Calcolo delle probabilità e Statistica 2022-23
(A. Buonocore)

Indice

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.
Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.
2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2.
Possiamo rappresentiamo graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\xrightarrow{Z_2}$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.
Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.
L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, .., 6\} = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.
La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.
Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI:**

$$\text{(f tondo) } \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.
Z_2[1] (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel suguente modo:

$$Z_2 : \Omega \to \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in $\mathcal{R}$)
Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).
Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z2} prende il nome di **SPETTRO**.
La possibilità di trovare un numero non appartente a questo insieme è nulla.

[1]Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distunguirlo da un eventuale Z_3, ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabiltà ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2\text{OCCORRENZE DI N}}{\#\text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO:**

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1,3),(2,2),(3,1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiano notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.
Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z=2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z=12)$$

$$\mathcal{P}(Z=3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z=11)$$

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z=10)$$

$$\mathcal{P}(Z=5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z=9)$$

$$\mathcal{P}(Z=6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z=8)$$

$$\mathcal{P}(Z=7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioé ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.
Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2*(\frac{1}{36}) + 2*(\frac{3}{36}) + 2*(\frac{5}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2*(\frac{2}{36}) + 2*(\frac{4}{36}) + 1*(\frac{6}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazzione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

[2] # indica la cardanalità, è usato come sostituto di $\|$

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Regola Moltiplicativa

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * ... * n_r$$

Dove $i = 1, 2, ..., r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprecedura i-sima.

2.1.1 Esempio Cartellini Camicie

Vogliamo sapere quanti cartellini delle camicie dobbiamo fabbricare avendo i seguenti dati: 4 Taglie, 2 Foggie, 7 Colori.
Usando la regola moltiplicativa poniamo $r = 3$ avendo tre possibili varianti, $n_1 = 4$ per le taglie, $n_2 = 2$ per le foggie, $n_3 = 7$ per i colori, ora calcoliamo il totale:

$$n = n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 2 * 7 = 56 \ \ \textbf{CARTELLINI}$$

2.2 Fattoriale

Il fattoriale di $n >= 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precendenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 \ \ \text{SE} \ \ n = 0 \\ n * (n-1)! \ \ \text{SE} \ \ n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$
$$\frac{13!}{11!} = \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156$$
$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

2.3 Coifficiente Binomiale

Presi nek con $k <= n$, possiamo definire il cofficiente binomiale in questo modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{\cancel{6}^3 * 5}{\cancel{2}} = 3 * 5 = 15$$

2.3.1 Propietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune propietà del coifficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Propietà 01

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} * \underbrace{(5-5)!}_{\substack{\| \\ 0!=1}}} = 1$$

Propietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * \underbrace{(5-4)!}_{\substack{\| \\ 1}}} = 5$$

Propietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! * \underbrace{(12-4)!}_{\substack{\| \\ 8!}}} = \frac{\cancel{12}^3 * 11 * \cancel{10}^5 * 9 * \cancel{8!}}{\cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5{*}9{*}11 = 495 = \frac{12!}{8! * \underbrace{(12-8)!}_{\substack{\| \\ 4!}}} = \binom{12}{8}$$

Propietà 04 Se $k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{}{}$$

Propietà 05 $(n = 6, k = 3)$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7{*}\cancel{6}{*}5{*}\cancel{4!}}{\cancel{3!}{*}\cancel{4!}} = 7 * 5 = 35 = 20 + 15 = \frac{\cancel{2}{*}\cancel{3}{*}4{*}5{*}\cancel{6}}{\cancel{6}{*}\cancel{6}} + \frac{\cancel{6}^3{*}5{*}\cancel{4!}}{\cancel{2}{*}\cancel{4!}} = \frac{6!}{3!{*}3!} + \frac{6!}{2!{*}4!} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$

Un possibile uso del coifficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.
Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1,2,3,4\}$ con cardilinità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{\cancel{4}^2 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2} * \cancel{2!}} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\} \;\; \#T = 6$$

2.4 Coifficiente Multinomiale

Sia n un intero posi+tivo e $n_1, n_2 ... n_r$ interi tali che $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$, possiamo scrivere il coifficiente multinomilae in questo modo:

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * ... * n_r!}$$

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2! * 3! * 2!} = \frac{7 * 6 * 5 * \cancel{4} * \cancel{3!}}{\cancel{4} * \cancel{3!}} = 210 \quad (2+3+2=7)$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distungere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezioni.

