

# Calcolo delle probabilità e Statistica 2022-23

## (A. Buonocore)

### Indice

<b>1</b>	<b>Lezione 01 - 06/03/2023</b>	<b>3</b>
1.1	Il Gioco della Zara con 2 Dadi . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Lezione 02 - 08/03/2023</b>	<b>5</b>
2.1	Regola Moltiplicativa . . . . .	5
2.1.1	Esempio Cartellini Camicie . . . . .	5
2.2	Fattoriale . . . . .	5
2.3	Coefficiente Binomiale . . . . .	6
2.3.1	Proprietà del C.B. con esempi . . . . .	6
2.4	Coefficiente Multinomiale . . . . .	7
2.5	Problema del Contare . . . . .	8
2.6	Disposizioni e Combinazioni . . . . .	8
2.7	Disposizioni semplici/ripetizioni . . . . .	8
2.7.1	Esempio di Disposizione . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Lezione 03 - 13/03/2023</b>	<b>9</b>
3.1	Permutazioni . . . . .	9
3.2	Permutazioni con Ripetizioni . . . . .	9
3.3	Esempi Permutazioni . . . . .	9
3.4	Combinazioni Semplici . . . . .	9
3.5	Combinazioni con Ripetizioni . . . . .	10
3.6	Esempi . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Lezione 04 - 15/03/2023</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Lezione 05 - 16-03-2023</b>	<b>12</b>
5.1	Definizioni simboli Insiemistici ed Eventi . . . . .	12
5.2	Esempio Lancio Moneta 1 . . . . .	12
5.3	Esempio Lancio Moneta 2 . . . . .	12
5.4	Classi/Famiglie . . . . .	13
5.5	Algebra e Sigma Algebra . . . . .	13
5.5.1	Osservazioni . . . . .	14
5.5.2	Casi Particolari . . . . .	14
5.6	Proprietà (conseguenze) . . . . .	14

<b>6</b>	<b>Lezione 06 - 20/03/2023</b>	<b>15</b>
6.1	SigmaAlgebra Generata (DA REVISIONARE) . . . . .	15
6.1.1	Esempio . . . . .	15
6.2	Probabilità di Laplace . . . . .	15
6.3	Frequentista (Statistica) . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Lezione 07 - 22-03-2023</b>	<b>17</b>
7.1	Soggettività . . . . .	17
7.2	Recap Probabilità . . . . .	17
7.3	Proprietà Comuni . . . . .	17
7.4	Impostazione Assiomatica . . . . .	17
7.5	Conseguenze immediate degli assiomi . . . . .	18
7.5.1	Teorema 01 . . . . .	18
7.5.2	Teorema 02 . . . . .	18
7.5.3	Teorema 03 . . . . .	19
7.5.4	Teorema 04 . . . . .	19
7.5.5	Teorema 05 . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Lezione 08 - 23/03/2023</b>	<b>20</b>
8.1	Recap . . . . .	20
8.2	Spazi di Probabilità Finiti . . . . .	20
8.3	Spazi Equiprobabili finiti . . . . .	20
8.4	Spazi di Probabilità Numerabili . . . . .	21
8.5	Spazio di Probabilità infiniti non Numerabili (da rivedere) . . . . .	21
8.6	Esempi Spazi di Probabilità Numerabili . . . . .	21
8.6.1	Esempio 01 . . . . .	21
8.6.2	Esempio 02 . . . . .	22
8.7	Eventi non Incompatibili . . . . .	22
8.7.1	Teorema 06 . . . . .	22
8.7.2	Teorema 07 . . . . .	22
8.7.3	Teorema 08 (Caso Generale) . . . . .	23

# 1 Lezione 01 - 06/03/2023

## 1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.

Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.

2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6:  $P_1, P_2$ .

