Geometria 2022-23 (Trombetti)

Indice

1 Lezione 01 - XX/03/2023

1.1 Definizioni di base

1.1.1 Prodotto Cartesiano

Presi $S, T \neq \emptyset$, possiamo definire il prodotto cartesiano:

$$SxT = \{(s,t)/s \in S, t \in T\}$$

$$S^2 = SxS = \{(s,t)/s \in S, t \in T\}$$

Da non confendere con la definizione di diagonale: $S^2 = SxS = \{(s,s)/s \in S\}$.

1.1.2 Coppie

La definizione di coppia è la seguente:

$$(s,t) = \{\{s,t\},\{s\}\}$$

Negli insiemi l'ordine non conta $\{s,t\} = \{t,s\}$, invece nelle coppie è rilevante, infatti due coppie sono uguali se e solo sono ordinatamente uguali:

$$(s,t) = (s',t') \Leftrightarrow s = s', t = t'$$

Andiamo a dimostrare questa affermazione:

- DIM $\Leftarrow$: BANALE
- DIM $\Rightarrow$ $(s,t) = (s',t') \Leftrightarrow \{\{s,t\},\{s\}\} = \{\{s',t'\},\{s'\}\}$
  Ragioniamo per casi:

  a SE $s = t$:

  $$\text{Sx:}\{\{s,t\},\{s\}\} \Rightarrow \{\{s,s\},\{s\}\} \Rightarrow \{s\}$$
  $$\text{Dx:}\{\{s',t'\},\{s'\}\} \Rightarrow \{\{s',s'\},\{s'\}\} \Rightarrow \{s'\}$$

  b SE $s \neq t$:
  Usiamo le definizioni di uguaglianza tra insiemi:

  $$\{s\} = \{s'\} \Rightarrow s = s'$$

  $$\{s,t\} = \{s',t'\} \wedge s = s' \quad \Rightarrow t = t'$$

1.1.3 Operaziona Interna

1.1.4 Operaziona Esterna

1.1.5 Prodotto Scalare Standard

1.1.6 Matrice in R

2 Lezione 04 - 17/03/2023

2.1 Spazi Vettoriali su R

Sia V un insieme non vuoto, definiamo due operazioni:

Interna $+ : VxV -> V$ (somma vettoriale)

Esterna $\cdot : RxV -> V$ (scalare per un vettore) R è campo

Posto $(V, +, \cdot)$ si dice **spazio vettoriale su R** $\Leftrightarrow$

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano, quindi:
   Associatività
   Commutatività
   Neutro
   Tutti gli elementi invertibili
2. $\forall \underline{v} \in V$ tale che $\underline{v} \cdot 1 = \underline{v}$ (associtività mista)
3. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
4. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $(h + k) \cdot \underline{v} = h \cdot \underline{v} + k \cdot \underline{v}$ (distrub. tra $\cdot$ e $+$ in R)
5. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $h(\underline{v} + \underline{w}) = h \cdot \underline{v} + h \cdot \underline{v}$ (distrub. tra $\cdot$ e $+$ in V)

2.2 Esempi Spazi Vettoriali

2.2.1 Spazio Vettoriale numerico di ordine n

Verifichiamo che $(R^n, +, \cdot)$ sia uno spazio vettoriale, ma prima facciamo un esempio:

$$(1, 2, 3) + (0, 1, 2) = (1, 3, 5) \qquad 3(3, 2, 4) = (9, 6, 12)$$

Andiamo a verificare che sia spazio vettoriale:

1. $(R^n, +)$ gruppo abeliano:
   * Associatività e Commutatività banalmente eraditati da +
   * Neutro: $\underline{0} = (0, 0, ..., 0)$
   * Inverso: $-(x_1, ..., x_n) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$
2. Banale ereditatà di $\cdot$
3. $(hk)(x_1, ..., x_n) = (hkx_1, ..., hkx_n) = h(kx_1, ..., kx_n) = h(k(x_1, ..., x_n))$
4. DA DIMOSTARE
5. DA DIMOSTARE

2.2.2 Spazio Vettoriale di una matrice di ordine m,n

Possiamo considerare $(M_{m,n}(R), +, \cdot)$ come una lunga riga, quindi si accomuna al caso precedente.

2.2.3 Spazio Vettoriale polinomiale

2.2.4 Spazio Vettoriale polinomiale di al più n

2.2.5 Spazio Vettoriale dei vettori geometrici in un punto O

3 Lezione 05 - 22/03/2023

3.1 Spazi Vettoriali del Vettore Geometrico libero

3.2 Propietà Spazi Vettoriali

Preso $(V, +, \cdot)$ Spazio Vettoriali andiamo a definire le sugueni propietà:

1) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{z} \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w} = \underline{z} + (-\underline{w})$
   Dim:
   Sommiamo l'opposto di $\underline{w}$ ambi i membri:
   $$(\underline{v} + \underline{w}) + (-\underline{w}) = \underline{z} + (-\underline{w}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$$

2) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ **NEUTRO**

3) $\forall \underline{v} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$
   $$0 \cdot \underline{v} = \underline{0} = h \cdot \underline{0}$$
   Dim primo lato:
   $0 \cdot \underline{v} = (0 + 0)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} + 0 \cdot \underline{v} \Rightarrow 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$
   Dim secondo lato:
   $h \cdot \underline{0} = h \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = h \cdot \underline{0} + h \cdot \underline{0} \Rightarrow h \cdot \underline{0} = \underline{0}$

4) $\forall \underline{v} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$ **Legge annullamento del prodotto**
   $h\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow h = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}$
   Dim $\Leftarrow$: Vale per la 3)
   Dim $\Rightarrow$: $h \cdot \underline{v} = \underline{0}$
   Poniamo $h \neq 0$ e moltiplichiamo ambi i membri per h^{-1}:
   $h^{-1}(h \cdot \underline{v}) = h^{-1}\underline{0} \Rightarrow (h^{-1}h)\underline{v} = \underline{v}$

5) $h(-\underline{v}) = -(h\underline{v}) = (-h)\underline{v}$
   Dim: $(-h)\underline{v} = -(h\underline{v})$: Dobbiamo dimostare che sia opposto, quindi:
   $(-h)\underline{v} + h\underline{v} = 0$
   $(-h + h)\underline{v} = 0\underline{v}$
   Dim: $h(-\underline{v}) = -(h\underline{v})$
   $h(-\underline{v}) + h\underline{v} = h(-\underline{v} + \underline{v}) = h \cdot \underline{0} = \underline{0}$

6) $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ Corollario immediato

7) $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{z} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{z})$
   Dato che l'associatività si può sempre ridurre a due elementi, possiamo assumere la associatività generalizzata, questo ci permette di omettere le parentesi.

8) Lo stesso concetto del punto 7) si può applicare per la commutatività, quindi se vale per due elementi vale anche per n elementi, quindi possiamo ordinare gli elementi come ci pare.

9) Stesso concetto del punto $7)e8)$ vale anche per la distrubitività.

3.3 Proporzionalità

Presi $\underline{v}, \underline{w} \in V$ **si dicono proporzionali** $\Leftrightarrow$

$$\exists h \neq 0 \quad \underline{v} = h\underline{w}$$

La proporzionalità è una **Relazione di Equivalenza**, quindi valgono le tre propietà:

Riflessiva: $\underline{v} = 1\underline{v}$

Simmetrica: $\underline{v} = h\underline{w} \Rightarrow h^{-1}\underline{v} = \underline{w}$

Transitiva: $\underline{v} = h\underline{w}$ e $\underline{w} = k\underline{z} \Rightarrow \underline{v} = h(k\underline{z}) = (hk)\underline{z}$ $(h, k \neq 0)$

3.3.1 Esempi

Indicheremo con la tilde $\sim$ la proporzionalità.

R^3

$$(1,2,0) \sim (2,4,0)$$
$$(1,2,0) \not\sim (0,0,0)$$

Rx

$$1 + x^{40} \sim 2 + 2x^{40}$$

3.4 Combinazione Lineare

$\underline{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ $\Leftrightarrow$

$$\exists h_1, ..., h_n \in \mathbb{R} : \ \underline{v} = h_1 \cdot \underline{v}_1 + ... + h_n \cdot \underline{v}_n$$

(Sia i vettori $\underline{v}$ che gli scalari h possono essere diversi tra loro)

3.4.1 Esempi

R^3

$$(1,2,1) \text{ è combinazione lineare } (2,4,2) \text{ con } h = 2$$

R^2

$$(1,2) \text{ è combinazione lineare di } (1,1), (0,1)$$
$$(1,2) = 1(1,1) + 1(0,1)$$

R^3

$$(1,2,1) \text{ è combinazione lineare di } (1,2,0), (0,1,1), (1,1,1)?$$
$$(1,2,1) = x_1(1,2,0) + x_2(0,1,1) + x_3(1,1,1)$$

Come possiamo notare in questo caso non è immediato trovare la soluzione, quindi possiamo ricorrere a un sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} \qquad ... \\ 2x_1 \qquad = 1 \\ \qquad ... \end{cases} \begin{cases} \qquad ... \\ x_1 \qquad = \frac{1}{2} \\ \qquad ... \end{cases} \begin{cases} x_3 + \frac{1}{2} = 1 \\ \qquad ... \\ \qquad ... \end{cases} \begin{cases} \qquad x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 \qquad = \frac{1}{2} \\ \quad x_2 \qquad = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rx $1 + x + x^2$ è combinazione lineare di $1 + x, 1 + x^2$

$$1 + x + x^2 = h(1 + x) + k(1 + x^2) = kx^2 + hx + (h + k)$$

$$\begin{cases} h + k = 1 \\ h \quad\quad = 1\ Nonhasoluzione \\ \quad\quad k = 1 \end{cases}$$

3.5 SottoSpazi Vettoriali

Preso V spazio vettoriale, e $H \subseteq V$. Dim:

H stabile (chiuso) rispetto a $+$

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in H \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H$$

H stabile (chiuso) rispetto a $\cdot$

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H\ h\underline{v} \in H$$

H sottospazio vettoriale se è stabile + e $\cdot$

$+_H\ : HxH- > H\ (\underline{v}, \underline{w})- > \underline{v} +_v \underline{w}$

$\cdot_H\ : \mathbb{R}xH- > H\ (h, \underline{v})- > h \cdot_v \underline{v}$

Per semplicità d'ora in poi ometteremo i pedici, quindi ora dimostriamo che $(H, +, \cdot)$ sia sottospazio vettoriale:

- $(H, +)$ gruppo abeliano
  Commutativa: $\underline{v} +_h \underline{w} = \underline{v} +_v \underline{w} = \underline{w} +_v \underline{v} = \underline{w} +_h \underline{v}$
  Associtività: IDEM
  Neutro: $\underline{v} \cdot 0 = \underline{0} \in H$ Poiché stabile
  Opposto: $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$
- $1 \cdot_h \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
- Distrubitività 1: DA FARE
- Distrubitività 2: DA FARE

IL VETTORE NULLO C'È SEMPRE!!!

3.5.1 SottoSpazi Banali

D'ora in poi indicheremo i sottospazi con $\leq$, esistono sempre due sottospazi banali:

1) $(\{\underline{0}+, \cdot\})\ \{\underline{0}\}\leq V$

2) $V\leq V$ Estremamente banale

DA CHEKKARE: Ricordare anche che l'unico sottospazio finito possibile è $\{\underline{0}, \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\} = \{\underline{0}\}$

3.5.2 Esempi

Per dimostare che un insieme sia sottospazio bisogna sempre verificare che sia **non vuoto**, **stabile rispetto a + e ·**

R^3

$$H_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y\}$$

[1]

Non vuoto: banale

Stabile +:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Rispetta le propietà poiché $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ essendo $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$

Stabile ·:

$$h(x_1, y_1, z_1) = (hx_1, hy_1, hz_1)(hx_1 = hy_1)$$

$R_{2,2}$

$$\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\} \leq \mathbb{R}^2$$

Questo insieme non è sottospazione vettoriale poiché non è stabile +:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin$$

R^3

$$H = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y^2\} \leq R^3$$

Non è lineare quindi molto probabilmente non è sottospazio:

Controesempio: $(2, 4, 0) + (3, 9, 0) = (5, 15, 0)$ **MA** $5 = 15 \neq 5^2$

R^3

$$H = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 1\} \leq R^3$$

Non è omogeneo quindi molto probabilmente non è sottospazio:

Controesempio $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ **MA** $1 + 0 + 1 \neq 1$

$R_2x \leq R_3x \leq ... \leq Rx$

$$\{p(x) \in R_4x / \text{grado} p(x) = 3\}$$

Il neutro ha necessariamente grado diverso da 3 quindi non può essere sottospazio

[1] Truchetto per gli esercizi: se un sottospazio è costituito da un equazione ed è lineare ed omogenea quasi sempre è sottospazio caso contrario no

- $$\{p(x) \in R_4 x / \text{grado} p(x) = 3 \text{oppure grado } p(x) = 0\}$$
  Ora ammette neutro ma non è comunque stabile poiché $(x^3 + 3) + (-x^3 + 5) = 8 \neq H$

- $$\{P(x) \in Rx / p(-x) = p(x)\}$$
  Stiamo considerando tutti i polinomi pari poiché $-x^{n \text{pari} = x^n}$
  È sottospazio poiché la somma tra pari rimane pari, idem il prodotto.