2.6 Disposizioni e Combinazioni

Per ovviare al problema del contare andiamo a definire le seguenti classificazioni:

Disposizione: è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.
Possiamo suddividerla in:
Disposizione: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento
Diposizione Semplice: **non è amessa** la ripezioni

Combinazioni: è una selezione dove l'ordinamente **non è IMPORTANTE**.
Possiamo suddividerla in:
Combinazioni: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento
Combinazioni Semplice: **non è amessa** la ripezioni

2.7 Disposizioni semplici/ripetizioni

Per calcolare tutte le k-disposizioni con ripetizione di S usiamo questa formula:

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k$$

Per calcolare tutte le k-disposizioni semplici di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$$

(n cardinalità dell'insieme, k la lunghezza della disposizione)

2.7.1 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili di dispozioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme $S = \{c, a\}$, poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.
Quindi $n = \#S = 2$ e $k = 2$, allora:

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c,c),(a,a),(c,a),(a,c)\}$$
$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c,a),(a,c)\}$$

3 Lezione 03 - 13/03/2023

3.1 Permutazioni

Ogni n-disposizione semplice è detta essere una permutazione degli n elementi di S (Possiamo considerare le permutazioni un caso speciale delle disposizioni semplici, cioè avviene quando $n = k$)

$$(se\, k = n) \;\; P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{\underset{\substack{\| \\ 0!=1}}{(n-n)!}} = n!$$

3.2 Permutazioni con Ripezioni

Sia $n = k_1 + k_2 + ... + k_r$, Una n-selezione di S avente k_1 elementi uguali al primo elemento di S, k_2 elementi uguali al secondo elemento di S e cosi via fino a k_r è detta una $(k_1, k_2, ..., k_r)$-permutazioni con ripetizioni.
Il numbero di tutte le $(k_1, k_2, ..., k_r)$-permutazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * ... * k_r!} = \binom{n}{k_1, ..., k_r} \;\; (k_1 + ... + k_r) = r$$

3.3 Esempi Permutazioni

$$S = \{A, I, O, S\} \; \#S = 4 \; k = n = 4$$

Possiamo formare varie parole: OASI, SAIO, SOIA..., possiamo calcolarle:

$$P_4 = 4! = 24$$

Poniamo caso che vogliamo sapere le possibili combinazioni di $ARCANE$, possiamo notare che la A si ripete 2 volte, per calcore dobbiamo usare:

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

il 2! si riferisce a quante volte appare la lettera A.

3.4 Combinazioni Semplici

Sia $k <= n$, una k-combinazione semplice di S si ottine indentificando tutte le k-disposizioni semplici di S avente i medesimi elementi posti in differente ordine (in altri termini l'ordine di presentazione degli elementi è ininfluente).
Il numero di tutte le k-combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \;\; (con\, k <= n)$$

3.5 Combinazioni con Ripetizioni

Una k-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni con ripetizioni di S aventi i medesii elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizioni di qualche elemento di S e l'ordine è ininfluente).
Il numero di tutte le k-combinazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$$

3.6 Esempi

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

4 Lezione 04 - 15/03/2023

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

5 Lezione 05 - 16-03-2023

5.1 Definizioni simboli Insiemestici ed Eventi

Begin	Algebra degli Insiemi	Logica degli Eventi
Ω	Insieme universo	Spazio Campione
A	Insieme	Evento
A^C	Complementare di A	Negato di A
$A \cup B$	Unione di A e B	OR degli eventi, deve verificarli almeno uno tra A e B
$A \cap B$	Intersezione tra A e B	AND degli eventi, devono verificarsi entrambi
$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$	Unione finita	n verifica almeno una tra $A_1, A_2, ..., A_n$
$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	""
$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$	Intersezione finita	Si verifica se tutti gli eventi $A_1, ..., A_n$ si verificano
$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	""
$\emptyset$	Insieme Vuoto	Evento Impossibile
$A \cap B = \emptyset$	A e B sono disgiunti	Eventi Incompatibili
$A \subset B$	A contenuto in B	Il verificare di A implica il verificare di B
$\uplus_k A_k = \Omega$	Ricoprimento disgiunto (partizione)	$A_1, A_2, ..., A_n$ eventi neccessari

