

Calcolo delle probabilità e Statistica 2022-23

(A. Buonocore)

Indice

1	Lezione 01 - 06/03/2023	2
1.1	Il Gioco della Zara con 2 Dadi	2
2	Lezione 02 - 08/03/2023	4
2.1	Regola Moltiplicativa	4
2.1.1	Esempio Cartellini Camicie	4
2.2	Fattoriale	4
2.3	Coefficiente Binomiale	5
2.3.1	Proprietà del C.B. con esempi	5
2.4	Coefficiente Multinomiale	6
2.5	Problema del Contare	7
2.6	Disposizioni e Combinazioni	7
2.7	Disposizioni semplici/ripetizioni	7
2.7.1	Esempio di Disposizione	7
3	Lezione 03 - 13/03/2023	8
3.1	Permutazioni	8
3.2	Permutazioni con Ripetizioni	8
3.3	Esempi Permutazioni	8
3.4	Combinazioni Semplici	8
3.5	Combinazioni con Ripetizioni	9

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.

Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.

2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2 .

Possiamo rappresentare graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	$\xrightarrow{Z_2}$	2	3	4	5	6	7
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)		3	4	5	6	7	8
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)		4	5	6	7	8	9
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)		5	6	7	8	9	10
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)		6	7	8	9	10	11
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)		7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.

Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.

L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.

La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.

Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI**:

$$(f \text{ tondo}) \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.

Z_2^1 (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel seguente modo:

$$Z_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in \mathcal{R})

Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).

Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z_2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z_2} prende il nome di **SPETTRO**.

La possibilità di trovare un numero non appartenente a questo insieme è nulla.

¹Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distinguerlo da un eventuale Z_3 , ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabilità ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2 \text{OCCORRENZE DI } N}{\# \text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO**:

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiamo notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.

Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z = 2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z = 12)$$

$$\mathcal{P}(Z = 3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z = 11)$$

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z = 10)$$

$$\mathcal{P}(Z = 5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z = 9)$$

$$\mathcal{P}(Z = 6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z = 8)$$

$$\mathcal{P}(Z = 7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioè ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.

Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2 * \left(\frac{1}{36}\right) + 2 * \left(\frac{3}{36}\right) + 2 * \left(\frac{5}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2 * \left(\frac{2}{36}\right) + 2 * \left(\frac{4}{36}\right) + 1 * \left(\frac{6}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

²# indica la cardanaltà, è usato come sostituto di ||

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Regola Moltiplicativa

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * \dots * n_r$$

Dove $i = 1, 2, \dots, r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprocedura i -sima.

2.1.1 Esempio Cartellini Camicie

Vogliamo sapere quanti cartellini delle camicie dobbiamo fabbricare avendo i seguenti dati: 4 Taglie, 2 Foggie, 7 Colori.

Usando la regola moltiplicativa poniamo $r = 3$ avendo tre possibili varianti, $n_1 = 4$ per le taglie, $n_2 = 2$ per le foggie, $n_3 = 7$ per i colori, ora calcoliamo il totale:

$$n = n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 2 * 7 = 56 \quad \text{CARTELLINI}$$

2.2 Fattoriale

Il fattoriale di $n \geq 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precedenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{SE } n = 0 \\ n * (n - 1)! & \text{SE } n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{aligned} 6! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \\ \frac{13!}{11!} &= \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156 \\ \frac{n!}{(n-1)!} &= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \end{aligned}$$

2.3 Coefficiente Binomiale

Presi n e k con $k \leq n$, possiamo definire il coefficiente binomiale in questo modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{6^3 * 5}{2} = 3 * 5 = 15$$

2.3.1 Proprietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune proprietà del coefficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Proprietà 01

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\underset{\substack{\parallel \\ 0!=1}}{\cancel{5!}} * (5-5)!} = 1$$

Proprietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\cancel{4!}} * (5-4)!} = 5$$

Proprietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! * (12-4)!} = \frac{\cancel{12^3} * 11 * \cancel{10^5} * 9 * \cancel{8!}}{2 * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5 * 9 * 11 = 495 = \frac{12!}{8! * (12-8)!} = \binom{12}{8}$$

