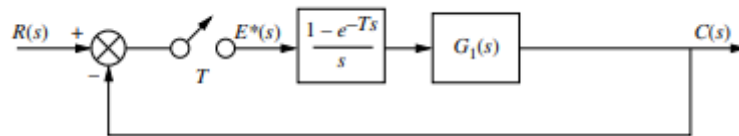


Figura 14: Configuração de um sistema de controle discreto realimentado.

- As demonstrações para um sistema em malha realimentado são as mesmas em tempo contínuo e discreto, por essa razão vamos nos resumir a equação (30):

$$E(Z) = \frac{R(Z)}{1 + G(Z)} \quad (30)$$

- Para iniciar nosso estudo da análise em regime permanente vamos nos aproveitar do teorema do valor final abaixo:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) \quad (31)$$

- Visto isso, vamos analisar o erro com relação ao valor de referência para termos noção do quão distante está a saída do esperado. Para uma entrada a um degrau o erro em regime, e o valor em Regime são definidos, respectivamente por:

$$\bar{e}(\infty) = \frac{1}{1 + Kp} \quad (32)$$

$$Kp = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.004528z + 0.004097}{z^2 - 1.724z + 0.7408} \quad (33)$$

O último valor pode ser obtido a partir do teorema do valor final. Realizando-se os cálculos encontramos um Kp de 0.513 que é exatamente o valor final que observamos no gráfico da saída do sistema 1 em malha aberta, para um degrau na figura 8. Com relação ao erro em regime obtemos um valor de 0.66, quando formos fazer o projeto de controladores em malha fechada vamos comparar a saída do sistema não controlado e controlado, assim poderemos confirmar se um erro de 0.66 é razoável para nossa planta. Já para o caso do sistema instável não poderemos aplicar o teorema do valor final, uma vez que a saída cresce indefinidamente para um entrada limitada.

Resposta transitória:

O estudo da resposta transitória do sistema vai ser de fundamental importância para possibilitar uma análise detalhada da saída dos nossos sistemas, a partir dela vamos poder estar observando o tempo para que nosso sinal atinja 98 por cento do valor em regime permanente (tempo de acomodação) bem como analisar o valor percentual de ultrapassagem (overshoot).

Assim como fizemos anteriormente teremos de comparar os passos que já realizávamos para o plano s, com seu equivalente no plano z e assim estabelecer uma relação. Inicialmente vamos nos recordar que $z = e^{sT}$. Quando analisávamos o lugar das raízes no plano s para um sistema, sabíamos que retas verticais representavam um tempo de acomodação constante sendo caracterizados pela equação $s = \sigma_1 + j\omega$, onde a parte real equivale a $\sigma_1 = \frac{-4}{Ts}$. Substituindo em $z = e^{sT}$ obtemos:

$$z = e^{\sigma_1 T} e^{j\omega T} \quad (34)$$

$$z = r_1 e^{j\omega T} \quad (35)$$

Percebemos que $r_1 = e^{\sigma_1 T}$ e dessa forma teremos círculos concêntricos que irão formar a velocidade do sistema. Quanto menor o raio do círculo mais negativo é σ_1 e

consequentemente mais rápido o sistema se torna, lembrando que caso σ_1 seja maior que 0 o sistema irá se posicionar fora do círculo unitário e dessa forma será instável. Utilizando a fórmula para o tempo de acomodação que já conhecíamos de controle analógico chegamos a seguinte conclusão:

$$e^{\sigma_1 T} = e^{\frac{-4}{(T_s/T)}} \quad (36)$$

- Assim se quisermos achar o tempo de acomodação normalizado em tempo discreto podemos simplesmente aplicar e resolver a equação:

$$\frac{T_s}{T} = \frac{-4}{\ln(r)} \quad (37)$$

- Para o percentual de ultrapassagem vamos mapear as retas radiais do plano s para o plano z. Quando tratávamos retas radiais constantes podíamos no plano s mapeá-las da seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{\omega} = -\tan(\sin^{-1}\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (38)$$

$$s = \sigma + j\omega = -\omega \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + j\omega \quad (39)$$

- Se aplicarmos essa equação ao plano z teremos:

$$s = \sigma + j\omega = -\omega \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + j\omega \quad (40)$$

$$z = e^{-\omega T(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})} e^{j\omega T} = e^{-\omega T(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})} \angle \omega T \quad (41)$$

- Dessa forma podemos traçar curvas de overshoot constante, a partir de uma taxa de amortecimento no plano z para uma determinada faixa de ωT . Na figura abaixo podemos ver alguns pontos do plano s mapeados em z.

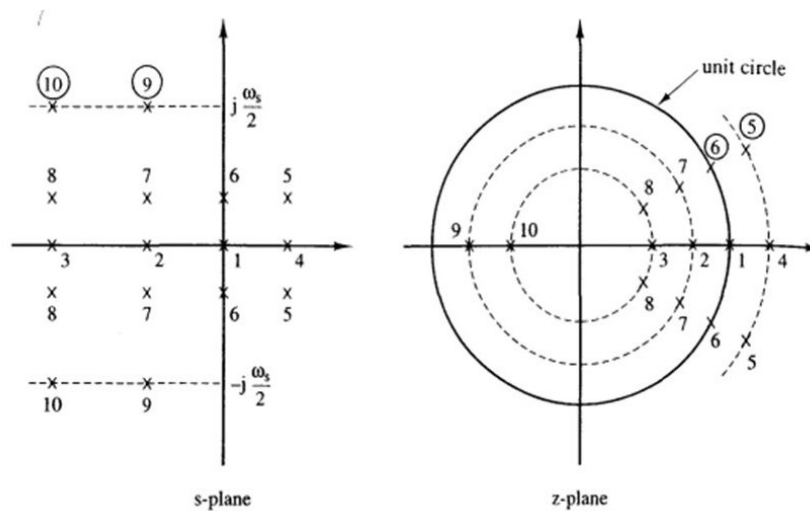


Figura 15: Mapeamento de polos de s para z .

Assim se desejarmos realizar qualquer projeto de controlador com parâmetros especificados de tempo de estabilização e overshoot desejados podemos através das fórmulas mostradas encontrar esse ponto no plano z e projetar um controlador que atenda tais parâmetros.

- Vamos observar rapidamente o transitório para nossa equação de transferência z estável ainda em malha aberta,teremos um polo em 0.819 e outro em 0.9048.O transitório vai ser regulado pelo polo dominante,ou seja aquele mais afastado,utilizando a fórmula (37) teremos:

$$\frac{T_s}{0.1} = \frac{-4}{\ln(0.9048)} \quad (42)$$

$$T_s = 3.99s \quad (43)$$

- Não poderemos utilizar a fórmula 41 uma vez que temos polos puramente reais,e assim,fica subentendido que teremos um overshoot nulo para o nosso sistema sem controlador.Em nossa análise com o controlador poderemos observar melhor essa questão do overshoot.

Outro ponto fundamental e que influencia diretamente na resposta transitória é o ganho K, com a plotagem do lugar das raízes em tempo discreto podemos verificar que a faixa de estabilidade para o sistema estável é de algo entre 0-65 aproximadamente e a faixa de estabilidade para o sistema instável é 4-45 aproximadamente. Perceba do gráfico abaixo que podemos medir o tempo de acomodação a partir da distância do polo a origem, já o overshoot é representado pelas curvas constantes que vão de 0.1 até 0.9.

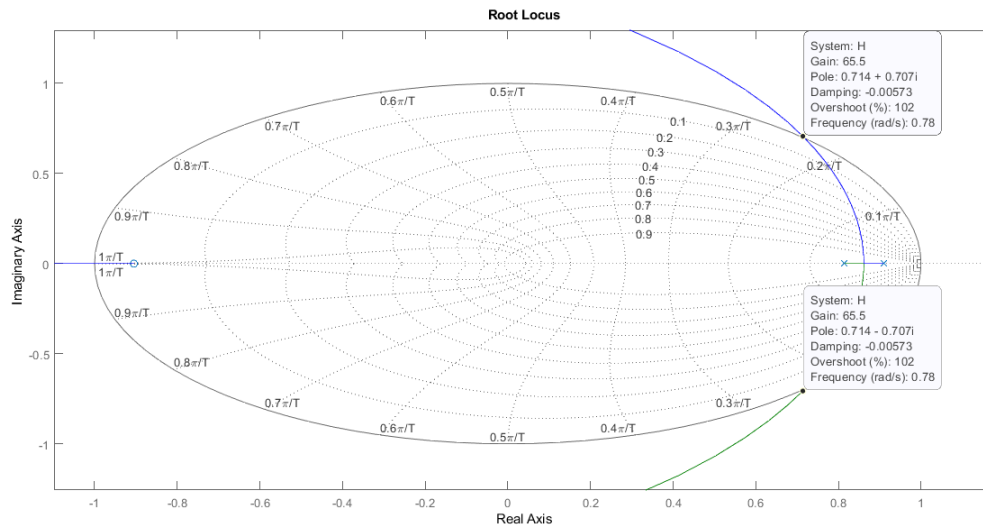


Figura 16: Lugar das raízes plano z para o sistema estável .

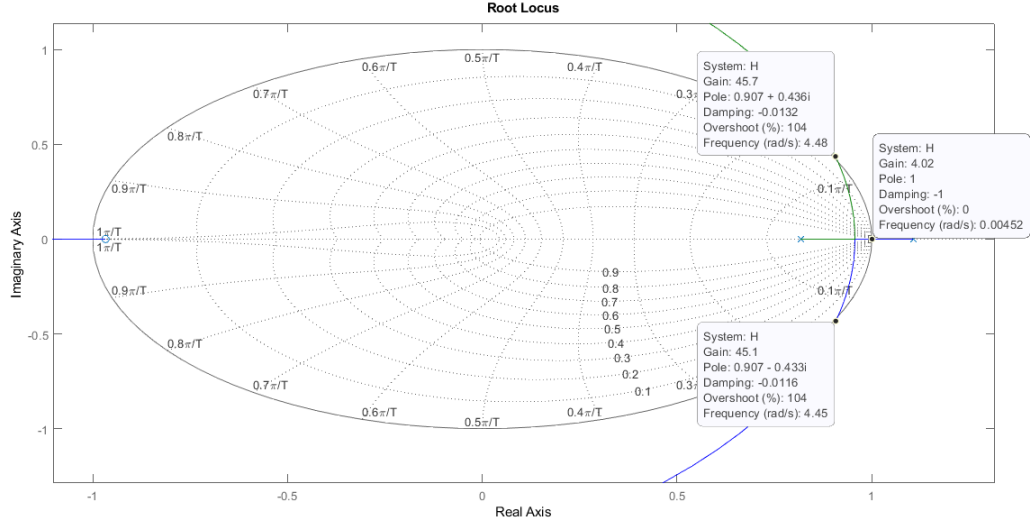


Figura 17: Lugar das raízes plano z para o sistema instável .