5.2 Esempio Lancio Moneta 1

Poniamo caso che vogliamo descrivere l'evento che al terzo lancio di una moneta esca Testa, per prima cosa scegliamo un spazio campione:

$$\Omega = \{T, C\}^N$$

Una moneta ha solo due casi, testa oppure croce, ora descriviamo che testa esca al terzo lancio:

$$T_3 = \{(w_1, w_2, ...) \in \Omega : w_3 = "T"\}$$

abbiamo descritto questo eveno tramite propietà degli insiemi, nel caso volessimo esprimere lo stesso concetto ma per le croci ci basta fare il comlemento:

$$T_3^C = C_3 = \{(w_1, w_2, ...) \in \Omega : w_3 = "C"\}$$

5.3 Esempio Lancio Moneta 2

Poniamo invecere di voler complicare le cose, voglia esprimere l'evento che escano due Testa prima di due Croci, chiamiamo questo evento A, questo evento ha infinite possibilità, facciamo alcuni esempi:

$$A_2 = T_1, T_2, \Omega$$

$$A_3 = C_1, T_2, T_3, \Omega$$

$$A_4 = T_1, C_2, T_3, T_4, \Omega$$

$$A_5 = C_1, T_2, C_3, T_4, T_5\Omega$$

Possiamo fare alcune osservazioni, A_2, A_3 sono incompatibili, non possono verificarci contemporaneamente, invece A_5 è incompatibile con A_2, A_3, A_4 . Possiamo esprimere il verificarsi dell'evento A in vari modi:

$$A = A_2 \cup A_3$$

$$A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$$
$$A = A_2 \uplus A_3 \uplus A_4$$
$$A = A_2 \uplus A_3 \uplus A_4 \uplus A_5$$

Possiamo esprimere questo evento A tramite **Unione Numberabile**:

$$A_n = \begin{cases} C_1, T_2, ..., C_{n-2}, T_{n-1}, T_n & \text{n dispari inizia con una croce} \\ T_1, C_2, ..., C_{n-2}, T_{n-1}, T_n & \text{n pari inizia con una testa} \end{cases} \quad \Rightarrow A = \bigcup_{n=2}^{\infty} \text{è un evento}$$

5.4 Classi/Famiglie

Quando gli elementi di un insieme a sono a loro volta degli insiemi si usa per a la parola **classe**.

$$a = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$$

In particolare se Ω è un insieme, la classe di tutti i sottinisiemi di Ω si dice l'insieme delle parti di Ω e si indica con $P(\Omega)$.
Se Ω è un insieme e a è una classe di sottinsimi di Ω tale che l'unione di essi ha come risultato Ω allora a è detta essere un **ricoprimento** di Ω.
Un ricoprimento a di Ω è detto essere una **partizione** di Ω se i suoi elementi a due a due disgiunti.
Esempio:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 7\}, \{7, 8, 9\}\} \quad \text{è un ricomprimento ma non una partizione}$$
$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\} \quad \text{è partizione poiché tutti gli insiemi sono disgiunti}$$

5.5 Algebra e Sigma Algebra

Preso un Ω spazio campione e un a (a tondo), classe non vuota di sottinsiemi di Ω allora:

$$a \text{ è un algebra} \Leftrightarrow$$
$$i) A \in a \Rightarrow A^C \in a \quad \text{(a è chiusa rispetto il complemento)}$$
$$ii) A_1, A_2 \in a \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in a \quad \text{(a è chiusa rispetto l'unione di due elementi)}$$

C'è un anche una sua variante chiamanta Sigma(numerabile) Algebra definita così:

$$a \text{ è una } \sigma\text{-algebra} \Leftrightarrow$$
$$i) uguale$$
$$ii) n \in N, A_n \in a \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in a$$

Riassumendo:
"Un'algebra è chiusa rispetto all'unione di due suoi elementi e rispetto al complemento."
"Una σ-algebra è chiusa rispetto all'unione numerabile di suoi elementi e rispetto al complemento."