Caso particolare
$$\{(0, x)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(y, 0)/y \in \mathbb{R}\} \underline{\leq} \mathbb{R}^2$$
Questo non è sottospazio vettoriale poiché non è stabile rispetto al + poiché $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin$
Però presi singolarmente sono sottospazi ma la loro unione no.

4 Lezione 06 - 24-03-2023

4.1 Propietà Sottospazio Vettoriale

a somma di n oggetti Siano $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n \in W$ si ha $w_1 + w_2 \in W \Rightarrow$

sottospazi vettoriali Sia $\mathbb{L}$ una famiglia di sottospazi di V, l'intersezione dei sottospazi della famiglia $\mathbb{L}$ è un sottospazio e si indica:

$$\bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$$

L'intersezione di una qualunque famiglia di sottospazi è un sottospazio.
Dimostriamolo:

Neutro: Il neutro è un elemento comune, quindi è sempre contenuto.

Stab +: Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L \Rightarrow \forall L \in \mathbb{L} \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$

Stab $\cdot$: Siano $\underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L, h \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall L \in \mathbb{L} \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$

4.2 Sottospazio Generato

Sia $S \subseteq V$, indicheremo con $< S >$ il **sotto spazio generato da S**.

$$< S >= \bigcap_{L \in \mathbb{L}_s} L$$

$$\mathbb{L}_s = \{W \leq V / S \subseteq W\}$$

Intersezione dei sottospazi di V che contengono S

In altri termini: è il più piccolo sottospazio rispetto all'intersezione.

4.2.1 Esempi

Poniamo $H \leq V$

- $< H >= H$ SEMPRE!
- $< \{\underline{0}\} = \{\underline{0}\}$
- $< V >= V$
- $< \emptyset >= 0$ Singleton dell'elemento neutro, poiché appartiene ad ogni elemento.

4.3 Casi di Sottospazi Generati

$S = H \cup K$ con $H, K \leq V$

$$< H \cup K >= H + K = \{\underline{h} + \underline{k} / \underline{h} \in H, \underline{k} \in K\}$$

Dim: Come sempre per dimostrare l'uguaglianza dobbiamo dimostare la doppia inclusione:

$$< H \cup K > \subseteq \textbf{ al contrario } H + K = \{\underline{h} + \underline{k} / \underline{h} \in H, \underline{k} \in K\}$$

non ho capito

Dimostriamo che sia spazio vettoriale:

Neutro

$$\underline{0} = \underline{0}^{\text{preso da H}} + \underline{0}^{\text{preso da K}}$$

Stabile +

$$(\underline{h} + \underline{k}) + (\underline{h}^{'} + \underline{k}^{'}) \in H + K$$
$$(h + h^{'}) + (k + k^{'})$$

Stabile ·

$$\alpha(\underline{h} + \underline{k}) = \alpha\underline{h} + \alpha\underline{k}$$

4.3.1 Esempio

$$H = \{(0, k)/x \in \mathbb{R}\} \quad K = \{(y, 0)/y \in \mathbb{R}\}$$
$$< H \cup K >= H + K = (0 + y, x + 0) = \mathbb{R}^2$$

4.4 Propietà Sottospazio Generato

Posto $H, K \leq V$, allora valgono le seguenti propietà:

- $H \oplus K$ **si dicono in somma diretta se** $H \cap K = \{\underline{0}\}$ (neutro)
- $H + K = V$ allora H, K si dicono supplementari
- $H \oplus K = V$ allora si dicono complementari (in altri termini devono essere in somma diretta e supplementari).[2]

4.4.1 Esempio

Posti $\{\underline{0}\}$ e V:

Somma diretta: $\{\underline{0}\} \oplus V = \{\underline{0}\} \cap V = \{\underline{0}\}$

Supplementari: $\{\underline{0}\} + V = V$

Complementare: Dato che è sia somma diretta che supplementare

In generale, $H \leq K \Rightarrow H + K = K$

Ponendoci in $\mathbb{R}^3[x]$ e presi $\mathbb{R}^2[x], \mathbb{R}^3[x] \leq \mathbb{R}^3[x]$, possiamo dire:

- NON Somma diretta: $\mathbb{R}^2[x] \oplus \mathbb{R}^3[x] \neq \{\underline{0}\}$
- Supplementari: $\mathbb{R}^2[x] + \mathbb{R}^3[x] = \mathbb{R}^3[x]$
- Complementari: no poiché manca la somma diretta.

[2] È un concetto un po' strano, perché vuol dire somma normale (quindi caso 2), ma ricordandoci che l'intersezione da il neutro (quindi caso 1)

Ponendoci invece $\mathbb{R}^4[x]$ e presi $\mathbb{R}^2[x], \mathbb{R}^3[x] \underline{\leq} \mathbb{R}^3[x]$, possiamo dire:

- NON Somma diretta: $\mathbb{R}^2[x] \oplus \mathbb{R}^3[x] \neq \{\underline{0}\}$
- NON Supplementari: $\mathbb{R}^2[x] + \mathbb{R}^3[x] = \mathbb{R}^3[x] \neq \mathbb{R}^4[x]$
- Complementari: no poiché manca la somma diretta.

4.5 Dipendenza/Indipendenza Lineare

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v} \in V$, sono detti **linearmente dipendenti** (o legati) $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \neq (0, 0, ..., 0) = \alpha_1 \underline{v_1} + ... + \alpha_n + \underline{v}_n = \underline{0}$$

La loro combinazione lineare deve essere il vettore nullo. Se tali scalari non esistono allora si dice che sono **linearmente indipendenti** (o liberi), l'unica soluzione valida è quella formata da tutti zero: $0\underline{v}_1 + ... + 0\underline{v}_n = \underline{0}$.

Se non sono dipendenti $\Rightarrow$ Sono indipendenti

4.5.1 Esempio

Posto $\mathbb{R}^2$ facciamo i seguenti esempi:

$(1,1), (1,0), (3,0)$ **sono dipendenti** $0(1,1) + (-3)(1,0) + 1(3,0) = (0,0)$

$(1,1), (1,0)$ **sono indipendenti** $x(1,1)+y(1,0) = (0,0)$ MA unica soluzione possibile (0,0) quindi so

4.6 Propietà dipendenza lineare

1) $\underline{0}$ dipende sempre da qualunque sistema

$$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + ... + 0\underline{v}_n$$

2) Sia $\underline{v}$ dipendente da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ e ciascun $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_m \Rightarrow \underline{v}$ dipende da $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_m$ [3]
Dim:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_n \underline{v}_n \text{ (dipende come da tesi)}$$
$$\forall i,\ \underline{v}_i = \beta_{i,1}\underline{w}_1 + ... + \beta_{i,m}\underline{w}_n \text{(ogni } v_i \text{ dipende a sua volta da un } w_i\text{)}$$
$$\underline{v} = \alpha_1(\beta_{i,1}\underline{w}_1 + ... + \beta_{i,m}\underline{w}_n) + ... + \alpha_n(\beta_{n,1}\underline{w}_1 + ... + \beta_{n,m}\underline{w}_n)$$
$$\underline{v} = \gamma_1 \underline{w_1} + ... + \gamma_m \underline{w}_m \text{(compattiamo)}$$

3) $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$

$$\underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + ... + 0\underline{v}_n$$

[3] Una specie di transitività della dipendenza

4) $\underline{v}, \underline{w}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \Rightarrow \underline{v} + \underline{w}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$
Dim:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_n \underline{v}_n$$

$$\underline{w} = \beta_1 \underline{w}_1 + ... + \beta_n \underline{w}_n$$

$$\underline{v} + \underline{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)\underline{v}_n$$

5) $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \Rightarrow h\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$

4.7 Relazione con la Generazione

Posti $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \in V$ allora:

$$< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n >= \{h_1 \underline{v}_1, ..., h_n \underline{v}_n / h_i \in R\} \textbf{ Copertura Lineare}$$

In altre parole:

$$\underline{v} \in < \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n > \text{ se } \underline{v} \text{ dipende dai vettori } \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$$

Dim sottospazio:

- Neutro: vale per la 1)
- Stabile +: vale per la 4)
- Stabile $\cdot$: vale per la 5)

4.7.1 Esempio

boh non si è capito nulla in classe

5 Lezione 07 - 29/03/2023

5.1 Sottospazi Equivalenti

Siano $S_1, S_2 \leq V$ si dicono **equivalente** se e solo se generano lo stesso sottospazio vettoriale quindi:

$$\Leftrightarrow < S_1 > = < S_2 >$$

($< S_1 >, < S_2 >$ si dicono sistema di generatori)

5.1.1 Esempi

Presi $\underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w}$ equivale a $\underline{v}, \underline{w}$?
Dobbiamo andare a verificare che ogni elemento di S_1 si possa scrivere come combinazione lineare di S_2, quindi dobbiamo andare a verificare la doppia inclusione.
In questo possiamo notare come vale l'equivalenza poiché, possiamo levare la doppia ripetizione di $\underline{v}$ dal S_1, e $\underline{0}$ essendo il neutro deve essere necessariamene presente per essere sottospazio, quindi vale la doppia inclusione.

Ponendoci in $\mathbb{R}^3$ consideriamo il seguente sottospazio:

$$< (1,2,1), (2,4,2), (0,0,1), (1,2,50) >$$

Possiamo notare come $(2,4,2)$ e $(1,2,50)$ sono combinazioni lineari, questo ci permette di eleminarli, quindi:

$$< (1,2,1), (0,0,1) > \quad \textbf{Base}$$

Questi due elementi sono indipendenti poiché l'unica combinazione possibile è $h = k = 0$.

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ come sempre possiamo considerare la matrice come una lunga riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 50 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 49 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni di riga (E_1, E_2, E_3, E_4) mantendono i sottospazi.
Le righe non nulla di una matrice sono sempre sistemi indipendenti.
Poniamoci in $\mathbb{R}_2[x]$ e prendeniamo:

$$< x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 4x + 2, 1, x^2 + 2x + 50 >$$

Possiamo consideraro anche solo i termini senza le incognite:

$$< (1,2,1), (2,4,2), (0,0,1), (1,2,50) >$$

Possiamo portarla in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 50 \end{pmatrix}$$

E possiamo portarla a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quello che ci viene alla fine è:

$$< x^2 + 2x + 1, 1 >$$

5.2 Osservazioni sulla in/dipendenza

5.2.1 Dipendenza

Sia $v_1, ..., v_n \in V$ [4] sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \exists i : \underline{v}_i$ dipende dai rimanenti.
Dim:
Per ipotesi sappiamo:

$$\exists h_1, ..., h_n \neq (0, 0, ...0) : h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

Supponiamo $h_1 \neq 0$ allora:

$$\underline{v_1} = h_1^{-1}(-h_2\underline{v}_2 + ... + (-h_n)\underline{v}_n)$$

Quindi $\underline{v}_1$ è combinazione lineare di $\underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ quindi dipende da questi vettori.
(vale anche il viceversa).

