

Calcolo delle probabilità e Statistica 2022-23

(A. Buonocore)

Indice

1	Lezione 01 - 06/03/2023	4
1.1	Il Gioco della Zara con 2 Dadi	4
2	Lezione 02 - 08/03/2023	6
2.1	Regola Moltiplicativa	6
2.1.1	Esempio Cartellini Camicie	6
2.2	Fattoriale	6
2.3	Coefficiente Binomiale	7
2.3.1	Proprietà del C.B. con esempi	7
2.4	Coefficiente Multinomiale	8
2.5	Problema del Contare	9
2.6	Disposizioni e Combinazioni	9
2.7	Disposizioni semplici/ripetizioni	9
2.7.1	Esempio di Disposizione	9
3	Lezione 03 - 13/03/2023	10
3.1	Permutazioni	10
3.2	Permutazioni con Ripetizioni	10
3.3	Esempi Permutazioni	10
3.4	Combinazioni Semplici	10
3.5	Combinazioni con Ripetizioni	11
3.6	Esempi	11
4	Lezione 04 - 15/03/2023	12
5	Lezione 05 - 16-03-2023	13
5.1	Definizioni simboli Insiemistici ed Eventi	13
5.2	Esempio Lancio Moneta 1	13
5.3	Esempio Lancio Moneta 2	13
5.4	Classi/Famiglie	14
5.5	Algebra e Sigma Algebra	14
5.5.1	Osservazioni	15
5.5.2	Casi Particolari	15
5.6	Proprietà (conseguenze)	15

6	Lezione 06 - 20/03/2023	16
6.1	SigmaAlgebra Generata (DA REVISIONARE)	16
6.1.1	Esempio	16
6.2	Probabilità di Laplace	16
6.3	Frequentista (Statistica)	17
7	Lezione 07 - 22-03-2023	18
7.1	Soggettività	18
7.2	Recap Probabilità	18
7.3	Proprietà Comuni	18
7.4	Impostazione Assiomatica	18
7.5	Conseguenze immediate degli assiomi	19
7.5.1	Teorema 01	19
7.5.2	Teorema 02	19
7.5.3	Teorema 03	20
7.5.4	Teorema 04	20
7.5.5	Teorema 05	20
8	Lezione 08 - 23/03/2023	21
8.1	Recap	21
8.2	Spazi di Probabilità Finiti	21
8.3	Spazi Equiprobabili finiti	21
8.4	Spazi di Probabilità Numerabili	22
8.5	Spazio di Probabilità infiniti non Numerabili (da rivedere)	22
8.6	Esempi Spazi di Probabilità Numerabili	22
8.6.1	Esempio 01	22
8.6.2	Esempio 02	23
8.7	Eventi non Incompatibili	23
8.7.1	Teorema 06	23
8.7.2	Teorema 07	23
8.7.3	Teorema 08 (Caso Generale)	24
9	Lezione 09 - 27-03-2023	25
9.1	Problema delle Concordanze (formula inclusione-esclusione)	25
9.1.1	Probabilità di avere almeno 1 concordanza	25
9.1.2	Probabilità 0 concordanze	27
9.1.3	Probabilità di avere esattamente K concordanze	27
9.2	Proseguimento Teoremi Eventi non Incompatibili	27
9.2.1	Teorema 09	27
9.2.2	Teorema 10 (Disuguaglianza di Boole) [DA RIVEDERE UN PO']	28
9.3	Eventi quasi Impossibili/Certi	28
9.3.1	Dimostrazione	28
10	Lezione 10 - 29/03/2023	29
10.1	Variabile Aleatoria	29
10.2	Lancio moneta un numero infinità di volte	29

11 Lezione 11 - 03/04/2023	31
11.1 Indipendenza	31
11.1.1 Esempio Carte	31
11.1.2 Esempio Dado	31
11.2 Conseguenze Indipendenza	32
11.3 Indipendenza tra n Eventi	32
11.3.1 Caso Particolare	32
11.4 Condizionamento	32
12 Lezione 12 - 12/04/2023	33
12.1 Relazione Indipendenza e Condizionamento	33
12.2 Probabilità Composta	33
12.2.1 Estensione a 3 casi	33
12.2.2 Estensione a n casi	34
12.2.3 Esempio	34
12.3 Teorema delle Alternanze	34
12.4 Teorema di Bayes (teorema causa ed effetto)	34
12.5 Esercitazione Prof. Caputo	35
12.5.1 Esercizio 01	35
12.5.2 Esercizio 02	35
13 Lezione 13 - 13/04/2023	36
13.1 Esempio Moneta	36
14 Lezione 14 - 14/04/2023	37
14.1 Proprietà della Controimmagine	37

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.

Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.

2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2 .

Possiamo rappresentare graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	$\xrightarrow{Z_2}$	2	3	4	5	6	7
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)		3	4	5	6	7	8
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)		4	5	6	7	8	9
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)		5	6	7	8	9	10
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)		6	7	8	9	10	11
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)		7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.

Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.

L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.

La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.

Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI**:

$$(f \text{ tondo}) \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.

Z_2^1 (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel seguente modo:

$$Z_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in \mathcal{R})

Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).

Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z_2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z_2} prende il nome di **SPETTRO**.

La possibilità di trovare un numero non appartenente a questo insieme è nulla.

¹Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distinguerlo da un eventuale Z_3 , ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabilità ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2 \text{OCCORRENZE DI } N}{\# \text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO**:

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiamo notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.

Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z = 2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z = 12)$$

$$\mathcal{P}(Z = 3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z = 11)$$

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z = 10)$$

$$\mathcal{P}(Z = 5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z = 9)$$

$$\mathcal{P}(Z = 6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z = 8)$$

$$\mathcal{P}(Z = 7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioè ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.

Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2 * \left(\frac{1}{36}\right) + 2 * \left(\frac{3}{36}\right) + 2 * \left(\frac{5}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2 * \left(\frac{2}{36}\right) + 2 * \left(\frac{4}{36}\right) + 1 * \left(\frac{6}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

²# indica la cardanaltà, è usato come sostituto di ||

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Regola Moltiplicativa

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * \dots * n_r$$

Dove $i = 1, 2, \dots, r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprocedura i -sima.

