Geometria 2022-23 (Trombetti)

Indice

1 Lezione 01 - XX/03/2023

1.1 Definizioni di base

1.1.1 Prodotto Cartesiano

Presi $S, T \neq \emptyset$, possiamo definire il prodotto cartesiano:

$$SxT = \{(s,t)/s \in S, t \in T\}$$

$$S^2 = SxS = \{(s,t)/s \in S, t \in T\}$$

Da non confendere con la definizione di diagonale: $S^2 = SxS = \{(s,s)/s \in S\}$.

1.1.2 Coppie

La definizione di coppia è la seguente:

$$(s,t) = \{\{s,t\},\{s\}\}$$

Negli insiemi l'ordine non conta $\{s,t\} = \{t,s\}$, invece nelle coppie è rilevante, infatti due coppie sono uguali se e solo sono ordinatamente uguali:

$$(s,t) = (s',t') \Leftrightarrow s = s', t = t'$$

Andiamo a dimostrare questa affermazione:

- DIM $\Leftarrow$: BANALE
- DIM $\Rightarrow$ $(s,t) = (s',t') \Leftrightarrow \{\{s,t\},\{s\}\} = \{\{s',t'\},\{s'\}\}$
  Ragioniamo per casi:

  a SE $s = t$:

  $$\text{Sx:}\{\{s,t\},\{s\}\} \Rightarrow \{\{s,s\},\{s\}\} \Rightarrow \{s\}$$
  $$\text{Dx:}\{\{s',t'\},\{s'\}\} \Rightarrow \{\{s',s'\},\{s'\}\} \Rightarrow \{s'\}$$

  b SE $s \neq t$:
  Usiamo le definizioni di uguaglianza tra insiemi:

  $$\{s\} = \{s'\} \Rightarrow s = s'$$

  $$\{s,t\} = \{s',t'\} \wedge s = s' \quad \Rightarrow t = t'$$

1.1.3 Operaziona Interna

1.1.4 Operaziona Esterna

1.1.5 Prodotto Scalare Standard

1.1.6 Matrice in R

2 Lezione 04 - 17/03/2023

2.1 Spazi Vettoriali su R

Sia V un insieme non vuoto, definiamo due operazioni:

Interna $+ : VxV- > V$ (somma vettoriale)

Esterna $\cdot : RxV- > V$ (scalare per un vettore) R è campo

Posto $(V, +, \cdot)$ si dice **spazio vettoriale su R** $\Leftrightarrow$

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano, quindi:
   Associatività
   Commutatività
   Neutro
   Tutti gli elementi invertibili
2. $\forall \underline{v} \in V$ tale che $\underline{v} \cdot 1 = \underline{v}$ (associtività mista)
3. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
4. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $(h + k) \cdot \underline{v} = h \cdot \underline{v} + k \cdot \underline{v}$ (distrub. tra $\cdot$ e $+$ in R)
5. $\forall h, k \in R$, $\forall \underline{v} \in V$ tale che $h(\underline{v} + \underline{w}) = h \cdot \underline{v} + h \cdot \underline{v}$ (distrub. tra $\cdot$ e $+$ in V)

2.2 Esempi Spazi Vettoriali

2.2.1 Spazio Vettoriale numerico di ordine n

Verifichiamo che $(R^n, +, \cdot)$ sia uno spazio vettoriale, ma prima facciamo un esempio:

$$(1, 2, 3) + (0, 1, 2) = (1, 3, 5) \qquad 3(3, 2, 4) = (9, 6, 12)$$

Andiamo a verificare che sia spazio vettoriale:

1. $(R^n, +)$ gruppo abeliano:
   * Associatività e Commutatività banalmente eraditati da +
   * Neutro: $\underline{0} = (0, 0, ..., 0)$
   * Inverso: $-(x_1, ..., x_n) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$
2. Banale ereditatà di $\cdot$
3. $(hk)(x_1, ..., x_n) = (hkx_1, ..., hkx_n) = h(kx_1, ..., kx_n) = h(k(x_1, ..., x_n))$
4. DA DIMOSTARE
5. DA DIMOSTARE

2.2.2 Spazio Vettoriale di una matrice di ordine m,n

Possiamo considerare $(M_{m,n}(R), +, \cdot)$ come una lunga riga, quindi si accomuna al caso precedente.