5.2.2 Indipendenza

Per scrivere l'indipendenza ci basta unicamente fare il negato della dipendenza:
$v_1, ..., v_n \in V$ sono indipendenti $\Leftrightarrow \forall \underline{v}_i : \underline{v}_i$ non dipende da: $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$

5.2.3 Propietà

Sia V spazio vettoriale, definiamo le seguenti propietà:

- Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ dipendono aggiungere $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n$ fa rimanere la dipendenza.
- Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n, \underline{w}_1, ..., \underline{w}_n$ sono indipendenti allora andando a restringere a $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ rimane indipendente.
- Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono indipendenti allora c'è **l'unicità di scrittura**.

$$\underline{v} = h_1\underline{v}_1, ..., h_n\underline{v}_n$$

$$\underline{v} = k_1\underline{v}_1, ..., k_n\underline{v}_n$$

$$\Rightarrow h_1 = k_1$$

[4] Consideriamo $n \geq 2$ perché se $n = 1$ i casi di riducono unicamente a: $\underline{v} \neq \underline{0}$ indipendente e $\underline{v} = \underline{0}$ dipendente

Dim:
Spostiamo tutto da un lato e raggrupiamo:

$$(h_1 - k_1)\underline{v}_1 + ... + (h_n - k_n)\underline{v}_n = \underline{0}$$

$$h_i - k_i = 0 \Leftrightarrow h_i = k_i$$

- Presi $W_1, W_2 \leq V$ e per ipotesi in somma diretta $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ e presi $\underline{0} \neq \underline{v} \in W_1$ e $\underline{0} \neq \underline{w} \in W_2$ allora $\underline{v}$ e $\underline{w}$ **sono indipendenti**.
Dim:

da aggiungere

- Generalizziamo il caso precendente considerando $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ cioé $W_1 \cap (W_2 + ... + W_n) = \{\underline{0}\}$ e prendiamo un vettore a loro corrispondente diversi da zero, diremo $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ che sono indipendenti.
Dim:
$$h_1\underline{v}_1, ..., h_n\underline{v}_n = \underline{0}$$
Spostiamo tutto da un lato:
$$\underset{\substack{\| \\ W_1}}{h_1\underline{v}_1} = \underset{\substack{\| \\ W_2+...+W_n}}{-h_2\underline{v}_2 + ... + (-h_n\underline{v}_n)} = \underline{0}$$
$$h_1\underline{v}_1 = \underline{0} \Rightarrow h_1 = 0$$

- La somma diretta implica l'unicità di scrittura

6 Lezione 08 - 31/03/2023 (da migliorare)

6.1 Boh

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

6.2 Spazio Vettoriale Finitamente Generato

Sia V spazio vettoriale si dice **finitamente generato** $\Leftrightarrow$

$$\exists \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \in V / V =< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n >$$

$$< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n > \textbf{ generatori}$$

Uno spazio vettoriale è finitamente generabile se ogni elemento di V può essere scritto come combinazione lineare di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$.

6.2.1 Esempi

- $$\mathbb{R}^3 =< (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) >$$
- $$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_{2,2} =< \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$$
- $$\mathbb{R}_2[x] =< 1, x, x^2 > (ax^2 + bx + c)$$
- $$\mathbb{R}[x] \text{ NON È FINITAMNETE GENERATO}$$

6.3 Base

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato [5], un sistema indipendente di generatori è detto base $\Leftrightarrow$
$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ hanno le suguenti propietà:

1) Sono indipendenti
2) $V =< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n >$

[5] D'ora in poi sarà standard e sarà abbreviato in S.V. F.G

6.3.1 Esempi

- $$\mathbb{R}^2 =< (1,0),(0,1),(0,0) > \text{ non è una base poiché no indipendente}$$

- $$\mathbb{R}^2 =< (1,0),(0,1) > \text{ base (canonica e riferimento)}$$

- $$\mathbb{R}^n =< (1,0,...,0),...,(0,0,...,1) > \text{ base (canonica)}$$

- $$\mathbb{R}_{2,2} =< \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > \text{ base (canonica e riferimento)}$$

- $$\mathbb{R}^2 =< (2,3),(1,2) > \text{ base (non canonica)}$$

- $$\mathbb{R}[x] =< x^2, x, 1 > \text{ base (canonica e riferimento)}$$

6.4 Riferimenti

Un **riferimento** è una **base ordinata**.
Negli esempi sopra un riferemento è una base con quell'ordine di elementi.

6.5 Base Estratta

Sia $V =< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n >$ da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ posso estrarre una base.
Poniamo $\mathbb{R}^2 = (1,0),(0,1),(2,3)$, possiamo levare $(2,3)$.
Supponiamo $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ dipendenti.
$\exists \underline{v}_i$ dipendoni dai rimanenti da $\underline{v}_{i+1}, ..., \underline{v}_n$

$$\mathbb{R} =< 1 > \text{ base}$$

$$\mathbb{R}^2 = (1,3),(0,1),(4,6),(5,1),(0,5),(5,6)$$

$$(1,3),(0,1) \text{ base estratta}$$

$(1,3),(0,1)$ è base estratta poiché $(4,6),(5,1),(0,5),(5,6)$ poiché sono tutti proposizionali e quindi si possono ricavare da $(1,3),(0,1)$

6.6 Lemma di Steinz (no dim)

Se ho m vettori linearmente indipendenti contenuti in un sottospazio generato da n vettori allora il numero di generatori è maggiore o uguale del numero di vettori indipendenti.
Sia V spazio vettoriale:

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m \text{ indip. } \in< \underline{w}_1, ..., \underline{w}_n >$$

$$m \leq n$$

6.7 Conseguenze Lemma di Steinz

- Tutte le basi hanno lo stesso numeri di elementi (vettori)
  Dim:
-

6.8 Dimensione

La dimensione di una spazio vettoriale V si scrive nel seguente modo $\dim(V)$ indica la **cardinalità di una base**.
Esempi:

- $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $\dim(\mathbb{R}_{n,m}) = n * m$
- $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$
- $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$
- $\dim(V) = n$
- $V = \{\underline{0}\}$ $\dim(V) = 0$

6.9 Proposizioni (con dim)

Sia V_n spazio vettoriale e n la sua dimensione, i seguenti enunciati sono tra loro equivalementi per $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$:

1) Base
2) Sistema di Generatori miniale
3) Sistema di Generatori di ordine minimo
4) Sistema indipendente massimale
5) Sistema indipendente di ordine massimo

7 Lezione 09 - 05/04/2023

7.1 Proposizioni

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, definiamo le seguenti proposizioni:

1) $W \leq V \Rightarrow W$ finitamente generato.
   Dim:
   Poniamo per assurdo che W non sia finitamente generabile, questo significa che esiste un $\underline{v}_1 \in W$ ne consegue: $< \underline{v}_1 > \neq W$.
   Quindi esiste un $\underline{v}_2 \in W \setminus < \underline{v}_1 >$ con $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ indipendenti, ne consgue sempre che $< \underline{v}_1, \underline{v}_2 > \neq W$ altrimenti sarebbe finitamente generabile.
   Quindi continuando con lo stesso procedimento arriviamo a trovare $n+1$ vettori indipendenti, arrivimo ad un assurdo, ne consegue che W **SIA FINITAMENTE GENERABILE.**

2) $\dim(W) \leq \dim(V)$

3) $W = V \Leftrightarrow \dim(W) = \dim(V) = n$
   Dim $\Rightarrow$: OVVIO
   Dim $\Leftarrow$:
   Prendiamo una base per W: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n$, essendo una base è indipendente sia per W e V, per i teoremi visti a lezione scorsa???, è base anche per V.

7.2 Corollari

Sia V S.V.F.G e $W \leq Z \leq V$, definiamo i seguenti corollari:

1) $W \leq Z \Rightarrow \dim(W) \leq \dim(Z)$

1) $W = Z \Rightarrow \dim(W) = \dim(Z)$

7.3 Teorema

Se $H_1, ..., H_n \leq V$ sono sottospazi in somma diretta allora:

$$(H_1 \oplus ... \oplus H_n) = \dim H_1, ... + \dim H_n$$

Dim:
Prendiano delle basi per ogni sottospazio:
H_1: $\underline{e}_{1,1}, ..., \underline{e}_{1,v_1}$ con $\underline{v}_1 = \dim(H_1)$ H_2: $\underline{e}_{2,1}, ..., \underline{e}_{2,v_2}$ con $\underline{v}_2 = \dim(H_2)$ ... H_n: $\underline{e}_{n,1}, ..., \underline{e}_{n,v_n}$ con $\underline{v}_n = \dim(H_n)$ (il primo pedice identifica lo spazio vettoriale, il secondo il numero dell'elemento)

7.4 Relazione di Grossman

È utile quando due sottospazi non sono in somma diretta.
Siano $H, K \leq V$ allora la loro dimensione è data da:

$$\dim H + K = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$$

La formula di solito si usa al contrario poiché calcolare dim$H \cap K$ è molto complesso.
Esempio: $<(1,0),(1,3)> \cap <(1,0),(4,5)> \neq <(1,0)>$ NON FARE ALL'ESAME la risposta corretta è $\mathbb{R}^2$.
Questo poiché: dim$H = 2$, dim$K = 2$, dim$H + K = 2$ quindi dim$H \cap K = 2$. **Dim:** DA INSERIRE

7.4.1 Esempio

$\mathbb{R}^3$ Poniamo caso $H =< (1,2,3),(1,2,1) >$ e $K =< (0,0,1),(1,1,0) >$ abbiamo che:

- dim$H$=2
- dim$K$=2
- dim$H + K$=$< (1,2,3), \cancel{(1,1,1)}, (0,0,1),(1,1,0) >= 3$
- dim$H \cap K = 1 =< (1,1,1) >$ (dalla relazione di Grossman)

$$< (1,1,1) > \leq H \cap K$$

8 Lezione 10 - 12/04/2023

8.1 Componenti

Sia V spazio vettoriale prendiamo un riferimento (base ordinata): $\mathbb{R} = (\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n)$, e prendiamo un vettore $\underline{v} \in V$ allora $\underline{v}$ si potrà scrivere come combinazione lineare:

$$\underline{v} = h_1\underline{e}_1 + ... + h_n\underline{e}_n$$

Chiamiamo i cofficienti h come **componenti**, più nello specifico:

$$(h_1, ..., h_n) \text{ n-pla delle componenti } \underline{v} \text{ nel riferimento } \mathbb{R}$$

8.1.1 Esempi

TODO: INSERIRE ESEMPIO

8.2 Cambiamento di Riferimento (Formula di Passaggio)

Presi due riferimenti vogliamo portare un vettore scritto come combinazione linere delle componenti del "vecchio" riferimento al "nuovo" riferimento.
Consideriamo:

$$\mathbb{R}_1 = (\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n) \text{ VECCHIO RIFERIMENTO}$$
$$\mathbb{R}_2 = (\underline{f}_1, ..., \underline{f}_n) \text{ NUOVO RIFERIMENTO}$$

Consideriamo un vettore $\underline{v}$ del vecchio riferimento:

$$\underline{v} = k_1\underline{e}_1 + ... + k_n\underline{e}_n$$

Come abbiamo visto prima le componenti di questo vettore sono: $(k_1, .., k_n)$
Cominciamo ad esperimere $\underline{e}_1, .., \underline{e}_n$ come combinazione lineare del nuovo riferimento:

$$\underline{e}_1 = h_{1,1}\underline{f}_1 + ... + h_{1,n}\underline{f}_n$$
$$...$$
$$\underline{e}_n = h_{n,1}\underline{f}_1 + ... + h_{n,m}\underline{f}_n$$

Il primo pedice indica il vettore, il secondo lo scorrimento.
Andiamo a sostituire la nuova comb. lin. di $\underline{e}_1$ in $\underline{v}$:

$$\underline{v} = k_1(h_{1,1}\underline{f}_1, +... + h_{1,n}\underline{f}_n) + .. + k_n(h_{n,1}\underline{f}_1, +... + h_{n,m}\underline{f}_n)$$

Ora mettiamo in evidenza $\underline{f}$:

$$\underline{v} = \underline{f}_1\underset{\substack{\| \\ k'_1}}{(k_1h_{1,1} + ... + k_nh_{1,n})} + ... + \underline{f}_n\underset{\substack{\| \\ k'_n}}{(k_1h_{n,1} + ... + k_nh_{n,m})}$$

Quindi $(k'_1, ..., k'_n)$ le componenti di $\underline{v}$ in $\mathbb{R}_2$ In definitiva avremmo:

$$k'_1 = (k_1h_{1,1} + ... + k_nh_{1,n})$$
$$...$$
$$k'_n = (k_1h_{n,1} + ... + k_nh_{n,m})$$

8.2.1 Matrice di Passaggio

Un altro metodo oltre la "formula di passaggio" è la "matrice di passaggio"
Andiamo ad esprimere

8.2.2 Esempio

Posti in $\mathbb{R}^3$ consideriamo i seguenti riferimenti:

$$\mathbb{R}_1 = ((1,2,3),(4,5,6),(0,0,2) \text{ VECCHIO RIFERIMENTO}$$

$$\mathbb{R}_2 = ((0,1,0),(0,1,1),(1,1,1)) \text{ NUOVO RIFERIMENTO}$$

Usiamo il metodo della "matrice di passaggio", cominciamo col esprimere i vecchie riferimenti in favori dei nuovi:

$$(1,2,3) = -1(0,1,0) + 2(0,1,1) + 1(1,1,1)$$

$$(4,5,6) = -1(0,1,0) + 2(0,1,1) + 4(1,1,1)$$

$$(0,0,2) = -2(0,1,0) + 2(0,1,1) + 0(1,1,1)$$

Ora costruiamo la matrice (per colonna):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora basta fare il prodotto righe per colonne di un qualsiasi vettore che vogliamo "trasportare":

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.3 Ultima Osservazione Spazi Vettoriali

Consideriamo:

$$\mathbb{R}^3 :< (1,1,1),(0,1,5),(2,3,4),(2,2,2),(4,5,6) >$$

Vogliamo trovare una base (procediamo con la riduazione a gradini):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la base sarà:

$$< (1,1,1),(0,1,2),(0,0,3)$$

- Avendo 3 pivot $\Rightarrow dim = 3$
- Le righe non nulle di una matrice a gradini **sono indipendenti**

8.4 Determinanti (matrice quadrata)

Il determinante esiste solo e solamente per matrici quadrate; il determinante si definisce per ricorsione[6].