2.1.1 Esempio Cartellini Camicie

Vogliamo sapere quanti cartellini delle camicie dobbiamo fabbricare avendo i seguenti dati: 4 Taglie, 2 Foggie, 7 Colori.

Usando la regola moltiplicativa poniamo $r = 3$ avendo tre possibili varianti, $n_1 = 4$ per le taglie, $n_2 = 2$ per le foggie, $n_3 = 7$ per i colori, ora calcoliamo il totale:

$$n = n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 2 * 7 = 56 \quad \text{CARTELLINI}$$

2.2 Fattoriale

Il fattoriale di $n \geq 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precedenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{SE } n = 0 \\ n * (n - 1)! & \text{SE } n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{aligned} 6! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \\ \frac{13!}{11!} &= \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156 \\ \frac{n!}{(n-1)!} &= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \end{aligned}$$

2.3 Coefficiente Binomiale

Presi n e k con $k \leq n$, possiamo definire il coefficiente binomiale in questo modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{6^3 * 5}{2} = 3 * 5 = 15$$

2.3.1 Proprietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune proprietà del coefficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Proprietà 01

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\underset{\substack{\parallel \\ 0!=1}}{\cancel{5!}} * (5-5)!} = 1$$

Proprietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\cancel{4!}} * (5-4)!} = 5$$

Proprietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! * (12-4)!} = \frac{\cancel{12^3} * 11 * \cancel{10^5} * 9 * \cancel{8!}}{2 * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5 * 9 * 11 = 495 = \frac{12!}{8! * (12-8)!} = \binom{12}{8}$$

Proprietà 04 Se $k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{7}{3}$$

Proprietà 05 ($n = 6, k = 3$)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7 * \cancel{6} * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{3!} * \cancel{4!}} = 7 * 5 = 35 = 20 + 15 = \frac{2 * \cancel{3} * 4 * 5 * \cancel{6}}{\cancel{6} * \cancel{6}} + \frac{6^3 * 5 * \cancel{4!}}{2 * \cancel{4!}} = \frac{6!}{3! * 3!} + \frac{6!}{2! * 4!} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$

Un possibile uso del coefficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.

Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con cardinalità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{4^2 * 3 * 2!}{2 * 2!} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \quad \#T = 6$$

2.4 Coefficiente Multinomiale

Sia n un intero positivo e n_1, n_2, \dots, n_r interi tali che $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, possiamo scrivere il coefficiente multinomiale in questo modo:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_r!}$$

$$\binom{7}{2, 3, 2} = \frac{7!}{2! * 3! * 2!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3!}{4 * 3!} = 210 \quad (2 + 3 + 2 = 7)$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distinguere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezione.

2.6 Disposizioni e Combinazioni

Per ovviare al problema del contare andiamo a definire le seguenti classificazioni:

Disposizione: è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.

Possiamo suddividerla in:

Disposizione: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento

Disposizione Semplice: **non è ammessa** la ripetizione

Combinazioni: è una selezione dove l'ordinamento **non è IMPORTANTE**.

Possiamo suddividerla in:

Combinazioni: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento

Combinazioni Semplice: **non è ammessa** la ripetizione

2.7 Disposizioni semplici/ripetizioni

Per calcolare tutte le k -disposizioni con ripetizione di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Per calcolare tutte le k -disposizioni semplici di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

(n cardinalità dell'insieme, k la lunghezza della disposizione)

2.7.1 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili disposizioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme $S = \{c, a\}$, poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.

Quindi $n = \#S = 2$ e $k = 2$, allora:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c, c), (a, a), (c, a), (a, c)\}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c, a), (a, c)\}$$

3 Lezione 03 - 13/03/2023

3.1 Permutazioni

Ogni n-disposizione semplice è detta essere una permutazione degli n elementi di S (Possiamo considerare le permutazioni un caso speciale delle disposizioni semplici, cioè avviene quando $n = k$)

$$(se\ k = n) \quad P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{\underset{0!=1}{(n-n)!}} = n!$$

3.2 Permutazioni con Ripetizioni

Sia $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, Una n-selezione di S avente k_1 elementi uguali al primo elemento di S, k_2 elementi uguali al secondo elemento di S e così via fino a k_r è detta una (k_1, k_2, \dots, k_r) -permutazioni con ripetizioni.

Il numero di tutte le (k_1, k_2, \dots, k_r) -permutazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} (k_1 + \dots + k_r) = r$$

3.3 Esempi Permutazioni

$$S = \{A, I, O, S\} \#S = 4 \quad k = n = 4$$

Possiamo formare varie parole: OASI, SAIO, SOIA..., possiamo calcolarle:

$$P_4 = 4! = 24$$

Poniamo caso che vogliamo sapere le possibili combinazioni di *ARCANE*, possiamo notare che la *A* si ripete 2 volte, per calcolare dobbiamo usare:

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

il 2! si riferisce a quante volte appare la lettera *A*.

3.4 Combinazioni Semplici

Sia $k \leq n$, una k-combinazione semplice di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni semplici di S avente i medesimi elementi posti in differente ordine (in altri termini l'ordine di presentazione degli elementi è ininfluente).

Il numero di tutte le k-combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \quad (con\ k \leq n)$$

3.5 Combinazioni con Ripetizioni

Una k-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni con ripetizioni di S aventi i medesimi elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizioni di qualche elemento di S e l'ordine è ininfluente).