Uma vez que ainda não projetamos nenhum tipo de controlador ainda, podemos analisar o transitório das nossas transformadas z obtidas na etapa 1 sem que necessitemos traçar o lugar das raízes e de forma bem mais rápida e prática, por meio do limite de regime. Aqui podemos visualizar quantas amostras são necessárias para que consigamos atingir 90% do valor de regime. Abaixo faremos as considerações matemáticas:

- Temos que $Y(z) = U(z)H(z) = \frac{z}{z-1} \frac{b}{z-a}$ para $u[k]=1, k \geq 0$, lembrando que esse k é minúsculo e é diferente do K do ganho, assim temos:

$$y[k] = \frac{b(1-a^k)}{1-a}, 1 > a > 0 \quad (44)$$

- Vamos obter o valor em regime para essa saída:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} y[M] = \lim_{M \rightarrow 1} = \frac{b}{1-a} \quad (45)$$

- O que nos leva a seguinte relação:

$$\frac{b(1-a^k)}{1-a} = \alpha \frac{b}{1-a} \quad (46)$$

- Fazendo $\alpha = 0.9$ e desenvolvendo a equação teremos:

$$K > \frac{\ln(1-0.9)}{\ln(a)} \quad (47)$$

Agora que já temos a noção matemática vamos aplicar esse conhecimento ao nosso projeto, ou seja, as equações 13 e 14 obtidas a partir da discretização ZOH ou, para ser mais específico, a equação 13, pois percebemos que não teremos como fazer essa análise para equação 14 uma vez que ela não apresenta um valor constante em regime permanente. Assim, vamos utilizar a equação estável e aplicar frações parciais:

$$\frac{0.004528z + 0.004097}{z^2 - 1.724z + 0.7408} = \frac{0.0478}{z - 0.9094} - \frac{0.471}{z - 0.8146} \quad (48)$$

- Para podermos realizar nossa análise consideraremos apenas o polo dominante, ou seja, o mais afastado da origem no círculo unitário. Assim se aplicarmos a equação 47 teremos:

$$K > \frac{\ln(1 - 0.9)}{\ln(0.9094)} \quad (49)$$

$$K > 23.016 \quad (50)$$

- Aplicando o teorema do valor final, obtemos o seguinte resultado para o valor em regime na equação 13:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.004528z + 0.004097}{z^2 - 1.724z + 0.7408} = 0.513 \quad (51)$$

- Fazendo $0.513 * 0.9 = 0.462$ temos o valor para 90% do valor em regime permanente e precisaremos de um número maior (aproximadamente) que 23 amostras k para obter esse número. No gráfico abaixo podemos visualizar esse fato:

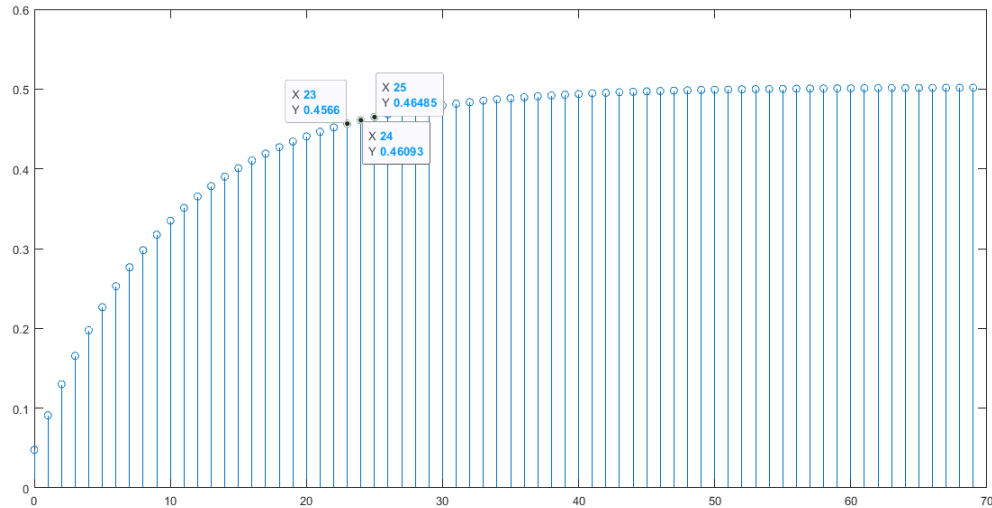


Figura 18: número de amostras necessárias para se obter 90% do valor de regime .

Do gráfico percebemos que para obtermos exatamente 90 % do valor em regime precisaríamos de algo entre 24 e 25 amostras, algo bem próximo do calculado. Dessa forma esse método pode ser bem vantajoso com relação ao lugar das raízes devido a sua simplicidade na análise do transitório, caso queiramos apenas observar esse comportamento para uma equação específica.

Espaço de Estados e Resposta em frequência:

A representação dos sistemas através de Espaço de Estados foi realizada na Etapa 1, quando descrevemos a discretização através do segurador de ordem zero dos sistemas. Dessa forma, determinamos matrizes Φ , Γ , C e D que descrevem o sistema assim como a função de transferência escolhida. É importante ressaltar que esta não é a

única representação em espaço de estados possível, e que inclusive outras serão expostas na Etapa 3.

Temos que avaliar também a resposta em frequência no domínio discreto para termos uma melhor noção a respeito do comportamento da planta em uma certa banda de excitação.

- Para iniciar nosso estudo da resposta em frequência vamos nos aproveitar da definição de transformada z na equação (28) e teremos,

$$\text{Considerando } s = \sigma + j\omega, \text{ para } \sigma = 0 \quad (52)$$

- Substituindo em (13) e (14) respectivamente teremos,

$$Planta1 = \frac{0.004528 \times e^{j\omega} + 0.004097}{e^{2j\omega} - 1.724 \times e^{j\omega} + 0.7408} \quad (53)$$

$$Planta2 = \frac{0.002423 \times e^{j\omega} + 0.002343}{e^{2j\omega} - 1.924 \times e^{j\omega} + 0.9048} \quad (54)$$

Com isso obtemos as expressões necessárias para obter uma representação da resposta em frequência das plantas, montando os gráficos para módulo e fase no Matlab foi possível obter os seguintes plotes.

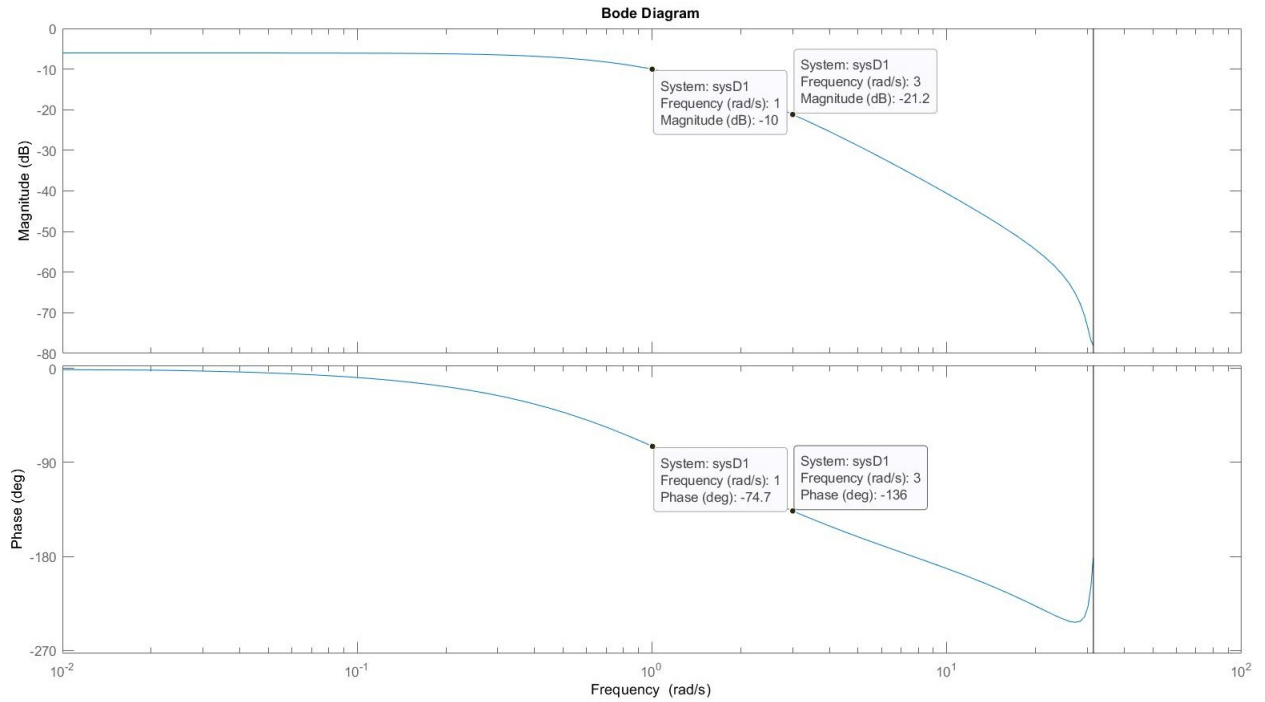


Figura 19: Resposta em frequência da planta 1 discreta.

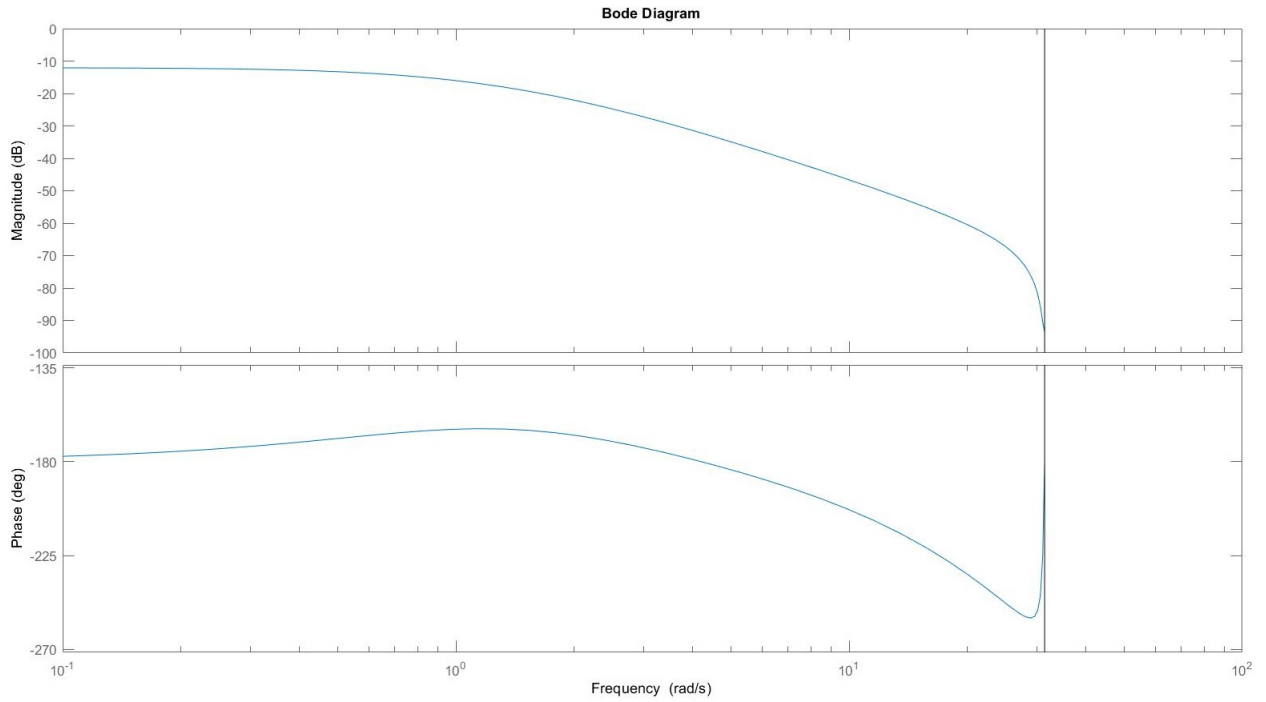


Figura 20: Resposta em frequência da planta 2 discreta.