8.4.1 Matrice Complementare

La matrice complemenare di $A(i,j)$ consiste nell'eliminare la i riga e j colonna.
Esempio $A(2,2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

8.4.2 Complemento Algebrico

Il complemento algebrico di elemento $a_{i,j}$ della matrice è definito:

$$A_{i,j} = (-1)\ i + jdet(A(i,j))$$

Si indica con un "A grande" : $A_{i,j}$
Esempio, consideriamo una matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n_2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Allora possiamo ricavare il determinante:

$$a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + ... + a_{1,n+1}A_{1,n+1} = detA$$

$$a_{2,1}A_{2,1} + a_{2,2}A_{2,2} + ... + a_{2,n+1}A_{2,n+1} = detA$$

$$...$$

$$a_{n,1}A_{n,1} + a_{n,2}A_{n,2} + ... + a_{n,n+1}A_{n,n+1} = detA$$

TUTTI QUESTI VALORI SONO UGUALI

Questo procedimento è stato effettuato sulle righe, ma si può applicare uguale alle colonne.

[6] Attenzione da non confondere "dimostrazione per induzione" con "definizione per induzione"

8.5 Determinante per Casi

8.5.1 Matrice 2x2

Per le matrici $2x2$ il determinante si ottiene come diagonale primare - diagonale secondaria
Per le matrici $2x2$ il determinante si ottiene come diagonale primare - diagonale secondaria

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - b + c \tag{1}$$

8.5.2 Matrice 3x3 - Regola di Sorrus

Avendo una matrice $3x3$ "duplichiamo" la prima e la seconda colonna e li posiniamo infondo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Da cui otteniamo:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 0 - (2 + 0 + 2) = 0$$

8.6 Propietà sul Determinante

Dimostrazioni(dove neccessarie) ed esempi omessi (per ora)

- Se una riga dipende dalle rimanenti allora il determinante è zero
- Se una matrice ha due righe uguale allora il determinante è zero
- Se il determinante è diverso da zero allora righe indipendenti
- Se scambiamo due righe il determinante cambia di segno
- Teorema di Cauchy-Binet: $det(AB) = det(A) * det(B)$
- $detA = detA^t$

9 Lezione 11 - 14/04/2023

9.1 Operazioni di Riga riguarda il Determinante

Le operazioni di riga preservano la non nullità del determinante ma non il valore.

E_1 : Scambiare due rige fa cambiare il segno

E_2 : Bisogna moltiplicare per uno scalare anche il determinante (da rivdere)

9.2 Determinante di una Matrice a Gradini

Il modo più semplice per riusciure a calcolare il determinante di una matriace è portarla a gradini, poiché il determinante è **il prodotto della diagonale principale**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow det = 1 * 2 * 3 = 6 \Rightarrow Indipendente$$

9.3 Invertilità di una Matrice

Presa una matrice $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ esiste una matrice $B \in R_{n,n}$ tale che:

$$AB = I_n = BA$$

Vale solo se il determinante è diverdo da zero.

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \exists inversaB = A^{-1}$$

A^{-1} è unica. Dim unicità:

$$B_1 = B_1 I_N = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2$$

Dim $\Rightarrow$:

$$AB = I_n \Rightarrow det(AB) = det(I_n) = 1$$

Dim $\Leftarrow$: TODO:FINIRE

9.4 Minore di una Matrice (sottomatrice quadrata)

Indichiamo il minore come:

$$A_{(i_1,...,i_h;j_1,...,j_n)}$$

$i_1, ..., i_h$ indica le righe

$j_1, ..., j_n$ indica le colonne

Consideriamo la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{(2,3;2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I minori valgono anche sulle matrice rettangolari ma i minori rimangono sottomatrici quadrate.

9.5 Grado Massimo

Un minore si dice di **grado massimo** se il suo grado coincide con $min\{n, m\}$.
Una matrice non quadrata ha sempre più di un minore di ordine massimo, mentre una matrice quadrata ha un solo minore di ordine massimo ed è la matrice stessa.

9.5.1 Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo:

$$A_{(2,3;2,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo non di grado massimo poichè il grado massimo è $min\{3, 4\} = 3$

9.6 Orlato

Se abbiamo un minore che non è di grado massimo, possiamo orlarlo aggiungendo una riga e una colonna.
Un orlato rimane un minore, e si più orlare un orlato.
Riprendiamo l'esempio di sopra, eravamo rimasti che $A_{(2,3;2,4)}$ non fosse di grado massimo, andiamo ad orlarlo:

$$A_{(1,2,3;2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo raggiunto una matrice di grado massimo orlando cioè abbiamo aggiunto la 1 riga e la 3 colonna.

9.7 Minore Fondamentale

Si definisce **minore fondamentale** un minore che rispetta queste propietà:

1) $det \neq 0$
2) Tutti i suoi orlati hanno $det = 0$

ESISTONO SEMPRE I MINORI FONDAMENTALI
Non ci sono sempre minori fondamentali, ad esempio la matrice nulla non ha minori fondamentali, ma, se la matrice non è nulla allora esiste sempre almeno un minore fondamentale. Il minore fondamentale non è necessariamente unico.
Se un minore di ordine massimo ha determinante diverso da zero allora esso è un minore fondamentale

9.7.1 Algoritmo per trovare Minore Fondamentale

Un modo semplice per trovare un **minore fonmentale** è cominciare sempre da un minore molto piccolo e poi andare ad orlarlo fino a raggiugere il grado massimo.
Cominciamo con prendere una matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Andiamo a prendere un minore "piccolo" con determinante diverso da zero:

$$A_{(1;3)} = (1) \text{ con } \det \neq 0$$

Abbiamo escludo gli "zeri" poiché il loro determinante è zero.
Procediamo con nostro "algoritmo" andando ad orlarlo:

$$A_{(1;3)} \rightarrow A_{(1,2;3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} det = 0$$

Avendo trovato $det = 0 = (1 * 0) - (0 * 4)$ dobbiamo scegliere un altro orlato:

$$A_{(1;3)} \rightarrow A_{(1,2;2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} det = 1$$

Abbiamo raggiunto un buon candidato ora dobbiamo vericare che tutti i suoi orlati abbiano $det = 0$, in questo caso il suo unico orlato è:

$$A_{(1,2;3,4)} \rightarrow A_{(1,2,3;1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ unico orlato con } det = 0$$

Quindi in definitiva:

$$A_{(1,2;2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

MINORE FONDAMENTALE

9.8 Teorema degli Orlati (NO DIM)

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$ matrice rettangolare e $A(i_1, ..., i_h; j_1, ..., j_n)$ minore fondamentale allora $\Rightarrow$:

$$\underline{a}_{1,1}, ..., \underline{a}_{i,n}$$

Sono una base dello spazio vettoriale generato dalle **righe**.
(Esiste equivalente per colonne) Conseguanza di ciò:

dim Righe Generate = dim Colonne Generate

9.8.1 Rango

Rango = dim(Minore Fondamentale)

Da questo sappiamo che i pivot di una matrice a gradini corrisponde alla dimensione, quindi al **rango**.

9.8.2 Corollari derivati

- Il rango di riga è sempre uguale al rango di colonna, inoltre il rango di A è uguale al numero di pivot di una matrice a gradini equivalente per righe.
- Tutti i minori fondamentali hanno lo stesso grado
- Il determinante di una matrice quadrata è diversa da zero se e solo se le righe (o colonne) sono indipedenti
- $detA = 0 \Leftrightarrow$ righe (o colonne) dipendenti

9.9 Criteri di compatibilità sistemi di equazioni lineare

Consideriamo un sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + \ ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = c_n \end{cases}$$

Possiamo scriverlo in forma matrice nel seguenti modo $AX = C$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n1} \end{pmatrix} \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Possiamo esprimere per C e spezzarla:

$$C = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Quindi se c'è una soluzione la colonna dei termini noti quindi se c'è una soluzione la colonna dei termini noti.

9.9.1 Primo Criterio di Compatibilità

Un sistema S è compatibile $\Leftrightarrow$ la colonna dei termini noti è combinazione lineare della matrice incompleta (è soluzione).

10 Lezione 12 - 19/04/2023

10.1 Teorema di Rouché-Capelli

Il teorema di Rouché-Capelli anche noto come secondo sistema di compatibilità afferma che un sistema S è compatibile $\Leftrightarrow$ il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + \ ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = c_n \end{cases} \text{è compatibile} \Leftrightarrow v(A) = v(A')$$

DIM $\Rightarrow$: Per il primo principio compatibilità:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + ... + y_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

$(c_1, ..., c_n)$ DIPENDE DALLE COLONNE

DA FINIRE **DIM $\Leftarrow$:** Partiamo da "i due ranghi sono uguali" allora per il teorema degli orlati hanno lo stesso ordine/grado (L).
Consideriamo una matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & c_n \end{array}\right)$$

Consideriamo un minore fondamentale della matrice incompleta (base), ma dalla ipotesi lo è anche per la matrice completa.
Allora per il teorema degli orlati: le colonne del minore fondamentale formano un sistema di generatori di tutta la matrice allora il sistema è compatibile-

10.1.1 Esempio Parametrico

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \ \ y + zh = 2 \\ 2x + 3y + \ \ z = 1 \\ x + 5y + \ \ z = 0 \end{cases}$$

Abbiamo un fattore **parametrico** cioé h, vogliamo sapere per quali valori di h il sistema è compatibile:
Potremmo procedere con la risoluzione a gradini ma ci viene più facile con Rusché-Capelli, costruiamo la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & h & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Comincio a trovare il minore fondamentale della matrice incompleta, come sempre iniziamo dal "basso" quindi consideriamo 1 nella posizione $3;1$ e andiamo ad orlarlo:

$$A(2,3;1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dalla definizione di minore fondamentale abbiamo bisogno che il suo determinante sia diverso da zero ($2*5-1*3 \neq 0$) e che tutti i suoi orlati abbiano determinante uguale a 0, in questo caso l'unico orlato possibile (della matrice incompleta) è:

$$A(1,2,3;1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante usiamo $Sorrus$ ci verrà:

$$3+1+10h-3h-2-5 = 7h-3$$

Essendo che il determinante è anch'esso parametrico abbiamo due casi:

SE $h = \frac{3}{7}$ allora il $det = 0$ quindi il rango sarà 2

SE $h \neq \frac{3}{7}$ allora il $det \neq 0$ quindi il rango sarà 3

(Ovviamente nel caso $h \neq \frac{3}{7}$ il minore fondamentale è la matrice stessa) Ora dobbiamo trovare il rango della matrice completa, come sempre dobbiamo trovare un minore fondamentale:

$$A(1,2,3;1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante è diverso da zero quindi è un minore fondamentale, quindi il rango della matrice completa è 3.
Per il teorema di Rusché-Capelli il sistema è compatibile se e solo se il rango delle due matrice combacia ma essendo il rango della matrice incompleta parametrico abbiamo due casi:

SE $h = \frac{3}{7}$ $3 \neq 2$ INCOMPATIBILE

SE $h \neq \frac{3}{7}$ $3 \neq 3$ COMPATIBILE (rango massimo)

Sappiamo che per $h \neq \frac{3}{7}$ il sistema è compatibile ora bisogna trovare le soluzioni, usiamo la seguente tecnica:

$$AX = C$$

Sappiamo che A ha determinante diverso da zero allora è invertibile allora sfruttando quello che abbiamo visto a 9.3, sappiamo che le soluzioni $X = A^{-1}C$, allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{7h-3} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che A_{11}... sono i complementi algebrichi.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1-h5 & 1-3h \\ 1 & 1h & 1*2h \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi ora possiamo esprimere X come:

$$X = \begin{pmatrix} X \\ X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-h5 & 1-3h \\ 1 & 1h & 1*2h \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10.2 Regola di Cramer n equazione, n incognite

La Regola(Metodo) di Cramer ci dà una mano nel trovare le soluzione di sistema di equazione di **n equazione, n incognite**.
Se ci sono n equazioni ed n incognite sappiamo che la matrice incompleta è una matrice quadrata, e poiché le righe della matrice quadrata sono indipendenti poiché fanno sempre parte del minore fondamentale, la matrice A ha determinante diverso da zero, questo implica che possiamo invertirla, quindi:

$$AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$$

Esperiamiamo:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA = |A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & \dots & \vdots \\ A_{1m} & A_{23} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1A_{11} + C_2A_{21} + ... + C_nA_{n1} \\ \vdots \\ C_1A_{1m} + C_2A_{2m} + ... + C_nA_{nm} \end{pmatrix}$$