2.2.3 Spazio Vettoriale polinomiale

2.2.4 Spazio Vettoriale polinomiale di al più n

2.2.5 Spazio Vettoriale dei vettori geometrici in un punto O

3 Lezione 05 - 22/03/2023

3.1 Spazi Vettoriali del Vettore Geometrico libero

3.2 Propietà Spazi Vettoriali

Preso $(V, +, \cdot)$ Spazio Vettoriali andiamo a definire le sugueni propietà:

1) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{z} \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w} = \underline{z} + (-\underline{w})$
   Dim:
   Sommiamo l'opposto di $\underline{w}$ ambi i membri:
   $$(\underline{v} + \underline{w}) + (-\underline{w}) = \underline{z} + (-\underline{w}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$$

2) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ **NEUTRO**

3) $\forall \underline{v} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$
   $$0 \cdot \underline{v} = \underline{0} = h \cdot \underline{0}$$
   Dim primo lato:
   $0 \cdot \underline{v} = (0 + 0)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} + 0 \cdot \underline{v} \Rightarrow 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$
   Dim secondo lato:
   $h \cdot \underline{0} = h \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = h \cdot \underline{0} + h \cdot \underline{0} \Rightarrow h \cdot \underline{0} = \underline{0}$

4) $\forall \underline{v} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$ **Legge annullamento del prodotto**
   $h\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow h = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}$
   Dim $\Leftarrow$: Vale per la 3)
   Dim $\Rightarrow$: $h \cdot \underline{v} = \underline{0}$
   Poniamo $h \neq 0$ e moltiplichiamo ambi i membri per h^{-1}:
   $h^{-1}(h \cdot \underline{v}) = h^{-1}\underline{0} \Rightarrow (h^{-1}h)\underline{v} = \underline{v}$

5) $h(-\underline{v}) = -(h\underline{v}) = (-h)\underline{v}$
   Dim: $(-h)\underline{v} = -(h\underline{v})$: Dobbiamo dimostare che sia opposto, quindi:
   $(-h)\underline{v} + h\underline{v} = 0$
   $(-h + h)\underline{v} = 0\underline{v}$
   Dim: $h(-\underline{v}) = -(h\underline{v})$
   $h(-\underline{v}) + h\underline{v} = h(-\underline{v} + \underline{v}) = h \cdot \underline{0} = \underline{0}$

6) $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ Corollario immediato

7) $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{z} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{z})$
   Dato che l'associatività si può sempre ridurre a due elementi, possiamo assumere la associatività generalizzata, questo ci permette di omettere le parentesi.

8) Lo stesso concetto del punto 7) si può applicare per la commutatività, quindi se vale per due elementi vale anche per n elementi, quindi possiamo ordinare gli elementi come ci pare.

9) Stesso concetto del punto $7)e8)$ vale anche per la distrubitività.

3.3 Proporzionalità

Presi $\underline{v}, \underline{w} \in V$ **si dicono proporzionali** $\Leftrightarrow$

$$\exists h \neq 0 \quad \underline{v} = h\underline{w}$$

La proporzionalità è una **Relazione di Equivalenza**, quindi valgono le tre propietà:

Riflessiva: $\underline{v} = 1\underline{v}$

Simmetrica: $\underline{v} = h\underline{w} \Rightarrow h^{-1}\underline{v} = \underline{w}$

Transitiva: $\underline{v} = h\underline{w}$ e $\underline{w} = k\underline{z} \Rightarrow \underline{v} = h(k\underline{z}) = (hk)\underline{z}$ $(h, k \neq 0)$

3.3.1 Esempi

Indicheremo con la tilde $\sim$ la proporzionalità.