Dessa forma obtemos as respostas em frequência de ambas as plantas. Atentemos ao fato de que a resposta em frequência de sistemas discretos é periódica. Para ter uma noção do por que basta analisar 53 e 54. Ambas as funções de transferência contém exponenciais complexas, sendo as ultimas funções de natureza periódica.

O ponto exato onde temos a repetição da resposta em frequência é o fim do intervalo exibido no gráfico, este ponto se situa em 31.4 no eixo das abscissas e quando multiplicado pelo período de amostragem $d = 0.1$ teremos 3.14, ou seja, um valor aproximado de π . Além disso, podemos atentar à este comportamento também no período do tempo. A figura 21 ilustra a resposta à senoides de frequência (contínua) 1Hz (em azul) e 3Hz(em laranja), ou 0.1Hz e 0.3Hz discretos. É possível observar que para o segundo caso a atenuação é muito maior, como esperado, visto a figura 19.

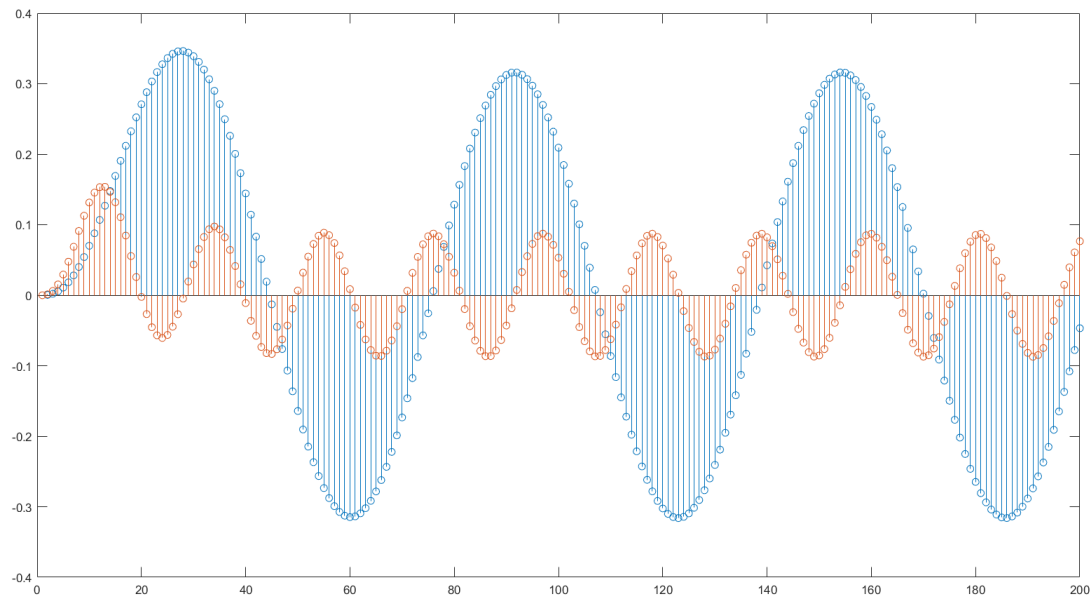


Figura 21: Resposta do sistema 1 para senoides de frequências variadas

Projeto de controladores:

Agora que já sabemos como os nossos sistemas se comportam quanto a estabilidade, regime permanente e resposta transitória nos mais diversos ganhos vamos observar a forma das nossas saídas em que temos a entrada como um degrau interagindo com nossas plantas puras, sendo realimentadas pelas saídas multiplicadas por um fator unitário (figura 20 com $H(z)=1$) para observar como se comporta os sistemas sem nenhum controlador.



Figura 22: Sistema realimentado

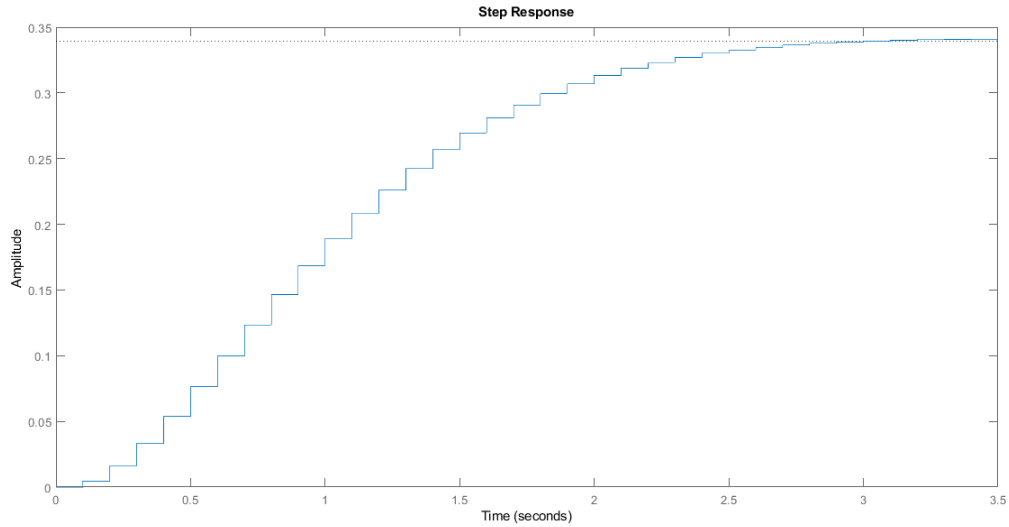


Figura 23: Resposta ao degrau sistema 1 sem controlador

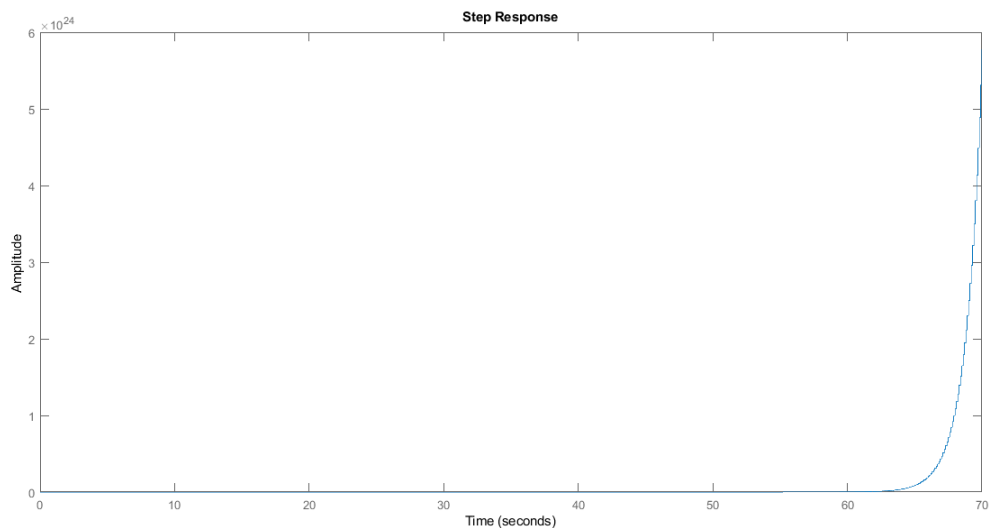


Figura 24: Resposta ao degrau sistema 2 sem controlador

Aqui podemos elencar diversos problemas. Inicialmente, percebemos que de fato o sistema 2 está instável em malha fechada. No caso do sistema 1 podemos elencar problemas mais específicos. Por exemplo, se observarmos bem a figura 23 vemos que a saída se estabiliza perto de 0.33 mesmo que nosso valor de referência seja um degrau. Isso já era esperado desde que fizemos nossa análise em regime permanente e, inclusive, calculamos o erro em regime como 0.66 ainda nessa etapa. No que se refere ao transitório já esperávamos uma resposta sem overshoot, uma vez que os polos do sistema são puramente reais em sua forma original, porém temos um tempo de estabilização de 2 segundos aproximadamente, que não é considerado lento, porém em nosso projeto vamos considerar que o projeto exige um tempo de estabilização ainda mais rápido, cerca de 1 segundo, e que

não ultrapássemos o overshoot de 17 por cento com o menor erro possível ou nulo para ambas as plantas/sistemas estável e instável.

Sabemos do estudo de controle analógico que o Proporcional-Integral-Derivativo (PID) é o controlador mais usado na indústria e tem sido utilizado em todo o mundo para sistemas de controle industrial. A popularidade de controladores PID pode ser atribuída em parte ao seu desempenho robusto em uma ampla gama de condições de funcionamento e em parte à sua simplicidade funcional, variando a parte proporcional, integral e derivativa e aplicando a função de transferência desse controlador em cascata com a planta, podemos alterar a trajetória natural do lugar das raízes para satisfazer parâmetros desejados e por essa razão vamos utilizar esse tipo de controlador e seus derivados no projeto. Abaixo podemos ver a equação característica do PID e sua configuração de realimentação.

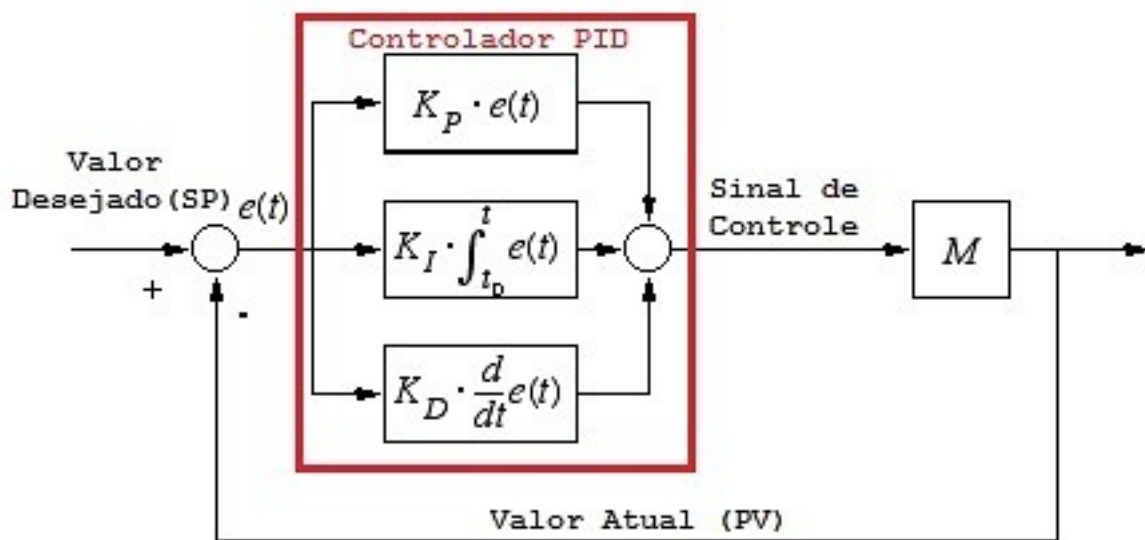


Figura 25: Sistema realimentado com compensador digital.