Infine dalla eguaglianza:

$$x_1 = \frac{c_1A_{11} + ... + c_nA_{n1}}{|A|}$$

$$x_n = \frac{c_1A_{1n} + ... + c_nA_{nm}}{|A|}$$

10.3 Cramer Semplificato

Un metodo più semplice prevede di far utilizzo di una matrice ausiliaria andando a sostituire alla i-sima colonna i termini noti.
Nello specifico se vogliamo calcolarci x_1 andremo a sostituire alla prima colonna, la colonna dei termini noti in questo modo:

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_{21} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ne consegue che a B_2 andrà sostituita la seconda colonna e così via...
Tornando a B_1 se andiamo a calcolare il determinante della prima colonna (che è anche il determinante della matrice stessa) otteremo:

$$c_1 A_{11} + ... + c_n A_{n1}$$

che è proprio il numeratore della regola di Cramer, quindi possiamo semplificare nel seguenti modo:

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}$$

10.3.1 Esempio

Riprendiamo l'esempio di prima:

$$(h \neq \frac{3}{7})\ S = \begin{cases} x + \ \ y + zh = 2 \\ 2x + 3y + \ \ z = 1 \\ x + 5y + \ \ z = 0 \end{cases}$$

Dato che ci troviamo nella situazione di n equazioni, n incognite possiamo applicare Cramer, ci aiutiamo usando la matrice ausilaria:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & h \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \ |B_1| = 5h - 5 \quad x_1 = \frac{5h-5}{7h-3}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ |B_2| = h + 4 - 1 - 4 \quad x_2 = \frac{h-1}{7h-3}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \ |B_3| = 1 + 20 - 6 - 5 \quad x_3 = \frac{10}{7h-3}$$

10.4 Caso n equazioni, m incognite

Consideriamo un sistema lineare con n equazioni e m incognite:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$$

Usiamo Rushé-Capelli per verificare la compatibilità del sistema (supponiamo di sì), sempre per lo stesso teorema abbiamo trovato un minore fondamentale, essendo una base possiamo rimuovere tutte le righe aldifuori di quelle del minore fondamentale, quindi siamo rimasti con solo righe indipendenti, portiamo tutte le colonne che non fanno parte del minore fondamentale dal lato dei termini noti (tipo variabili liberi), possiamo considerare tutto quello che c'è a destra come un solo numero, in questo modo ci siamo riportati nel caso di n equazioni, n incognite quindi possiamo applicare Cramer come abbiamo visto sopra.

10.4.1 Esempio

Per capire meglio consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 2 \\ 2x + 3y + \ \ z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

Possiamo "subito" individuare il minore fondamentale e cancellare le righe al difuori:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

Portiamo a "destra" tutte le colonne al difuori del minore fondamentale ($det = 1$):

$$\begin{cases} x + \ \ y = 2 - z \\ 2x + 3y = 1 - z \end{cases}$$

Consideriamo tutti i valori a "destra" come un solo numero:

$$\begin{cases} x + \ \ y = c_1 \\ 2x + 3y = c_2 \end{cases}$$

Ora possiamo applicare Cramer essendo n-equazioni, n-incognite:

$$x = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{|\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 3 \end{pmatrix}|}{1} = (c_1 * 3) - c_2$$

$$y = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{|\begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 2 & c_2 \end{pmatrix}|}{1} = c_2 - (2 * c_1)$$

Ora possiamo a sostituire in c_1 e c_2 i valori originali:

$$x = (2 - z) * 3 - (1 - z) = 6 - 3z - 1 + z = -2z + 5$$

$$y = (1 - z) - 2 * (2 - z) = 1 - z - 4 + 2z = z - 3$$

Quindi alla fine il sistema S ha:

$$\infty^1 SOLUZIONI \quad \overline{S} = \{(-2z + 5, z - 3, z)/z \in \mathbb{R}\}$$

Si può procedere anche in maniera più semplice tramite sostituzione.

10.5 Sistemi Lineari Omogenei

Sia S un sistema lineare omogeneo (zero come termini noti) di questo tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

Possiamo anche esprimerlo come $S : AX = 0$.
Vogliamo dimostrare che l 'insieme delle soluzioni rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$, ovvero $\overline{S} \leq \mathbb{R}^m$.

Dim:

Vettore Nullo:
Banale poiché ogni sistema **omogeneo** ammette almeno la soluzione banale $(0, ..., 0)$.

Stabile +:
Per verificare che sia stabile rispetto alla somma prendiamo due soluzioni $Y_1, Y_2 \in \overline{S} \Rightarrow Y_1 + Y_2 \in \overline{S}$ (righe) che essendo soluzioni del sistema omogeneo possiamo scrivere:

$$AY_1^t = 0 = AY_2^t$$
$$A(Y_1^t + Y_2^t) = A((Y_1 + Y_2)^t) \Rightarrow Y_1 + Y_2 \in \overline{S}$$

Stabile $\cdot$:

$$A(hY_1^t) = h(AY_1^t) = h0 = 0 \Rightarrow hY_1^t \in \overline{S}$$

10.5.1 Esempio (Continuo Spiegazione)

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + \ \ t + 2z = 0 \\ x + 2y + 5t + \ \ z = 0 \end{cases}$$

Troviamo il minore fondamentale (base), come abbiamo visto sopra spostiamo a destra tutto quello al difuori dalle colonne del m.f.:

$$\begin{cases} x + \ \ y = -2z - t \\ x + 2y = -z - 5t \end{cases}$$

Applicando Cramer o per sostituzione troviamoci l'incognite:

$$\begin{cases} x \qquad = -3z + 3t \\ \qquad y = z - 4t \end{cases}$$

Quindi abbiamo che l'insieme delle soluzione $\overline{S}$ è **sottospazio**:

$$\infty^2 \qquad \overline{S} = \{(-3z + 3t, z - 4t, z, t)/z, t \in \mathbb{R}\}$$

Potendo scegliere z e t in maniera arbitraria scegliamo i valori che rendano i vettori indipendenti,(usualmente si pone a 1 una variabile e 0 sulle altre prendendo tutte le possibilità).
Quindi per:

$$z = 1, t = 0 \Rightarrow (-3, 1, 1, 0)$$

$$z = 0, t = 1 \Rightarrow (3, -4, 0, 1)$$

Non ci resta che verificare che $< (-3, 1, 1, 0), (3, -4, 0, 1) >$ sia sistema di generatore per dire che sia base: TODO: LO È PER CRAMER CAPIRE IL PERCHÉ

10.6 Sistema Omogeneo Associato

Considerando un sistema S (potenzialmente non omogeneo) esiste una relazione con un sistema omogeneo S_0 ad esso associato.
Esprimiamolo in forma matriciale:

$$S : AX = C \qquad S_0 : AX = 0$$

Enunciamo il seguente teorema: **Preso** $Y \in S$ **una soluzione del sistema** S allora:

1) $\forall Z \in \overline{S}_0 \Rightarrow Y + Z \in \overline{S}$
   DIM:
   $A(Y + Z) = AY + AZ = C + 0 = C$

2) $\forall Y' \in \overline{S} \exists Z \in \overline{S}_0 : Y' = Y + Z$
   DIM:
   $Z = Y' - Y \quad AZ = A(Y' - Y) = AY' - AY = C - C = 0$

Questo teorema ci dice che se voglio descrivere l'insieme delle soluzioni del mio sistema S basta trovarmi una singola soluzione per S dopodiché vado a considerare il sistema omogeneo associato S_0, di quest'ultimo vado a trovare l'insieme delle soluzioni; e tutte le altre soluzioni si possono descrivere come somma dell'unica soluzione che mi sono trovato più una qualunque combinazione lineare degli elementi della base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo.

10.6.1 Esempio

Consideriamo il sistema S e i suo sistema omogeneo associato S_0:

$$S = \begin{cases} t + x + \ \ y + 2z = 1 \\ 5t + x + 2y + \ \ z = 2 \end{cases}$$

$$S_0 = \begin{cases} t + x + \ \ y + 2z = 0 \\ 5t + x + 2y + \ \ z = 0 \end{cases}$$

Prendiamo una soluzione per S cioé $x = 0, y = 1$ cioè la n-plua:

$$(0, 1, 0, 0)$$

Invece la soluzione per S_0 ce la siamo già trovati precendente cioè:

$$\overline{S}_0 =< (-3, 1, 1, 0), (3, -4, 0, 1) >$$

Avendo una soluzione per S e tutte le soluzione di S_0 possiamo scrivere:

$$\overline{S} = (0, 1, 0, 0)+ < (-3, 1, 1, 0), (3, -4, 0, 1) >$$

Scriviamolo sottoforma di combinazione lineare:

$$\overline{S} = \{(0, 1, 0, 0) + h(-3, 1, 1, 0) + k(3, -4, 0, 1)/h, k \in \mathbb{R}\}$$

11 Lezione 13 - 21/04/2023

11.1 Caso n-1 equazioni, m incognite

Consideriamo un sistema con $n-1$ equazioni **(indipendenti)** e m incognite omogeneo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \quad ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{n-1,1}x_1 + ... + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Grazie alla teoria studiata sappiamo che la $dim(\overline{S}) = 1$ poiché è uguale "numero delle incognite che stanno fuori dal minore fondamentale" ovvero il numero di incognite meno il rango(incompleta).
Se consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,m} & \dots & a_{n-1,m} \end{pmatrix}$$

Consideriamo λ_i il determinante della matrice quadrata formate se leviamo una i colonna.
Per ipotesi almeno uno di questi λ è diverso da zero, quindi non è banale:

$$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

Quindi la soluzione del nostro sistema sarà n-upla dei λ presi a segni alterni:

$$(\lambda_1, -\lambda_2, ..., (-1)^{n-1}\lambda_n)$$

11.1.1 Dimostrazione

DA INSERIRE

11.1.2 Esempio

Consideriamo il seguente sistema:

$$S = \begin{cases} 2x + 3y + \quad z = 0 \\ \quad x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo i vari λ_i:

$$\lambda_1 = det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (3 * 2) - 4 = 2$$

$$\lambda_2 = det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (2 * 2) - 1 = 3$$

$$\lambda_3 = det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (2 * 4) - 3 = 5$$

$$\overline{S} =< (\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3) >=< (2, -3, 5) >$$

11.2 Applicazioni Lineari

Un'applicazione lineare o anche mappa (lineare) o omomorfismo (lineare) è una applicazione definita su spazi vettoriali:

$$f : V \to W$$

Viene detta **lineare**:

1) Lineare rispetto al somma (l'immagine della somma è uguale alla somma delle immagini):
$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V : f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$$

2) Lineare rispetto al prodotto:
$$\forall h \in \mathbb{R} : f(h\underline{v}) = hf(\underline{v})$$

Oltre alle applicazioni lineari cioé omomorfismi esistoni altri varianti:

Momorfismo) Se la funzione è **iniettiva** (omomorfismo iniettivo)

Epimorfismo) Se la funzione è **suriettiva** (omomorfismo surriettivo)

Isomorfismo) Se la funzione è **biettiva** (omomorfismo biettivo)

Endomorfismo) Se dominio e codominio combaciano $V = W$ (omomorfismo in se stesso)

Automorfismo) Isomorfismo con dominio e codominio uguali (endomorfismo biettivo)

11.2.1 Esempi

- Consideriamo la funzione identità $f : V \to V$ ($\underline{v} \to \underline{v}$)
  È una applicazione (mappa) lineare poiché le due propietà sono banalmente dimostrate, è un **Automorfismo**

- Consideriamo la funzione nulla $f : V \to V$ ($\underline{v} \to \underline{0}$)
  Come prima le due propietà sono banalmente dimostrate, no iniet e surr, quindi è un **endomorfismo**

- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \to (x, x + y, z)$
  Verifichiamo le prime due propietà:
  - Lineare somma:
  $$f(x, y, z) + f(x_1, y_1, z_1) = f((x, y, z) + (x_1, y_1, z_1))$$
  $$(x, x + y, z) + (x_1, x_1 + y_1, z_1) = f((x + x_1, y + y_1, z + z_1))$$
  $$(x + x_1, (x + x_1) + (y + y_1), z + z_1) = (x + x_1, (x + x_1) + (y + y_1), z + z_1)$$
  - Lineare prodotto:
  $$f(h(x, y, z)) = hf(x, y, z)$$

$$f((hx, hy, hz)) = h(x, x+y, z)$$
$$(hx, hx+hy, hz) = (hx, h(x+y), z)$$

- Iniettiva:

$$f(x, y, z) + f(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow (x, x+y, z) = (x_1, x_1+y_1, z_1)$$

- Surriettiva:

$$f(a, b, c) = (x, y, z) \Rightarrow (a, a+b, c) \quad c = z, a = x, b \to y - x$$

Quindi è un **Automorfismo**

- Consideriamo la funzione polimiale $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3 (ax^2 + bx + c \to (c, b, a))$

  - Somma Lineare:

$$f(ax^2 + bx + c + dx^2 + ex + g) = f(ax^2 + bx + c) + f(dx^2 + ex + g)$$
$$(a+d, b+e, c+g) = (a, b, c) + (d, e, g)$$

  - Prodotto Lineare:

$$ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$$
$$f(h(ax^2 + bx + c)) = hf(ax^2 + bx + c)$$
$$f(hax^2 + hbx + hc) = h(c, b, a)$$
$$(hc, hb, ha) = (hc, hb, ha)$$

  - Initiettività/Suriettività: Ovvie

Quindi è un **Isomorfismo**

- Consideriamo la funziona derivita polinomiale $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ $(ax^2 + bx + c \to 2ax + b)$

- Consideriamo la funzione matriciale $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ $(X \to X^2)$

  - Prodotto Lineare:

$$f(hX) = hf(X)$$
$$hXhX = hX^2$$
$$h^2X^2 = hX^2$$

Non è una mappa

- Consideriamo la seguente funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $(x, y) \to (x, y, 3)$
Il tre essendo costante da fastidio quindi non è una mappa.