Possiamo rappresentare graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	$\xrightarrow{Z_2}$	2	3	4	5	6	7
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)		3	4	5	6	7	8
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)		4	5	6	7	8	9
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)		5	6	7	8	9	10
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)		6	7	8	9	10	11
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)		7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi  $6^2 = 6 * 6 = 36$  possibili risultati.

Espriamo il "Lanciare i dadi" come  $\xi$  (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.

L'insieme dei possibili risultati di  $\xi$  si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Questo insieme  $\Omega$  (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.

La coppia  $(i, j) \in \Omega$  è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.

Per ogni esper. ale.  $\xi$  bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI**:

$$(f \text{ tondo}) \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.

$Z_2^1$  (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel seguente modo:

$$Z_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in  $\mathcal{R}$ )

Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).

Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z_2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme  $S_{Z_2}$  prende il nome di **SPETTRO**.

La possibilità di trovare un numero non appartenente a questo insieme è nulla.

---

<sup>1</sup>Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distinguerlo da un eventuale  $Z_3$ , ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabilità ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2 \text{OCCORRENZE DI } N}{\# \text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO**:

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in  $\mathcal{P}(\Omega)$  e mai in  $\Omega$ )

Possiamo notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi  $\frac{6}{36}$ .

Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z = 2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z = 12)$$

$$\mathcal{P}(Z = 3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z = 11)$$

$$\mathcal{P}(Z = 4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z = 10)$$

$$\mathcal{P}(Z = 5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z = 9)$$

$$\mathcal{P}(Z = 6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z = 8)$$

$$\mathcal{P}(Z = 7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioè ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.

Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2 * \left(\frac{1}{36}\right) + 2 * \left(\frac{3}{36}\right) + 2 * \left(\frac{5}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2 * \left(\frac{2}{36}\right) + 2 * \left(\frac{4}{36}\right) + 1 * \left(\frac{6}{36}\right) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione ( $\Omega$ ) deve essere uguale a 1.

---

<sup>2</sup># indica la cardanaltà, è usato come sostituto di ||

## 2 Lezione 02 - 08/03/2023

### 2.1 Regola Moltiplicativa

Se una procedura di scelta si può suddividere in  $r$  sottoprocedure allora il numero  $n$  delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * \dots * n_r$$

Dove  $i = 1, 2, \dots, r$  rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprocedura  $i$ -sima.

#### 2.1.1 Esempio Cartellini Camicie

Vogliamo sapere quanti cartellini delle camicie dobbiamo fabbricare avendo i seguenti dati: 4 Taglie, 2 Foggie, 7 Colori.

Usando la regola moltiplicativa poniamo  $r = 3$  avendo tre possibili varianti,  $n_1 = 4$  per le taglie,  $n_2 = 2$  per le foggie,  $n_3 = 7$  per i colori, ora calcoliamo il totale:

$$n = n_1 * n_2 * n_3 = 4 * 2 * 7 = 56 \quad \text{CARTELLINI}$$

### 2.2 Fattoriale

Il fattoriale di  $n \geq 0$  si esprime come  $n!$  ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precedenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{SE } n = 0 \\ n * (n - 1)! & \text{SE } n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{aligned} 6! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \\ \frac{13!}{11!} &= \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156 \\ \frac{n!}{(n-1)!} &= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \end{aligned}$$

## 2.3 Coefficiente Binomiale

Presi  $n$  e  $k$  con  $k \leq n$ , possiamo definire il coefficiente binomiale in questo modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{6^3 * 5}{2} = 3 * 5 = 15$$

### 2.3.1 Proprietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune proprietà del coefficiente binomiale con i rispettivi esempi:

#### Proprietà 01

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\underset{\substack{\parallel \\ 0!=1}}{\cancel{5!}} * (5-5)!} = 1$$

#### Proprietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\cancel{4!}} * (5-4)!} = 5$$

#### Proprietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! * (12-4)!} = \frac{\cancel{12^3} * 11 * \cancel{10^5} * 9 * \cancel{8!}}{2 * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5 * 9 * 11 = 495 = \frac{12!}{8! * (12-8)!} = \binom{12}{8}$$

