

Calcolo delle probabilità e Statistica 2022-23 (A. Buonocore)

Indice

1	Lezione 01 - 06/03/2023	2
1.1	Il Gioco della Zara con 2 Dadi	2
2	Lezione 02 - 08/03/2023	4
2.1	Regola Moltiplicativa	4
2.1.1	Esempio Cartellini Camicie	4
2.2	Fattoriale	4
2.3	Coefficiente Binomiale	5
2.4	Coefficiente Multinomiale	5

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.

Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.

2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2 .

Possiamo rappresentare graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	$\xrightarrow{Z_2}$	2	3	4	5	6	7
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)		3	4	5	6	7	8
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)		4	5	6	7	8	9
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)		5	6	7	8	9	10
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)		6	7	8	9	10	11
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)		7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.

Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.

L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.

La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.

Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI**:

$$(f \text{ tondo}) \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.

Z_2^1 (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel seguente modo:

$$Z_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in \mathcal{R})

Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi). Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z_2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z_2} prende il nome di **SPETTRO**.

La possibilità di trovare un numero non appartenente a questo insieme è nulla.

¹Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distinguerlo da un eventuale Z_3 , ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabilità ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2 \text{OCCORRENZE DI } N}{\# \text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO:**

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiamo notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.

Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z = 2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z = 12)$$

$$\mathcal{P}(Z = 3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z = 11)$$

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z = 10)$$

$$\mathcal{P}(Z = 5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z = 9)$$

$$\mathcal{P}(Z = 6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z = 8)$$

$$\mathcal{P}(Z = 7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioè ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.

Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2 * \left(\frac{1}{36}\right) + 2 * \left(\frac{3}{36}\right) + 2 * \left(\frac{5}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2 * \left(\frac{2}{36}\right) + 2 * \left(\frac{4}{36}\right) + 1 * \left(\frac{6}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

²# indica la cardanaltà, è usato come sostituto di ||

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Regola Moltiplicativa

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * \dots * n_r$$

Dove $i = 1, 2, \dots, r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprocedura i -sima.

2.1.1 Esempio Cartellini Camicie

Vogliamo sapere quanti cartellini delle camicie dobbiamo fabbricare avendo i seguenti dati: 4 Taglie, 2 Foggie, 7 Colori.

Usando la regola moltiplicativa poniamo $r = 3$ avendo tre possibili varianti, $n_1 = 4$ per le taglie, $n_2 = 2$ per le foggie, $n_3 = 7$ per i colori, ora calcoliamo il totale:

$$n = n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 2 * 7 = 56 \quad \text{CARTELLINI}$$

2.2 Fattoriale

Il fattoriale di $n \geq 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precedenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{SE } n = 0 \\ n * (n - 1)! & \text{SE } n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{aligned} 6! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \\ \frac{13!}{11!} &= \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156 \\ \frac{n!}{(n-1)!} &= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \end{aligned}$$

2.3 Coefficiente Binomiale

Presi nek con $k \leq n$, possiamo definire il coefficiente binomiale in questo modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esempio:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{6^3 * 5}{2} = 3 * 5 = 15$$

Proprietà:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Esempio:

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! * (12-4)!} = \frac{\cancel{12^3} * 11 * \cancel{10^5} * 9 * \cancel{8!}}{2 * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5 * 9 * 11 = 495 = \frac{12!}{8! * (12-8)!} = \binom{12}{8}$$

\parallel
 $8!$

\parallel
 $4!$

Proprietà: Se $k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Esempio:

ESEMPIO QUI

Proprietà:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Esempio con $n = 6, k = 3$:

$$\binom{7}{3} = \frac{7 * \cancel{6} * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{3!} * \cancel{4!}} = 7 * 5 = 35 = 20 + 15 = \frac{\cancel{2} * \cancel{3} * 4 * 5 * \cancel{6}}{\cancel{6} * \cancel{6}} + \frac{\cancel{6}^3 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{2} * \cancel{4!}} = \frac{6!}{3! * 3!} + \frac{6!}{2! * 4!} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$

2.4 Coefficiente Multinomiale

Sia n un intero positivo e n_1, n_2, \dots, n_r interi tali che $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, possiamo scrivere il coefficiente multinomiale in questo modo:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_r!}$$

Esempio:

$$\binom{7}{2, 3, 2} = \frac{7!}{2! * 3! * 2!} = \frac{7 * 6 * 5 * \cancel{4} * \cancel{3!}}{\cancel{4} * \cancel{3!}} = 210 \quad (2 + 3 + 2 = 7)$$