

Calcolo delle probabilità e Statistica 2023-24 (G. Caputo)

Indice

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.

Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.

2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2 .

Possiamo rappresentare graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	$\xrightarrow{Z_2}$	2	3	4	5	6	7
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)		3	4	5	6	7	8
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)		4	5	6	7	8	9
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)		5	6	7	8	9	10
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)		6	7	8	9	10	11
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)		7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.

Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.

L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.

La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.

Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI**:

$$(f \text{ tondo}) \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.

Z_2^1 (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel seguente modo:

$$Z_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in \mathcal{R})

Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).

Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z_2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z_2} prende il nome di **SPETTRO**.

La possibilità di trovare un numero non appartenente a questo insieme è nulla.

¹Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distinguerlo da un eventuale Z_3 , ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabilità ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2 \text{OCCORRENZE DI } N}{\# \text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO**:

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiamo notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.

Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z = 2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z = 12)$$

$$\mathcal{P}(Z = 3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z = 11)$$

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z = 10)$$

$$\mathcal{P}(Z = 5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z = 9)$$

$$\mathcal{P}(Z = 6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z = 8)$$

$$\mathcal{P}(Z = 7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioè ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.

Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2 * \left(\frac{1}{36}\right) + 2 * \left(\frac{3}{36}\right) + 2 * \left(\frac{5}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2 * \left(\frac{2}{36}\right) + 2 * \left(\frac{4}{36}\right) + 1 * \left(\frac{6}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

²# indica la cardanaltà, è usato come sostituto di ||

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * \dots * n_r$$

Dove $i = 1, 2, \dots, r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprocedura i -sima.

2.2 Esempio Ristorante

Vogliamo sapere quante possibili combinazioni di menù un ristorante può avere date:

- 3 Antipasti (n_1)
- 4 Primi (n_2)
- 3 Secondi (n_3)
- 2 Dolci (n_4)
- Poniamo $r = 4$

Il numero di combinazione possibile è:

$$n_1 * n_2 * n_3 * n_4 = 3 * 4 * 3 * 2 = 72$$

2.3 Fattoriale

Il fattoriale di $n \geq 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precedenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{SE } n = 0 \\ n * (n - 1)! & \text{SE } n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$
$$\frac{13!}{11!} = \frac{13 * 12 * 11!}{11!} = 13 * 12 = 156$$

2.4 Coefficiente Binomiale

Presi n e k con $k \leq n$, definiamo il coefficiente binomiale in questo modo (n su k):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{6^3 * 5}{2} = 3 * 5 = 15$$

2.4.1 Calcolare sottoinsiemi con C.B.

Un possibile uso del coefficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.

Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con cardilità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{\cancel{4}^2 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2!} * \cancel{2!}} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \quad \#T = 6$$

2.4.2 Proprietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune proprietà del coefficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Proprietà 01

$$\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} * (5-5)!} = 1$$

\parallel
 $0! = 1$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{\cancel{5!}}{1 * \cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1$$

Proprietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * (5-4)!} = 5$$

\parallel
 1

Proprietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

DIM:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! * (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! * (\cancel{n} - \cancel{n} + k)!} = \frac{n!}{(n-k)! * k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{\underset{\substack{\parallel \\ 8!}}{4! * (12-4)!}} = \frac{\cancel{12}^{\cancel{3}} * 11 * \cancel{10}^{\cancel{5}} * 9 * \cancel{8}^{\cancel{1}}}{\cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8}^{\cancel{1}}} = 5 * 9 * 11 = 495 = \frac{12!}{\underset{\substack{\parallel \\ 4!}}{8! * (12-8)!}} = \binom{12}{8}$$

Proprietà 04 Se $n \in \mathbb{N}_0$ $1 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distinguere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezioni.

2.6 Tartaglia

Applicando le proprietà sui coefficienti binomiali è possibile costruire la tabella di Tartaglia:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 3 & 3 & 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & * & * & * & * \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & * & * & * \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & * & * \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & * \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Il valore dell'elemento di riga (x_i, y_i) viene calcolato dalla somma tra gli elementi di coordinata $(x_i, y_i - 1) + (x_i - 1, y_i - 1)$ della riga precedente $y - 1$.

Ogni riga di Tartaglia rappresenta i coefficienti di $(a + b)^n$

Esempio per 2: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Andando a generalizzare:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Proposizione La somma degli elementi della n -esima riga vale 2^n

3 Lezione 03 - 13/03/2023

3.1 Disposizioni

Disposizione: è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.

Per calcolare tutte le k-disposizioni con ripetizione di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Per calcolare tutte le k-disposizioni semplici di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

(n cardinalità dell'insieme, k la lunghezza della disposizione)

3.1.1 Esempio del gioco del Tris (Disposizione Semplice)

Dati:

- 9 Cavalli in gara \Rightarrow Alfabeto costituito da 9 valori $S = \{C_1, \dots, C_n\}$
- Si punta sul podio del cavallo quindi quante terne di cavalli posso avere **senza ripetizione e con ordine**.