#### Proprietà 04 Se $k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{7}{3}$$

#### Proprietà 05 ( $n = 6, k = 3$ )

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7 * \cancel{6} * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{3!} * \cancel{4!}} = 7 * 5 = 35 = 20 + 15 = \frac{2 * \cancel{3} * 4 * 5 * \cancel{6}}{\cancel{6} * \cancel{6}} + \frac{6^3 * 5 * \cancel{4!}}{2 * \cancel{4!}} = \frac{6!}{3! * 3!} + \frac{6!}{2! * 4!} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$

Un possibile uso del coefficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine  $k$  con  $n$  valori.

Esempio poniamo di avere un insieme  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  con cardinalità  $\#S = 4$ , vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{4^2 * 3 * 2!}{2 * 2!} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \quad \#T = 6$$

## 2.4 Coefficiente Multinomiale

Sia  $n$  un intero positivo e  $n_1, n_2, \dots, n_r$  interi tali che  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ , possiamo scrivere il coefficiente multinomiale in questo modo:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_r!}$$

$$\binom{7}{2, 3, 2} = \frac{7!}{2! * 3! * 2!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3!}{4 * 3!} = 210 \quad (2 + 3 + 2 = 7)$$

## 2.5 Problema del Contare

Sia  $S$  un insieme costituito da un numero  $n$  finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distinguere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di  $S$  si presentano nella selezione.

## 2.6 Disposizioni e Combinazioni

Per ovviare al problema del contare andiamo a definire le seguenti classificazioni:

**Disposizione:** è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.

Possiamo suddividerla in:

Disposizione: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento

Disposizione Semplice: **non è ammessa** la ripetizione

**Combinazioni:** è una selezione dove l'ordinamento **non è IMPORTANTE**.

Possiamo suddividerla in:

Combinazioni: è ammessa la **ripetizione** di qualunque elemento

Combinazioni Semplice: **non è ammessa** la ripetizione

## 2.7 Disposizioni semplici/ripetizioni

Per calcolare tutte le  $k$ -disposizioni con ripetizione di  $S$  usiamo questa formula:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Per calcolare tutte le  $k$ -disposizioni semplici di  $S$  usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

( $n$  cardinalità dell'insieme,  $k$  la lunghezza della disposizione)

### 2.7.1 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili disposizioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme  $S = \{c, a\}$ , poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.

Quindi  $n = \#S = 2$  e  $k = 2$ , allora:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c, c), (a, a), (c, a), (a, c)\}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c, a), (a, c)\}$$



### 3 Lezione 03 - 13/03/2023

#### 3.1 Permutazioni

Ogni n-disposizione semplice è detta essere una permutazione degli n elementi di S (Possiamo considerare le permutazioni un caso speciale delle disposizioni semplici, cioè avviene quando  $n = k$ )

$$(se\ k = n) \quad P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{\underset{0!=1}{(n-n)!}} = n!$$

#### 3.2 Permutazioni con Ripetizioni

Sia  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ , Una n-selezione di S avente  $k_1$  elementi uguali al primo elemento di S,  $k_2$  elementi uguali al secondo elemento di S e così via fino a  $k_r$  è detta una  $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ -permutazioni con ripetizioni.

Il numero di tutte le  $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ -permutazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$P_n^{(r)} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} (k_1 + \dots + k_r) = r$$

#### 3.3 Esempi Permutazioni

$$S = \{A, I, O, S\} \#S = 4 \quad k = n = 4$$

Possiamo formare varie parole: OASI, SAIO, SOIA..., possiamo calcolarle:

$$P_4 = 4! = 24$$

Poniamo caso che vogliamo sapere le possibili combinazioni di *ARCANE*, possiamo notare che la *A* si ripete 2 volte, per calcolare dobbiamo usare:

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

il 2! si riferisce a quante volte appare la lettera *A*.