R^3

$$(1,2,0) \sim (2,4,0)$$
$$(1,2,0) \nsim (0,0,0)$$

Rx

$$1 + x^{40} \sim 2 + 2x^{40}$$

3.4 Combinazione Lineare

$\underline{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ $\Leftrightarrow$

$$\exists h_1, ..., h_n \in \mathbb{R} : \ \underline{v} = h_1 \cdot \underline{v}_1 + ... + h_n \cdot \underline{v}_n$$

(Sia i vettori $\underline{v}$ che gli scalari h possono essere diversi tra loro)

3.4.1 Esempi

R^3

$$(1,2,1) \text{ è combinazione lineare } (2,4,2) \text{ con } h = 2$$

R^2

$$(1,2) \text{ è combinazione lineare di } (1,1), (0,1)$$
$$(1,2) = 1(1,1) + 1(0,1)$$

R^3

$$(1,2,1) \text{ è combinazione lineare di } (1,2,0), (0,1,1), (1,1,1)?$$
$$(1,2,1) = x_1(1,2,0) + x_2(0,1,1) + x_3(1,1,1)$$

Come possiamo notare in questo caso non è immediato trovare la soluzione, quindi possiamo ricorrere a un sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} \quad ... \\ 2x_1 \quad = 1 \\ \quad ... \end{cases} \begin{cases} \quad ... \\ x_1 \quad = \frac{1}{2} \\ \quad ... \end{cases} \begin{cases} x_3 + \frac{1}{2} = 1 \\ \quad ... \\ \quad ... \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rx $1+x+x^2$ è combinazione lineare di $1+x, 1+x^2$

$$1+x+x^2 = h(1+x)+k(1+x^2) = kx^2+hx+(h+k)$$

$$\begin{cases} h+k=1 \\ h \quad\quad =1\ Nonhasoluzione \\ \quad\quad k=1 \end{cases}$$

3.5 SottoSpazi Vettoriali

Preso V spazio vettoriale, e $H \subseteq V$. Dim:

H stabile (chiuso) rispetto a $+$

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in H \Rightarrow \underline{v}+\underline{w} \in H$$

H stabile (chiuso) rispetto a $\cdot$

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H\ h\underline{v} \in H$$

H sottospazio vettoriale se è stabile + e $\cdot$

$+_H$: $HxH->H$ $(\underline{v}, \underline{w})->\underline{v}+_v \underline{w}$

$\cdot_H$: $\mathbb{R}xH->H$ $(h, \underline{v})->h \cdot_v \underline{v}$

Per semplicità d'ora in poi ometteremo i pedici, quindi ora dimostriamo che $(H, +, \cdot)$ sia sottospazio vettoriale:

- $(H, +)$ gruppo abeliano
  Commutativa: $\underline{v}+_h \underline{w} = \underline{v}+_v \underline{w} = \underline{w}+_v \underline{v} = \underline{w}+_h \underline{v}$
  Associtività: IDEM
  Neutro: $\underline{v} \cdot 0 = \underline{0} \in H$ Poiché stabile
  Opposto: $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$
- $1 \cdot_h \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
- Distrubitività 1: DA FARE
- Distrubitività 2: DA FARE

IL VETTORE NULLO C'È SEMPRE!!!

3.5.1 SottoSpazi Banali

D'ora in poi indicheremo i sottospazi con $\leq$, esistono sempre due sottospazi banali:

1) $(\{\underline{0}+, \cdot\})$ $\{\underline{0}\} \leq V$
2) $V \leq V$ Estremamente banale

DA CHEKKARE: Ricordare anche che l'unico sottospazio finito possibile è $\{\underline{0}, \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\} = \{\underline{0}\}$

3.5.2 Esempi

Per dimostare che un insieme sia sottospazio bisogna sempre verificare che sia **non vuoto**, **stabile rispetto a + e ·**

