

Geometria 2022-23 (Trombetti)

Indice

1	Lezione 01 - XX/03/2023	2
1.1	Definizioni di base	2
1.1.1	Prodotto Cartesiano	2
1.1.2	Coppie	2
1.1.3	Operazione Interna	2
1.1.4	Operazione Esterna	2
1.1.5	Prodotto Scalare Standard	2
1.1.6	Matrice in \mathbb{R}	2
2	Lezione 04 - 17/03/2023	3
2.1	Spazi Vettoriali su \mathbb{R}	3
2.2	Esempi Spazi Vettoriali	3
2.2.1	Spazio Vettoriale numerico di ordine n	3
2.2.2	Spazio Vettoriale di una matrice di ordine m, n	4
2.2.3	Spazio Vettoriale polinomiale	4
2.2.4	Spazio Vettoriale polinomiale di al più n	4
2.2.5	Spazio Vettoriale dei vettori geometrici in un punto O	4
3	Lezione 05 - 22/03/2023	5
3.1	Spazi Vettoriali del Vettore Geometrico libero	5
3.2	Proprietà Spazi Vettoriali	5
3.3	Proporzionalità	6
3.3.1	Esempi	6
3.4	Combinazione Lineare	6
3.4.1	Esempi	6
3.5	SottoSpazi Vettoriali	7
3.5.1	SottoSpazi Banali	7
3.5.2	Esempi	8
4	Lezione 06 - 24-03-2023	10
4.1	Proprietà Sottospazio Vettoriale	10

1 Lezione 01 - XX/03/2023

1.1 Definizioni di base

1.1.1 Prodotto Cartesiano

Presi $S, T \neq \emptyset$, possiamo definire il prodotto cartesiano:

$$S \times T = \{(s, t) / s \in S, t \in T\}$$

$$S^2 = S \times S = \{(s, t) / s \in S, t \in T\}$$

Da non confondere con la definizione di diagonale: $S^2 = S \times S = \{(s, s) / s \in S\}$.

1.1.2 Coppie

La definizione di coppia è la seguente:

$$(s, t) = \{\{s, t\}, \{s\}\}$$

Negli insiemi l'ordine non conta $\{s, t\} = \{t, s\}$, invece nelle coppie è rilevante, infatti due coppie sono uguali se e solo sono ordinatamente uguali:

$$(s, t) = (s', t') \Leftrightarrow s = s', t = t'$$

Andiamo a dimostrare questa affermazione:

- DIM \Leftarrow : BANALE
- DIM $\Rightarrow (s, t) = (s', t') \Leftrightarrow \{\{s, t\}, \{s\}\} = \{\{s', t'\}, \{s'\}\}$
Ragioniamo per casi:

a SE $s = t$:

$$Sx: \{\{s, t\}, \{s\}\} \Rightarrow \{\{s, s\}, \{s\}\} \Rightarrow \{s\}$$

$$Dx: \{\{s', t'\}, \{s'\}\} \Rightarrow \{\{s', s'\}, \{s'\}\} \Rightarrow \{s'\}$$

b SE $s \neq t$:

Usiamo le definizioni di uguaglianza tra insiemi:

$$\{s\} = \{s'\} \Rightarrow s = s'$$

$$\{s, t\} = \{s', t'\} \wedge s = s' \Rightarrow t = t'$$

1.1.3 Operazione Interna

1.1.4 Operazione Esterna

1.1.5 Prodotto Scalare Standard

1.1.6 Matrice in \mathbb{R}

2 Lezione 04 - 17/03/2023

2.1 Spazi Vettoriali su \mathbf{R}

Sia V un insieme non vuoto, definiamo due operazioni:

Interna $+$: $V \times V \rightarrow V$ (somma vettoriale)

Esterna \cdot : $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$ (scalare per un vettore) \mathbf{R} è campo

Posto $(V, +, \cdot)$ si dice **spazio vettoriale su \mathbf{R}** \Leftrightarrow