12 Lezione 14 - 26/04/2023

12.1 Propietà

Consideriamo una funzione lineare $f : V \to W$ elenchiamo le seguenti propietà:

1) $f(\underline{0}_v) = \underline{0}_w$

2) $f(h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n) = h_1 f(\underline{v}_1) + ... + h_n f(\underline{v}_n)$

3) $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \Rightarrow f(\underline{v})$ dipende da $f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)$
DIM:

$$\underline{v} = h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n$$

$$f(\underline{v}) = f(h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n) =^{2)} h_1 f(\underline{v}_1) + ... + h_n f(\underline{v}_n)$$

3.1) f conserva dipendenza lineare MA NON L'INDIPENDENZA

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\ DIP\ \Rightarrow f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)\ DIP$$

$$\exists \underline{v}_i\ DIP\ \underline{v}_1, ..., \underline{v}_{i+1}, ..., \underline{v}_n \Rightarrow f(\underline{v}_i)\ DIPDA\ f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_{i+1}), ..., f(\underline{v}_n)$$

4) $f(< S >) =< f(S) >=< f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)) >$

Andiamo a dimostare la prima uguaglianza nel solito modo:

DIM $\subseteq$:

$$\underline{v} \in f(< S >)$$

$$\exists \underline{w} \in < S >\ \underline{v} = f(\underline{w})$$

$$\underline{w} = h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n$$

$$f(\underline{w}) = h_1 f(\underline{v}_1) + ... + h_n f(\underline{v}_n) \in < f(S) >$$

DIM $\supseteq$:

$$\underline{w} \in < f(S) >$$

$$\underline{w} = h_1 f(\underline{v}_1) + ... + h_n f(\underline{v}_n)$$

$$f(h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n) \in f(< S >)$$

$$\underline{w} \in f(< S >)$$

5) $H \leq V \to f(H) \leq W$
Dimostriamo sia sottospazio vettoriale:

Non vuoto:

$$\underline{0} \Rightarrow f(\underline{0}) = \underline{0} \in H$$

Stabilità Somma:

$$\underline{w}, \underline{w}' \in f(H) \qquad \underline{v}, \underline{v}' \in H$$

$$\underline{w} = f(\underline{v}) \qquad \underline{w}' = f(\underline{v}')$$

$$\underline{w} + \underline{w}' = f(\underline{v}) + f(\underline{v}') = f(\underline{v} + \underline{v}') \in f(H)$$

Stabilità Prodotto: TODO: DA FARE COME ESERCIZIO (un giorno lo farò)

12.2 Kernel

Consideriamo la funzione lineare $f : V \to W$, denotiamo con Imf il sottospazio immagine di f cioé: $\{f(\underline{v})/\underline{v} \in V\} = f(V) = Imf$.

Andiamo a definire un altro insieme chiamato **Kernel** o anche detto **ker**, cioé l'insieme di tutti i valori del dominio che vanno a finire nel neutro nella fattispecie: $kerf = \underline{v} \in V/f(\underline{v}) = \underline{0}$

Andiamo a dimostare che il ker sia un sottospazio:

Non vuoto: Vero poiché il neutro gli appartiene

Stabilità Somma:

$$\underline{v}, \underline{v}' \in kerf \Rightarrow \underline{v} + \underline{v}' \in kerf$$

$$f(\underline{v}) + f(\underline{v}') = f(\underline{v} + \underline{v}') = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

Stabile Prodotto:

$$h \in \mathbb{R} \qquad h\underline{v} \in kerf$$

$$f(h\underline{v}) = hf(\underline{v}) = \underline{0}$$

Avendo definito questi due concetti possiamo sfruttare alcune propietà per capire più facilente l'iniettività o surriettività di un applicazione lineare:

- Se l'immagine del dominio combacia col codominio allora la funzione **è surriettivita**
$$f(V) = Imf = W \Leftrightarrow \text{f è surriettiva}$$
- Se il $kerf = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow f$ è **iniettiva.**

DIM $\Rightarrow$:

$$\underline{v}, \underline{w} \in V \text{ con } f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$$

$$f(\underline{v} - \underline{w}) = f(\underline{v}) - f(\underline{w}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} - \underline{w} \in kerf \Rightarrow \underline{v} - \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$$

DIM $\Leftarrow$:

$$\underline{0} \in kerf \qquad \{\underline{0}\} \subseteq kerf$$

$$\underline{v} \in kerf \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

Tutti gli elementi combaciano con il neutro

12.2.1 Esempi

- $\underline{0}_v : V \to V(\underline{v} \to \underline{0})$

$$Imf = f(V) = \{\underline{0}\}$$
$$Kerf = V$$
$$\text{INIETTIVA E SURRIETTIVA } \Leftrightarrow V = \{\underline{0}\}$$

- $id_v V \to V(\underline{v} \to \underline{v})$

$$Imf = f(id_v) = V\ INIETTIVA$$

$$Kerf = \{\underline{0}\}\ SURRIETTIVA$$

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix}$$

• Per verificare l'iniettività dobbiamo verificare il $kerf$ sia formato solo dal vettore nullo, quindi vediamo per quali valori di x, y $f(x, y) = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ È INIETTIVA}$$

• Per verificare la surrietività prendiamo un sistema di generatori, in questo caso quella canonica:

$$< (1, 0), (0, 1) >\ dim = 2$$
$$f(\mathbb{R}^2) =< f(1, 0), f(0, 1) >=< (1, 0), (2, 1) >$$

Essendo indipendenti hanno $dim = 2$ quindi è surriettiva visto che è rimasto un sistema di generatori.

- $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}[x](ax^2 + bx + c \to 2ax + b)$

• Per verificare l'iniettività dobbiamo verificare il $kerf$ sia formato solo dal vettore nullo, quindi vediamo per quali valori di a, b, c $f(ax^2 + bx + c) = 0$:

$$\underline{(}v) \in \mathbb{R}_2[x]/f(\underline{v}) = \underline{0}$$

$$f(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \underline{0} \Leftrightarrow a = 0 = b$$

Quindi per $kerf$ sarà formato da tutti i valori $c \in \mathbb{R}$ quindi non è iniettiva.

$$kerf = \{c/c \in \mathbb{R}\}DIM = 1$$

• Per verificare la surrietività prendiamo un sistema di generatori, in questo caso quella canonica:

$$< x^2, x, 1 > dim = 3$$

$$f(< x^2, x, 1 >) =< 2x, 1, 0 >=< 2x, 1 > dim = 2 \textbf{ NON È SURRIETIVA}$$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

• Per verificare l'iniettività dobbiamo verificare il $kerf$ sia formato solo dal vettore nullo, quindi vediamo per quali valori di x, y $f(x, y) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad = 0 \\ \quad y = 0 \end{cases}$$

12.3 Altre propriepietà

Consideriamo una generica funzione lineare $f : V \to W$:

- Il monomorfismo (omomorfismo iniettivo) mantiene l'indipendenza, cioè:

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \ INDIP. \Rightarrow f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n) \ INDIP.$$

BASE DI V $\to$ BASE DI $f(V)$

DIM: Prendiamo una combinazione lineare dei vettori immagine ed eguagliamola all'elemento neutro:

$$f(h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n) = h_1 f(\underline{v}_1) + ... + h_n f(\underline{v}_n) = \underline{0}$$

Possiamo leggerlo anche nel seguente modo:

$$h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n \in kerf$$

Affinché questi vettori siano indipendenti bisogna dimostrare che tutti gli scalari siano necessariamente pari a zero ma essendo i vettori indipendenti per ipotesi ed avendolo uguagliato all'elemento neutro troviamo che tutti gli scalari sono nulli.

- Conserando sempre la funzione linieare possiamo definire la seguente equivalenza:

$$dim(kerf) + dim(Imf) = dim(V)$$

La dimensione del dominio è uguale alla somma delle dimensioni dell'immagine del dominio e del ker di f.
DIM:
Ragioniamo per casi:

• $kerf = \{\underline{0}\}$
Quindi la funzione ha $dim = 0$ ed è iniettiva (monomorfismo) per quanto visto sopra conserva la base (indipendenza) e quindi la dimensione quindi:

$$0 + dim(Imf) = dim(V)$$

• $kerf = V$:
Come abbiamo dagli esempi di prima l'unico caso in cui $kerf = V$ è quando

f è la funzione nulla e sempre per la precendente osservezione $dim(Imf) = 0$, quindi:

$$dim(kerf) + 0 = dim(V)$$

- $\{0\} < kerf < V$

Prendiamo un base per il ker ed estendiamo a V:

$$\underbrace{\underline{e}_1, ..., \underline{e}_m}_{\text{base di ker}}, \underbrace{\underline{e}_{m+1}, ..., \underline{e}_n}_{\text{base estesa di V}}$$

Quindi abbiamo le seguenti dimensioni:

$$\underbrace{dim(Kerf)}_{m} + dim(Imf) = \underbrace{dim(V)}_{n}$$

Quindi $dim(Imf) = n - m$, dimostriamo che $f(\underline{e}_{m+1}, .., \underline{e}_n)$ sia base di Imf
Prendiamo un sistema di generatori per Imf:

$$Imf = < f(\underline{e}_1), ..., f(\underline{e}_m), f(\underline{e}_{m+1}), ..., f(\underline{e}_n) >$$

Ma i vettori appartenenti al $kerf$ sono nulli quindi possono essere rimosso:

$$Imf = < f(\underline{e}_{m+1}), ..., f(\underline{e}_n) >$$

Non ci resta che dimostrare l'indipendenza:

$$h_1 f(\underline{e}_{m+1}) + ... + h_n f(\underline{e}_n) = \underline{0}$$

$$f(h_1 \underline{e}_{m+1} + ... + h_n \underline{e}_n) = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 \underline{e}_{m+1} + ... + h_n \underline{e}_n \in Kerf$$

Piccolo tips: perché una funzione sia iniettiva la dimensione del dominio sia minore o uguale alla dimensione del codominio.

12.4 Cordinazione Associata

Preso uno spazio vettoriale V e un suo riferimento $(\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n)$ possiamo considerare la seguente funzione lineare $C_{\mathtt{R}}$:

$$\underline{v} = h_1 \underline{e}_1 + ... + h_n \underline{e}_n \to (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$$

Andiamo a verificare che sia una funzione lineare:

Prodotto lineare:

$$f(h\underline{v}) = hf(\underline{v})$$

$$(h\underline{e}_1, ..., h\underline{e}_n) = h(\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n)$$

Somma lineare:

$$\underline{v} = h_1 \underline{e}_1 + ... + h_n \underline{e}_n \quad f(\underline{v}) = (h_1, ..., h_n)$$

$$\underline{w} = k_1 \underline{e}_1 + ... + k_n \underline{e}_n \quad f(\underline{w}) = (k_1, ..., k_n)$$

$$\underline{v} + \underline{w} = (h_1 + k_1)\underline{e}_1 + ... + (h_n + k_n)\underline{e}_n$$

$$f(\underline{v} + \underline{w}) = (h_1 + k_1, ..., h_n + k_n)$$

Inoltre la funzione è **iniettiva** poiché il $KerC_{\mathtt{R}} = \{\underline{0}\}$.
È anche **suriettiva** poiché $C_{\mathtt{R}}(V) =< (1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1) >= \mathbb{R}^n$.
Quindi questa funziona è un **isomorfismo** che conserva l'indipendenza. È grazie a questa funzione che precedentemente abbiamo considerato le terne associate.