R^3

$$H_1 = \{(x, y, z) \in R^3/x = y\}$$

[1]

Non vuoto: banale

Stabile +:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Rispetta le propietà poiché $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ essendo $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$

Stabile ·:

$$h(x_1, y_1, z_1) = (hx_1, hy_1, hz_1)(hx_1 = hy_1)$$

$R_{2,2}$

$$\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\} \leq \mathbb{R}^2$$

Questo insieme non è sottospazione vettoriale poiché non è stabile +:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin$$

R^3

$$H = \{(x, y, z) \in R^3/x = y^2\} \leq R^3$$

Non è lineare quindi molto probabilmente non è sottospazio:

Controesempio: $(2, 4, 0) + (3, 9, 0) = (5, 15, 0)$ **MA** $5 = 15 \neq 5^2$

R^3

$$H = \{(x, y, z) \in R^3/x + y + z = 1\} \leq R^3$$

Non è omogeneo quindi molto probabilmente non è sottospazio:

Controesempio $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ **MA** $1 + 0 + 1 \neq 1$

$R_2x \leq R_3x \leq ... \leq Rx$

$$\{p(x) \in R_4x/\text{grado}p(x) = 3\}$$

Il neutro ha necessariamente grado diverso da 3 quindi non può essere sottospazio

[1] Truchetto per gli esercizi: se un sottospazio è costituito da un equazione ed è lineare ed omogenea quasi sempre è sottospazio caso contrario no

- $$\{p(x) \in R_4 x / \text{grado} p(x) = 3 \text{oppure grado } p(x) = 0\}$$
  Ora ammette neutro ma non è comunque stabile poiché $(x^3 + 3) + (-x^3 + 5) = 8 \neq H$

- $$\{P(x) \in Rx / p(-x) = p(x)\}$$
  Stiamo considerando tutti i polinomi pari poiché $-x^{n \text{pari} = x^n}$
  È sottospazio poiché la somma tra pari rimane pari, idem il prodotto.

Caso particolare

$$\{(0, x)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(y, 0)/y \in \mathbb{R}\} \underline{\leq} \mathbb{R}^2$$

Questo non è sottospazio vettoriale poiché non è stabile rispetto al + poiché $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin$
Però presi singolarmente sono sottospazi ma la loro unione no.

4 Lezione 06 - 24-03-2023

4.1 Propietà Sottospazio Vettoriale

a somma di n oggetti Siano $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n \in W$ si ha $w_1 + w_2 \in W \Rightarrow$

sottospazi vettoriali Sia $\mathbb{L}$ una famiglia di sottospazi di V, l'intersezione dei sottospazi della famiglia $\mathbb{L}$ è un sottospazio e si indica:

$$\bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$$

L'intersezione di una qualunque famiglia di sottospazi è un sottospazio.
Dimostriamolo:

Neutro: Il neutro è un elemento comune, quindi è sempre contenuto.

Stab +: Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L \Rightarrow \forall L \in \mathbb{L} \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$

Stab $\cdot$: Siano $\underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L, h \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall L \in \mathbb{L} \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathbb{L}} L$

4.2 Sottospazio Generato

Sia $S \subseteq V$, indicheremo con $< S >$ il **sotto spazio generato da S**.

$$< S >= \bigcap_{L \in \mathbb{L}_s} L$$

$$\mathbb{L}_s = \{W \leq V / S \subseteq W\}$$

Intersezione dei sottospazi di V che contengono S

In altri termini: è il più piccolo sottospazio rispetto all'intersezione.

4.2.1 Esempi

Poniamo $H \leq V$

- $< H >= H$ SEMPRE!
- $< \{\underline{0}\} = \{\underline{0}\}$
- $< V >= V$
- $< \emptyset >= 0$ Singleton dell'elemento neutro, poiché appartiene ad ogni elemento.