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano, quindi:
 - Associatività
 - Commutatività
 - Neutro
 - Tutti gli elementi invertibili
2. $\forall \underline{v} \in V$ tale che $\underline{v} \cdot 1 = \underline{v}$ (associatività mista)
3. $\forall h, k \in \mathbf{R}, \forall \underline{v} \in V$ tale che $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
4. $\forall h, k \in \mathbf{R}, \forall \underline{v} \in V$ tale che $(h + k) \cdot \underline{v} = h \cdot \underline{v} + k \cdot \underline{v}$ (distrib. tra \cdot e $+$ in \mathbf{R})
5. $\forall h, k \in \mathbf{R}, \forall \underline{v} \in V$ tale che $h(\underline{v} + \underline{w}) = h \cdot \underline{v} + h \cdot \underline{w}$ (distrib. tra \cdot e $+$ in V)

2.2 Esempi Spazi Vettoriali

2.2.1 Spazio Vettoriale numerico di ordine n

Verifichiamo che $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ sia uno spazio vettoriale, ma prima facciamo un esempio:

$$(1, 2, 3) + (0, 1, 2) = (1, 3, 5) \quad 3(3, 2, 4) = (9, 6, 12)$$

Andiamo a verificare che sia spazio vettoriale:

1. $(\mathbf{R}^n, +)$ gruppo abeliano:
 - * Associatività e Commutatività banalmente ereditati da $+$
 - * Neutro: $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$
 - * Inverso: $-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$
2. Banale eredità di \cdot
3. $(hk)(x_1, \dots, x_n) = (h k x_1, \dots, h k x_n) = h(k x_1, \dots, k x_n) = h(k(x_1, \dots, x_n))$
4. DA DIMOSTARE
5. DA DIMOSTARE

2.2.2 Spazio Vettoriale di una matrice di ordine m,n

Possiamo considerare $(M_{m,n}(R), +, \cdot)$ come una lunga riga, quindi si accomuna al caso precedente.

2.2.3 Spazio Vettoriale polinomiale

2.2.4 Spazio Vettoriale polinomiale di al più n

2.2.5 Spazio Vettoriale dei vettori geometrici in un punto O

3 Lezione 05 - 22/03/2023

3.1 Spazi Vettoriali del Vettore Geometrico libero

3.2 Proprietà Spazi Vettoriali

Preso $(V, +, \cdot)$ Spazio Vettoriali andiamo a definire le seguenti proprietà:

1) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{z} \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w} = \underline{z} + (-\underline{w})$

Dim:

Sommiamo l'opposto di \underline{w} a entrambi i membri:

$$(\underline{v} + \underline{w}) + (-\underline{w}) = \underline{z} + (-\underline{w}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$$

2) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ **NEUTRO**

3) $\forall \underline{v} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$

$$0 \cdot \underline{v} = \underline{0} = h \cdot \underline{0}$$

Dim primo lato:

$$0 \cdot \underline{v} = (0 + 0)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} + 0 \cdot \underline{v} \Rightarrow 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

Dim secondo lato:

$$h \cdot \underline{0} = h \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = h \cdot \underline{0} + h \cdot \underline{0} \Rightarrow h \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

4) $\forall \underline{v} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$ **Legge annullamento del prodotto**

$$h\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow h = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}$$

Dim \Leftarrow : Vale per la 3)

Dim \Rightarrow : $h \cdot \underline{v} = \underline{0}$

Poniamo $h \neq 0$ e moltiplichiamo entrambi i membri per h^{-1} :

$$h^{-1}(h \cdot \underline{v}) = h^{-1}\underline{0} \Rightarrow (h^{-1}h)\underline{v} = \underline{v}$$

5) $h(-\underline{v}) = -(h\underline{v}) = (-h)\underline{v}$

Dim: $(-h)\underline{v} = -(h\underline{v})$: Dobbiamo dimostrare che sia opposto, quindi:

$$(-h)\underline{v} + h\underline{v} = \underline{0}$$

$$(-h + h)\underline{v} = \underline{0}\underline{v}$$

Dim: $h(-\underline{v}) = -(h\underline{v})$

$$h(-\underline{v}) + h\underline{v} = h(-\underline{v} + \underline{v}) = h \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

6) $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ Corollario immediato

7) $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{z} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{z})$

Dato che l'associatività si può sempre ridurre a due elementi, possiamo assumere la associatività generalizzata, questo ci permette di omettere le parentesi.

8) Lo stesso concetto del punto 7) si può applicare per la commutatività, quindi se vale per due elementi vale anche per n elementi, quindi possiamo ordinare gli elementi come ci pare.

9) Stesso concetto del punto 7)e8) vale anche per la distributività.