12.4.1 Corolarrio

Ogni spazio vettoriale finitamente generato (diverso da 0) di dimensione n è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$:

$$\forall V \neq \{\underline{0}\} \exists n : V \simeq \mathbb{R}^n$$

12.4.2 Proposizione

Sia $f : V \to W$ un isomorfismo (funzione lineare biettiva) esiste la sua inversa $f^{-1} : W \to V$ anche sarà un isomorfimo.
Dimostriamo che l'inversa sia una funzione lineare:

Somma lineare:

$$\underline{w}, \underline{w}' \in W(codominio) \quad f^{-1}(\underline{w} + \underline{w}') = f^{-1}(\underline{w}) + f^{-1}(\underline{w}')$$

Essendo per definizione surriettiva allora:

$$\exists \underline{v}, \underline{v}' \in V \quad \underline{w} = f(\underline{v}) \quad \underline{w}' = f(\underline{v}')$$

Andando a sostituire esce:

$$f^{-1}(f(\underline{v}) + f(\underline{v}')) = f^{-1}(f(\underline{v} + \underline{v}'))$$

Quindi alla fine [DA RIVEREDER]:

$$f^{-1}(f(\underline{v} + \underline{v}')) = \underline{v} + \underline{v}' = f^{-1}(\underline{w}) + f^{-1}(\underline{w}')$$

Prodotto lineare:

$$h \in \mathbb{R} \quad \underline{w} \in W \quad \exists \underline{v} \in V = \underline{w} = f(\underline{v})$$
$$f^{-1}(h\underline{w}) = hf^{-1}(\underline{w}) = h\underline{v}$$
$$f^{-1}(hf(\underline{v})) = f^{-1}(f(h\underline{v})) = h\underline{v}$$

13 Lezione 15 - 03/05/2023

13.1 Teorema Applicazioni Lineari

Consideriamo un applicazione lineare $f : V \to W$ essa si dice **nota** quando sono noti i corrispondenti dei vettori di una base (se conosco come agisce la funzione sui vettori della base allora possa risalire alla funzione).

13.1.1 Esempio

Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, prendiamo uno base per $\mathbb{R}^2$ per semplicità scegliamo quella canonica $< (1,0), (0,1) >$:

$$f(1,0) = (2,0,0) \qquad f(0,1) = (1,0,0)$$

Sapendo una base per $\mathbb{R}^2$ e note l'immagini possiamo risalire alla funzione:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$f(x,y) = x(2,0,0) + y(1,0,0) = (2x+y,0,0)$$

13.2 Matrice di Passaggio Applicazioni Lineari

Consideriamo un applicazione lineare $f : V \to W$ e prendiamo un riferimento nel dominio e codominio, andiamo a scrivere per ogni vettore la sua immagine tramite combinazione lineare:

$$\mathtt{R} = (\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n) \ \text{ rif. di V}$$
$$\mathtt{R}' = (\underline{e}'_1, ..., \underline{e}'_n) \ \text{ rif. di W}$$

$$f(\underline{e}_1) = a_{1,1}\underline{e}'_1 + a_{2,1}\underline{e}'_2 + ... + a_{m,1}\underline{e}'_n ...$$
$$...f(\underline{e}_n) = a_{1,n}\underline{e}'_1 + a_{2,n}\underline{e}'_2 + ... + a_{m,n}\underline{e}'_n$$

Possiamo notare come gli indici di a siano espressi come colonna, quindi possiamo costruire la **matrice associata ad f nei rif di $\mathtt{R}$ e $\mathtt{R}'$**:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2.1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = M_{\mathtt{R},\mathtt{R}'}(f)$$

Adesso possiamo considerare la funzione matrice $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$(x_1, ..., x_n) \to \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2.1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

TODO: Aggiungere spiegazione qua:

$$\underline{v} \in V, \ \underline{v} = x_1\underline{e}_1 + ... + x_n\underline{e}_n$$

Adesso possiamo passare dalle componenti in $\mathtt{R}$ di $\underline{v}$ alle componenti di $f(\underline{v})$ in $\mathtt{R}'$

$$(x_1, ..., x_n) \rightarrow F_A(x_1, ..., x_n)$$

Andiamo a dimostrare:

$$f(\underline{v} = x_1 f(\underline{e}_1) + ... + x_n f(\underline{e}_n)$$

$$x_1(a_{1,1}\underline{e}'_1 + ... + a_{n,1}\underline{e}'_n) + ... + x_n(a_{1,n}\underline{e}'_1 + ... + a_{m,n}\underline{e}'_n)$$

$$(x_1a_{1,1} + ... + x_na_{1,n})\underline{e}'_1 + ... + (x_1a_{n,1} + ... + x_na_{m,n})\underline{e}'_n \quad \text{per unicità di scrittura}$$

TODO: CONTINUARE

13.3 Esempio

Consideriamo la seguente funzione lineare: $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, andiamo a prendere una base per $\mathbb{R}_2[x]$ per semplicità quella canonica $< 1, x, x^2 >$.

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(ax^2 + bx + c) = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i valori per la matrice di passaggio:

$$\mathtt{R} = (x^2, x, 1) \qquad \mathtt{R}' = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$f(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adesso poossiamo costruire la matrice di passaggio:

$$A = M_{\mathtt{R},\mathtt{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora possiamo considerare la fuzione matrice:

$$F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$(x, y, z) \to A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, 0, 0, x + z)$$

Adesso grazie alla funzione matrice possiamo passare dal dominio al codominio e viceversa in modo facile:

$$\underbrace{x^2 + x + 1}_{(1,1,1)} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{(1,0,0,2)}$$

13.4 Matrice di Passaggio Invertibile

La matrice di passaggio da $\mathtt{R}'$ ad $\mathtt{R}$ è invertibile (la sua inversa risulta essere proprio la matrice di passaggio da $\mathtt{R}'$ ad $\mathtt{R}$).

14 Lezione 16 - 05/05/2023 (lez. online)

14.1 Matrici (quadrate) Simili

Due matrici (quardrate) si dicono **simili** se e solo se esiste una matrice (quadrata) P con $det \neq 0$ quindi invertibile tale che:

$$A \sim A' \Leftrightarrow \exists P : |P| \neq 0 \Rightarrow P^{-1}AP = A'$$

La similitudine è **relazione d'equivalenza**, andiamo a dimostarlo:

- **Riflessiva:** $A \sim A$
$$I_n A I In \quad |I_n| = 1 \quad I_n^{-1} = I_n$$
- **Simmetria:** $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A : P\ -1AP = A'$
$$P(P'AP)P' = PA'P'$$
$$A = P(A')P^{-1}$$
$$A = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$$
- **Transitività:** $A \sim B^B \sim C \Rightarrow A \sim C$
$$P^{-1}AP = B \qquad P_1^{-1}BP_1 = C$$
Combianiamo queste due equazioni:
$$C = P_1^{-1}BP_1 =^{sost.B} P_1^{-1}(P^{-1}AP)P_1 =^{assoc.} (P_1^{-1}P^{-1})A(PP_1) = (PP_1)^{-1})A(PP_1)$$
Dimostrichiamo che $P_1^{-1}P^{-1} = (PP)^{-1}$ sia la matrice identitica moltriplando per P_1:
$$(PP_1)(P_1^{-1}P^{-1)}) = I_n$$

14.2 Teorema

Consideriamo un endormofismo $F : V \to V$ e siano $\mathtt{R}$ e $\mathtt{R}'$ riferimenti di V allora:

$$\underbrace{M_{\mathtt{R}}(f)}_{A} \sim \underbrace{M_{\mathtt{R}'}(f)}_{A'}$$

Mettiamo in relazione le matrici associate tra due riferimenti di un endomorfismo.
DIM:
TODO: DA INSERIRE

14.3 Diagonalizzazione Endomorfismo

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$ possiamo considerare questa matrice con la variabile/incognita t:

$$A - tI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - t & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$$

(sottriamo t alla diagonale principale)
Il $det(A - tI_n)$ è detto **polinomio caratteristico** nella variabile t, e il $det(A - tI_n) = 0$ è detto **equazione caratteristica**.

LEMMA: Matrici simili hanno lo stesso polinomio carattestico.
DIM:
TODO: DA INSERIRE DOPO
Diamo delle definizioni:

- Sia $f : V \to V$ un endomorfismo, prendo un riferimento $\mathtt{R}$ e la sua matrice associata $A = M_{\mathtt{R}}(f)$ allora il polonomio caratterestico di f è il polinomio caratterstico di A.
(Poiché per quanto visto sopra, due matrici associate sono simili, e che pur cambiando la matrice simile il polinomio carattestico è lo stesso) Quindi in definitiva:

$$\text{equazione carattestica di } f = \text{equazione caratteristica di } A$$

  - Esempio: $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + 3y, -x - 2y) \in \mathbb{R}^2$

Dato che possiamo prendere qualcunque riferimento conviene scegliere quello canonico:

$$\mathtt{R} = ((1, 0), (0, 1))$$
$$f(1, 0) = (1, -1) = 1 * (1, 0) - 1(0, 1)$$
$$f(0, 1) = (3, -2) = 3 * (1, 0) - 2 * (0, 1)$$

Scriviamo la matrice associata (per colonna):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il polinomio caratterestico dobbiamo sottrare alla diagonale ala variabile in questo caso t:

$$\begin{pmatrix} 1 - t & 3 \\ -1 & -2 - t \end{pmatrix}$$

Andiamo a fare il determinante:

$$det = (1 - t)(-2 - t) + 3 = -2 - t + 2t + 2^2 + 3 = t^2 + t + 1$$

- Endomorfismo diagonalizzabile quando esiste un riferimento in cui la matrice associata è diagonale:
$$\mathtt{R} : M_{\mathtt{R}}(f) \text{ è diagonale}$$

- Una matrice è **diagonalizzabile** se è **simile** a una **diagonale**.

- Considirato un endomorfismo diagonalizzabile allora ogni matrice associata è diagonalizzabile
DIM:
$$\exists \mathtt{R}\ rif.\ V : M_{\mathtt{R}}(f) \text{ è diagonale}$$
$$\forall \mathtt{R}'\ rif.\ V : M_{\mathtt{R}'}(f) \sim M_{\mathtt{R}}(f) \Rightarrow M_{\mathtt{R}'}(f) \text{ è diagonaliizzabile}$$

- Caso contrario, avendo una matrice associata diagonalizzabile allora questo vuol dire che f endomorfismo è diagonalizzabile
DIM: TODO: DA INSERIRE

- Corollario: $f : V \to V$ endormismo è diagonalizzabile nel riferimento $\mathtt{R} \Leftrightarrow$ $M_{\mathtt{R}}(f)$ è anche'essa diagonalizzabile (cominbianzione delle due proprosizioni precendenti)

- Sia $f : V \to V$ endormismo e preso $\underline{v} \in V$ è **autovettore di autovale** $\lambda \Leftrightarrow$
  - $\underline{v} \neq \underline{0}$
  - $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ (proporzionale)

- Se $\underline{v}$ è **autovettore di autovalore** di $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
DIM:
$$f(\underline{v}) = \lambda_1\underline{v} = \lambda_2\underline{v}$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v} = \underline{0}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2$$

15 Lezione 17 - 10/05/2023

15.1 Criteri di Diagonalizzazione

Sia $f : V_n \to V_n$ un endomorfismo è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ V_n ammette una base datta da autovettori.
DIM $\Rightarrow$:
Supponiamo esista un riferimento $\mathtt{R}$ e consideriamo la matrice associata:

$$\exists \mathtt{R} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n) : M_{\mathtt{R}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Andiamo fare l'immagini dei valori del riferimento come combinazione lineare rispetto le colonne

$$f(\underline{e}_1) = a_1\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2 + ...f(\underline{e}_2) = a_2\underline{e}_2...f(\underline{e}_n) = a_n\underline{e}_n$$

Quindi i valori del riferimento sono tutti **autovettori**.