Il numero di tutte le k-combinazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$$

3.6 Esempi

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

4 Lezione 04 - 15/03/2023

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

5 Lezione 05 - 16-03-2023

5.1 Definizioni simboli Insiemistici ed Eventi

Begin	Algebra degli Insiemi	Logica degli Eventi
Ω	Insieme universo	Spazio Campione
A	Insieme	Evento
A^C	Complementare di A	Negato di A
$A \cup B$	Unione di A e B	OR degli eventi, deve verificarli almeno uno tra A e B
$A \cap B$	Intersezione tra A e B	AND degli eventi, devono verificarsi entrambi
$\bigcup_{k=1}^n A_k$	Unione finita	n verifica almeno una tra A_1, A_2, \dots, A_n
$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	””
$\bigcap_{k=1}^n A_k$	Intersezione finita	Si verifica se tutti gli eventi A_1, \dots, A_n si verificano
$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	””
\emptyset	Insieme Vuoto	Evento Impossibile
$A \cap B = \emptyset$	A e B sono disgiunti	Eventi Incompatibili
$A \subset B$	A contenuto in B	Il verificare di A implica il verificare di B
$\bigcup_k A_k = \Omega$	Ricoprimento disgiunto (partizione)	A_1, A_2, \dots, A_n eventi necessari

5.2 Esempio Lancio Moneta 1

Poniamo caso che vogliamo descrivere l'evento che al terzo lancio di una moneta esca Testa, per prima cosa scegliamo un spazio campione:

$$\Omega = \{T, C\}^N$$

Una moneta ha solo due casi, testa oppure croce, ora descriviamo che testa esca al terzo lancio:

$$T_3 = \{(w_1, w_2, \dots) \in \Omega : w_3 = "T"\}$$

abbiamo descritto questo evento tramite proprietà degli insiemi, nel caso volessimo esprimere lo stesso concetto ma per le croci ci basta fare il complemento:

$$T_3^C = C_3 = \{(w_1, w_2, \dots) \in \Omega : w_3 = "C"\}$$

5.3 Esempio Lancio Moneta 2

Poniamo invece di voler complicare le cose, voglia esprimere l'evento che escano due Testa prima di due Croci, chiamiamo questo evento A , questo evento ha infinite possibilità, facciamo alcuni esempi:

$$A_2 = T_1, T_2, \Omega$$

$$A_3 = C_1, T_2, T_3, \Omega$$

$$A_4 = T_1, C_2, T_3, T_4, \Omega$$

$$A_5 = C_1, T_2, C_3, T_4, T_5, \Omega$$

Possiamo fare alcune osservazioni, A_2, A_3 sono incompatibili, non possono verificarsi contemporaneamente, invece A_5 è incompatibile con A_2, A_3, A_4 . Possiamo esprimere il verificarsi dell'evento A in vari modi:

$$A = A_2 \cup A_3$$

$$A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$A = A_2 \uplus A_3 \uplus A_4$$

$$A = A_2 \uplus A_3 \uplus A_4 \uplus A_5$$

Possiamo esprimere questo evento A tramite **Unione Numerabile**:

$$A_n = \begin{cases} C_1, T_2, \dots, C_{n-2}, T_{n-1}, T_n & \text{n dispari inizia con una croce} \\ T_1, C_2, \dots, C_{n-2}, T_{n-1}, T_n & \text{n pari inizia con una testa} \end{cases} \Rightarrow A = \bigcup_{n=2}^{\infty} \text{è un evento}$$

5.4 Classi/Famiglie

Quando gli elementi di un insieme a sono a loro volta degli insiemi si usa per a la parola **classe**.

$$a = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$$

In particolare se Ω è un insieme, la classe di tutti i sottinsiemi di Ω si dice l'insieme delle parti di Ω e si indica con $P(\Omega)$.

Se Ω è un insieme e a è una classe di sottinsiemi di Ω tale che l'unione di essi ha come risultato Ω allora a è detta essere un **ricoprimento** di Ω .

Un ricoprimento a di Ω è detto essere una **partizione** di Ω se i suoi elementi a due a due disgiunti.

Esempio:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 7\}, \{7, 8, 9\}\} \text{ è un ricoprimento ma non una partizione}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\} \text{ è partizione poiché tutti gli insiemi sono disgiunti}$$

5.5 Algebra e Sigma Algebra

Preso un Ω spazio campione e un a (a tondo), classe non vuota di sottinsiemi di Ω allora:

$$a \text{ è un algebra} \Leftrightarrow$$

$$i) A \in a \Rightarrow A^C \in a \text{ (a è chiusa rispetto il complemento)}$$

$$ii) A_1, A_2 \in a \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in a \text{ (a è chiusa rispetto l'unione di due elementi)}$$

C'è un'anche una sua variante chiamata Sigma(numerabile) Algebra definita così:

$$a \text{ è una } \sigma\text{-algebra} \Leftrightarrow$$

$$i) uguale$$

$$ii) n \in N, A_n \in a \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in a$$

Riassumendo:

"Un'algebra è chiusa rispetto all'unione di due suoi elementi e rispetto al complemento."

"Una σ -algebra è chiusa rispetto all'unione numerabile di suoi elementi e rispetto al complemento."

5.5.1 Osservazioni

Posto $a = \{\{2, 3\}, \{6\}, \{4, 5\}\}$, osserviamo i seguenti esempi:

$$\begin{aligned}\{4, 5\} &\subseteq a \text{ SBAGLIATO} \\ \{4, 5\} &\in a \text{ CORRETTO} \\ \{\{4, 5\}\} &\subseteq a \text{ CORRETTO}\end{aligned}$$

5.5.2 Casi Particolari

Poniamo $A \subseteq \Omega$, si definisce **algebra(sigma) banale**, a posto come:

$$a = \{\emptyset, \Omega\}$$

È l'unica algebra a due elementi, ovviamente entrambe le proprietà sono banalmente dimostrate poiché:

$$\Omega^C = \emptyset$$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega \in a$$

Gli elementi \emptyset e Ω sono necessari per essere un **algebra**. Poniamo caso di un $a = \{A, A^c\}$ questa non è un algebra poiché $A \cup A^c = \Omega \notin a$, se aggiunssimo solo Ω non sarebbe rispettata la prima condizione poiché $\Omega^c = \emptyset \notin a$.

Ricapitolando:

$$a = \{A, A^c\} \text{ non è algebra} \quad a = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\} \text{ è algebra (sigma)}$$

Per contrapposizione la (sigma) algebra più grande è $P(\Omega)$, tutte le altre algebra(sigma) sono sottoinsiemi di $P(\Omega)$

5.6 Proprietà (conseguenze)

1. a è una algebra (sigma) $\Rightarrow \emptyset, \Omega \in a$ (come abbiamo osservato prima)
Tutti gli elementi dell'algebra banale devono essere presenti in ogni algebra(sigma).
2. L'unione finita di elementi di un algebra (sigma) appartiene comunque ad a
Per ii) abbiamo visto come l'unione si applica per due elementi, ma essendo \cup associativa nel caso di $n - elementi$ basta operarli a due a due e quindi portare questa proprietà fino a n elementi.
3. *Sigma algebra* \Rightarrow *Algebra* MA *Sigma algebra* $\not\Rightarrow$ *Algebra*
Questo poiché un'unione finita da 0 a $+\infty$ non appartiene a tutte le algebra, cose che invece accade con le sigma algebra.

