

Algoritmi e Strutture Dati 2023-24

(M. Benerecetti)

Contents

1	Algoritmo di Conteggio	2
1.1	Algoritmo di conteggio 2	3
1.2	Algoritmo di conteggio 3	4
2	Algoritmo per calcolare una somma massima di una sottosequenza contigua	4
2.1	Algoritmo 2 per la somma massima di una sottosequenza contigua . .	5

1 Algoritmo di Conteggio

Descrivere un algoritmo che accetta come input un intero $N \geq 1$ e produce in output il numero di coppie ordinate $i, j \in \mathbb{N} \quad (i, j) : 1 \leq i \leq j \leq N$

Esempio:

- Input: $N=4$
- Output: 10 $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

```
1 Conta(N):  
2   ris = 0;  
3   for i=1 to N do  
4     for j=1 to N do  
5       if i<=j then  
6         ris = ris+1  
7   return ris
```

Andiamo a definire per ogni riga un costo:

- 2) Assegnamento costante, 1 operazione elementare
- 3) Al primo giro: Assegnamento + confronto (2 operazioni elementari), successivi giri: Incremento+confronto (2 operazioni elementari)
- 4) idem 3
- 5) 2 letture + confronto (3 operazioni elementari)
- 6) lettura+scrittura+assegnamento (3 operazioni elementari)
- 7) 1 operazione elementare

Ognuna di queste operazioni (righe) vengono eseguite più di una volta, quindi il costo sarà maggiore, andiamo ad esprimerlo:

- 2) Costo = 1 (fuori dal ciclo)
- 3) La testa viene eseguita $n + 1$ volte poiché abbiamo anche l'ultima operazione per uscire dal ciclo, quindi Costo = $2 * (n + 1) = 2 * \sum_{i=1}^{N+1} 1$
- 4) Questo for verrà ripetuto N volte poiché il corpo del for viene eseguito N volte, quindi il suo costo sarà:

$$\underbrace{2}_{\text{costo dell'operazione}} * \underbrace{\sum_{i=1}^N}_{\text{for esterno}} \underbrace{\sum_{j=1}^{N+1} 1}_{\text{for interno}}$$

- 5) L'if stando in entrambi i for avrà un costo di: $3 * \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} 1$

- 6) Questa operazione non ha un numero fisso di volte di esecuzione. Pertanto è necessario stabilirne un algoritmo per decretarne il numero. Pensandoci il numero di volte che questa operazione esegue dipende da N e dall' i fissate in precedenza. Calcolando, anche banalmente a mano, quante operazioni vengono eseguite ci troveremo con:

$N - i + 1$ volte che l'operazione viene eseguita.

- 7) Costo = 1 (fuori dal ciclo)

Dopo che viene effettuata l'analisi, possiamo andare a sommare tutti i risultati che abbiamo ottenuto in termini di unita (correggere accento) di tempo.

La funzione $T(n)$ e (correggere) la funzione che ci tiene traccia della complessità dell'algoritmo.

Andiamo semplicemente a sommare i nostri risultati di ogni riga.

$$T(n) = 1 + 2 * (N) + 2 * (N^2 + N) + 3 * \frac{N(N + 1)}{2}$$

Questo risultato è ottenuto semplificando le nostre sommatorie:

- 3) $2 * \sum_{i=1}^{N+1} 1 = 2 * (N + 1)$
- 4) $2 * \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^{N+1} 1 = 2 * \sum_{i=1}^N N + 1 = 2 * (N^2 + N)$
- 5) $3 * \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N 1 = 3 * \sum_{i=1}^N N = 3N^2$
- 6) $\sum_{i=1}^N (N - i + 1) = N - (k - 1)$ cioè ad ogni ciclo il numero delle volte che viene eseguita questa operazione diminuisce costantemente di 1 (cioè dipendente dal salire di i).

$$T(n) = \frac{13}{2}N^2 = \frac{9}{2}N + 4$$

Come vediamo questa funzione è quadratica, quindi cresce esponenzialmente nel tempo, molto pesante e lenta come funzione.