#### 3.4 Combinazioni Semplici

Sia  $k \leq n$ , una k-combinazione semplice di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni semplici di S avente i medesimi elementi posti in differente ordine (in altri termini l'ordine di presentazione degli elementi è ininfluente).

Il numero di tutte le k-combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \quad (con\ k \leq n)$$

### 3.5 Combinazioni con Ripetizioni

Una k-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni con ripetizioni di S aventi i medesimi elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizioni di qualche elemento di S e l'ordine è ininfluente).

Il numero di tutte le k-combinazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$$

### 3.6 Esempi

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 4 Lezione 04 - 15/03/2023

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 5 Lezione 05 - 16-03-2023

### 5.1 Definizioni simboli Insiemistici ed Eventi

Begin	Algebra degli Insiemi	Logica degli Eventi
$\Omega$	Insieme universo	Spazio Campione
$A$	Insieme	Evento
$A^C$	Complementare di A	Negato di A
$A \cup B$	Unione di A e B	OR degli eventi, deve verificarli almeno uno tra A e B
$A \cap B$	Intersezione tra A e B	AND degli eventi, devono verificarsi entrambi
$\bigcup_{k=1}^n A_k$	Unione finita	n verifica almeno una tra $A_1, A_2, \dots, A_n$
$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	””
$\bigcap_{k=1}^n A_k$	Intersezione finita	Si verifica se tutti gli eventi $A_1, \dots, A_n$ si verificano
$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	””
$\emptyset$	Insieme Vuoto	Evento Impossibile
$A \cap B = \emptyset$	A e B sono disgiunti	Eventi Incompatibili
$A \subset B$	A contenuto in B	Il verificare di A implica il verificare di B
$\bigcup_k A_k = \Omega$	Ricoprimento disgiunto (partizione)	$A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi necessari

### 5.2 Esempio Lancio Moneta 1

Poniamo caso che vogliamo descrivere l'evento che al terzo lancio di una moneta esca Testa, per prima cosa scegliamo un spazio campione:

$$\Omega = \{T, C\}^N$$

Una moneta ha solo due casi, testa oppure croce, ora descriviamo che testa esca al terzo lancio:

$$T_3 = \{(w_1, w_2, \dots) \in \Omega : w_3 = "T"\}$$

abbiamo descritto questo evento tramite proprietà degli insiemi, nel caso volessimo esprimere lo stesso concetto ma per le croci ci basta fare il complemento:

$$T_3^C = C_3 = \{(w_1, w_2, \dots) \in \Omega : w_3 = "C"\}$$

### 5.3 Esempio Lancio Moneta 2

Poniamo invece di voler complicare le cose, voglia esprimere l'evento che escano due Testa prima di due Croci, chiamiamo questo evento  $A$ , questo evento ha infinite possibilità, facciamo alcuni esempi:

$$A_2 = T_1, T_2, \Omega$$

$$A_3 = C_1, T_2, T_3, \Omega$$

$$A_4 = T_1, C_2, T_3, T_4, \Omega$$

$$A_5 = C_1, T_2, C_3, T_4, T_5, \Omega$$

Possiamo fare alcune osservazioni,  $A_2, A_3$  sono incompatibili, non possono verificarsi contemporaneamente, invece  $A_5$  è incompatibile con  $A_2, A_3, A_4$ . Possiamo esprimere il verificarsi dell'evento  $A$  in vari modi:

$$A = A_2 \cup A_3$$

$$A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$A = A_2 \uplus A_3 \uplus A_4$$

$$A = A_2 \uplus A_3 \uplus A_4 \uplus A_5$$

Possiamo esprimere questo evento  $A$  tramite **Unione Numerabile**:

$$A_n = \begin{cases} C_1, T_2, \dots, C_{n-2}, T_{n-1}, T_n & \text{n dispari inizia con una croce} \\ T_1, C_2, \dots, C_{n-2}, T_{n-1}, T_n & \text{n pari inizia con una testa} \end{cases} \Rightarrow A = \bigcup_{n=2}^{\infty} \text{è un evento}$$

## 5.4 Classi/Famiglie

Quando gli elementi di un insieme  $a$  sono a loro volta degli insiemi si usa per  $a$  la parola **classe**.

$$a = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$$

In particolare se  $\Omega$  è un insieme, la classe di tutti i sottinsiemi di  $\Omega$  si dice l'insieme delle parti di  $\Omega$  e si indica con  $P(\Omega)$ .