4.3 Casi di Sottospazi Generati

$S = H \cup K$ con $H, K \leq V$

$$< H \cup K >= H + K = \{\underline{h} + \underline{k} / \underline{h} \in H, \underline{k} \in K\}$$

Dim: Come sempre per dimostrare l'uguaglianza dobbiamo dimostare la doppia inclusione:

$$< H \cup K > \subseteq \textbf{ al contrario } H + K = \{\underline{h} + \underline{k} / \underline{h} \in H, \underline{k} \in K\}$$

non ho capito

Dimostriamo che sia spazio vettoriale:

Neutro

$$\underline{0} = \underline{0}^{\text{preso da H}} + \underline{0}^{\text{preso da K}}$$

Stabile +

$$(\underline{h} + \underline{k}) + (\underline{h}^{'} + \underline{k}^{'}) \in H + K$$
$$(h + h^{'}) + (k + k^{'})$$

Stabile ·

$$\alpha(\underline{h} + \underline{k}) = \alpha\underline{h} + \alpha\underline{k}$$

4.3.1 Esempio

$$H = \{(0, k)/x \in \mathbb{R}\} \quad K = \{(y, 0)/y \in \mathbb{R}\}$$
$$< H \cup K >= H + K = (0 + y, x + 0) = \mathbb{R}^2$$

4.4 Propietà Sottospazio Generato

Posto $H, K \leq V$, allora valgono le seguenti propietà:

- $H \oplus K$ **si dicono in somma diretta se** $H \cap K = \{\underline{0}\}$ (neutro)
- $H + K = V$ allora H, K si dicono supplementari
- $H \oplus K = V$ allora si dicono complementari (in altri termini devono essere in somma diretta e supplementari).[2]

4.4.1 Esempio

Posti $\{\underline{0}\}$ e V:

Somma diretta: $\{\underline{0}\} \oplus V = \{\underline{0}\} \cap V = \{\underline{0}\}$

Supplementari: $\{\underline{0}\} + V = V$

Complementare: Dato che è sia somma diretta che supplementare

In generale, $H \leq K \Rightarrow H + K = K$

Ponendoci in $\mathbb{R}^3[x]$ e presi $\mathbb{R}^2[x], \mathbb{R}^3[x] \leq \mathbb{R}^3[x]$, possiamo dire:

- NON Somma diretta: $\mathbb{R}^2[x] \oplus \mathbb{R}^3[x] \neq \{\underline{0}\}$
- Supplementari: $\mathbb{R}^2[x] + \mathbb{R}^3[x] = \mathbb{R}^3[x]$
- Complementari: no poiché manca la somma diretta.

[2]È un concetto un po' strano, perché vuol dire somma normale (quindi caso 2), ma ricordandoci che l'intersezione da il neutro (quindi caso 1)

Ponendoci invece $\mathbb{R}^4[x]$ e presi $\mathbb{R}^2[x], \mathbb{R}^3[x] \leq \mathbb{R}^3[x]$, possiamo dire:

- NON Somma diretta: $\mathbb{R}^2[x] \oplus \mathbb{R}^3[x] \neq \{\underline{0}\}$
- NON Supplementari: $\mathbb{R}^2[x] + \mathbb{R}^3[x] = \mathbb{R}^3[x] \neq \mathbb{R}^4[x]$
- Complementari: no poiché manca la somma diretta.

4.5 Dipendenza/Indipendenza Lineare

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v} \in V$, sono detti **linearmente dipendenti** (o legati) $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \neq (0, 0, ..., 0) = \alpha_1 \underline{v_1} + ... + \alpha_n + \underline{v}_n = \underline{0}$$

La loro combinazione lineare deve essere il vettore nullo. Se tali scalari non esistono allora si dice che sono **linearmente indipendenti** (o liberi), l'unica soluzione valida è quella formata da tutti zero: $0\underline{v}_1 + ... + 0\underline{v}_n = \underline{0}$.

