

# Geometria 2022-23 (Trombetti)

## Indice

<b>1</b>	<b>Lezione 01 - XX/03/2023</b>	<b>2</b>
1.1	Definizioni di base . . . . .	2
1.1.1	Prodotto Cartesiano . . . . .	2
1.1.2	Coppie . . . . .	2
1.1.3	Operazione Interna . . . . .	2
1.1.4	Operazione Esterna . . . . .	2
1.1.5	Prodotto Scalare Standard . . . . .	2
1.1.6	Matrice in $\mathbb{R}$ . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Lezione 04 - 17/03/2023</b>	<b>3</b>
2.1	Spazi Vettoriali su $\mathbb{R}$ . . . . .	3
2.2	Esempi Spazi Vettoriali . . . . .	3
2.2.1	Spazio Vettoriale di una matrice di ordine $m,n$ . . . . .	3
2.2.2	Spazio Vettoriale polinomiale . . . . .	3
2.2.3	Spazio Vettoriale polinomiale di al più $n$ . . . . .	3
2.2.4	Spazio Vettoriale polinomiale di al più $n$ . . . . .	3
2.2.5	Spazio Vettoriale dei vettori geometrici in un punto $O$ . . . . .	3

# 1 Lezione 01 - XX/03/2023

## 1.1 Definizioni di base

### 1.1.1 Prodotto Cartesiano

Presi  $S, T \neq \emptyset$ , possiamo definire il prodotto cartesiano:

$$S \times T = \{(s, t) / s \in S, t \in T\}$$

$$S^2 = S \times S = \{(s, t) / s \in S, t \in T\}$$

Da non confondere con la definizione di diagonale:  $S^2 = S \times S = \{(s, s) / s \in S\}$ .

### 1.1.2 Coppie

La definizione di coppia è la seguente:

$$(s, t) = \{\{s, t\}, \{s\}\}$$

Negli insiemi l'ordine non conta  $\{s, t\} = \{t, s\}$ , invece nelle coppie è rilevante, infatti due coppie sono uguali se e solo sono ordinatamente uguali:

$$(s, t) = (s', t') \Leftrightarrow s = s', t = t'$$

Andiamo a dimostrare questa affermazione:

- DIM  $\Leftarrow$ : BANALE
- DIM  $\Rightarrow (s, t) = (s', t') \Leftrightarrow \{\{s, t\}, \{s\}\} = \{\{s', t'\}, \{s'\}\}$   
Ragioniamo per casi:

a SE  $s = t$ :

$$Sx: \{\{s, t\}, \{s\}\} \Rightarrow \{\{s, s\}, \{s\}\} \Rightarrow \{s\}$$

$$Dx: \{\{s', t'\}, \{s'\}\} \Rightarrow \{\{s', s'\}, \{s'\}\} \Rightarrow \{s'\}$$

b SE  $s \neq t$ :

Usiamo le definizioni di uguaglianza tra insiemi:

$$\{s\} = \{s'\} \Rightarrow s = s'$$

$$\{s, t\} = \{s', t'\} \wedge s = s' \Rightarrow t = t'$$

### 1.1.3 Operazione Interna

### 1.1.4 Operazione Esterna

### 1.1.5 Prodotto Scalare Standard

### 1.1.6 Matrice in R

## 2 Lezione 04 - 17/03/2023

### 2.1 Spazi Vettoriali su $\mathbf{R}$

Sia  $V$  un insieme non vuoto, definiamo due operazioni:

Interna  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  (somma vettoriale)

Esterna  $\cdot$  :  $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$  (scalare per un vettore)  $\mathbf{R}$  è campo

Posto  $(V, +, \cdot)$  si dice **spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$**   $\Leftrightarrow$

1.  $(V, +)$  è un gruppo abeliano, quindi:
  - Associatività
  - Commutatività
  - Neutro
  - Tutti gli elementi invertibili
2.  $\forall \underline{v} \in V$  tale che  $\underline{v} \cdot 1 = \underline{v}$  (associatività mista)
3.  $\forall h, k \in \mathbf{R}, \forall \underline{v} \in V$  tale che  $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
4.  $\forall h, k \in \mathbf{R}, \forall \underline{v} \in V$  tale che  $(h + k) \cdot \underline{v} = h \cdot \underline{v} + k \cdot \underline{v}$  (distrib. tra  $\cdot$  e  $+$  in  $\mathbf{R}$ )
5.  $\forall h, k \in \mathbf{R}, \forall \underline{v} \in V$  tale che  $h(\underline{v} + \underline{w}) = h \cdot \underline{v} + h \cdot \underline{w}$  (distrib. tra  $\cdot$  e  $+$  in  $V$ )

### 2.2 Esempi Spazi Vettoriali

#### 2.2.1 Spazio Vettoriale numerico di ordine $n$

Verifichiamo che  $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$  sia uno spazio vettoriale, ma prima facciamo un esempio:

$$(1, 2, 3) + (0, 1, 2) = (1, 3, 5) \quad 3(3, 2, 4) = (9, 6, 12)$$

Andiamo a verificare che sia spazio vettoriale:

1.  $(\mathbf{R}^n, +)$  gruppo abeliano:
  - \* Associatività e Commutatività banalmente ereditati da  $+$
  - \* Neutro:  $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$
  - \* Inverso:  $-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$
2. Banale eredità di  $\cdot$
3.  $(hk)(x_1, \dots, x_n) = (h k x_1, \dots, h k x_n) = h(k x_1, \dots, k x_n) = h(k(x_1, \dots, x_n))$
4. DA DIMOSTARE
5. DA DIMOSTARE

### **2.2.2 Spazio Vettoriale di una matrice di ordine $m,n$**

Possiamo considerare  $(M_{m,n}(R), +, \cdot)$  come una lunga riga, quindi si accomuna al caso precedente.

### **2.2.3 Spazio Vettoriale polinomiale**

### **2.2.4 Spazio Vettoriale polinomiale di al più $n$**

### **2.2.5 Spazio Vettoriale dei vettori geometrici in un punto $O$**