Se  $\Omega$  è un insieme e  $a$  è una classe di sottinsiemi di  $\Omega$  tale che l'unione di essi ha come risultato  $\Omega$  allora  $a$  è detta essere un **ricoprimento** di  $\Omega$ .

Un ricoprimento  $a$  di  $\Omega$  è detto essere una **partizione** di  $\Omega$  se i suoi elementi a due a due disgiunti.

Esempio:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 7\}, \{7, 8, 9\}\} \text{ è un ricoprimento ma non una partizione}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\} \text{ è partizione poiché tutti gli insiemi sono disgiunti}$$

## 5.5 Algebra e Sigma Algebra

Preso un  $\Omega$  spazio campione e un  $a$  (a tondo), classe non vuota di sottinsiemi di  $\Omega$  allora:

$$a \text{ è un algebra} \Leftrightarrow$$

$$i) A \in a \Rightarrow A^C \in a \text{ (a è chiusa rispetto il complemento)}$$

$$ii) A_1, A_2 \in a \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in a \text{ (a è chiusa rispetto l'unione di due elementi)}$$

C'è un anche una sua variante chiamata Sigma(numerabile) Algebra definita così:

$$a \text{ è una } \sigma\text{-algebra} \Leftrightarrow$$

$$i) uguale$$

$$ii) n \in N, A_n \in a \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in a$$

Riassumendo:

"Un'algebra è chiusa rispetto all'unione di due suoi elementi e rispetto al complemento."

"Una  $\sigma$ -algebra è chiusa rispetto all'unione numerabile di suoi elementi e rispetto al complemento."

### 5.5.1 Osservazioni

Posto  $a = \{\{2, 3\}, \{6\}, \{4, 5\}\}$ , osserviamo i seguenti esempi:

$$\begin{aligned}\{4, 5\} &\subseteq a \text{ SBAGLIATO} \\ \{4, 5\} &\in a \text{ CORRETTO} \\ \{\{4, 5\}\} &\subseteq a \text{ CORRETTO}\end{aligned}$$

### 5.5.2 Casi Particolari

Poniamo  $A \subseteq \Omega$ , si definisce **algebra(sigma) banale**,  $a$  posto come:

$$a = \{\emptyset, \Omega\}$$

È l'unica algebra a due elementi, ovviamente entrambe le proprietà sono banalmente dimostrate poiché:

$$\Omega^C = \emptyset$$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega \in a$$

Gli elementi  $\emptyset$  e  $\Omega$  sono necessari per essere un **algebra**. Poniamo caso di un  $a = \{A, A^c\}$  questa non è un algebra poiché  $A \cup A^c = \Omega \notin a$ , se aggiunssimo solo  $\Omega$  non sarebbe rispettata la prima condizione poiché  $\Omega^c = \emptyset \notin a$ .

Ricapitolando:

$$a = \{A, A^c\} \text{ non è algebra} \quad a = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\} \text{ è algebra (sigma)}$$

Per contrapposizione la (sigma) algebra più grande è  $P(\Omega)$ , tutte le altre algebra(sigma) sono sottoinsiemi di  $P(\Omega)$