Se un cavallo esce dalla terna allora non potrà ripresentarsi nella prossima posizione, quindi **senza ripetizione**.

Dunque quante sono le sequenze lunghe $k (\leq n)$ composte dai simboli dell'alfabeto S.

Generalizzando abbiamo:

$$D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

Questo tipo di calcolo combinatorio è chiamato **Disposizione / (semplice)**.

3.1.2 Esempio Totocalcio (Disposizione con Ripetizione)

Consideriamo le schedine Totocalcio, in cui abbiamo n righe in cui si può scommettere su due squadre, l'alfabeto è composta da:

$$S = \{1, x, 2\}$$

Quante sono tutte le schedine del totocalcio che si possono costruire sapendo che ci sono 11 partite?

Ogni scommessa può avere 3 valori possibili, quindi abbiamo 11 caselle con ognuna 3 possibili varianti.

Dato che **l'ordine conta** parliamo di **disposizioni** e le ripetizioni sono ammesse, quindi possiamo usare la "vecchia" regola moltiplicativa cioè: n^k , quindi le disposizioni con ripetizione:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k = 3^{11} = 177147$$

3.1.3 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili disposizioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme $S = \{c, a\}$, poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.

Quindi $n = \#S = 2$ e $k = 2$, allora:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c, c), (a, a), (c, a), (a, c)\}$$
$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c, a), (a, c)\}$$

3.2 Permutazioni

Ogni n-disposizione semplice è detta una permutazione degli n elementi di S (Possiamo considerare le permutazioni un caso speciale delle disposizioni semplici, cioè avviene quando $n = k$)

$$(se\ k = n) \quad P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

\parallel
 $0!=1$

3.3 Permutazioni con Ripetizioni

Sia $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, Una n-selezione di S avente k_1 elementi uguali al primo elemento di S, k_2 elementi uguali al secondo elemento di S e così via fino a k_r è detta una (k_1, k_2, \dots, k_r) -permutazioni con ripetizioni.

Il numero di tutte le (k_1, k_2, \dots, k_r) -permutazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} (k_1 + \dots + k_r) = r$$

3.4 Esempi Permutazioni

$$S = \{A, I, O, S\} \quad \#S = 4 \quad k = n = 4$$

Possiamo formare varie parole: OASI, SAIO, SOIA..., possiamo calcolarle:

$$P_4 = 4! = 24$$

Poniamo caso che vogliamo sapere le possibili combinazioni di *STATISTICA*, possiamo notare che più lettere si ripetono quindi mettiamo al denominatore il numero di volte che la lettera che si ripete al fattoriale, per calcolare dobbiamo usare:

$$P_n \frac{10!}{2!3!2!2!1!}$$

il 10! si riferisce alla lunghezza della parola.

3.5 Combinazioni Semplici

Sia $k \leq n$, una k -combinazione semplice di S si ottiene identificando tutte le k -disposizioni semplici di S senza dare importanza all'ordine.

Il numero di tutte le k -combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \quad (\text{con } k \leq n)$$

3.5.1 Esempio Ruota di Napoli (Combinazione Semplici)

Il gioco consiste nell'estrarre tre numeri da un alfabeto: $S = \{1, 2, \dots, 90\}$, i numeri estratti non possono ripetersi e l'ordine non è importante.

In questo caso dato che l'ordine non conta le disposizioni ci danno un numero troppo grande quindi dobbiamo andare a rimuovere le parte in eccesso:

$$\frac{D_{90,3}}{P_3} = \frac{90!}{(90-3)!} * \frac{1}{3!} = \frac{90!}{87!3!} = \binom{90}{3} = C_{90,3}$$

Quindi quando parliamo di sequenza senza ordine useremo il termine **combinazioni** in questo caso semplici poiché non conta l'ordine.

3.6 Combinazioni con Ripetizioni

Una k -combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k -disposizioni con ripetizioni di S aventi i medesimi elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizioni di qualche elemento di S e l'ordine è influente).

Il numero di tutte le k -combinazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$$

3.7 Recap

Piccolo recap di tutte le formule:

- Disposizioni con Ripetizioni: $D_{n,k}^{(r)} = n^k$
- Disposizioni senza Ripetizioni: $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$
- Permutazioni con Ripetizioni: $P_n^{(r)} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} \quad (k_1 + \dots + k_r) = r$
- Permutazioni senza Ripetizioni: $P_n = n!$
- Combinazioni con Ripetizioni: $C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$
- Combinazioni senza Ripetizioni: $C_{n,k} = \binom{n}{k} \quad (\text{con } k \leq n)$