6 Lezionie 06 - 20/03/2023

6.1 SigmaAlgebra Generata (DA REVISIONARE)

Sia C una classe su Ω , esiste una σ -algebra F che contiene ϕ ed è contenuta in tutte le σ -algebra che contengono ϕ .

Tale minima σ -algebra contenente C si dice **GENERATA DA** ϕ .

In primo luogo esiste, per ogni C , una σ -algebra che la contiene e l'insieme delle parti. Dopo di ciò:

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i \text{ con } i \in I$$

6.1.1 Esempio

Poniamo di lanciare due dadi onesti, assumiamo i possibili risultati:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{5, 6\}$$

Considerando la famiglia G in questo modo:

$$G = \{A, B\}$$

Possiamo considerare la σ -algebra generata da una famiglia:

$$\sigma(G)$$

Per trovarci gli atomi dobbiamo andare a intersercare tutte le possibili combinazioni tra A e B :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{6\} \\ A \cap B^C &= \{2, 4\} \\ A^C \cap B &= \{5\} \\ A^C \cap B^C &= \{1, 3\} \end{aligned}$$

Abbiamo trovato **4 atomi**, per ottenere tutto l'insieme dobbiamo andare a intersecare gli atomi a due a due:

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= \{\{6\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{5, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 4, 6\}, \\ &\quad \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega, \emptyset\} \\ &\quad \emptyset, \Omega \in \sigma(G) \text{ per come abbiamo dimostrato un paio di lezioni fa.} \end{aligned}$$

6.2 Probabilità di Laplace

Sia Ω è finito, ed un evento appartenente a una famiglia di eventi $E \in F$, allora la probabilità dell'evento E si può rappresentare nel seguente modo:

$$P_c(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

Questa è un ottima definizione ma solo se c'è simmetria.

6.3 Frequentista (Statistica)

Se un esperimento aleatorio E si ripete un numero numerabile di volte, possiamo considerare il rapporto:

$$n \in N \quad P_f(E) = \frac{n_E}{n}$$

n è il numero delle ripetizioni di E

n_E è il numero delle prove tra le quali E_n si è presentato.

Questa definizione però è molto approssimativa, quella più corretta e precisa è:

$$P_f(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n} \geq 0$$

7 Lezione 07 - 22-03-2023

7.1 Soggettività

La probabilità (soggettiva) di un evento è il prezzo p (compreso tra 0 e 1), che un individuo coerente ritiene "equo" pagare per ricevere 1 se l'evento A si verifica.

(Non sarà possibile con nessun insieme assicurarsi perdita o vincita certe).

Si fa uso di due principi:

equità) Sia A un evento sulla cui realizzazione scommettono due giocatori, di cui uno è il banco e l'altro è lo scommettitore. Supponiamo che spetti ad uno di essi, fissare la probabilità di A . Allora la scommessa è **equa** se al secondo giocatore è lasciata la possibilità di stabilire se fare il banco oppure lo scommettitore. (questo permette ad entrambi di non avere una vittoria/perdita certa).

coerenza) Non è possibile individuare un sistema di eventi che possa assicurare vantaggio/svantaggio all'individuo che pone le probabilità.

7.2 Recap Probabilità

Quindi riassumendo possiamo esprimere la probabilità tramite tre diverse definizioni:

- Classica/Laplace: Se c'è simmetria.
- Frequentistica/Statistica: Se l'esperimento si può ripetere infinite volte.
- Soggettiva: Quando l'esperimento si può eseguire una sola volta.

7.3 Proprietà Comuni

Sia A un evento, queste tre proprietà si verificano in tutte e tre le definizioni:

- $\mathbb{P}_{c,f,s}(A) \geq 0$
- $\mathbb{P}_{c,f,s}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}_{c,f,s}(A \cup B) = \mathbb{P}_{c,f,s}(A) + \mathbb{P}_{c,f,s}(B)$ **FINITA ADDITIVITÀ IMPORTANTE!!!**

7.4 Impostazione Assiomatica

Gli eventi sono sottoinsiemi di uno spazio Ω e formano una σ -algebra F :

- $F \neq \emptyset$
- $A \in F \Rightarrow A^C \in F$
- $\forall n \in F, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in F$

Una misura di probabilità sullo spazio Ω è una funzione $P : F \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $\forall A \in F, P(A) \geq 0$ (ma $< \infty$)
- $P(\Omega) = 1$
- se $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq F : (i \neq j) A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

La tripla (Ω, F, P) prende il nome di **spazio di probabilità**.

7.5 Conseguenze immediate degli assiomi

7.5.1 Teorema 01

Teorema 01: $P(\emptyset) = 0$

Dim:

Il vuoto è un evento in quanto complementare del certo. Inoltre il vuoto può essere visto come unione numerabile di insiemi vuoti (per una delle proprietà di indentità):

$$\emptyset = \emptyset \uplus \emptyset \emptyset \uplus \dots = \uplus_{n=1}^{\infty} \emptyset$$

Dall'assioma f) si ottiene allora:

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

e per l'assioma d) l'unico numero che soddisfa la precedente relazione è $P(\emptyset) = 0$

7.5.2 Teorema 02

Se $A_1 \in F, A_2 \in F, \dots, A_n \in F$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$ allora:

$$P(\uplus_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Dim:

Poniamo $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \dots, B_n = A_n$ e $B_{n+1} = B_{n+2} = \dots = \emptyset$ Ovviamente riesce $B_i \cap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$ per cui dall'assioma f) si ha:

$$P(\uplus_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

Dall'altra parte:

$$\begin{aligned} \uplus_{i=1}^{\infty} B_i &= B_1 \uplus B_2 \uplus \dots \uplus B_n \uplus B_{n+1} \uplus B_{n+2} \uplus \dots \\ &= (A_1 \uplus A_2 \uplus \dots \uplus A_n) \cup (\emptyset \uplus \emptyset \uplus \dots) \\ &= (A_1 \uplus A_2 \uplus \dots \uplus A_n) \uplus \emptyset \\ &= \uplus_{i=1}^n A_i \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) &= P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) + P(B_{n+1}) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + (0 + 0 + \dots) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$

La tesi segue da (i), (ii), (iii).