Controlador sistema 1:

Antes de iniciar o projeto dos controladores propriamente ditos, cabe mencionar que realizamos todos os cálculos teóricos dos controladores no plano s , e posteriormente discretizamos a equação de transferência obtida.

De início já sabíamos que deveríamos acelerar o sistema para atender o tempo de acomodação, bem como consertar o erro em regime permanente, de acordo com os parâmetros especificados anteriormente. Do estudo de controle analógico nos lembramos que um aumento de K_p configurava numa diminuição do erro, bem como um aumento de K_d representava um maior ajuste da resposta transitória, por essa razão decidimos inicialmente inserir um PD, conforme o projeto abaixo:

- Considerando que temos um controlador $C(s)$ em cascata com um controlador $G(s)$, teremos a seguinte função de transferência em malha fechada:

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad (55)$$

- Considerando $C(s)$ um PD teremos:

$$G_{cl}(s) = \frac{Kd(s+a)N(s)}{D(s) + Kd(s+a)N(s)} \quad (56)$$

- Se aplicarmos a planta analógica $G(s) \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, teremos a seguinte equação característica para o sistema realimentado:

$$s^2 + (3 + Kd)s + Kda + 2 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (57)$$

- Assim temos que:

$$2\xi\omega_n = 3 + Kd \quad (58)$$

$$\omega_n^2 = Kda + 2 \quad (59)$$

- Vamos achar ω_n e ξ para que os parâmetros do projeto sejam atendidos, e vamos considerar um overshoot de 16 por cento para termos uma leve folga e um tempo de estabilização de 1 segundo. A partir das duas equações abaixo podemos achar ξ e ω_n :

$$\xi = \frac{-\ln(\%UP/100)}{\sqrt{(\pi^2 + \ln^2(\%UP/100))}} \quad (60)$$

$$\omega_n = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (61)$$

- Resolvendo a equação chegamos a conclusão que $\xi = 0.503$ e $\omega_n = 8$, consequentemente:

$$a = 12,24 \quad (62)$$

$$Kd = 5 \quad (63)$$

- O que nos dá a seguinte equação para o PD em tempo contínuo:

$$C_s = 5s + 61.24 \quad (64)$$

- Vamos ter a seguinte resposta controlada em tempo contínuo:

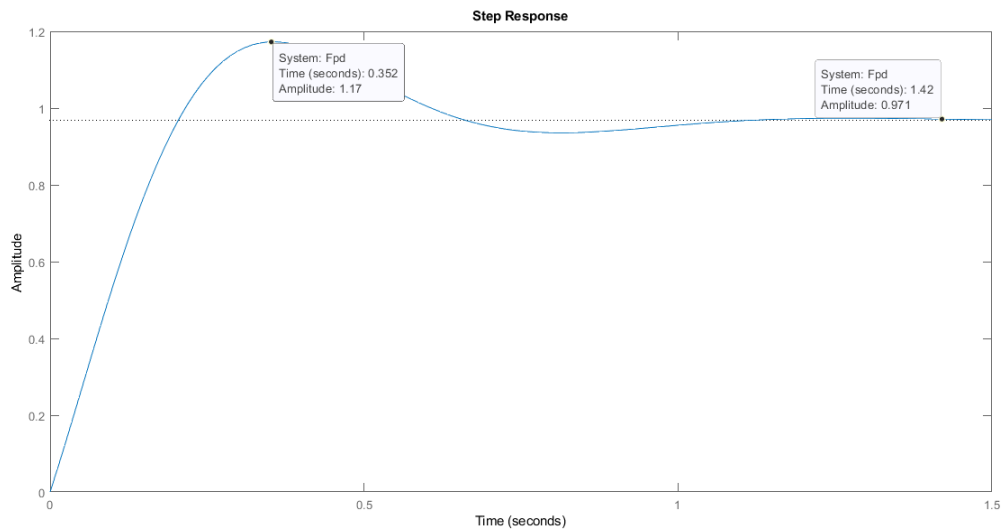


Figura 26: Saída contínua para o sistema 1 controlado.

Aqui podemos verificar que o overshoot está em 17%, o que é um valor aceitável para o projeto, e percebemos que o tempo de estabilização se encontra em torno de 1 segundo, o que foi exatamente o projetado e erro é praticamente zero, onde em regime permanente a saída chega a 0.97, configurando um erro de apenas 3%. Agora vamos discretizar o sistema: para isso precisamos discretizar nosso controlador da equação 64, realizando uma transformação bilinear de Tustin, sendo esta uma das conhecidas técnicas de mapeamento de pólos e zeros de uma função de tempo contínuo para um sistema de deslocamento invariante discreto. De modo mais simplista, podemos escrever uma função de um filtro digital $H(z)$ a partir de um sistema invariante no tempo (LTI), um filtro analógico descrito por $H(s)$, e assim, podemos converter os resultados em um sistema digital no plano z com as mesmas propriedades, fazendo $s = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$ em que h é nosso tempo de amostragem, e assim teremos:

$$sistema1 = \frac{1}{(20 \frac{z-1}{z+1} + 1)(20 \frac{z-1}{z+1} + 2)} \quad (65)$$

$$controladorPD = 5(20 \frac{z-1}{z+1}) + 61.24 \quad (66)$$

Aplicando essas duas configurações em uma configuração parecida com a figura 25, em que todas as nossas equações estão discretizadas, obtemos:

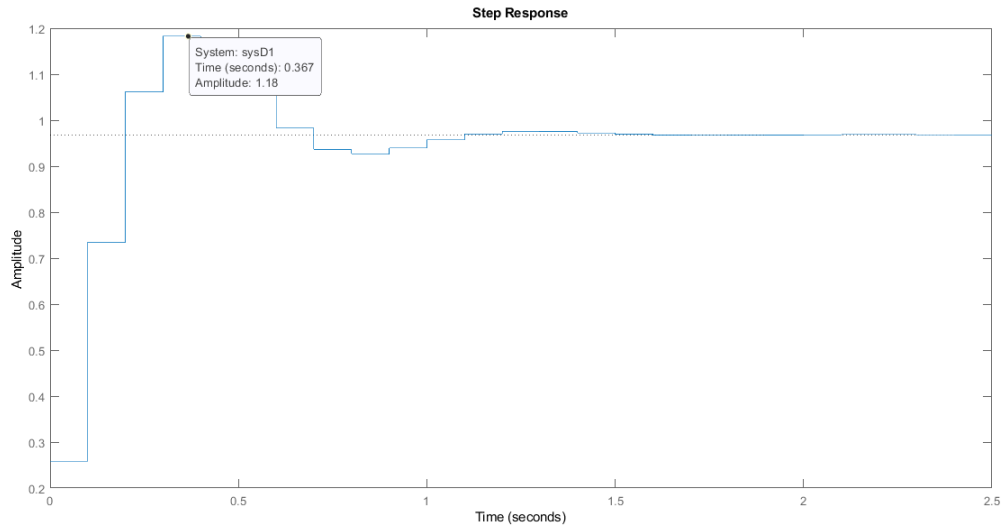


Figura 27: Saída discreta para o sistema 1 controlado.

Agora que nós já visualizamos como a saída discreta vai se comportar no sistema realimentado, vamos observar na figura 28 o seu comportamento no lugar das raízes com o controlador considerando a equação realimentada com polos naturais na região de nosso interesse de operação para facilitar a visualização e os cálculos, para observarmos as principais mudanças em relação a figura 16, e poder também observar o overshoot e o tempo de acomodação olhando de uma perspectiva do plano z .

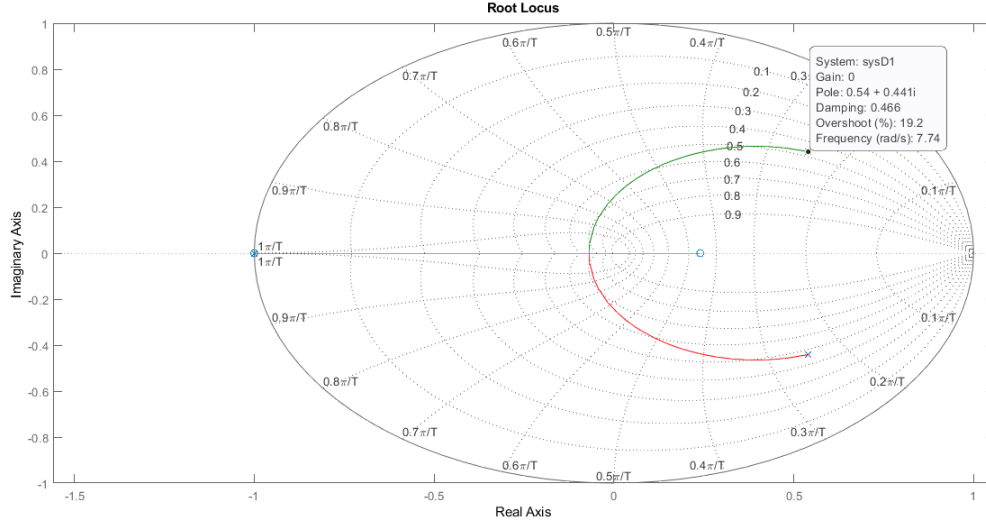


Figura 28: Saída discreta para o sistema 1 controlado.

Agora vamos utilizar as fórmulas para tempo de acomodação e overshoot que vimos na seção de resposta transitória para observar se elas realmente se aproximam do observado na simulação discreta.

- Nos polos naturais da equação de transferência discreta observamos que o ponto se encontra em $0.54 + j0.441i$, o que nos dá um raio de 0.695 aproximadamente de distância, aplicando a fórmula 37 temos:

$$\frac{T_s}{T} = \frac{-4}{\ln(0.695)} \quad (67)$$

- O que nos dá um T_s de:

$$\frac{T_s}{T} = \frac{-4}{\ln(0.695)} \quad (68)$$

$$T_s = 1.1s \quad (69)$$

- Aqui observamos um resultado bem próximo do que observamos na simulação, já no caso do overshoot, sabemos que $s = -4 + j6.92$ e $\xi = 0.5$, assim usando a equação :

$$z = e^{-\omega * T * (\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})} e^{j\omega T} \quad (70)$$

$$z = e^{-6.92 * 0.1 * (\frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}})} e^{j6.92 * 0.1} \quad (71)$$

- Nos dando a seguinte resposta:

$$z = 0.67 \angle 39.64^\circ \quad (72)$$

- esse resultado só confirma o raio calculado, e fazendo:

$$\text{atan}\left(\frac{0.441}{0.54}\right) = 39.21 \quad (73)$$

Levando em conta as aproximações podemos constatar que de fato modelamos o sistema analógico corretamente, fizemos o controlador e por meio da transformação bilinear conseguimos obter os mesmos parâmetros de tempo contínuo para discreto, como pôde ser observado no nosso mapeamento pelo plano z .

