Calcolo delle probabilità e Statistica 2022-23
(A. Buonocore)

Indice

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.
Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.
2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2.
Possiamo rappresentiamo graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\xrightarrow{Z_2}$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.
Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.
L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, .., 6\} = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.
La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.
Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI:**

$$\text{(f tondo) } \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.
Z_2[1] (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel suguente modo:

$$Z_2 : \Omega \to \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in $\mathcal{R}$)
Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).
Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z2} prende il nome di **SPETTRO**.
La possibilità di trovare un numero non appartente a questo insieme è nulla.

[1] Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distunguirlo da un eventuale Z_3, ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabiltà ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2\text{OCCORRENZE DI N}}{\#\text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO:**

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1,3),(2,2),(3,1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiano notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.
Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z=2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z=12)$$

$$\mathcal{P}(Z=3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z=11)$$

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z=10)$$

$$\mathcal{P}(Z=5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z=9)$$

$$\mathcal{P}(Z=6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z=8)$$

$$\mathcal{P}(Z=7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioé ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.
Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2*(\frac{1}{36}) + 2*(\frac{3}{36}) + 2*(\frac{5}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2*(\frac{2}{36}) + 2*(\frac{4}{36}) + 1*(\frac{6}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazzione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

[2] # indica la cardanalità, è usato come sostituto di $\|$

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Regola Moltiplicativa

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * ... * n_r$$

Dove $i = 1, 2, ..., r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprecedura i-sima.

2.1.1 Esempio Cartellini Camicie

Vogliamo sapere quanti cartellini delle camicie dobbiamo fabbricare avendo i seguenti dati: 4 Taglie, 2 Foggie, 7 Colori.
Usando la regola moltiplicativa poniamo $r = 3$ avendo tre possibili varianti, $n_1 = 4$ per le taglie, $n_2 = 2$ per le foggie, $n_3 = 7$ per i colori, ora calcoliamo il totale:

$$n = n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 2 * 7 = 56 \ \ \textbf{CARTELLINI}$$

2.2 Fattoriale

Il fattoriale di $n >= 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precendenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 \ \ \text{SE} \ \ n = 0 \\ n * (n-1)! \ \ \text{SE} \ \ n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$
$$\frac{13!}{11!} = \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156$$
$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

2.3 Coifficiente Binomiale

Presi nek con $k <= n$, possiamo definire il cofficiente binomiale in questo modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{\cancel{6}^3 * 5}{\cancel{2}} = 3 * 5 = 15$$

2.3.1 Propietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune propietà del coifficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Propietà 01

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} * \underset{\substack{\| \\ 0!=1}}{(5-5)!}} = 1$$

Propietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * \underset{\substack{\| \\ 1}}{(5-4)!}} = 5$$

Propietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! * \underset{\substack{\| \\ 8!}}{(12-4)!}} = \frac{\cancel{12}^3 * 11 * \cancel{10}^5 * 9 * \cancel{8!}}{\cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5{*}9{*}11 = 495 = \frac{12!}{8! * \underset{\substack{\| \\ 4!}}{(12-8)!}} = \binom{12}{8}$$

Propietà 04 Se $k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{}{}$$

Propietà 05 $(n = 6, k = 3)$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\tbinom{7}{3} = \tfrac{7*\cancel{6}*5*\cancel{4!}}{\cancel{3!}*\cancel{4!}} = 7 * 5 = 35 = 20 + 15 = \tfrac{\cancel{2}*\cancel{3}*4*5*\cancel{6}}{\cancel{6}*\cancel{6}} + \tfrac{\cancel{6}^3*5*\cancel{4!}}{\cancel{2}*\cancel{4!}} = \tfrac{6!}{3!*3!} + \tfrac{6!}{2!*4!} = \tbinom{6}{3} + \tbinom{6}{2}$$

Un possibile uso del coifficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.
Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con cardilinità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{\cancel{4}^2 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2} * \cancel{2!}} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \ \#T = 6$$

2.4 Coifficiente Multinomiale

Sia n un intero posi+tivo e $n_1, n_2 ... n_r$ interi tali che $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$, possiamo scrivere il coifficiente multinomilae in questo modo:

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_r!}$$

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2! * 3! * 2!} = \frac{7 * 6 * 5 * \cancel{4} * \cancel{3!}}{\cancel{4} * \cancel{3!}} = 210 \quad (2+3+2=7)$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distungere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezioni.

2.6 Disposizioni e Combinazioni

Per ovviare al problema del contare andiamo a definire le seguenti classificazioni:

Disposizione: è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.
Possiamo suddividerla in:
Disposizione: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento
Diposizione Semplice: **non è amessa** la ripezioni

Combinazioni: è una selezione dove l'ordinamente **non è IMPORTANTE**.
Possiamo suddividerla in:
Combinazioni: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento
Combinazioni Semplice: **non è amessa** la ripezioni

Per calcolare tutte le k-disposizioni con ripetizione di S usiamo questa formula:

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k$$

Per calcolare tutte le k-disposizioni semplici di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$$

(n cardinalità dell'insieme, k la lunghezza della disposizione)

2.6.1 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili di dispozioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme $S = \{c, a\}$, poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.
Quindi $n = \#S = 2$ e $k = 2$, allora:

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c, c), (a, a), (c, a), (a, c)\}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c, a), (a, c)\}$$