## 5.6 Proprietà (conseguenze)

1.  $a$  è una algebra (sigma)  $\Rightarrow \emptyset, \Omega \in a$  (come abbiamo osservato prima)  
Tutti gli elementi dell'algebra banale devono essere presenti in ogni algebra(sigma).
2. L'unione finita di elementi di un algebra (sigma) appartiene comunque ad  $a$   
Per ii) abbiamo visto come l'unione si applica per due elementi, ma essendo  $\cup$  associativa nel caso di  $n$  - elementi basta operarli a due a due e quindi portare questa proprietà fino a  $n$  elementi.
3. *Sigma algebra*  $\Rightarrow$  *Algebra* *MA* *Sigma algebra*  $\not\Rightarrow$  *Algebra*  
Questo poiché un'unione finita da 0 a  $+\infty$  non appartiene a tutte le algebra, cose che invece accade con le sigma algebra.

## 6 Lezionie 06 - 20/03/2023

### 6.1 SigmaAlgebra Generata (DA REVISIONARE)

Sia  $C$  una classe su  $\Omega$ , esiste una  $\sigma$ -algebra  $F$  che contiene  $\phi$  ed è contenuta in tutte le  $\sigma$ -algebra che contengono  $\phi$ .

Tale minima  $\sigma$ -algebra contenente  $C$  si dice **GENERATA DA**  $\phi$ .

In primo luogo esiste, per ogni  $C$ , una  $\sigma$ -algebra che la contiene e l'insieme delle parti. Dopo di ciò:

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i \text{ con } i \in I$$

#### 6.1.1 Esempio

Poniamo di lanciare due dadi onesti, assumiamo i possibili risultati:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{5, 6\}$$

Considerando la famiglia  $G$  in questo modo:

$$G = \{A, B\}$$

Possiamo considerare la  $\sigma$ -algebra generata da una famiglia:

$$\sigma(G)$$

Per trovarci gli atomi dobbiamo andare a intersercare tutte le possibili combinazioni tra  $A$  e  $B$ :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{6\} \\ A \cap B^C &= \{2, 4\} \\ A^C \cap B &= \{5\} \\ A^C \cap B^C &= \{1, 3\} \end{aligned}$$

Abbiamo trovato **4 atomi**, per ottenere tutto l'insieme dobbiamo andare a intersecare gli atomi a due a due:

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= \{\{6\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{5, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 4, 6\}, \\ &\quad \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega, \emptyset\} \\ &\quad \emptyset, \Omega \in \sigma(G) \text{ per come abbiamo dimostrato un paio di lezioni fa.} \end{aligned}$$

### 6.2 Probabilità di Laplace

Sia  $\Omega$  è finito, ed un evento appartenente a una famiglia di eventi  $E \in F$ , allora la probabilità dell'evento  $E$  si può rappresentare nel seguente modo:

$$P_c(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

Questa è un ottima definizione ma solo se c'è simmetria.

### 6.3 Frequentista (Statistica)

Se un esperimento aleatorio  $E$  si ripete un numero numerabile di volte, possiamo considerare il rapporto:

$$n \in N \quad P_f(E) = \frac{n_E}{n}$$

$n$  è il numero delle ripetizioni di  $E$

$n_E$  è il numero delle prove tra le quali  $E_n$  si è presentato.

Questa definizione però è molto approssimativa, quella più corretta e precisa è:

$$P_f(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n} \geq 0$$



## 7 Lezione 07 - 22-03-2023

### 7.1 Soggettività

La probabilità (soggettiva) di un evento è il prezzo  $p$  (compreso tra 0 e 1), che un individuo coerente ritiene "equo" pagare per ricevere 1 se l'evento  $A$  si verifica.

(Non sarà possibile con nessun insieme assicurarsi perdita o vincita certe).

Si fa uso di due principi:

equità) Sia  $A$  un evento sulla cui realizzazione scommettono due giocatori, di cui uno è il banco e l'altro è lo scommettitore. Supponiamo che spetti ad uno di essi, fissare la probabilità di  $A$ . Allora la scommessa è **equa** se al secondo giocatore è lasciata la possibilità di stabilire se fare il banco oppure lo scommettitore. (questo permette ad entrambi di non avere una vittoria/perdita certa).

coerenza) Non è possibile individuare un sistema di eventi che possa assicurare vantaggio/svantaggio all'individuo che pone le probabilità.