Antes de projetarmos o controlador da planta dois, vamos projetar um controlador Dead Beat para nosso sistema 1, basicamente esse controlador faz com que o sinal de referência seja atingido em um mínimo tempo com erro zero. Em contraste, um sistema contínuo pode atingir o valor de referência, com erro zero, somente para tempo infinito (matematicamente). Ou seja, a operação de amostragem dos sistemas discretos permite que o mesmo atinja um valor de regime em um tempo transitório finito. Abaixo vamos esclarecer melhor sobre esse controlador:

- Precisamos que a planta + controlador tenham a seguinte característica $\frac{1}{z^n - 1}$, assim:

$$C(z)G(z) = C(z)\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{1}{z^2 - 1} \quad (74)$$

$$C_{Dbeat}(z) = \frac{D(z)}{N(z)(z^n - 1)} \quad (75)$$

- Observando o sistema 1 discreto que obtemos na etapa 1 equação 13 pelo método ZOH, projetamos o seguinte controlador Dead Beat:

$$C_{Dbeat}(z) = \frac{z^2 - 1.724z + 0.7408}{0.004528z^2 + 0.0004309z - 0.004097} \quad (76)$$

- Agora podemos aplicar esse controlador em cascata com a planta e obteremos a saída exibida a seguir, em conjunto com a saída discretizada através da aproximação de Tustin (em azul) e da discretização precisa (ZOH, em vermelho) do controlador (em laranja).

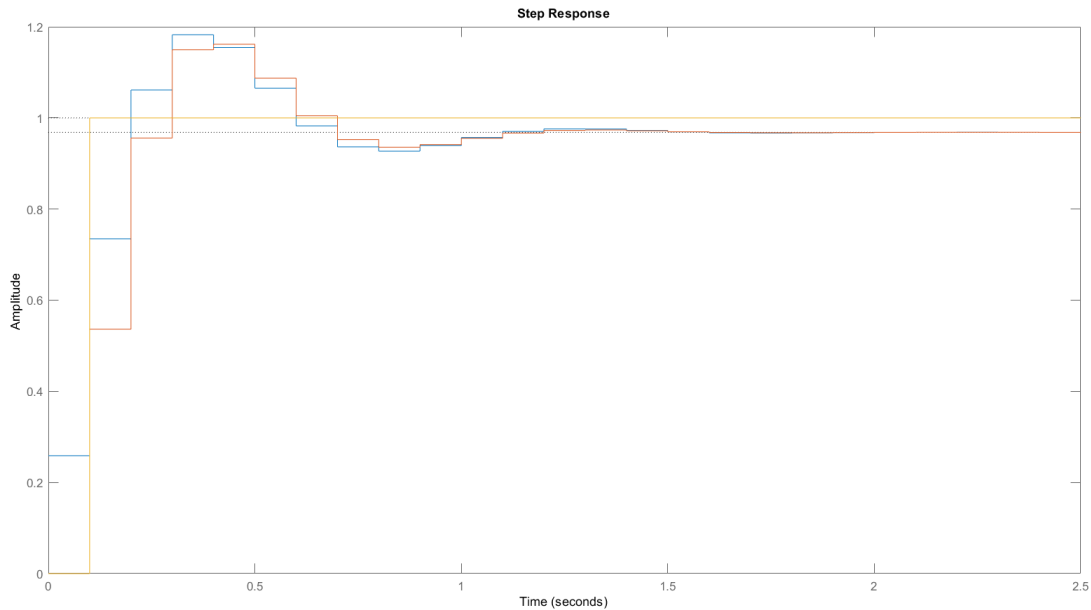


Figura 29: Sistema 1 controlado

A primeira vista pode-se pensar que o controlador dead-beat é perfeito pois alcança o valor de referencia e erro zero com atraso de apenas de uma amostra, porém no que diz respeito ao uso prático, este deixa bastante a desejar pois pode gerar um sinal de controle imenso, o que pode ser prejudicial para certos tipos de planta. Normalmente o dead-beat é utilizado apenas em certos tipos de plantas discretas que suportem o sinal de controle. Tal fato pode ser observado no gráfico abaixo, que apresenta o sinal de controle do Dead-Beat, em laranja, e do controlador projetado, em azul:

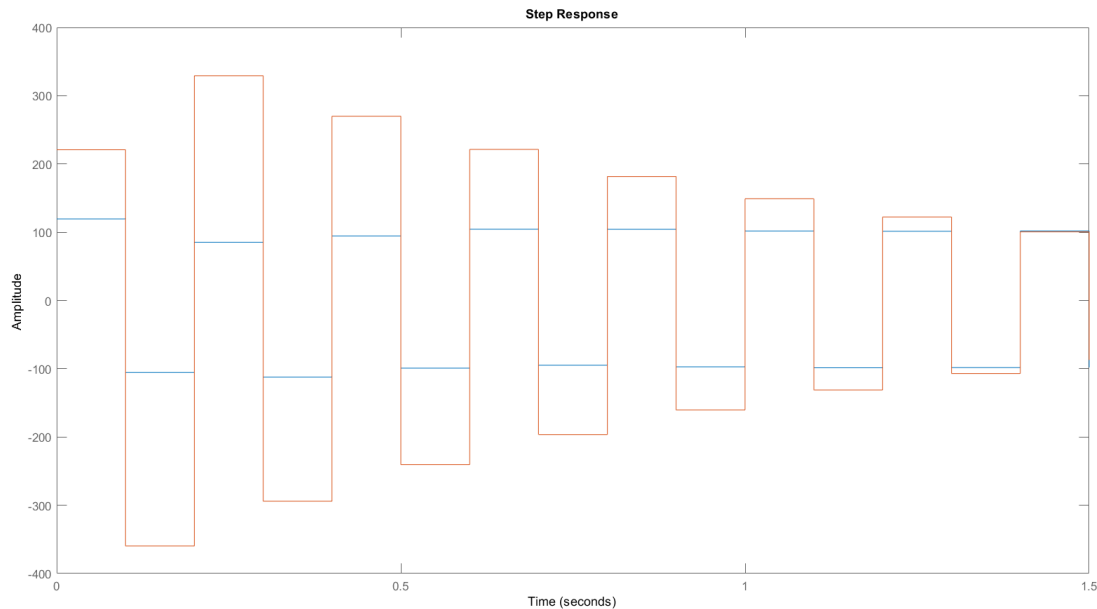


Figura 30: Entradas de controle para o sistema 1

Controlador sistema 2:

O controlador para planta instável buscava alcançar as mesmas especificações do projeto estável (menos de 18%, tempo de estabilização de 1 segundo e um erro menor que 4%). Uma vez que o erro era infinito, já que nossa planta era instável, precisávamos incluir um fator integrador no controlador, ao mesmo tempo que era necessário incluir fator derivativo para poder reduzir nosso tempo de acomodação e controlar o overshoot, por essa razão o PID se torna o controlador ideal nesse caso.

Antes de tudo cabe mencionar que projetar o controlador teve sua dificuldade devido ao overshoot calculado por meio do lugar das raízes não se configurar exatamente no overshoot obtido na simulação do sistema realimentado, provavelmente devido ao excesso de polos e zeros numa região muito próxima. Quando fizemos os mesmos cálculos que mostraremos abaixo para um overshoot de 16% na simulação o obtido foi 23%. Visto isso, a melhor alternativa encontrada foi projetar nosso controlador para um overshoot de 5%. Se considerarmos tanto esse aumento de overshoot devido ao excesso de polos e zeros, bem como o aumento devido a aproximação digital, teremos um valor próximo do requerido.

- Para nosso controlador PID inicialmente posicionamos um dos zeros sobre o polo instável visando manter o lugar das raízes sempre a esquerda no plano s e o outro

polo foi posicionado mais a esquerda para atender as especificações. Vamos calcular ω_d e σ para fazermos uma análise gráfica:

$$Ts = \frac{4}{\sigma} \quad (77)$$

$$\sigma = 4 \quad (78)$$

- Pra calcular ω_d vamos nos recordar que para um overshoot de 5% teremos um $\xi = 0.7$ e consequentemente um ângulo de 45 graus, assim:

$$\omega_d = \frac{4}{\tan(45)} = 4 \quad (79)$$

- Dessa forma podemos posicionar no gráfico o ponto que queremos e chegamos ao gráfico abaixo:

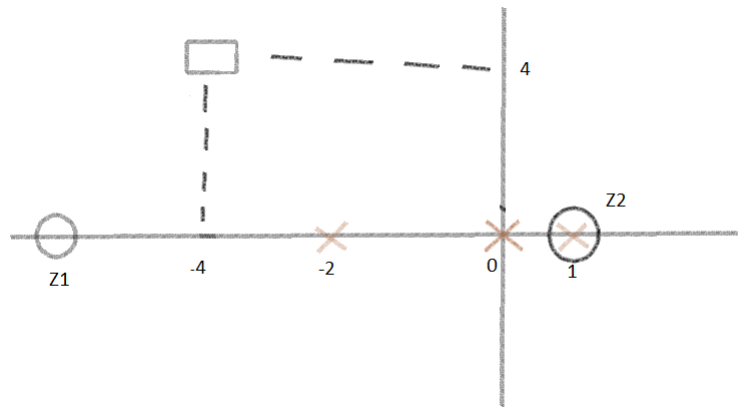


Figura 31: Posicionamentos dos polos e zeros do sistema

- Da condição de fase em malha fechada temos que:

$$\angle KG(s)C(s) = (2k + 1)180 \quad (80)$$

- Portanto, para encontrarmos a angulação de Z1 fazemos:

$$\theta_{Z1} - 135^\circ - 116.57^\circ - 141.34^\circ + 141.34^\circ = 180^\circ \quad (81)$$

$$\theta_{Z1} = 431.57 - 360 = 71.57 \quad (82)$$

- Vamos encontrar agora a que distância da origem está nosso zero:

$$\frac{4}{\tan(71.57)} = Z1 - 4 \quad (83)$$

$$Z1 = 5.33 \quad (84)$$

- A constante K podemos encontrar através da condição de magnitude:

$$|KC(s)G(s)| = 1 \quad (85)$$

- Assim:

$$K = \frac{5.65 * 4.47 * 6.4}{0.5 * 6.4 * 6.66} \quad (86)$$

$$K = 7.46 \quad (87)$$

- Com isso obtemos a seguinte saída projetando planta+controlador em um sistema realimentado:

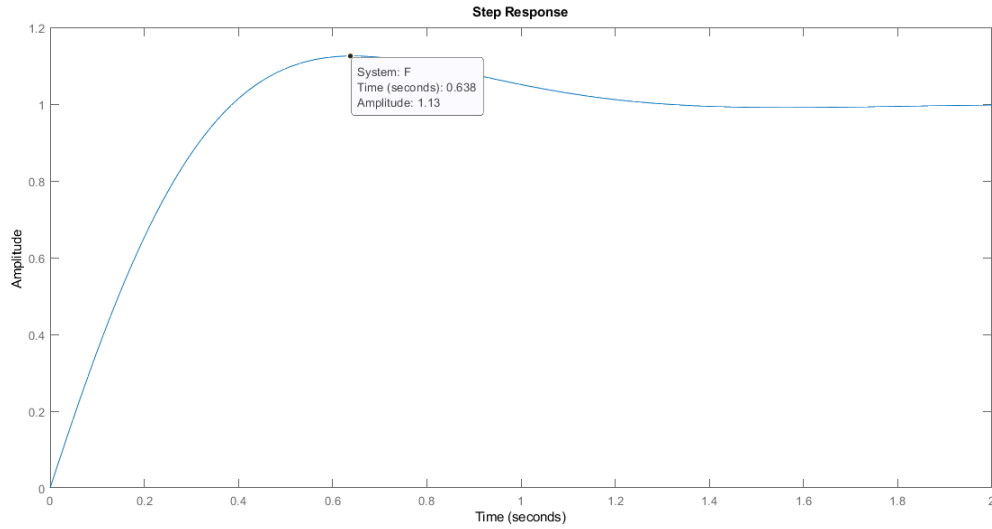


Figura 32: Saída do sistema instável controlado

Comparando a figura 32 com a 35 que é o lugar das raízes discreto e iremos ver mais a frente, acontece bem aquilo que já foi comentado da simulação ser diferente do lugar das raízes principalmente no overshoot, porém como demos uma boa margem no overshoot o controlador é bastante aplicável e satisfatório para nosso sistema, uma vez que apresenta tempo de estabilização bem próximo de 1 segundo, overshoot de 13% e erro nulo em regime. No caso contínuo não há qualquer possibilidade de instabilização com um ajuste fino dos valores do PID. Posteriormente, utilizamos os métodos já expostos para calcular a aproximação de Tustin, bem como o Deadbeat. Após o processo, obtivemos os seguintes resultados em tempo discreto:

$$ControladorTustin = \frac{179.5z^2 - 302.4z + 114.9}{z^2 - 1}$$

$$DeadBeat = \frac{z^2 - 1.924z + 0.9048}{0.002423z^2 - 0.0000794z - 0.002343}$$

Mais uma vez, podemos ver a saída para o caso do controlador discretizado, do sistema discretizado através de ZOH, e para o caso do controlador Dead Beat, e as entradas de controle (muito maior para o caso do controlador Dead Beat, mais uma vez):

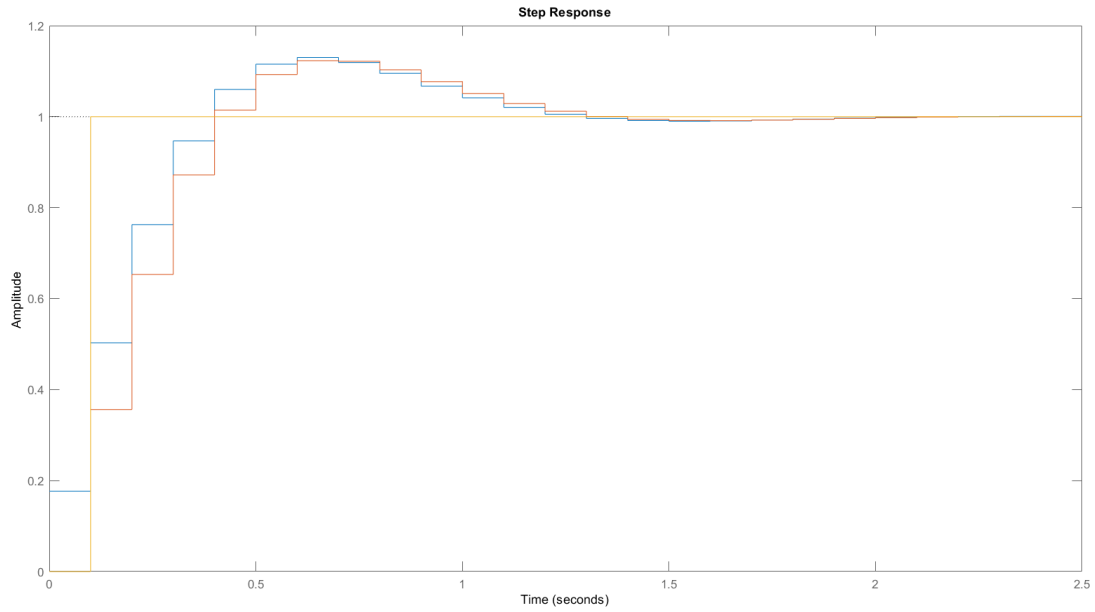


Figura 33: Sistema 2 controlado

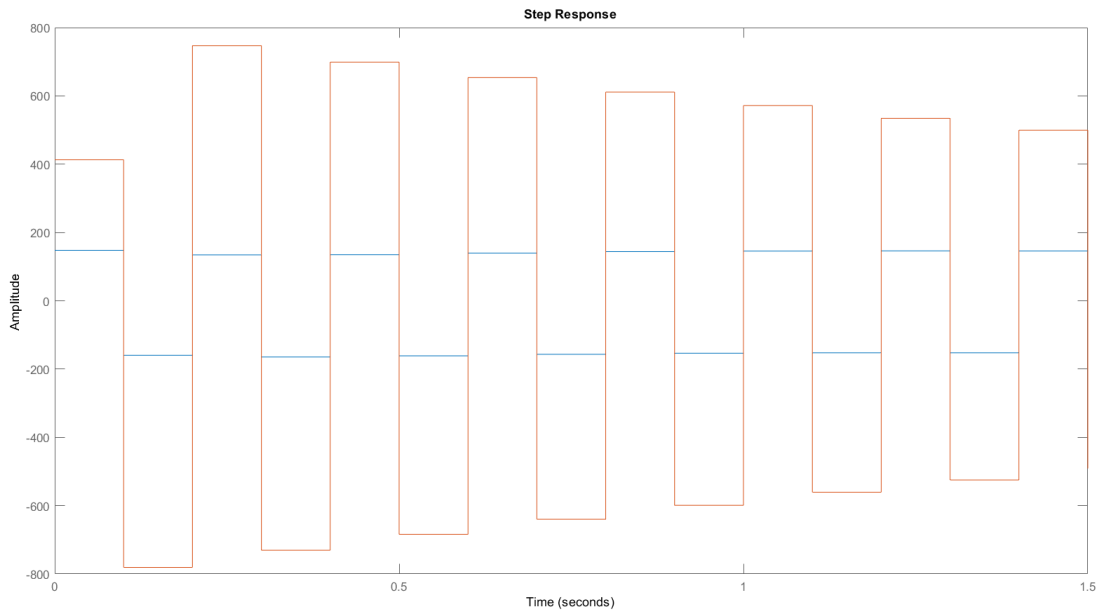


Figura 34: Entradas de controle para o sistema 2

Para finalizar vamos fazer uma análise rápida do lugar das raízes da planta com o controlador, aqui iremos observar pelos cálculos e pelo gráfico do lugar das raízes que teremos teoricamente 5% de overshoot, apesar do encontrado na prática estar na casa dos 13%, vamos utilizar a equação (70) com $s=4 \pm j4$ e $\xi = 0.69$:

$$z = e^{-\omega^* T * (\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})} e^{j\omega^* T} \quad (88)$$

$$z = e^{-4 * 0.1 * (\frac{0.69}{\sqrt{1-0.69^2}})} e^{j4 * 0.1} \quad (89)$$

$$z = 0.629 + j0.266 \quad (90)$$

$$z = 0.683 \angle 22.9 \quad (91)$$

- sabendo que o raio é 0.683, temos:

$$\frac{T_s}{T} = \frac{-4}{\ln(0.683)} \quad (92)$$

$$T_s = 1.049s \quad (93)$$

Abaixo temos o lugar das raízes da planta mais o controlador do sistema já realimentado também com os polos partindo a partir do ponto de operação desejado, e aqui vamos perceber que o ponto encontrado na equação (90) é bem próximo dos polos naturais no lugar das raízes da nossa equação de transferência total.

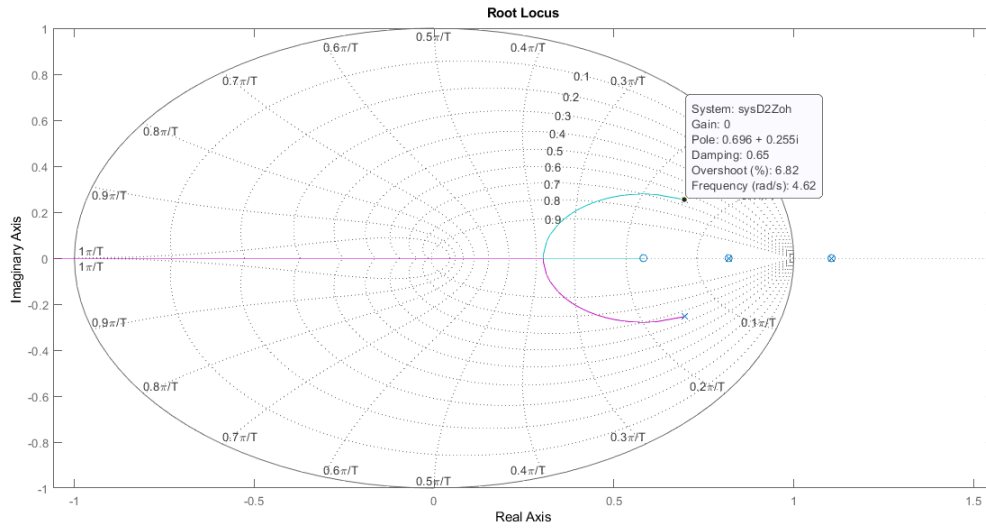


Figura 35: Lugar das raízes planta mais controlador sistema instável discreto

Etapa 3:

Nesta etapa focaremos na identificação e descrição do sistema, seja por meio da identificação das matrizes de estados se utilizando da análise de entradas e respectivas saídas ou por meio de observadores de estado. Além, claro, das análises de observabilidade e controlabilidade e por fim projetando observadores de estado.

Identificação de sistemas:

A depender do tipo e natureza de uma planta, nem sempre será possível efetuar uma modelagem convencional, seja por motivos de dificuldade de acesso aos componentes constituintes da mesma, pelo tipo de atividade que as mesmas efetuam ou até mesmo ambas essas circunstâncias.

Dessa forma se faz necessário um método de identificação dessas plantas da forma menos invasiva possível. Dito isso podemos pensar a respeito de que uma coisa que normalmente temos acesso em uma planta é a entrada, que efetivamente controlamos, e da saída. Dessa forma podemos pensar em formas de modelar um sistema linear que possa gerar um comportamento semelhante ao da planta e que vá gerar as mesmas saídas para as mesmas entradas.