La misura di probabilità P è quindi anche finitamente additiva.

7.5.3 Teorema 03

$\forall A \in F, P(A^C) = 1 - P(A)$ Dim:

Per ogni $A \in F$ si ha $\Omega = A \cup A^C$ per cui essendo P finitamente additiva si ha:

$$P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

Ricordando l'assioma: $e) P(\Omega) = 1$ otteniamo infine:

$$1 = P(A) + P(A^C) \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$$

7.5.4 Teorema 04

$\forall A \in F, P(A) \leq 1$ Dim:

Dal precedente risultato e dall'assioma $d)$ discende immediatamente:

$$P(A) = 1 - P(A^C) \leq 1$$

7.5.5 Teorema 05

Se $A \in F$ e $B \in F$ sono tali che $A \subseteq B$ allora $P(A) \leq P(B)$. Dim:

Risulta allora:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^C) = (B \cap A) \uplus (B \cap A^C) = A \uplus (B \cap A^C)$$

in quanto dall'ipotesi $A \subseteq B$ si ha $B \cap A = A$.

Dalla finita additività di P e dall'assioma $d)$ si ha che:

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^C) \geq P(A)$$

8 Lezione 08 - 23/03/2023

8.1 Recap

Sia ϕ e la terna: (Ω, F, P) spazio di probabilità:

Assiomi:

- a) F non è vuota (algebra)
- b) F è stabile rispetto al complemento (algebra)
- c) F è stabile rispetto a $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (algebra)
- d) P è non negativa e finita
- e) $P(\Omega) = 1$
- f) P è qualcosa additiva

Teoremi:

- 1) $P(\emptyset) = 0$
- 2) P è finita additiva
- 3) $P[(A)^C] = 1 - P(A)$
- 4) $P(A) \leq 1$
- 5) P è monotona

8.2 Spazi di Probabilità Finiti

i) Posto $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$, $F = \mathbb{P}(\Omega)$, posto $i = 1, 2, \dots, n$ avremo:

$$\mathbb{P}(\{a_i\}) = p_i \quad \text{"probabilità di } \{a_i\}"$$

Bisognerà avere:

- 1) $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$
- 2) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

La probabilità di un qualsiasi evento A sarà dunque definita come la somma delle probabilità degli elementi di A .

8.3 Spazi Equiprobabili finiti

ii) Posto $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$, $F = \mathbb{P}(\Omega)$, basta porre:

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n$$

Per ogni evento A la probabilità sarà definita:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{n}$$

8.4 Spazi di Probabilità Numerabili

iii) $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$, $F = P(\Omega)$ sia $n \in N, p_n := P(a_n)$

1) $n \in N, p_n \geq 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

boh: $\sum_{n=0}^{\infty} h^n = \frac{1}{1-h}$

8.5 Spazio di Probabilità infiniti non Numerabili (da rivedere)

iv) $\#\Omega > \#N$

$$\Omega = (0, 1)$$

$$F = \{(a, b) : a < b, a, b \in [0, 1]\}$$

Questa cosa si dice **sigma algebra di Borel dell'intervallo 0,1**.

$$P[(a, b)] = \frac{1}{b-a} = b-a$$

8.6 Esempi Spazi di Probabilità Numerabili

8.6.1 Esempio 01

Si ponga lo scalare $\lambda > 0$ e $n \in \mathbb{N}_0$ definiamo:

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Per verificare che sia uno spazio di probabilità **numerabile**, dobbiamo verificare la 1) e la 2).

1) È banalmente verificata poiché sono tutte quantità positive:

$$e^{-\lambda} > 0, \quad n! > 0, \quad \lambda^n > 0$$

2) Basta verificare che la serie di termine generale p_n si somma a 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = 1$$

L'ultimo passaggio si ottiene ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione e^x .

8.6.2 Esempio 02

Si ponga, con $p \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, $p'_n = p(1 - p)n - 1$.

Procedendo come nell'esempio precedente, basta verificare che la serie di termini generale p'_n si somma a 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p'_n = \sum_{n=1}^{\infty} p(1 - p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} = p \sum_{m=0}^{\infty} (1 - p)^m = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = p \frac{1}{p} = 1$$

L'ultimo passaggio si ottiene ricordando la serie geometrica di ragione $h \in (-1, 1)$ si somma a $\frac{1}{1-h}$

8.7 Eventi non Incompatibili

8.7.1 Teorema 06

$\forall A \in F, \forall B \in F$ si ha:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(se A e B sono disgiunti allora abbiamo la finita additività).

Dim:

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$$

Inoltre dalla relazione:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \uplus A^C) = (B \cap A) \uplus (B \cap A^C)$$

si ricava, per la finita additività di P :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$$

$$P(B \cap A^C) = P(B) - P(A \cap B)$$

In definitiva:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Osservazione:

Se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ e il risultato coincide con la finita additività.

8.7.2 Teorema 07

$\forall A \in F, \forall B \in F$ e $\forall C \in F$ si ha:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$$

Dim:

Applicando le proprietà delle operazioni insiemistiche ed il risultato precedenti si ha:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P[(A \cap C) \cap (B \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P[(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

8.7.3 Teorema 08 (Caso Generale)

Se $A_i \in F$ per $i = 1, 2, \dots, n$ si ha:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Questo risultato è noto come **formula di inclusione-esclusione**.

(Mancano 2 teoremi che finisce di fare la lezione dopo)

9 Lezione 09 - 27-03-2023

9.1 Problema delle Concordanze (formula inclusione-esclusione)

Sia $n \in \mathbb{N}$ il numero dei cartoncini numerati da 1 ad n andiamo ad indicarli con k .

Si verifica una **concordanza** quando la i -esimo cartoncini porta i .