3.3 Proporzionalità

Presi $\underline{v}, \underline{w} \in V$ si dicono **proporzionali** \Leftrightarrow

$$\exists h \neq 0 \quad \underline{v} = h\underline{w}$$

La proporzionalità è una **Relazione di Equivalenza**, quindi valgono le tre proprietà:

Riflessiva: $\underline{v} = 1\underline{v}$

Simmetrica: $\underline{v} = h\underline{w} \Rightarrow h^{-1}\underline{v} = \underline{w}$

Transitiva: $\underline{v} = h\underline{w}$ e $\underline{w} = k\underline{z} \Rightarrow \underline{v} = h(k\underline{z}) = (hk)\underline{z} \quad (h, k \neq 0)$

3.3.1 Esempi

Indicheremo con la tilde \sim la proporzionalità.

R^3

$$(1, 2, 0) \sim (2, 4, 0)$$

$$(1, 2, 0) \not\sim (0, 0, 0)$$

Rx

$$1 + x^{40} \sim 2 + 2x^{40}$$

3.4 Combinazione Lineare

\underline{v} è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \Leftrightarrow$

$$\exists h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} : \underline{v} = h_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + h_n \cdot \underline{v}_n$$

(Sia i vettori \underline{v} che gli scalari h possono essere diversi tra loro)

3.4.1 Esempi

R^3

$(1, 2, 1)$ è combinazione lineare $(2, 4, 2)$ con $h = 2$

R^2

$(1, 2)$ è combinazione lineare di $(1, 1), (0, 1)$

$$(1, 2) = 1(1, 1) + 1(0, 1)$$

R^3

$(1, 2, 1)$ è combinazione lineare di $(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$?

$$(1, 2, 1) = x_1(1, 2, 0) + x_2(0, 1, 1) + x_3(1, 1, 1)$$

Come possiamo notare in questo caso non è immediato trovare la soluzione, quindi possiamo ricorrere a un sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 & + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} \dots & \\ 2x_1 & = 1 \\ \dots & \end{cases} \begin{cases} \dots & \\ x_1 & = \frac{1}{2} \\ \dots & \end{cases} \begin{cases} x_3 + \frac{1}{2} = 1 \\ \dots & \\ \dots & \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 & = \frac{1}{2} \\ x_2 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$Rx \ 1 + x + x^2$ è combinazione lineare di $1 + x, 1 + x^2$

$$1 + x + x^2 = h(1 + x) + k(1 + x^2) = kx^2 + hx + (h + k)$$

$$\begin{cases} h + k = 1 \\ h = 1 \\ k = 1 \end{cases} \text{ Non ha soluzione}$$

3.5 SottoSpazi Vettoriali

Preso V spazio vettoriale, e $H \subseteq V$. Dim:

H stabile (chiuso) rispetto a $+$

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in H \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H$$

H stabile (chiuso) rispetto a \cdot

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H \ h \underline{v} \in H$$

H sottospazio vettoriale se è stabile $+$ e \cdot

$$+_H : H \times H \rightarrow H \ (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \underline{v} +_v \underline{w}$$

$$\cdot_H : \mathbb{R} \times H \rightarrow H \ (h, \underline{v}) \mapsto h \cdot_v \underline{v}$$

Per semplicità d'ora in poi ometteremo i pedici, quindi ora dimostriamo che $(H, +, \cdot)$ sia sottospazio vettoriale:

- $(H, +)$ gruppo abeliano

$$\text{Commutativa: } \underline{v} +_h \underline{w} = \underline{v} +_v \underline{w} = \underline{w} +_v \underline{v} = \underline{w} +_h \underline{v}$$

Associtività: IDEM

Neutro: $\underline{v} \cdot 0 = \underline{0} \in H$ Poiché stabile

$$\text{Opposto: } (-1)\underline{v} = -\underline{v}$$

- $1 \cdot_h \underline{v} = 1 \cdot_v \underline{v} = \underline{v}$
- Distributività 1: DA FARE
- Distributività 2: DA FARE

IL VETTORE NULLO C'È SEMPRE!!!