Consideremos,

$$y[k+2] + a_1y[k+1] + a_2y[k] = b_1u[k] \quad (94)$$

Montando,

$$y = Ax \quad (95)$$

Sendo y as saídas, A a matriz com condições iniciais e entradas e x o vetor de coeficientes a ser encontrados podemos fazer,

$$A^{-1}y = x \quad (96)$$

Considerando que temos todas as amostras e saídas poderemos usar essa relação para resolver um sistema e encontrar os valores de a_1, a_2 e b_1 . Porém uma maior quantidade de amostras irá gerar uma identificação mais precisa ao passo que a matriz A deixará de ser quadrada e não será possível simplesmente invertê-la. Porém usando a seguinte manipulação será possível resolver o sistema.

$$(A^t A)^{-1} A^t y = x \quad (97)$$

Utilizando-se desse pequeno porém poderoso artifício, partimos da simulação em tempo contínuo dos nossos sistemas e obtemos amostras da saída para um sinal de entrada aleatório. Para o nosso sistema foi possível obter os seguintes resultados no MatLab. Utilizamos uma entrada aleatória de 500 amostras, de modo a excitar grande parte dos modos da planta, e obtivemos um vetor de coeficientes igual a:

$$coef = \begin{pmatrix} 0.0047 \\ 0.0002 \\ -1.8529 \\ 0.8667 \end{pmatrix}$$

Em geral bastante próximo dos coeficientes em questão, que podem ser vistos a partir da função de transferência:

$$H(z) = \frac{0.004528z + 0.004}{z^2 - 1.724z + 0.7408}$$

A saída exata do sistema para este conjunto de entradas e a saída para o sistema dado pelos coeficientes obtidos podem ser vistos no gráfico abaixo em azul e laranja, respectivamente:

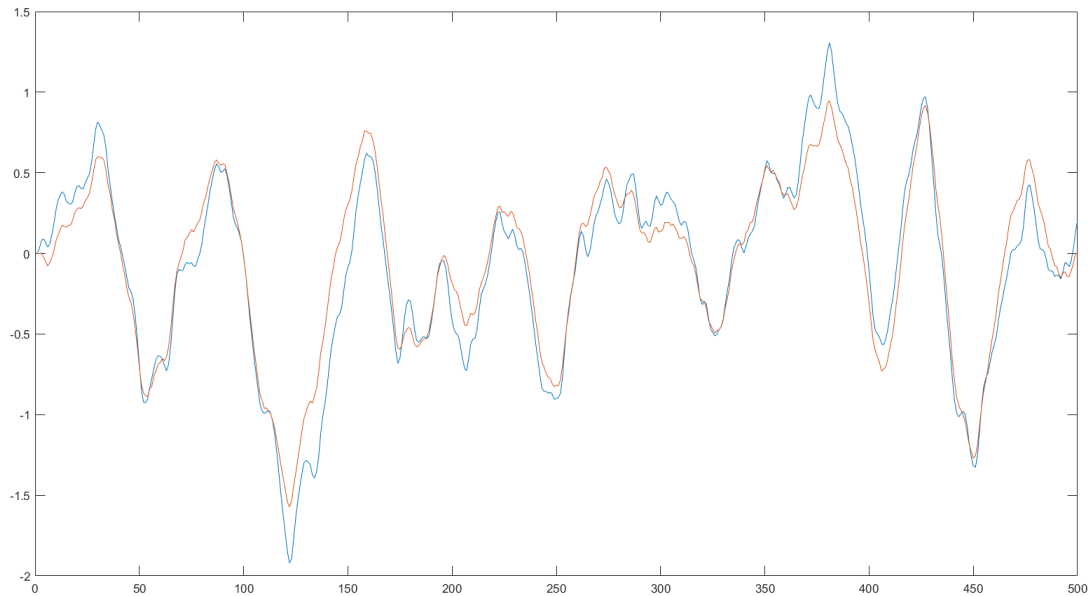


Figura 36: Identificação do sistema 1

Nota-se que a planta identificada gera um sinal de saída suficientemente próximo ao da planta real, o que é esperado e um resultado bastante interessante. No caso do sistema 2, os coeficientes obtidos foram:

$$coef = \begin{pmatrix} 0.0026 \\ 0.0004 \\ -2.0238 \\ 1.0152 \end{pmatrix}$$

Para a função de transferência:

$$H(z) = \frac{0.002423z + 0.002343}{z^2 - 1.924z + 0.9048}$$

O que gerou a seguinte saída, para uma entrada de 100 valores:

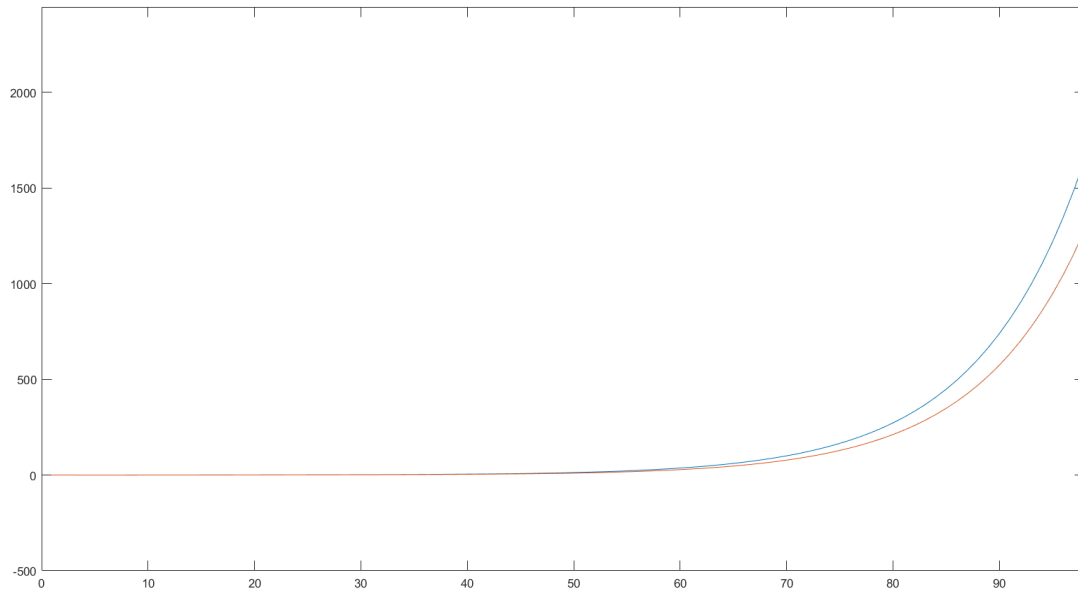


Figura 37: Identificação do sistema 1 (a)

O sistema 2 acabou por ser um caso especial pois por ser instável o mesmo se desestabilizava rapidamente e gerava grandes erros para pequenos erros na identificação. Diante disso optamos por fechar a malha e obter a identificação da malha fechada do mesmo com um ganho K que garantisse estabilidade do sistema resultante. O resultado pode ser observado abaixo e assim como o primeiro foi possível obter uma definição aproximadamente precisa da planta.

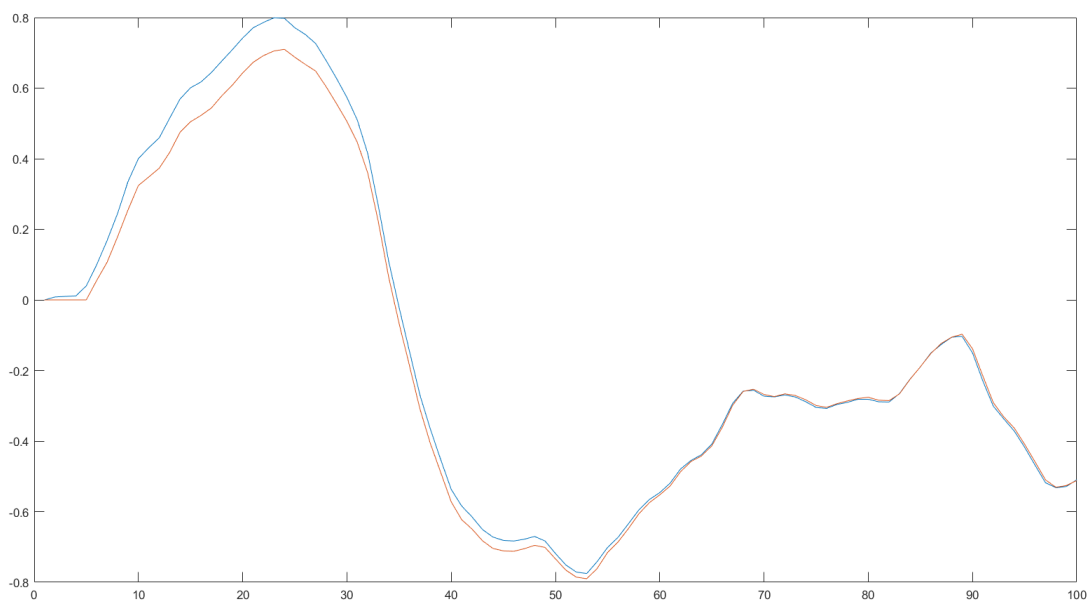


Figura 38: Identificação do sistema 2 (b)

Análise de observabilidade:

A partir das já mencionadas funções de transferência, e da representação em espaços de estados exibida na parte 1 deste relatório, podemos obter a matriz de observabilidade e de controlabilidade do sistema. Para o sistema 1:

$$Co_1 = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} 0.0861 & 0.0623 \\ 0.0045 & 0.0119 \end{pmatrix}$$

$$Ob_1 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ C^2A \\ \dots \\ C^{n-1}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.0861 & 0.9909 \end{pmatrix}$$

Uma vez que o posto de ambas as matrizes é igual ao numero de linhas, o sistema é observável e controlável, se representado desta forma. Ainda podemos representar o sistema de duas outras maneiras, através da forma canônica observável:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1.724 & 1 \\ -0.7408 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0.004528 \\ 0.004097 \end{pmatrix} \mathbf{C} = (1 \ 0) \mathbf{D} = (0)$$

E controlável:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.7408 & 1.724 \end{pmatrix}, \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} = (0.004097 \ 0.004528) \mathbf{D} = (0)$$

Para o sistema 2, temos:

$$Co_2 = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} 0.0477 & 0.0441 \\ 0.0024 & 0.0070 \end{pmatrix}$$

$$Ob_2 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ C^2A \\ \dots \\ C^{n-1}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 \\ 0.0955 & 1.0097 \end{pmatrix}$$

Sua forma observável:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1.924 & 1 \\ -0.9048 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0.002423 \\ 0.002343 \end{pmatrix} \mathbf{C} = (1 \ 0) \mathbf{D} = (0)$$

E controlável:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.9048 & 1.924 \end{pmatrix}, \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} = (0.002343 \ 0.002423) \mathbf{D} = (0)$$

Projeto de observadores de estado:

Nem sempre é importante apenas observar e controlar a saída de uma planta mas também se deve atentar para seus estados internos, pois podemos ter uma planta de saída estável porem um de seus estados internos pode apresentar comportamento instável, de

forma que do ponto de vista prático isso pode representar harmônicas ou até uma tensão ou corrente assintótica dentro da planta.