Esempio: se il quinto cartoncino riporta il numero 5 allora questa è una concordanza.

Vogliamo verificare tre casi:

- 1) Determinare la probabilità di avere 0 concordanze
- 2) Determinare la probabilità di avere almeno 1 concordanza
- 3) Determinare la probabilità di avere esattamente 1 concordanza

Definiamo un paio di boh:

$E_{k,n}$: "Esattamente k-concordanze"

$E_{0,n}$: "Nessuna Concordanze"

A : "Almeno una corcondanza"

$A^c = E_{0,n}$: Il negato di "almeno una corcondanza" è "nessuna ..."

C_i : "Concordanza alla chiamata i -esima"

9.1.1 Probabilità di avere almeno 1 corcondanza

Possiamo definire insiemisticamente **almeno una corcondanza**, nel seguente modo:

$$A : \bigcup_{i=1}^n C_i$$

almeno uno in insiemistica (tipo or) è: \cup

Ovviamente, nulla vieta che nella stessa effettuazione dell'esperimento si possono verificare due o più concordanze; pertanto, per esprimere la probabilità di A è necessario applicare la formula di inclusione-esclusione:

$$P(A) : \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(C_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(C_i \cap C_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(C_i \cap C_j \cap C_k) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(C_1 \cap \dots \cap C_n)$$

Dato che siamo troppo vaghi, andiamo a esprimere la probabilità dei vari termini tramite Laplace:

$$\mathbb{P}(C_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n * (n-1)!} = \frac{1}{n}$$

Il denominatore è $n!$ poiché sono tutte le possibili mischiate.

Il numeratore invece è $(n-1)!$ poiché abbiamo una posizione fissata e le altre $n-1$ libere.

Se vogliamo fare un esempio concreto se consideriamo $\mathbb{P}(C_1)$ quindi si verifica una concordanza al primo posto cioè quando alla prima alzata corrisponde il numero 1,

abbiamo la prima posizione bloccata (dalla concordanza) e le altre $n - 1$ posizioni con numeri liberi, possiamo generalizzare questo caso a tutti i numeri quindi ad i .
Proseguendo col secondo membro applichiamo lo stesso ragionamento:

$$\mathbb{P}(C_i \cap C_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{n * (n-1) * (n-2)!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Abbiamo applicato lo stesso ragionamento cioè, se consideriamo $P(C_1 \cap C_2)$ (ricordiamo che \cap vuol dire and), quindi abbiamo il numero 1 alla prima alzata e il numero 2 alla seconda alzata, quindi 2 posti occupati e $n - 2$ posti liberi.

Quindi possiamo applicare questo ragionamento con 1, 2, 3... n elementi.

Quindi andando a sostituire:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=i}^n 1 - \frac{(n-2)!}{n!} * \sum_{i=i}^n \sum_{j=i+1}^n 1 + \frac{(n-3)!}{n!} * \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=j+1}^n 1 + \dots + (-1)^{n+1} * \frac{(n-n)!}{n!}$$

Possiamo fare un paio di considerazioni:

$$\sum_{i=i}^n 1 = n$$

$$\sum_{i=i}^n \sum_{j=i+1}^n 1$$

Quest'ultimo possiamo considerarlo come le 2-selezioni senza ripetizioni (semplici) in cui non conta l'ordine quindi:

$$\sum_{i=i}^n \sum_{j=i+1}^n = \binom{n}{2}$$

Questo ragionamento possiamo applicare a tutte le sommatorie, quindi:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n} * n - \frac{(n-2)!}{n!} * \binom{n}{2} + \frac{(n-3)!}{n!} * \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(n-n)!}{n!}$$

Svogliamo i binomiale (aggiungo quadre per mantenere ordine):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n} - \left[\frac{(n-2)!}{n!} * \frac{n!}{2!(n-2)!} \right] + \left[\frac{(n-3)!}{n!} * \frac{n!}{3!(n-3)!} \right] + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(n-n)!}{n!}$$

Facciamo le varie semplificazioni:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Possiamo esprimere questa formula finale anche col simbolo di sommatoria:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n ((-1)^{i+1} * \frac{1}{i!})$$

Piccola considerazione:

cose sul numero di nepero ecc... da aggiungere

9.1.2 Probabilità 0 concordanze

Piccolo recap:

Siamo riusciti a ricavare la formula per verificare **la probabilità di avere almeno 1 concordanza**, da qui segue banalmente per come abbiamo detto prima cioè che la negazione di "almeno una" è "nessuna" la **la probabilità di avere 0 concordanze**:

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(E_{0,n}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

9.1.3 Probabilità di avere esattamente K concordanze

Indichiamo con:

$E_{k,n}$ l'evento che si presenti esattamente k concordanze.

$A_{k,n}$ l'evento che si verifichino concordanze nelle prime k e nessuna concordanze nelle $n - k$ chiamate.

Applicando la formula di Laplace otteniamo:

$$\mathbb{P}(A_{k,n}) = \frac{(n-k)! \cdot \mathbb{P}(E_{0,n-k})}{n!}$$

aggiungere discorso:

$$\mathbb{P}(E_{k,n}) = \binom{n}{k} \mathbb{P}(A_{k,n}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!} \mathbb{P}(E_{0,n-k}) = \frac{1}{k!} \mathbb{P}(E_{0,n-k}) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

9.2 Proseguimento Teoremi Eventi non Incompatibili

9.2.1 Teorema 09

Sia $A_n \in F, \forall n \in N$.

Per ogni intero k si ha:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) \leq \sum_{n=1}^k P(A_n)$$

Dim per induzione:

Poniamo la base induttiva $k = 2$, la relazione è vera, infatti da:

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^C)$$

per la finita additività di P si ottiene:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^C) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

L'ultimo passaggio deriva dall'essere:

$$A_2 \cap A_1^C \subseteq A_2$$

Supponiamo ora la tesi vera per $k - 1$ (passo induttivo):

$$P\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = P\left[\left(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) \cup A_k\right] \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) + P(A_k) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{k-1} P(A_n) + P(A_k) = \sum_{n=1}^k P(A_n)$$

La tesi è vera per il principio di induzione matematica.