Proprietà 04 Se $k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{7}{3}$$

Proprietà 05 ($n = 6, k = 3$)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7 * \cancel{6} * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{3!} * \cancel{4!}} = 7 * 5 = 35 = 20 + 15 = \frac{2 * \cancel{3} * 4 * 5 * \cancel{6}}{\cancel{6} * \cancel{6}} + \frac{6^3 * 5 * \cancel{4!}}{2 * \cancel{4!}} = \frac{6!}{3! * 3!} + \frac{6!}{2! * 4!} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$

Un possibile uso del coefficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.

Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con cardinalità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{4^2 * 3 * 2!}{2 * 2!} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \quad \#T = 6$$

2.4 Coefficiente Multinomiale

Sia n un intero positivo e n_1, n_2, \dots, n_r interi tali che $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, possiamo scrivere il coefficiente multinomiale in questo modo:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_r!}$$

$$\binom{7}{2, 3, 2} = \frac{7!}{2! * 3! * 2!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3!}{4 * 3!} = 210 \quad (2 + 3 + 2 = 7)$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distinguere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezione.

2.6 Disposizioni e Combinazioni

Per ovviare al problema del contare andiamo a definire le seguenti classificazioni:

Disposizione: è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.

Possiamo suddividerla in:

Disposizione: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento

Disposizione Semplice: **non è ammessa** la ripetizione

Combinazioni: è una selezione dove l'ordinamento **non è IMPORTANTE**.

Possiamo suddividerla in:

Combinazioni: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento

Combinazioni Semplice: **non è ammessa** la ripetizione

2.7 Disposizioni semplici/ripetizioni

Per calcolare tutte le k -disposizioni con ripetizione di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Per calcolare tutte le k -disposizioni semplici di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

(n cardinalità dell'insieme, k la lunghezza della disposizione)

2.7.1 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili disposizioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme $S = \{c, a\}$, poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.

Quindi $n = \#S = 2$ e $k = 2$, allora:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c, c), (a, a), (c, a), (a, c)\}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c, a), (a, c)\}$$

3 Lezione 03 - 13/03/2023

3.1 Permutazioni

Ogni n-disposizione semplice è detta essere una permutazione degli n elementi di S (Possiamo considerare le permutazioni un caso speciale delle disposizioni semplici, cioè avviene quando $n = k$)

$$(se\ k = n) \quad P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{\underset{0!=1}{(n-n)!}} = n!$$

3.2 Permutazioni con Ripetizioni

Sia $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, Una n-selezione di S avente k_1 elementi uguali al primo elemento di S, k_2 elementi uguali al secondo elemento di S e così via fino a k_r è detta una (k_1, k_2, \dots, k_r) -permutazioni con ripetizioni.

Il numero di tutte le (k_1, k_2, \dots, k_r) -permutazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} (k_1 + \dots + k_r) = r$$

3.3 Esempi Permutazioni

$$S = \{A, I, O, S\} \#S = 4 \quad k = n = 4$$

Possiamo formare varie parole: OASI, SAIO, SOIA..., possiamo calcolarle:

$$P_4 = 4! = 24$$

Poniamo caso che vogliamo sapere le possibili combinazioni di *ARCANE*, possiamo notare che la *A* si ripete 2 volte, per calcolare dobbiamo usare:

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

il 2! si riferisce a quante volte appare la lettera *A*.

3.4 Combinazioni Semplici

Sia $k \leq n$, una k-combinazione semplice di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni semplici di S avente i medesimi elementi posti in differente ordine (in altri termini l'ordine di presentazione degli elementi è ininfluente).

Il numero di tutte le k-combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \quad (con\ k \leq n)$$

3.5 Combinazioni con Ripetizioni

Una k-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni con ripetizioni di S aventi i medesii elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizioni di qualche elemento di S e l'ordine è ininfluente).

Il numero di tutte le k-combinazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$$