1.1 Algoritmo di conteggio 2

Dopo aver ottenuto i risultati dell'analisi sopra, possiamo dire che è sicuramente possibile semplificare il nostro codice in modo tale da far eseguire meno operazioni al nostro processore e quindi utilizzare meno tempo.

```

1 Conta(N):
2   ris = 0;
3   for i=1 to N do
4     ris = ris + (N-i+1)
5   return ris

```

Così facendo abbiamo semplicemente detto al nostro codice che deve sommare soltanto gli elementi che nel momento in cui i è fissato, sono \leq di se stesso.

Così facendo si dovrebbero eliminare molte operazioni inutili, analizziamo.

- 2) sempre 1 operazione
- 3) $2 * \sum_{i=1}^{N+1} 1$
- 4) $\sum_{i=1}^N 7 = 7 \cdot N$

Come possiamo osservare abbiamo eliminato il secondo for, dunque abbiamo eliminato la quadraticità, ora l'operazione a riga 4 viene eseguita solamente N volte, e il numero di operazioni semplici che esegue è fissato.

$$T(n) = 1 + 2(N + 1) + 7N + 1 = 9N + 4$$

1.2 Algoritmo di conteggio 3

Da come possiamo notare è possibile di nuovo semplificare l'ultima sommatoria della riga 4 dello scorso algoritmo.

Da

$$\sum_{i=1}^N N - i + 1 \rightarrow \sum_{i=1}^N i$$

Il risultato della sommatoria è lo stesso, se andiamo a semplificarlo.

$$\sum_{i=1}^N N - i + 1 = \sum_{i=1}^N i = \frac{N(N + 1)}{2}$$

```

1 Conta(N):
2   ris = 0
3   ris = ris + (N - i + 1)
4   return ris

```

In questo modo abbiamo eliminato qualsiasi ciclo e quindi il risultato sarà un numero fisso di operazioni.

- 1) 1 operazione
- 2) 5 operazioni elementari

$$T(n) = 5 + 1 = 6$$

In questo caso la funzione tempo per eseguire queste operazioni è costante, non dipende da nessun N , dunque è la migliore soluzione possibile per questo algoritmo.

2 Algoritmo per calcolare una somma massima di una sottosequenza contigua

Preso un array di n elementi, vorremmo provare a trovare la sottosequenza la cui somma di tutti i valori è massima.

Come fare? La soluzione più naïve possibile è effettuare 3 cicli for innestati:

```

1 int Max_seq_sum_1(int N, array a[])
2   maxsum = 0
3   for i=1 to N
4     for j=i to N
5       sum = 0
6       for k=i to j
7         sum = sum + a[k]
8       maxsum = max(maxsum,sum)
9   return maxsum

```

Come possiamo notare l'avere 3 for innestati ci fa avere una complessità computazionale di N^3 , comunemente rappresentato dalla formula della notazione asintotica $O(N^3)$.

2.1 Algoritmo 2 per la somma massima di una sottosequenza contigua

Come è facile notare, nel terzo for innestato c'è una ripetizione abbastanza inutile di operazioni che effettuiamo per andarci a sommare i valori delle sottosequenze. In particolare andiamo a ripetere scorrere più volte lo stesso numero di celle, solamente per trovare la sottosequenza poco più grande (a volte anche di una cella).

Gli stessi valori delle sottosequenze possono essere semplicemente trovati scorrendo avanti l'indice e sommando alla sequenza precedente il valore successivo. Analiticamente ci troveremmo che:

$$\sum_{k=i}^{j+1} a_k = a_{j+1} + \sum_{k=i}^j a_k$$

Il valore sum rimarrà inalterato, ma verrà solamente aggiornato del valore successivo.

Il codice si presenterà in questo modo:

```

1 int Max_seq_sum_1(int N, array a[])
2   maxsum = 0
3   for i=1 to N
4     sum = 0
5     for j=i to N
6       sum = sum + a[j]
7       maxsum = max(maxsum,sum)
8   return maxsum

```