Geometria 2022-23 (Trombetti)

Indice

1 Lezione 01 - XX/03/2023

1.1 Definizioni di base

1.1.1 Prodotto Cartesiano

Presi $S, T \neq \emptyset$, possiamo definire il prodotto cartesiano:

$$SxT = \{(s,t)/s \in S, t \in T\}$$

$$S^2 = SxS = \{(s,t)/s \in S, t \in T\}$$

Da non confendere con la definizione di diagonale: $S^2 = SxS = \{(s,s)/s \in S\}$.

1.1.2 Coppie

La definizione di coppia è la seguente:

$$(s,t) = \{\{s,t\},\{s\}\}$$

Negli insiemi l'ordine non conta $\{s,t\} = \{t,s\}$, invece nelle coppie è rilevante, infatti due coppie sono uguali se e solo sono ordinatamente uguali:

$$(s,t) = (s',t') \Leftrightarrow s = s', t = t'$$

Andiamo a dimostrare questa affermazione:

- DIM $\Leftarrow$: BANALE
- DIM $\Rightarrow$ $(s,t) = (s',t') \Leftrightarrow \{\{s,t\},\{s\}\} = \{\{s',t'\},\{s'\}\}$
  Ragioniamo per casi:

  a SE $s = t$:

  $$\text{Sx:}\{\{s,t\},\{s\}\} \Rightarrow \{\{s,s\},\{s\}\} \Rightarrow \{s\}$$
  $$\text{Dx:}\{\{s',t'\},\{s'\}\} \Rightarrow \{\{s',s'\},\{s'\}\} \Rightarrow \{s'\}$$

  b SE $s \neq t$:
  Usiamo le definizioni di uguaglianza tra insiemi:

  $$\{s\} = \{s'\} \Rightarrow s = s'$$

  $$\{s,t\} = \{s',t'\} \wedge s = s' \quad \Rightarrow t = t'$$

1.1.3 Operaziona Interna

1.1.4 Operaziona Esterna

1.1.5 Prodotto Scalare Standard

1.1.6 Matrice in R

2 Lezione 04 - 17/03/2023

2.1 Spazi Vettoriali su R

Sia V un insieme non vuoto, definiamo due operazioni:

Interna $+ : VxV -> V$ (somma vettoriale)

Esterna $\cdot : RxV -> V$ (scalare per un vettore) R è campo

Posto $(V, +, \cdot)$ si dice **spazio vettoriale su R** $\Leftrightarrow$

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano, quindi:
   Associatività
   Commutatività
   Neutro
   Tutti gli elementi invertibili
2. $\forall \underline{v} \in V$ tale che $\underline{v} \cdot 1 = \underline{v}$ (associtività mista)
3. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
4. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $(h + k) \cdot \underline{v} = h \cdot \underline{v} + k \cdot \underline{v}$ (distrub. tra $\cdot$ e + in R)
5. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $h(\underline{v} + \underline{w}) = h \cdot \underline{v} + h \cdot \underline{v}$ (distrub. tra $\cdot$ e + in V)

2.2 Esempi Spazi Vettoriali

2.2.1 Spazio Vettoriale di una matrice di ordine m,n

Verifichiamo che $(R^n, +, \cdot)$ sia uno spazio vettoriale, ma prima facciamo un esempio:

$$(1, 2, 3) + (0, 1, 2) = (1, 3, 5) \qquad 3(3, 2, 4) = (9, 6, 12)$$

Andiamo a verificare che sia spazio vettoriale:

1. $(R^n, +)$ gruppo abeliano:
   * Associatività e Commutatività banalmente eraditati da +
   * Neutro: $\underline{0} = (0, 0, ..., 0)$
   * Inverso: $-(x_1, ..., x_n) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$
2. Banale ereditatà di $\cdot$
3. $(hk)(x_1, ..., x_n) = (hkx_1, ..., hkx_n) = h(kx_1, ..., kx_n) = h(k(x_1, ..., x_n))$

2.2.2 Spazio Vettoriale polinomiale

2.2.3 Spazio Vettoriale polinomiale di al più n

2.2.4 Spazio Vettoriale polinomiale di al più n

2.2.5 Spazio Vettoriale dei vettori geometrici in un punto O