Calcolo delle probabilità e Statistica 2023-24
(G. Caputo)

Indice

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.
Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.
2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2.
Possiamo rappresentiamo graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\xrightarrow{Z_2}$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.
Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.
L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, .., 6\} = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.
La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.
Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI:**

$$\text{(f tondo) } \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.
Z_2[1] (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel suguente modo:

$$Z_2 : \Omega \to \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in $\mathcal{R}$)
Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).
Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z2} prende il nome di **SPETTRO**.
La possibilità di trovare un numero non appartente a questo insieme è nulla.

[1] Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distunguirlo da un eventuale Z_3, ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabiltà ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2\text{OCCORRENZE DI N}}{\#\text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\# Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO:**

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{\# Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1,3),(2,2),(3,1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiano notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.
Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z = 2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z = 12)$$

$$\mathcal{P}(Z = 3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z = 11)$$

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z = 10)$$

$$\mathcal{P}(Z = 5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z = 9)$$

$$\mathcal{P}(Z = 6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z = 8)$$

$$\mathcal{P}(Z = 7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioé ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.
Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2 * (\frac{1}{36}) + 2 * (\frac{3}{36}) + 2 * (\frac{5}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2 * (\frac{2}{36}) + 2 * (\frac{4}{36}) + 1 * (\frac{6}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazzione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

[2] # indica la cardanalità, è usato come sostituto di $\|$

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * ... * n_r$$

Dove $i = 1, 2, ..., r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprecedura i-sima.

2.2 Esempio Ristorante

Vogliamo sapere quante possibili combinazioni di menù un ristorante può avere date:

- 3 Antipasti (n_1)
- 4 Primi (n_2)
- 3 Secondi (n_3)
- 2 Dolci (n_4)
- Poniamo $r = 4$

Il numero di combinazione possibile è:

$$n_1 * n_2 * n_3 * n_4 = 3 * 4 * 3 * 2 = 72$$

2.3 Fattoriale

Il fattoriale di $n \geq 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precendenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 \quad \text{SE} \quad n = 0 \\ n * (n-1)! \quad \text{SE} \quad n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$
$$\frac{13!}{11!} = \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156$$

2.4 Coifficiente Binomiale

Presi n e k con $k \leq n$, definiamo il cofficiente binomiale in questo modo (n su k):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{\cancel{6}^3 * 5}{\cancel{2}} = 3 * 5 = 15$$

2.4.1 Calcolare sottoinsiemi con C.B.

Un possibile uso del coifficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.
Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con cardilinità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{\cancel{4}^2 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2} * \cancel{2!}} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \;\; \#T = 6$$

2.4.2 Propietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune propietà del coifficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Propietà 01

$$\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} * \underbrace{(5-5)!}_{0!=1}} = 1$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{\cancel{5!}}{1 * \cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1$$

Propietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * \underbrace{(5-4)!}_{1}} = 5$$

Propietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

DIM:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! * (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! * (\cancel{n} - \cancel{n} + k)!} = \frac{n!}{(n-k)! * k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{12}{4} = \underset{\substack{\| \\ 8!}}{\frac{12!}{4! * (12-4)!}} = \frac{\cancel{12}^3 * 11 * \cancel{10}^5 * 9 * \cancel{8!}}{\cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5*9*11 = 495 = \underset{\substack{\| \\ 4!}}{\frac{12!}{8! * (12-8)!}} = \binom{12}{8}$$

Propietà 04 Se $n \in \mathtt{N}_0 \quad 1 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distungere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezioni.

2.6 Tartaglia

Applicando le propietà sul coifficienti binomiali è possibile costruire la tabella di Tartaglia:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 3 & 3 & 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & * & * & * & * \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & * & * & * \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & * & * \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & * \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Il valore dell'elemento di riga (x_i, y_i) viene calcolato dalla somma tra gli elementi di coordinata $(x_i, y_i - 1) + (x_i - 1, y_i - 1)$ della riga precedente $y - 1$.
Ogni riga di Tartaglia rappresenta i coefficienti di $(a + b)^n$
Esempio per 2: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Andando a generalizzare:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Proposizione La somma degli elementi della $n-$esima riga vale 2^n

3 Lezione 03 - 13/03/2023

3.1 Disposizioni

Disposizione: è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.
Per calcolare tutte le k-disposizioni con ripetizione di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Per calcolare tutte le k-disposizioni semplici di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$$

(n cardinalità dell'insieme, k la lunghezza della disposizione)

3.1.1 Esempio del gioco del Tris (Disposizione Semplice)

Dati:

- 9 Cavalli in gara $\Rightarrow$ Alfabeto costituito da 9 valori $S = \{C_1, ..., C_n\}$
- Si punta sul podio del cavallo quindi quante terne di cavalli posso avere **senza ripetizione** e **con ordine**.

Se un cavallo esce dalla terna allora non potrà ripresentarsi nella prossima posizione, quindi **senza ripetizione**.
Dunque quante sono le sequenze lunghe k ($\leq n$) composte dai simboli dell'alfabeto S.
Generalizzando abbiamo:

$$D_{n,k} = n(n-1)...(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$$

Questo tipo di calcolo combinatorio è chiamato **Disposizione /(semplice)**.

