Guida Esercizi Geometria 2022-23 (Trombetti)

Indice

1 Spazi Vettoriali **2**

1.1 Intersezione Spazi Vettoriali 2

1 Spazi Vettoriali

1.1 Intersezione Spazi Vettoriali

Presi due sottospazi H e K, un generico vettore $\underline{v}$ appartiene alla loro intersezione se e solo se si può esprimere CONTEMPORANEAMENE come combinazione lineare di H e k.
Esempio:

$$H =< (1,2,3),(1,2,4) > \qquad K =< (0,0,1),(1,3,2) >$$

Possiamo esprimere $\underline{v}$ nei seguenti modi:

$$\underline{v} = \alpha_1(1,2,3) + \beta_1(1,2,4) \qquad \underline{v} = \alpha_2(0,0,1) + \beta_2(1,3,2)$$

Come abbiamo detto prima queste due condizioni devo verificarsi CONTEMPORANEAMENTE quindi imponiamo l'uguaglianza:

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + 1\beta_1 = 0\alpha_2 + 1\beta_1 \\ 2\alpha_1 + 2\beta_1 = 0\alpha_2 + 3\beta_2 \\ 3\alpha_1 + 4\beta_1 = 1\alpha_2 + 2\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = \beta_1 \\ 2\alpha_1 + 2\beta_1 = 3\beta_2 \\ 3\alpha_1 + 4\beta_1 = \alpha_2 + 2\beta_2 \end{cases}$$

Andando a risolvere il sistema (con il metodo che più ci aggrada) verrà:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 \\ \beta_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_1 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Possiamo notare come il sistema dipenda da β_1.
L'intersezione sarà:

$$\underline{v} = \{(0,0,\beta_1)\}$$

Questo perché andando a sostuire i valori precedentemente trovati ci viene:

$$\underline{v} = \beta_1(0,0,1) + \cancel{0(1,3,2)} \qquad \underline{v} = -\beta_1(1,2,3) + \beta_1(1,2,4)$$

Andando a sviluppare entrambe le espressioni:

$$\underline{v} = \beta_1(0,0,1) + \cancel{0(1,3,2)} = (0,0,\beta_1)$$

$$\underline{v} = -\beta_1(1,2,3) + \beta_1(1,2,4) = (-1\beta_1, -2\beta_1, -3\beta_1) + (\beta_1, 2\beta_1, 4\beta_1) = (0,0,\beta_1)$$

Scegliendo la soluzione più semplice cioé $\beta_1 = 1$ avremo:

$$H \cap K = (0,0,1) \quad dim = 1$$