DIM $\Leftarrow$: Supponiamo quindi di avere un riferimento di autovettori TODO: RIASCOLARE AUDIO

15.2 Esercizio: Trovare gli autovalori

Consideriamo il seguendo endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \to (-y, x, z)$$

Prendiamo un riferimento in questo caso quello canonico/naturale:

$$\mathtt{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

Costruiamoci la matrice associate delle immagini per colonna

$$M_{\mathtt{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Andiamo a sotrarre la matrice diagonale con una variabile t:

$$\begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & 0-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

E andiamo a calcolarci il determinante

$$det(\begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & 0-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}) = (1-t)(t^2+1) = 0$$

Quello che ci siamo ricavati è il **polinomio caratteristico**, l'unica sua soluzione è:

$$t = 1 \quad \textbf{unico AUTOVALORES}$$

15.2.1 Trovare Autovettore

Avendo trovato che l'unico autovare è $t = 1$ andiamo a sostiturlo nella matrice associata:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adesso andiamo a considerare il sistema di equazioni omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - y & = 0 \\ x - y & = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è già risolto e quindi l'insieme delle soluzioni è:

$$S = \{(0,0,z)/z \in \mathbb{R}\} =< (0,0,1) >$$

15.3 Autospazio relativo ad autovalore h

Consideriamo il seguente endomorfismo $f : V_n \to V_n$ e h un autovalore, definisco $V(h)$ lo **spazio relativo all'autovalore h**:

$$V(h) = \{\underline{v}/f(\underline{v}) = h\underline{v}\} = \{\{\text{autovettori di autovalore h}\} \cup \{\underline{0}\}\}$$

È un sottospazio vettoriale (dimostazione da fare a casa :()

15.3.1 Proprietà

Elenchiamo le seguenti propietà:

- $dimV(h) \geq 1$ poiché c'è almeno un autovettore
- $V(h)$ isomorfo a $\{X/(A - \underbrace{hI_n}_{M_{\mathbb{R}}(f)})X = 0\} = \overline{S}$ mediante cordinazione associata
- Se $h \neq k$ allora $V(h) \cap V(k) = \{\underline{0}\}$
  DIM:
  Consideriamo $\underline{v} \neq \underline{0} \in V(h) \cap V(k)$, allora può essere autovettore di autovalore di h, k, ma poiché un autovettore può avere un unico e solo autovalore si arriverebbe all'assurdo che $h = k$ quindi $\underline{v} = \underline{0}$ quindi l'intersezioni deve essere vuota.
- Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono autovattore di autovalori $h_1, ..., h_n$ autovalori **distinti**, allora sono **indipendenti**.
  DIM:
  Poniamo per assurdo che non siano indipendenti, allora questo vuol dire che:

$$\underline{v}_1 = a_2\underline{v}_2 + ... + a_n\underline{e}_n$$

$$f(\underline{v}_1) = h_1\underline{v}_1$$

Sviluppiamo mantendendo l'uguaglianza:

$$a_2 f(\underline{v}_2) + ... + .a_n f(\underline{v}_n) = h_1 a_2 \underline{v}_2 + ... + h_1 a_n \underline{v}_n$$
$$a_2 h_2 \underline{v}_2 + ... + a_n h_2 \underline{v}_n = h_1 a_2 \underline{v}_2 + ... + h_1 a_n \underline{v}_n$$
$$a_i h_1 = a_i h_i$$
$$h_1 = h_i$$

Siamo arrivando ad uno assurdo poiché distinti

15.4 Corolarrio

Consideriamo l'endomorfismo $f : V_n \to V_n$ allora:

$$f \text{ ammette n autovalori distinti} \to f \text{ diagonalizzabile}$$

DIM:

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$$

Essendo distinti per quanto visto prima allora sono indipendenti, ma sempre per quanto osservato sono base di V_n, quindi è **diagonalizzabile**

Esempio Consideriamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ quindi $n = 3$

$$(x, y, z) \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Andiamo a calcolare il terminante andando a sottrarre alla diagonale t:

$$det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)(3-t)(2-t)$$

Quindi le soluzioni del polinomio caratteristico sono $t = 1, 2, 3$ essendo $3 = n$ e distinti allora è **diagonalazzabile**

15.5 Molteplicità Algebrica

Considerato un generico polinomio:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra:

$$(x - c_1)...(x - c_n) \in \mathbb{C}$$

Possiano riscriverlo come:

$$(x - c_1)^{n_1} ... (x - c_n)^{n_m}$$

Quindi n_i sarà la nostra molteplicità algebrica

15.6 Relazione Moltiplicità Algebrica e Geometria

Oltre la molteplicità algebrica che indicheremo con $m_a(h)$, defininiamo la **molteplicità Geometrica**, come la dimensione di uno **autospazio relativo ad h**:

$$dimV(h) = m_g(h)$$

Inoltre fissiamo una relazione tra molteplicità algebrica e geometriaìca:

$$1 \leq m_g(h) \leq m_a(h)$$

DIM:
Prendiamo una base di $V(h)$ e completiamola a V_ns

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_e \text{ base di V(h)}$$

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_e, ..., \underline{v}_n \text{ estesa a } V_n$$

Andiamo a prendere un riferimento:

$$\mathtt{R} = (\underline{v}_1, ..., \underline{v}_e, ..., \underline{v}_n)$$

E calcoliamo la matrice associata:

$$M_{\mathtt{R}}(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \ddots & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & h_e & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Consideriamo solo la "sottomatrice" formata dala base fino a $\underline{v}_e$

$$f(\underline{v}_1) = h\underline{v}_1$$

Andiamo a calcolare il determinante:

$$detM_{\mathtt{R}}(f) = \begin{pmatrix} h-t & 0 & 0 \\ 0 & h-t & 0 \\ 0 & 0 & h-t \end{pmatrix} = \underbrace{(h-t)(h-t)...(h-t)}_{\text{l-volte}} - detB$$

(Con $detB$ indichiamo la matrice che siamo andati ad escludere)

$$(h-t)^l * detB$$

Quindi l sarà la nostra molteplicità algebrica, che sarà:

$$m_g(h) \leq l \leq m_a(h)$$

PROPOSIZIONE: Se la molteplicità algebrica è 1 anche quella geometria lo è.

$$m_a(h) = 1 \Rightarrow m_g(h) = 1$$

15.6.1 Esempio

Consideriamo l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Avendo già la matrice associata andiamo a calcolarci il determinante:

$$det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ -1 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)*[(1-t*1-t)+(-1*-1)] = (2-t)*(1-t)^2+1 = -(2-t)^2-t$$

Quindi abbiamo i seguenti autovalori/radici:

$$t = 2 \rightarrow 2 \text{ (molteplicità algebrica)}$$

$$t = 0 \rightarrow 1 \text{ (molteplicità algebrica e geometria)}$$

Dato che non sappiamo il valore geometrico $t = 2$ allora andiamo a calcolarlo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adesso possiamo andare a scrivere il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} -x - y - 2z = 0 \\ -x - y + \ \ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $z = 0 \rightarrow x = -y$, quindi il sistema delle soluzioni è:

$$\overline{S} = \{(-y, y, 0)/y \in \mathbb{R}\} =< (-1, 1, 0) >$$

La dimensione del sottospazio è $dim = 1$
ATTENZIONE: Credo ci siano degli errori, considerarlo solo come metodo di risoluzione e non per i valori.

16 Lezione 18 - 12/05/2023

16.1 Ultimo Criterio di Diagonalizazzione (Completo)

Consideriamo l'endomorfimo $f : V_n \to V_n$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$:

1) Il polinomio caratteristico ha tutte le radici in $\mathbb{R}$
2) La molteplicità algebrica combancia con quella geometrica

DIM:

$$\exists \underbrace{\mathtt{R}}_{\underline{e}_1,...,\underline{e}_n} diV_n/M_{\mathtt{R}}(f) \text{ è diagonale}$$

Sapendo che $f(\underline{e}_1) = a_1\underline{e}_1$ la matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Andiamo a calcolarci il polinomio caratteristico:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} = (a_1 - x)(a_2 - x)...(a_n - x)$$

Essendo diagonale il determinante non è che il prodotto della diagonale.
Il polinomio è già scomposto ed di grado 1, ed ha tutti i fattori reali quindi abbiamo verificato il primo punto.
Andiamo a verificare il secondo punto:
Consideriamo un polinomio di grado massimo n, possiamo riscriverlo nel seguente modo:

$$(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_n - x) = (a_1 - x)^{n_1}...(a_n - x)^{n_m}$$

TODO: RIASCOLTARE AUDIO

DIM $\Leftarrow$: Consideriamo m autovalori e le loro rispettive molteplicità algebriche che combaciano con quelle geometriche:

$$\lambda_1, ..., \lambda_m \text{ autovalori}$$

$$n_1, ..., n_m \text{ moltep. algebrica} = \text{geometria}$$

$$n_1 + ... + n_m = n$$

La **molteplicità algebrica sarà:** $n_1 + ... + n_m = n$
Andiamo a calcolarci quella geometrica, sappiamo che la molt. geo. è compresa tra $1 \leq m_g(h) \leq m_a(h)$, quindi sappiamo che:

$$dim(V(a_1)), ..., dim(V(a_n))$$

Sappiamo che ogni di questi autospazi ci sono gli autovettori:

$$\underline{e}_1, ..., \underline{e}_{i1}$$

16.1.1 Esempio/Esercizi

Consideriamo il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \to (3y, 3x, 3t)$, e consideriamo come sempre il riferimento canonico $\mathtt{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, consideriamo la matrice di passaggio e facciamone il determinante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 0-t & 3 & 0 \\ 3 & 0-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (3-t)(t^2-9) = (3-t)(t-3)(t+3)$$

Avendo trovato il polinomio caratteristico ed avendolo scomposto andiamo a trovare le soluzioni:

$$t = 3, 3$$

$$M_a(-3) = 1 = M_g(-3)$$

$$M_a(3) = 2$$

Andiamo a calcolare la molteplicità geometrica di 3:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il sistema associato:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x & = y \\ & y = y \end{cases}$$

Quindi il sistema delle soluzioni sarà:

$$\overline{S} = \{(y, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}$$

Quindi sappiamo che la $dim = 2$ quindi $< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$ Andiamo a sostituire anche -3 nella matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema associato sarà:

$$\begin{cases} 3x + 3y & = 0 \\ 3x + 3y & = 0 \\ & 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = -y \\ x & = -y \\ & z = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni sarà:

$$\overline{S} = \{(-y, -y, 0)/y \in \mathbb{R}\} =< (-1, -1, 0) >$$

Quindi alla fine:

$$V(3) \uplus V(-3) = \mathbb{R}^3$$

16.2 Diagonalizzazione Matrice

Fin ad ora abbiamo sempre visto la diagonalizzazione degli endomorfismi, invece ora parliamo di matrici.
Come già sappiamo una matrice A è diagona. $\Leftrightarrow\sim$ diagonale. Possiamo dire la matrice associata è diagonalizzabile se o solo se:

$$M(\mathtt{R}) \Leftrightarrow F_A \text{ è diagonal.}$$

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$X \to AX$$

Diamo un paio di definizioni:

Autovettore di A

$$AX = \lambda X \; X \neq 0 \quad F_A(x) = \lambda X$$

Autospazio di λ

$$V(\lambda) = \{X / AX = \lambda X\}$$

Diamo una definizione più corretta:

$$F_A \text{ diagonaliz.} \Leftrightarrow \exists \mathtt{R} = (\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n) \text{ rif. di } \mathbb{R}^n$$

Quindi:

$$M_{\mathtt{R}}(F_A) = D \sim M_{\mathtt{R}}(F_A) = A$$
$$P^{-1}AP = D$$

16.2.1 Esempio/Esercizio

Consideriamo la funzione matriciale $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Consideriamo la matrice A associatà già osservata in precendenza:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Avendo già trovato tutto il necessario dall'esercizio precendente abbiamo:

$$p_x = detA = (3 - t)(t^2 - 9)$$

$$\underbrace{(1, 1, 0), (0, 0, 1)}_{3}, \underbrace{(1, -1, 0)}_{-3}$$

Costruiamo la matrice per colonne:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Quindi la matrice associatà sarà:

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

16.3 Prodotto Diretto (Esterno)

Vediamo di seguito un procedimento per la costruzione di ulteriori spazi vettoriali ed è il concetto di prodotto esterno. Il prodotto che fino ad ora avevamo visto è il prodotto diretto interno (dove abbiamo già lo spazio vettoriale e scrivevamo un prodotto diretto da qualcosa interno allo spazio vettoriale).
Presi due spazi vettoriali V_1, V_2 prendiamo il prodotto cartesiano:

$$V = V_1 x V_2 = \{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)/\underline{v}_1 \in V_1, \underline{v}_2 \in V_2\}$$

Andiamo a definire somma e prodotto esterni:

- $+$:
$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + (\underline{v}_1', \underline{v}_2' = (\underline{v}_1 + \underline{v}_1', \underline{v}_2 + \underline{v}_2')$$
- $\cdot$:
$$h(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (h\underline{v}_1, h\underline{v}_2$$

Possiamo dimostrare che sia un sotto spazio (omesso)

16.3.1 Esempio

$$R_2[x] x M_{2,2}(\mathbb{R})$$

Prendiamo i riferimenti canonici:

$$((a_2x^2 + a_1x + a_0), \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Quindi le basi sono

$$(1,0), (x,0), (x^2,0), (0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), (0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), (0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), (0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Risuleterà essere isomorfo ad $\mathbb{R}^7$ poiché:

$$dim(R_2[x]) + dim(M_{2,2}(\mathbb{R}) = dim(\mathbb{R}^7)$$

$$3 + 4 = 7$$