Se non sono dipendenti $\Rightarrow$ Sono indipendenti

4.5.1 Esempio

Posto $\mathbb{R}^2$ facciamo i seguenti esempi:

$(1, 1), (1, 0), (3, 0)$ **sono dipendenti** $0(1, 1) + (-3)(1, 0) + 1(3, 0) = (0, 0)$

$(1, 1), (1, 0)$ **sono indipendenti** $x(1, 1)+y(1, 0) = (0, 0)$ MA unica soluzione possibile (0,0) quindi so

4.6 Propietà dipendenza lineare

1) $\underline{0}$ dipende sempre da qualunque sistema

$$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + ... + 0\underline{v}_n$$

2) Sia $\underline{v}$ dipendente da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ e ciascun $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_m \Rightarrow \underline{v}$ dipende da $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_m$ [3]
Dim:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_n \underline{v}_n \text{ (dipende come da tesi)}$$
$$\forall i,\ \underline{v}_i = \beta_{i,1} \underline{w}_1 + ... + \beta_{i,m} \underline{w}_n \text{(ogni } v_i \text{ dipende a sua volta da un } w_i\text{)}$$
$$\underline{v} = \alpha_1(\beta_{i,1}\underline{w}_1 + ... + \beta_{i,m}\underline{w}_n) + ... + \alpha_n(\beta_{n,1}\underline{w}_1 + ... + \beta_{n,m}\underline{w}_n)$$
$$\underline{v} = \gamma_1 \underline{w_1} + ... + \gamma_m \underline{w}_m \text{(compattiamo)}$$

3) $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$

$$\underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + ... + 0\underline{v}_n$$

[3] Una specie di transitività della dipendenza

4) $\underline{v}, \underline{w}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \Rightarrow \underline{v} + \underline{w}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$
Dim:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_n \underline{v}_n$$
$$\underline{w} = \beta_1 \underline{w}_1 + ... + \beta_n \underline{w}_n$$
$$\underline{v} + \underline{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)\underline{v}_n$$

5) $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \Rightarrow h\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$

4.7 Relazione con la Generazione

Posti $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \in V$ allora:

$$< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n >= \{h_1 \underline{v}_1, ..., h_n \underline{v}_n / h_i \in R\} \text{ \textbf{Copertura Lineare}}$$

In altre parole:

$$\underline{v} \in < \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n > \text{ se } \underline{v} \text{ dipende dai vettori } \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$$

Dim sottospazio:

- Neutro: vale per la 1)
- Stabile +: vale per la 4)
- Stabile $\cdot$: vale per la 5)

4.7.1 Esempio

boh non si è capito nulla in classe

5 Lezione 07 - 29/03/2023

5.1 Sottospazi Equivalenti

Siano $S_1, S_2 \leq V$ si dicono **equivalente** se e solo se generano lo stesso sottospazio vettoriale quindi:

$$\Leftrightarrow < S_1 > = < S_2 >$$

($< S_1 >, < S_2 >$ si dicono sistema di generatori)

5.1.1 Esempi

Presi $\underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w}$ equivale a $\underline{v}, \underline{w}$?
Dobbiamo andare a verificare che ogni elemento di S_1 si possa scrivere come combinazione lineare di S_2, quindi dobbiamo andare a verificare la doppia inclusione.
In questo possiamo notare come vale l'equivalenza poiché, possiamo levare la doppia ripetizione di $\underline{v}$ dal S_1, e $\underline{0}$ essendo il neutro deve essere necessariamene presente per essere sottospazio, quindi vale la doppia inclusione.

Ponendoci in $\mathbb{R}^3$ consideriamo il seguente sottospazio:

$$< (1, 2, 1), (2, 4, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 50) >$$

Possiamo notare come $(2, 4, 2)$ e $(1, 2, 50)$ sono combinazioni lineari, questo ci permette di eleminarli, quindi:

$$< (1, 2, 1), (0, 0, 1) > \quad \textbf{Base}$$

Questi due elementi sono indipendenti poiché l'unica combinazione possibile è $h = k = 0$.