Neste contexto fica bem fundamentado a necessidade do uso de observadores ou estimadores de estado no projeto.

$$\hat{x}[k+1] = \Phi\hat{x}[k] + \Gamma u[k] + L(y[k] - \hat{y}[k]) \quad (98)$$

$$\hat{y}[k] = C\hat{x}[k] + Du[k] \quad (99)$$

A partir das equações (98) e (99), que definem um observador de estados, podemos elaborar uma simulação onde comparamos os estados internos do sistema com aqueles estimados pelo observador. Decidimos então que, para os dois casos, projetaríamos o observador de forma que os polos do mesmo estivessem em 0.3 e 0.4, satisfazendo os dois sistemas, que possuem polos mais afastados. Sendo assim, utilizamos os conceitos demonstrados em sala para obter o observador, sabendo que:

$$\det(\lambda I - \Phi + LC) = 0$$

Onde L é a matriz de ganho para o observador e λ é um polo qualquer. Sendo assim, para o sistema 1, obtivemos:

$$L = \begin{pmatrix} 1.4990 \\ 1.0236 \end{pmatrix}$$

Para observar o efeito do observador, adicionamos um pequeno ruído a saída e alteramos os estados iniciais dos estados do sistema. Podemos observar que, mesmo assim, os estados estimados(em laranja) se aproximam do estado real(em azul) rapidamente:

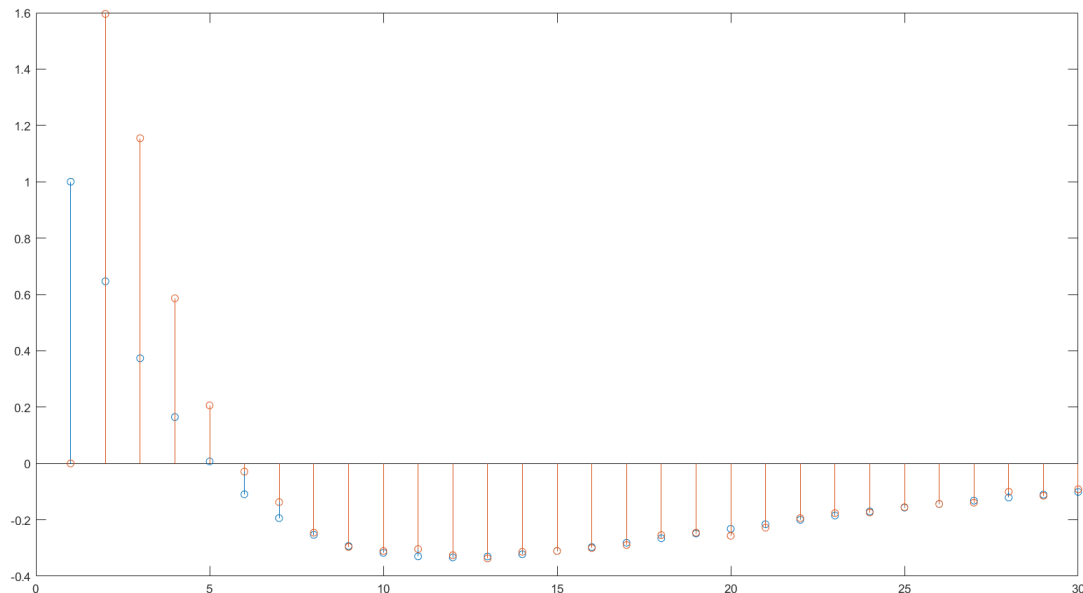


Figura 39: Planta 1 - Comparação do Estado 1

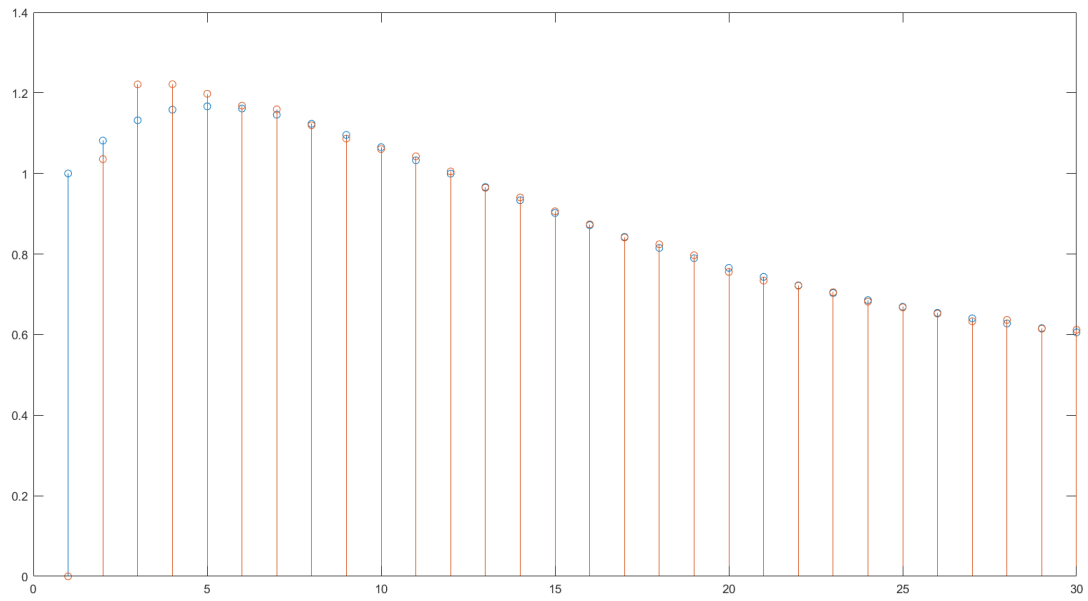


Figura 40: Planta 1 - Comparação do Estado 2

No caso do sistema 2, obtivemos:

$$L = \begin{pmatrix} 3.4988 \\ 1.2239 \end{pmatrix}$$

E a dinâmica pode ser vista abaixo, mais uma vez:

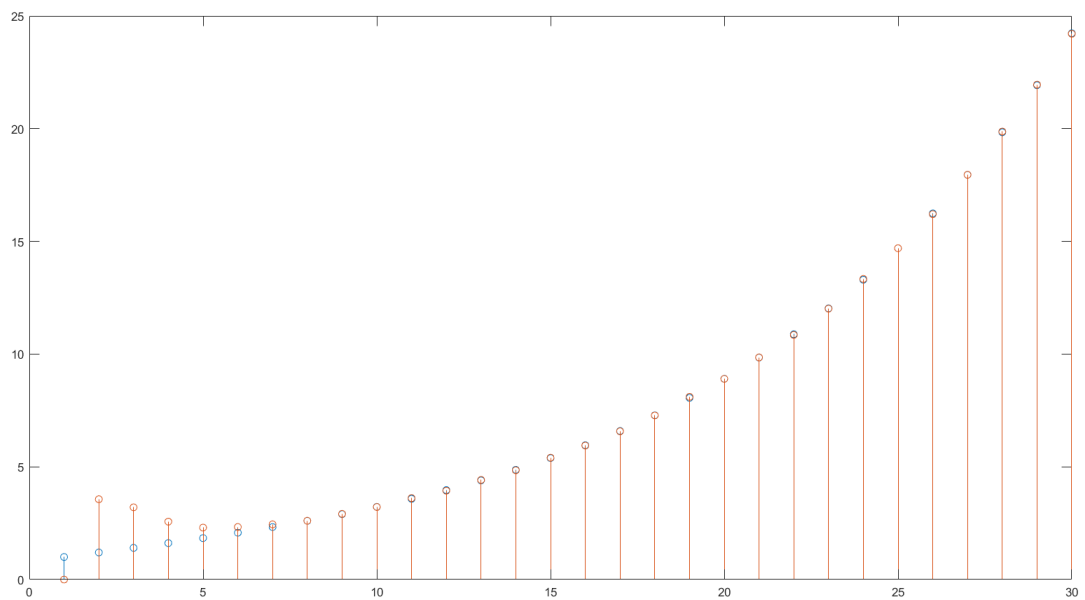


Figura 41: Planta 2 - Comparação do Estado 1

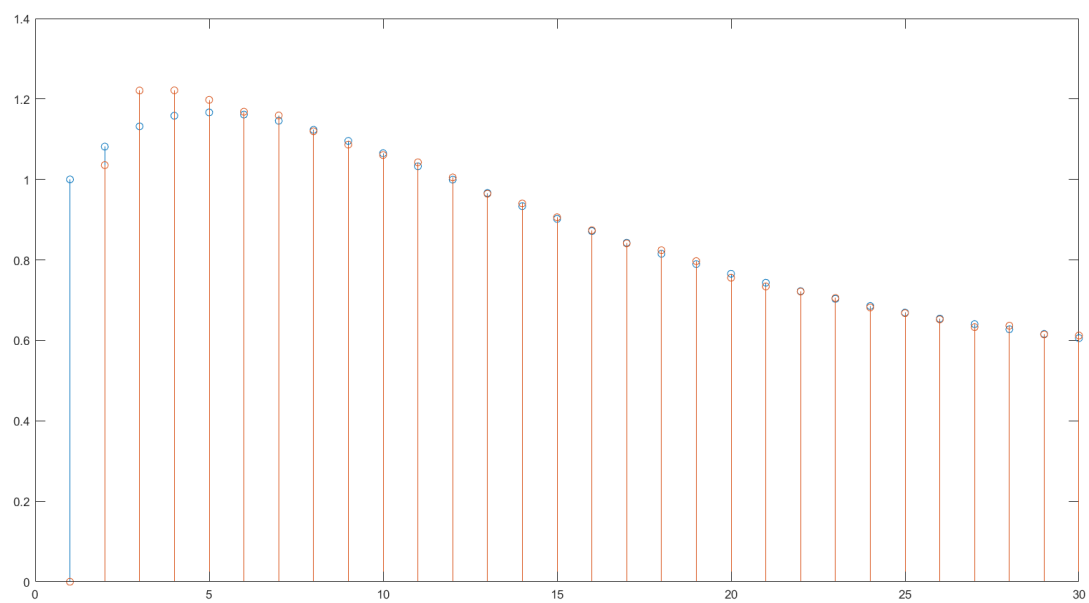


Figura 42: Planta 2 - Comparação do Estado 2

Conclusão

De fato os controladores digitais tem uma imensa importância em diversos processos e atividades no mundo moderno. Com isso a importância do estudo desses controladores se torna imprescindível para engenheiros. No referido relatório foi possível observar um projeto completo que foi desde a discretização com ZOH de uma planta, notando todas as características deste método tal como a importância de escolher corretamente o período de amostragem a se utilizar, até o projeto de controladores discretos para estas plantas e observadores de estado.

Neste documento foi destacado a necessidade do estudo da planta contínua para efetuar uma boa discretização a fim de se obter uma planta discreta suficientemente fiel ao correspondente contínuo. Foram feitas importantes análises acerca da estabilidade e resposta tanto da planta discreta quanto da contínua. Com o estudo da planta efetuado, o projeto do controlador foi feito, e comparamos o método usado com o caso ideal (dead beat) a fim de ter uma noção de qualidade do nosso projeto. Além disso outros estudos foram efetuados, utilizamos a planta em tempo contínuo para simular uma situação onde não conhecemos a planta e só colhemos valores de entrada e saída, dessa forma fizemos a identificação da planta e posteriormente efetuamos estudos de controlabilidade e observabilidade, o que viabilizou o projeto de observadores de estado para as plantas.

Dessa forma completamos nossa esclarecedora jornada pelo mundo dos controladores digitais, absorvendo conhecimentos sobre suas características e particularidades, e experiências sobre seu projeto.