3.5.1 SottoSpazi Banali

D'ora in poi indicheremo i sottospazi con \leq , esistono sempre due sottospazi banali:

$$1) (\{\underline{0}, +, \cdot\}) \ \{\underline{0}\} \leq V$$

$$2) V \leq V \text{ Estremamente banale}$$

DA CHEKKARE: Ricordare anche che l'unico sottospazio finito possibile è $\{\underline{0}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = \{\underline{0}\}$

3.5.2 Esempi

Per dimostrare che un insieme sia sottospazio bisogna sempre verificare che sia **non vuoto, stabile rispetto a + e ·**.

R^3

$$H_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y\}$$

1

Non vuoto: banale

Stabile +:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Rispetta le proprietà poiché $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ essendo $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$

Stabile ·:

$$h(x_1, y_1, z_1) = (hx_1, hy_1, hz_1)(hx_1 = hy_1)$$

$R_{2,2}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathbb{R}^2$$

Questo insieme non è sottospazio vettoriale poiché non è stabile +:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin$$

R^3

$$H = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y^2\} \leq R^3$$

Non è lineare quindi molto probabilmente non è sottospazio:

$$\textbf{Controesempio: } (2, 4, 0) + (3, 9, 0) = (5, 15, 0) \textbf{ MA } 5 = 15 \neq 5^2$$

R^3

$$H = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 1\} \leq R^3$$

Non è omogeneo quindi molto probabilmente non è sottospazio:

$$\textbf{Controesempio } (1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1) \textbf{ MA } 1 + 0 + 1 \neq 1$$

$$R_2x \leq R_3x \leq \dots \leq Rx$$

$$\{p(x) \in R_4x / \text{grad} p(x) = 3\}$$

Il neutro ha necessariamente grado diverso da 3 quindi non può essere sottospazio

¹Truchetto per gli esercizi: se un sottospazio è costituito da un'equazione ed è lineare ed omogenea quasi sempre è sottospazio caso contrario no

•

$$\{p(x) \in R_4x / \text{grad} p(x) = 3 \text{ oppure } \text{grado } p(x) = 0\}$$

Ora ammette neutro ma non è comunque stabile poiché $(x^3 + 3) + (-x^3 + 5) = 8 \neq H$

•

$$\{P(x) \in Rx / p(-x) = p(x)\}$$

Stiamo considerando tutti i polinomi pari poiché $-x^{n_{\text{pari}}} = x^n$

È sottospazio poiché la somma tra pari rimane pari, idem il prodotto.

Caso particolare

$$\{(0, x) / x \in \mathbb{R}\} \cup \{(y, 0) / y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Questo non è sottospazio vettoriale poiché non è stabile rispetto al $+$ poiché $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin$

Però presi singolarmente sono sottospazi ma la loro unione no.

4 Lezione 06 - 24-03-2023

4.1 Proprietà Sottospazio Vettoriale

la somma di n oggetti Siano $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W$ si ha $w_1 + w_2 \in W \Rightarrow$

sottospazi vettoriali Sia \mathbb{L} una famiglia di sottospazi di V , l'intersezione dei sottospazi della famiglia \mathbb{L} è un sottospazio e si indica:

$$\bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$$

L'intersezione di una qualunque famiglia di sottospazi è un sottospazio.

Dimostriamolo:

Neutro: Il neutro è un elemento comune, quindi è sempre contenuto.

Stab +: Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L \Rightarrow \forall L \in \mathbb{L} \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$

Stab \cdot : Siano $\underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L, h \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall L \in \mathbb{L} \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$

4.2 Sottospazio Generato

Sia $S \subseteq V$, indicheremo con $\langle S \rangle$ il **sotto spazio generato da S**.

$$\langle S \rangle = \bigcap_{L \in \mathbb{L}_s} L$$

In altri termini: è il più piccolo sottospazio rispetto all'intersezione.

4.2.1 Esempi:

- $\langle H \rangle = H$ SEMPRE!
- $\langle \{0\} \rangle = \{0\}$
- $\langle V \rangle = V$
- $\langle \emptyset \rangle = 0$ Singleton dell'elemento neutro, poiché appartiene ad ogni elemento.

$S = H \cup K$ con $H, K \leq V$

$$\langle H \cup K \rangle = H + K = \{ \underline{h} + \underline{k} / \underline{h} \in H, \underline{k} \in K \}$$

Dim: Come sempre per dimostrare l'uguaglianza dobbiamo dimostrare la doppia inclusione.

²È un concetto un po' strano, perché vuol dire somma normale (quindi caso 2), ma ricandoci che l'intersezione da il neutro (quindi caso 1)