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ come sempre possiamo considerare la matrice come una lunga riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 49 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni di riga (E_1, E_2, E_3, E_4) mantendono i sottospazi.
Le righe non nulla di una matrice sono sempre sistemi indipendenti.
Poniamoci in $\mathbb{R}_2[x]$ e prendeniamo:

$$< x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 4x + 2, 1, x^2 + 2x + 50 >$$

Possiamo consideraro anche solo i termini senza le incognite:

$$< (1, 2, 1), (2, 4, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 50) >$$

Possiamo portarla in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 50 \end{pmatrix}$$

E possiamo portarla a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quello che ci viene alla fine è:

$$< x^2 + 2x + 1, 1 >$$

5.2 Osservazioni sulla in/dipendenza

5.2.1 Dipendenza

Sia $v_1, ..., v_n \in V$ [4] sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \exists i : \underline{v}_i$ dipende dai rimanenti.
Dim:
Per ipotesi sappiamo:

$$\exists h_1, ..., h_n \neq (0, 0, ...0) : h_1\underline{v}_1 + ... + h_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

Supponiamo $h_1 \neq 0$ allora:

$$\underline{v_1} = h_1^{-1}(-h_2\underline{v}_2 + ... + (-h_n)\underline{v}_n)$$

Quindi $\underline{v}_1$ è combinazione lineare di $\underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ quindi dipende da questi vettori.
(vale anche il viceversa).

5.2.2 Indipendenza

Per scrivere l'indipendenza ci basta unicamente fare il negato della dipendenza:
$v_1, ..., v_n \in V$ sono indipendenti $\Leftrightarrow \forall \underline{v}_i : \underline{v}_i$ non dipende da: $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$

5.2.3 Propietà

Sia V spazio vettoriale, definiamo le seguenti propietà:

- Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ dipendono aggiungere $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n$ fa rimanere la dipendenza.
- Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n, \underline{w}_1, ..., \underline{w}_n$ sono indipendenti allora andando a restringere a $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ rimane indipendente.
- Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono indipendenti allora c'è **l'unicità di scrittura**.

$$\underline{v} = h_1\underline{v}_1, ..., h_n\underline{v}_n$$

$$\underline{v} = k_1\underline{v}_1, ..., k_n\underline{v}_n$$

$$\Rightarrow h_1 = k_1$$

[4] Consideriamo $n \geq 2$ perché se $n = 1$ i casi di riducono unicamente a: $\underline{v} \neq \underline{0}$ indipendente e $\underline{v} = \underline{0}$ dipendente

Dim:
Spostiamo tutto da un lato e raggrupiamo:

$$(h_1 - k_1)\underline{v}_1 + ... + (h_n - k_n)\underline{v}_n = \underline{0}$$

$$h_i - k_i = 0 \Leftrightarrow h_i = k_i$$

- Presi $W_1, W_2 \leq V$ e per ipotesi in somma diretta $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ e presi $\underline{0} \neq \underline{v} \in W_1$ e $\underline{0} \neq \underline{w} \in W_2$ allora $\underline{v}$ e $\underline{w}$ **sono indipendenti**.
  Dim:

  da aggiungere

- Generalizziamo il caso precendente considerando $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ cioé $W_1 \cap (W_2 + ... + W_n) = \{\underline{0}\}$ e prendiamo un vettore a loro corrispondente diversi da zero, diremo $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ che sono indipendenti.
  Dim:

  $$h_1\underline{v}_1, ..., h_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

  Spostiamo tutto da un lato:

  $$\underset{\underset{W_1}{\shortparallel}}{h_1\underline{v}_1} = \underset{\underset{W_2+...+W_n}{\shortparallel}}{-h_2\underline{v}_2 + ... + (-h_n\underline{v}_n)} = \underline{0}$$

  $$h_1\underline{v}_1 = \underline{0} \Rightarrow h_1 = 0$$

- La somma diretta implica l'unicità di scrittura