9.2.2 Teorema 10 (Disuguaglianza di Boole) [DA RIVEDERE UN PO']

Sia $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si ha:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Dim:

Poniamo:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \cap A_1^c$$

$$B_3 = A_3 \cap (A_1^c \cap A_2^c)$$

...

$$B_n = A_n \cap (A_1^c \cap A_2^c \dots \cap A_{n-1}^c) = A_n \cap$$

9.3 Eventi quasi Impossibili/Certi

- Se $B \in \mathcal{F}$ è un evento per il quale riesce $\mathbb{P}(B) = 0$ diremo che esso è un evento **quasi impossibile**.
- Se $C \in \mathcal{F}$ è un evento per il quale riesce $\mathbb{P}(C) = 1$ diremo che esso è un evento **quasi certo**.

Differenziamo questi casi con il quasi poiché gli eventi impossibili sono rispettivamente \emptyset e Ω .

Un esempio di evento quasi impossibile è il lancio di una moneta un numero indefinito di volte, il cui risultato è sempre Testa.

- a) $\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A); \end{cases}$
- b) $\mathbb{P}(C) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A \cup C) = 1 \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A); \end{cases}$

9.3.1 Dimostrazione

A lezione non ha dimostrato ma su i suoi foglietti sì. (aggiungerli)

\mathcal{F}

\mathcal{L}

\mathcal{E}

10 Lezione 10 - 29/03/2023

10.1 Variabile Aleatoria

10.2 Lancio moneta un numero indefinito di volte

Poniamo uno spazio campione:

$$\Omega_2 = \{T, C\} \times \{T, C\} = \{T, C\}^2 = \{TC, TT, CC, CT\}$$

Queste sono 2-selezioni, possiamo estendere questo caso fino ad n :

$$\Omega_n = \{T, C\}^n = \{w = w_1 w_2 \dots w_n, i = 1, 2, \dots, n, w_i \in \{T, C\}\}$$

Nel caso nostro dobbiamo considerare l'infinito:

$$\Omega = \{T, C\}^\infty$$

Andiamo a considerare le varie possibilità:

$$\mathbb{P}(\{TTT\dots T\dots\}) = 0$$

$$\mathbb{P}(\{T\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\{TT\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(\{TTT\dots T^n\}) = \frac{1}{2^n}$$

Se consideriamo l'ultimo caso all'aumentare di n quindi delle teste il valore si avvicina sempre di più a 0, quindi il caso di tutte teste possiamo dire è praticamente zero.

Quindi ci verrebbe da dire che la probabilità di tutte teste sia il limite tendente a zero, **ma questo non è vero!**.

$$\mathbb{P}(\{TTT\dots T\dots\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{TTT\dots T\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$
$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{TTT\dots T\}\right)$$

Possiamo notare col il limite sia all'interno della probabilità quindi non possiamo affermare che vale quell'uguaglianza, però è intuitivamente corretto.

Poniamo una variabile aleatoria che assuma 2 valori in base al caso:

$$X_1 = \begin{cases} 0 & \text{Se esce } C = T^c \text{ al primo lancio} \\ 1 & \text{Se esce } T \text{ al primo lancio} \end{cases}$$

Poniamo di lanciare due volte la moneta e una volta esce testa e l'altra volta esce croce:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p \text{ complemento}$$

Con p indichiamo la probabilità che esca T ed è compresa tra 0,1 esclusi $p \in [0, 1]$.

La possibilità esce testa o che esca croce è la stessa quindi possiamo dire che sono **somiglianti**.

Poniamo il caso:

$n = 2$ $S_2 = X_1 + X_2$ (somma aleatoria) abbiamo 3 possibili output:

- $CC = 0 = (1-p)(1-p)$
- $CT, TC = 1 = 2p(1-p)$
- $TT = 2 = pp$

$n = 3$

11 Lezione 11 - 03/04/2023

11.1 Indipendenza

Due eventi $A, B \in \mathcal{I}$ si dicono **indipendenti** \Leftrightarrow :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

11.1.1 Esempio Carte

Da un mazzo di carte (francesi 52 carte) si estrae una carta, consideriamo questi eventi:

- A : "Esce un asso"
- B : "Esce una carta di cuori"

Per verificare l'indipendenza dobbiamo calcolare tre probabilità: $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B)$:

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}$
- $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52}$
- $\mathbb{P}(B) = \frac{13}{52}$

Andiamo a verificare:

$$\mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} * \frac{13}{52} = \frac{52}{52 * 52} = \frac{1}{52} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Siamo riusciti a verificare che **sono indipendenti**

11.1.2 Esempio Dado

Consideriamo il lancio di dado onesto, consideriamo i seguenti esempi:

- $A = \{5, 6\}$ Punteggio Alto
- $A = \{2, 4, 6\}$ Punteggio Pari

Andiamo a verificare l'indipendenza:

- $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6}$
- $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6}$
- $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} * \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$
- $A \cap B = \{6\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Anche in questo caso c'è **indipendenza**.

³Poiché c'è simmetria possiamo applicare Laplace

11.2 Conseguenze Indipendenza

Se A e B sono indipendenti allora:

- 1) A e B^c sono indipendenti
- 2) A^c e B sono indipendenti
- 3) A^c e B^c sono indipendenti

$$\text{Dim: } A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \uplus (A \cap B^c)$$

$$\mathbb{P}(A) \stackrel{\text{fin.add.}}{=} \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) \stackrel{\text{indipendenza}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)[1 - \mathbb{P}(B)] = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A^c)$$

11.3 Indipendenza tra n Eventi

Abbiamo visto l'indipendenza tra due eventi, andiamo a generalizzare.

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ sono indipendenti \Leftrightarrow

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) * \mathbb{P}(A_2) * \dots * \mathbb{P}(A_n)$$

11.3.1 Caso Particolare

Non è detto che l'indipendenza valga a coppia valga anche in totale (TODOscrivere meglio).