3.1.2 Esempio Totocalcio (Disposizione con Ripetezione)

Consideriamo le schedine Totocalcio, in cui abbiamo n righe in cui si può scomettere su due squadre, l'alfabeto è composta da:

$$S = \{1, x, 2\}$$

Quante sono tutte le schedine del totocalcio che si possono costruire sapendo che ci sono 11 partite?
Ogni scomessa può avere 3 valori possibili, quindi abbiamo 11 caselle con ognuna 3 possibili varianti.
Dato che **l'ordine conta** parliamo di **disposizioni** e le ripetizione sono ammesse, quindi possiamo usare la "vecchia" regola moltiplicativa cioé: n^k, quindi le disposizione con ripetizione:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k = 3^11 = 177147$$

3.1.3 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili di dispozioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme $S = \{c, a\}$, poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.
Quindi $n = \#S = 2$ e $k = 2$, allora:

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c,c),(a,a),(c,a),(a,c)\}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c,a),(a,c)\}$$

3.2 Permutazioni

Ogni n-disposizione semplice è detta una permutazione degli n elementi di S (Possiamo considerare le permutazioni un caso speciale delle disposizioni semplici, cioè avviene quando $n = k$)

$$(se\ k = n) \quad P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{\underset{\underset{0!=1}{\parallel}}{(n-n)!}} = n!$$

3.3 Permutazioni con Ripezioni

Sia $n = k_1 + k_2 + ... + k_r$, Una n-selezione di S avente k_1 elementi uguali al primo elemento di S, k_2 elementi uguali al secondo elemento di S e cosi via fino a k_r è detta una $(k_1, k_2, ..., k_r)$-permutazioni con ripetizioni.
Il numbero di tutte le $(k_1, k_2, ..., k_r)$-permutazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$P^{(r)}_n = \frac{n!}{k_1! * k_2! * ... * k_r!} = \binom{n}{k_1, ..., k_r} \ (k_1 + ... + k_r) = r$$

3.4 Esempi Permutazioni

$$S = \{A, I, O, S\} \ \#S = 4 \ k = n = 4$$

Possiamo formare varie parole: OASI, SAIO, SOIA..., possiamo calcolarle:

$$P_4 = 4! = 24$$

Poniamo caso che vogliamo sapere le possibili combinazioni di $STATISTICA$, possiamo notare che più lettere si ripetono quindi mettiamo al denomitore il numero di volte che la lettere che si ripete al fattoriale, per calcore dobbiamo usare:

$${}_{n_1,n_3,n_3,...,n_r}P_n \frac{10!}{2!3!2!2!1!}$$

il 10! si riferisce alla lunghezza della parola.

3.5 Combinazioni Semplici

Sia $k <= n$, una k-combinazione semplice di S si ottine indentificando tutte le k-disposizioni semplici di S senza dare importanza all'ordine.
Il numero di tutte le k-combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \quad (con\ k <= n)$$

3.5.1 Esempio Ruota di Napoli (Combinazione Semplici)

Il gioco consiste nell'estrarre tre numeri da un alfebeto: $S = \{1, 2, ..., 90\}$, i numeri estratti non possono ripetersi e l'ordine non è importante.
In questo caso dato che l'ordine non conta le disposizioni ci danno un numero troppo grande quindi dobbiamo andare a rimuovere le parte in eccesso:

$$\frac{D_{90,3}}{P_3} = \frac{90!}{(90-3)!} * \frac{1}{3!} = \frac{90!}{87!3!} = \binom{90}{3} = C_{90,3}$$

Quindi quando parliamo di sequenza senza ordine useremo il termine **combinazioni** in questo caso semplici poiché non cononta l'ordine.