5.5.1 Osservazioni

Posto $a = \{\{2,3\},\{6\},\{4,5\}\}$, osserviamo i seguenti esempi:

$$\{4,5\} \subseteq a \text{ SBAGLIATO}$$
$$\{4,5\} \in a \text{ CORRETTO}$$
$$\{\{4,5\}\} \subseteq a \text{ CORRETTO}$$

5.5.2 Casi Particolari

Poniamo $A \subseteq \Omega$, si definisce **algebra(sigma) banale**, a posto come:

$$a = \{\emptyset, \Omega\}$$

È l'unica algebra a due elementi, ovviamente entrambe le propietà sono banalmente dimostrate poiché:

$$\Omega^C = \emptyset$$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega \in a$$

Gli elementi $\emptyset$ e Ω sono neccessari per essere un **algebra**. Poniamo caso di un $a = \{A, A^c\}$ questa non è un algebra poiché $A \cup A^c = \Omega \notin a$, se aggiunssimo solo Ω non sarebbe rispettata la prima condizione poiché $\Omega^c = \emptyset \notin a$.
Ricapitolando:

$$a = \{A, A^C\} \ \textbf{non è algebra} \quad a = \{A, A^C, \emptyset, \Omega\} \quad \textbf{è algebra (sigma)}$$

Per contrapposizione la (sigma) algebra più grande è $P(\Omega)$, tutte le altre algebra(sigma) sono sottoinsiemi di $P(\Omega)$

5.6 Propietà (conseguenze)

1. a è una algebra (sigma) $\Rightarrow\ \emptyset, \Omega \in\ a$ (come abbiamo osservato prima)
   Tutti gli elementi dell'algebra banale devono essere presenti in ogni algebra(sigma).

2. L'unione finita di elementi di un algebra (sigma) appartiene comunque ad a
   Per *ii*) abbiamo visto come l'unione si applica per due elementi, ma essendo $\cup$ associativa nel caso di $n - elementi$ basta operarli a due a due e quindi portare questa propietà fino a n elementi.

3. $Sigma\, algebra \Rightarrow Algebra\ \ MA\ \ Sigma\, algebra \not\Leftarrow Algebra$
   Questo poiché un unione finita da 0 a $+\infty$ non appartiene a tutte le algebra, cose che invece accade con le sigma algebra.

6 Lezionie 06 - 20/03/2023

6.1 SigmaAlgebra Generata (DA REVISIONARE)

Sia C una classe su Ω, esiste una σ-algebra F che contiene ϕ ed è contenuta in tutte le σ-algebra che contengono ϕ.
Tale minima σ-algebra contenente C si dice **GENERATA DA ϕ**.
In primo luogo esiste, per ogni C, una σ-algebra che la contiene e l'insieme delle parti.
Dopo di ciò:

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i \text{ con } i \in I$$

6.1.1 Esempio

Poniamo di lanciare due dadi onesti, assumiamo i possibili risultati:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{5, 6\}$$

Considerando la famiglia G in questo modo:

$$G = \{A, B\}$$

Possiamo considerare la σ-algebra generata da una famiglia:

$$\sigma(G)$$

Per trovarci gli atomi dobbiamo andare a intersercare tutte le possibili combinazioni tra A e B:

$$A \cap B = \{6\}$$
$$A \cap B^C = \{2, 4\}$$
$$A^C \cap B = \{5\}$$
$$A^C \cap B^C = \{1, 3\}$$

Abbiamo trovato **4 atomi**, per ottenere tutto l'insieme dobbiamo andare a intersecare gli atomi a due a due:

$$\sigma(G) = \{\{6\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{5, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 4, 6\},$$
$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega, \emptyset\}\}$$
$$\emptyset, \Omega \in \sigma(G) \text{ per come abbiamo dimostrato un paio di lezioni fa.}$$

6.2 Probabilità di Laplace

Sia Ω è finito, ed un evento appartente a una famiglia di eventi $E \in F$, allora la probabilità dell'evento E si può rappresentare nel seguente modo:

$$P_c(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

Questa è un ottima definizione ma solo se c'è simmetria.