Poniamo

11.4 Condizionamento

Posto B un evento non quasi impossibile ($\mathbb{P}(B) > 0$) definiamo il condizionamento:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

12 Lezione 12 - 12/04/2023

12.1 Relazione Indipendenza e Condizionamento

Presi $A, B \in \mathcal{R}$ (indipendenti) con $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$ valgono le seguenti definizioni:

$$\text{a) } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\text{b) } \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

$$\text{c) } \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

⁴ **DIM:** $a \Rightarrow b \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$

$$a \Rightarrow b) \quad \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$$b \Rightarrow c) \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \stackrel{\text{b)}}{=} \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

$$c \Rightarrow b) \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) \stackrel{\text{c)}}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Riassumendo: Eventi indipendenti la probabilità condizionata è uguale alla probabilità senza condizionamento.

12.2 Probabilità Composta

Dalla definizione di probabilità condizionata segue la cosiddetta legge delle **probabilità composta**:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

Osservazioni:

La legge delle probabilità composte vale anche se $\mathbb{P}(B) = 0$.

Se c'è indipendenza si riduce a $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)$.

12.2.1 Estensione a 3 casi

Avendo definito per due valori possiamo come sempre associare a due a due:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(A|B \cap C)$$

Dim:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}[A \cap (B \cap C)] = \mathbb{P}(B \cap C)\mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(A|B \cap C)$$

⁴Nella scorsa lezione abbiamo definito la probabilità condizionata con $P_B(A)$ ma d'ora in poi useremo quest'altra $P(A|B)$

12.2.2 Estensione a n casi

12.2.3 Esempio

Consideriamo un'urna contenente 5 biglie numerate da 1 a 5, si estraggono "a caso" due biglie in sequenza senza rimetterle nell'urna (senza rimpiazzamento), calcoliamo la probabilità dei seguenti eventi:

A: "Escono due numeri pari"

B: "Escono due numeri dispari"

C: "Il secondo che esce è pari"

- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2|P_1) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ (sono dipendenti)
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(D_2|D_1) = \frac{3}{5} * \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
- Consideriamo l'evento C come l'intersezione di un evento qualsiasi e di pari alla seconda pescata: $C = \Omega \cap P_2 = (P_1 \cap P_2) \cup (D_1 \cap P_2)$
 $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(D_1 \cap P_2) = \frac{1}{10} + \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(P_2|D_1) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} * \frac{1}{2} = \frac{4}{10}$

12.3 Teorema delle Alternanze

Sia $\{H_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ una famiglia di eventi (al più numerabile) tali che: $\mathbb{P}(H_i) > 0, \forall i \in \mathbb{I}$.

Se $H_i \cap H_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e se $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} H_i = \Omega$.

Diremo che la famiglia $\{H_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ costituisce un **sistema completo di alternative per Ω**

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)$$

Dim:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap \bigcup_{i \in \mathbb{I}} H_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A \cap H_i) = \sum_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)$$

12.4 Teorema di Bayes (teorema causa ed effetto)

Sia $\{H_i\}_{i \in \mathbb{J}}$ un sistema di completo di alternative per Ω e sia A un evento tale che $\mathbb{P}(A) > 0$, allora vale che:

$$\forall i, j \mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j \in \mathbb{J}} \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}$$

Dim:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} * \frac{\mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(H_i)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)}$$

12.5 Esercitazione Prof. Caputo

12.5.1 Esercizio 01

Il 20% degli impiegati in azienda è laureato, di questi il 75% ha una posizione da supervisore, gli altri non laureati solo il 20% ha una posizione da supervisore.

Riassumiamo i dati:

- 20% laureati \rightarrow 75% supervisori
- 80% laureati \rightarrow 20% supervisori

Qual è la probabilità che scelto a caso un supervisori esso sia laureato?

Consideriamo i seguenti eventi:

- \mathbb{L} = "L'impiegato scelto a caso è un laureato"
- \mathbb{L}^c = "L'impiegato scelto a caso non è un laureato"
- \mathbb{S} = "L'impiegato scelto a caso è un supervisore"

Ci verrebbe naturale pensare all'intersezione (and) $\mathbb{P}(L \cap S)$ **MA È SBAGLIATO**.
La forma **corretta** è al seguente:

$$\mathbb{P}(L|S)$$

I laureati condizionati dall'essere supervisori, poiché noi sappiamo già che è supervisore.

Per usare Bayes abbiamo bisogno delle alternative cioè essere o non laureato:

$$\mathbb{P}(L) = \frac{20}{100} \quad \mathbb{P}(L^c) = \frac{80}{100}$$

Sempre per il teorema di Bayes l'unione di tutte le alternative deve essere certo (1):

$$\mathbb{P}(L^c) = \frac{20}{100} \cup \mathbb{P}(L^c) = \frac{80}{100} = \frac{100}{100} = \Omega$$

Ora possiamo calcolare la probabilità:

$$\mathbb{P}(L|S) = \frac{\mathbb{P}(S|L) * \mathbb{P}(L)}{(\mathbb{P}(S|L) * \mathbb{P}(L)) + (\mathbb{P}(S|L^c) * \mathbb{P}(L^c))} = \frac{\mathbb{P}(S|L) * \frac{20}{100}}{(\mathbb{P}(S|L) * \frac{20}{100}) + (\mathbb{P}(S|L^c) * \frac{80}{100})} =$$

Dalla traccia sappiamo che $\mathbb{P}(S|L) = 75\%$:

$$\frac{\frac{75}{100} * \frac{20}{100}}{\frac{75}{100} * \frac{20}{100} + \frac{20}{100} * \frac{80}{100}} = \frac{15}{31}$$

12.5.2 Esercizio 02

Lezione prossima (risolto da Buonocore)

13 Lezione 13 - 13/04/2023

13.1 Esempio Moneta

14 Lezione 14 - 14/04/2023

14.1 Proprietà della Controimmagine

Consideriamo:

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

$$s_1 \rightarrow f(s_1)$$

elenchiamo le sue proprietà:

$$1) f^{-1}(T) = \{f \in T\} = S$$

$$2) f^{-1}(\emptyset) = \{f \in \emptyset\} = \emptyset$$

$$3) B_1 \subseteq B_2 \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

Dim:

$$s \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(s) \in B_1 \Rightarrow f(s) \in B_2 \Rightarrow s \in f^{-1}(B_2)$$

$$4) f^{-1}(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} B_i) = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} f^{-1}(B_i)$$