3.6 Combinazioni con Ripetizioni

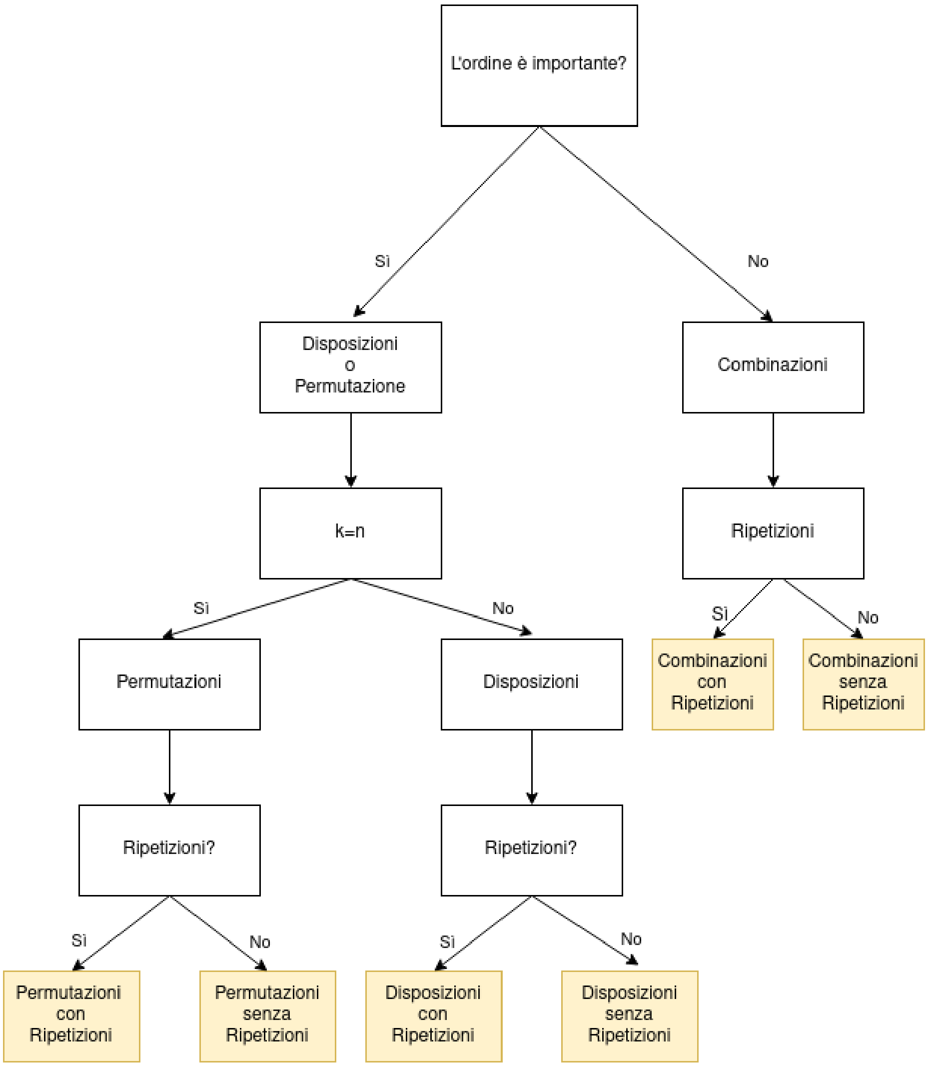
Una k-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni con ripetizioni di S aventi i medesii elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizioni di qualche elemento di S e l'ordine è ininfluente).
Il numero di tutte le k-combinazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$$

3.7 Recap

Piccolo recap di tutte le formule:

- Disposizioni con Ripetizioni: $D_{n,k}^{(r)} = n^k$
- Disposizioni senza Ripetizioni: $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$
- Permutazioni con Ripetizioni: $P_n^{(r)} = \binom{n}{k_1,...,k_r} \ (k_1 + ... + k_r) = r$
- Permutazioni senza Ripetizioni: $P_n = n!$
- Combinazioni con Ripetizioni: $C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$
- Combinazioni senza Ripetizioni: $C_{n,k} = \binom{n}{k} \ \ (con\ k <= n)$



4 Lezione 04 - 15/03/2023

4.1 Riassunto Algebra

Begin	Algebra degli Insiemi
$\emptyset$	Insieme Vuoto
$\mathbb{N}$	Interi positivi (senza zero)
$\mathbb{N}_0$	Numeri Naturali (con zero)
$\mathbb{Z}$	Numeri Relativi
$\mathbb{Q}$	Numeri Razionali
$\mathbb{R}$	Numeri Reali
Ω	Insieme universo
A	Insieme
$A \cup B$	Unione di A e B
$A \setminus B$	Differenza tra A e B
A^C	Complementare di A
$A \cap B$	Intersezione tra A e B
$A \subset B$	A contenuto in B
$]a, b[$	Intervallo aperto
$[a, b]$	Intervallo chiuso

Le operazioni di uninione e intersezione hanno propietà di idempotenza, associtività, commutatività, distrubutività, identità, complementanzione, de morgan.

4.2 Cardinalità Insiemi

4.2.1 Insieme Finito

Un insieme è **finito** se è possibile mettere ogni elemento dell'insieme in corrispondenza biuniva.

$$|\Omega| = \#\Omega = n$$

4.2.2 Insieme Numerabile

Ω si dice **numerabile** se è possibile mettere ogni elemento dell'insieme in corrispondenza biuniva con $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$

$$|\Omega| = \#\Omega = \alpha_0$$

4.2.3 Insieme Continuo

Ω si dice **continuo** se non ne finito ne numerabile

$$|\Omega| = \#\Omega = c$$

4.3 Classi (Famiglie)

Quando gli elementi di un insieme a sono a loro volta degli insiemi si usa per a la parola **classe**.

$$a = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$$

In particolare se Ω è un insieme, la classe di tutti i sottinisiemi di Ω si dice l'insieme delle parti di Ω e si indica con $P(\Omega)$.
Se Ω è un insieme e a è una classe di sottinsimi di Ω tale che l'unione di essi ha come risultato Ω allora a è detta essere un **ricoprimento** di Ω.
Un ricoprimento a di Ω è detto essere una **partizione** di Ω se i suoi elementi a due a due disgiunti.
Esempio:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 7\}, \{7, 8, 9\}\} \text{ è un ricomprimento ma non una partizione}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\} \text{ è partizione poiché tutti gli insiemi sono disgiunti}$$