6.3 Frequentista (Statistica)

Se un esperimento aleatorio E si ripete un numero numerabile di volte, possiamo considerare il rapporto:

$$n \in N \quad P_f(E) = \frac{n_E}{n}$$

n è il numero delle ripetizioni di E
n_E è il numero delle prove tra le quali E_n si è presentato.
Questo definizione però è molto approsimativa, quella più corretta e precisa è:

$$P_f(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_E}{n} >= 0$$

7 Lezione 07 - 22-03-2023

7.1 Soggettività

7.2 Recap Probabilità

Quindi riassumento possiamo esprimere la probabilità tramite tre diverse definizioni:

- Classica/Laplace: Se c'è simmetria.
- Frequentistica/Statistica: Se l'esperimento si può ripetere infinite volte.
- Soggettiva: Quando l'esperimento si può eseguire una sola volta.

7.3 Impostazione Assiomatica

Gli eventi sono sottoinsiemi di uno spazio Ω e formano una σ-algebra F:

a) $F \neq \emptyset$

b) $A \in F \Rightarrow A^C \in F$

c) $\forall n \in F, \forall n \in N \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

Una misura di probabilità sullo spazio Ω è una funzione $P : F- > R$ tale che:

d) $\forall A \in F, P(A) >= 0 \quad$ (ma $< \infty$

e) $P(\Omega) = 1$

f) se$\{A_n : n \in N\} \subseteq F : (i \neq j)\ A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

La tripla (Ω, F, P) prende il nome di **spazio di probabilità**.

7.4 Conseguenze immediate degli assiomi

7.4.1 Teorema 01

Teorema 01: $P(\emptyset) = 0$
Dim:
Il vuoto è un evento in quanto complementare del certo. Inoltre il vuoto può essere visto come unione numerabile di insiemi vuoti (per una delle propietà di indentità):

$$\emptyset = \emptyset \uplus \emptyset\emptyset \uplus ... = \uplus_{n=1}^{\infty}\emptyset$$

Dall'assioma $f)$ si ottiene allora:

$$P(\emptyset) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + ...$$

e per l'assioma $d)$ l'unico numero che soddisfa la precedente relazione è $P(\emptyset) = 0$

7.4.2 Teorema 02

Se $A_1 \in F, A_2 \in F, ..., A_n \in F$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$ allora:

$$P(\uplus_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dim:
Poniamo $B_1 = A_1, B_2 = A_2, ..., B_n = A_n$ e $B_{n+1} = B_{n+2} = ... = \emptyset$ Ovviamente riesce $B_i \cap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$ per cui dall'assioma $f)$ si ha:

$$P(\uplus_{i=i}^{\infty} B_i) = \sum_{i=i}^{\infty} P(B_i)$$

Dall'altra parte:

$$\uplus_1^{\infty} B_i = B_1 \uplus B_2 \uplus ... \uplus B_n \uplus B_{n+1} \uplus B_{n+2} \uplus ...$$
$$= (A_1 \uplus A_2 \uplus ... \uplus A_n) \cup (\emptyset \uplus \emptyset \uplus ...)$$
$$= (A_1 \uplus A_2 \uplus ... \uplus A_n) \uplus \emptyset$$
$$= \uplus n = 1^n A_i$$

e:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) + P(B_{n+1}) + ...$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + ...$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + (0 + 0 + ...)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

La tesi segue da $(i), (ii), (iii)$.
La misura di probabilità P e quindi anche finitamente additiva.

7.4.3 Teorema 03

$\forall A \in F, P(A^C) = 1 - P(A)$ Dim:
Per ogni $A \in F$ si ha $\Omega = A \cup A^C$ per cui essendo P finitamente additivita si ha:

$$P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

Ricordando l'assioma: $e) P(\Omega) = 1$ otteniamo infine:

$$1 = P(A) + P(A^C) \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$$

7.4.4 Teorema 04

$\forall A \in F, P(A) <= 1$ Dim:
Dal precedente risultato e dall'assioma d) discende immediatamente:

$$P(A) = 1 - P(A^C) <= 1$$

7.4.5 Teorema 05

Se $A \in F$ e $B \in F$ sono tali che $A \subseteq B$ allora $P(A) <= P(B)$. Dim:
Risulta allora:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^C) = (B \cap A) \uplus (B \cap A^C) = A \uplus (B \cap A^C)$$

in quanto dall'ipotesi $A \subseteq B$ si ha $B \cap A = A$.
Dalla finita additività di P e dall'assioma d) si ha che:

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^C) >= P(A)$$

8 Lezione 08 - 23/03/2023

8.1 Recap

Sia ϕ e la terna: (Ω, F, P) spazio di probabilità:
Assiomi:

a) F non è vuota

b) F è stabile rispetto al complemento

c) F è stabile rispetto a $\cup_{n \in N}()$

d) P è non negativa e finita

e) $P(\Omega) = 1$

f) è qualcosa additiva

Teoremi:

1) $P(\emptyset) = 0$

2) P è finita additiva

3) $P[(\cdot)^C] = 1 - P(\cdot)$

4) $P(\cdot) <= 1$

5) P è monotona

8.2 Spazi di Probabilità Numerabili

iii) $\Omega = \{a_1, a_2, ...\}, F = P(\Omega)$ sia $n \in N, p_n := P(a_n)$

1) $n \in N, p_n >= 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

boh: $\sum_{n=0}^{\infty} h^n = \frac{1}{1-h}$

8.3 Spazio di Probabilità infiniti

iv) $\#\Omega > \#N$

$$\Omega = (0, 1)$$

$$F = \{(a, b) : a < b^a, b \in 0, 1\}$$

Questa cosa si dice **sigma algebra di barel dell'intervallo 0,1**.

$$P[(a, b)] = \frac{1}{b - a} = b - a$$

8.4 Eventi non Incompatibili

$\forall A \in F, \forall B \in F$ si ha:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(se A e B sono disgiunti allora abbiamo la finita additività).
Dim:

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$$

Inoltre dalla relazione:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \uplus A^C) = (B \cap A) \uplus (A^C)$$

si ricava, per la finita additività di P:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$$

$$P(B \cap A^C) = P(B) - P(A \cap B)$$

In definitiva:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Osservazione:
Se $A \cap B = \emptyset$ allora $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ e il risultato coincide con la finita additività.

8.5 Teorema 07

$\forall A \in F$, $\forall B \in F$ e $\forall C \in F$ si ha:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$$

Dim:
Applicando le propietà delle operazioni insiemistiche ed il risultato precedenti si ha:

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C)] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cup C]$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P[(A \cap C) \cap (B \cap C))]$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P[(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$$

8.6 Teorema 08

Se $A_i \in F$ per $i = 1, 2, ..., n$ si ha:

$$P(\bigcup_{i=i}^{n} A_i) = \sum_{i=i}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(Ai \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

Questo risultato è noto come **formula di inclusione-esclusione**.

8.7 Teorema 09

Sia $A_n \in F$, $\forall n \in N$.
Per ogni intero k si ha:

$$P(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) <= \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$$

Dim:
La relazione è vera per $k = 2$. Infatti da:

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^C)$$

per la finita additività di P si ottiene:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^C) <= P(A_1) + P(A_2)$$

L'ultimo passaggio deriva dall'essere:

$$A_2 \cap A_1^C \subseteq A_2$$

Supponiamo ora la tesi vera per $k - 1$:

$$P(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = P[(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \cup A_k] <= P(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n) + P(A_k) <=$$

$$<= \sum_{n=1}^{k-1} P(A_n) + P(A_k) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$$

La tesi è vera per il principio di induzione matematica.

8.8 Teorema 10

Sia $A_n \in F$, $\forall n \in N$. Si ha:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) <= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Dim:
Poniamo:

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 \cap A_1^C$$
$$B_3 = A_3 \cap (A_1^c \cap A_2^c)$$
$$...$$
$$B_n = A_n \cap (A_1^c \cap A_2^c ... \cap A_{n-1}^c) = A_n \cap$$

8.9 Test

$$\mathbb{P}$$
$$\mathbb{N}$$
$$\mathbb{F}$$