### 7.2 Recap Probabilità

Quindi riassumendo possiamo esprimere la probabilità tramite tre diverse definizioni:

- Classica/Laplace: Se c'è simmetria.
- Frequentistica/Statistica: Se l'esperimento si può ripetere infinite volte.
- Soggettiva: Quando l'esperimento si può eseguire una sola volta.

### 7.3 Proprietà Comuni

Sia  $A$  un evento, queste tre proprietà si verificano in tutte e tre le definizioni:

- $\mathbb{P}_{c,f,s}(A) \geq 0$
- $\mathbb{P}_{c,f,s}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}_{c,f,s}(A \uplus B) = \mathbb{P}_{c,f,s}(A) + \mathbb{P}_{c,f,s}(B)$  **FINITA ADDITIVITÀ**  $F$

### 7.4 Impostazione Assiomatica

Gli eventi sono sottoinsiemi di uno spazio  $\Omega$  e formano una  $\sigma$ -algebra  $F$ :

- $F \neq \emptyset$
- $A \in F \Rightarrow A^C \in F$
- $\forall n \in F, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in F$

Una misura di probabilità sullo spazio  $\Omega$  è una funzione  $P : F \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

- $\forall A \in F, P(A) \geq 0$  (ma  $< \infty$ )
- $P(\Omega) = 1$
- se  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq F : (i \neq j) A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

La tripla  $(\Omega, F, P)$  prende il nome di **spazio di probabilità**.

## 7.5 Conseguenze immediate degli assiomi

### 7.5.1 Teorema 01

Teorema 01:  $P(\emptyset) = 0$

Dim:

Il vuoto è un evento in quanto complementare del certo. Inoltre il vuoto può essere visto come unione numerabile di insiemi vuoti (per una delle proprietà di indentità):

$$\emptyset = \emptyset \uplus \emptyset \emptyset \uplus \dots = \uplus_{n=1}^{\infty} \emptyset$$

Dall'assioma  $f$ ) si ottiene allora:

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

e per l'assioma  $d$ ) l'unico numero che soddisfa la precedente relazione è  $P(\emptyset) = 0$

### 7.5.2 Teorema 02

Se  $A_1 \in F, A_2 \in F, \dots, A_n \in F$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset$  per  $i \neq j$  allora:

$$P(\uplus_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Dim:

Poniamo  $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \dots, B_n = A_n$  e  $B_{n+1} = B_{n+2} = \dots = \emptyset$  Ovviamente riesce  $B_i \cap B_j = \emptyset$  per  $i \neq j$  per cui dall'assioma  $f$ ) si ha:

$$P(\uplus_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

Dall'altra parte:

$$\begin{aligned} \uplus_{i=1}^{\infty} B_i &= B_1 \uplus B_2 \uplus \dots \uplus B_n \uplus B_{n+1} \uplus B_{n+2} \uplus \dots \\ &= (A_1 \uplus A_2 \uplus \dots \uplus A_n) \cup (\emptyset \uplus \emptyset \uplus \dots) \\ &= (A_1 \uplus A_2 \uplus \dots \uplus A_n) \uplus \emptyset \\ &= \uplus_{i=1}^n A_i \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) &= P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) + P(B_{n+1}) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + (0 + 0 + \dots) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$

La tesi segue da (i), (ii), (iii).

La misura di probabilità  $P$  è quindi anche finitamente additiva.

### 7.5.3 Teorema 03

$\forall A \in F, P(A^C) = 1 - P(A)$  Dim:

Per ogni  $A \in F$  si ha  $\Omega = A \cup A^C$  per cui essendo  $P$  finitamente additiva si ha:

$$P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

Ricordando l'assioma:  $e) P(\Omega) = 1$  otteniamo infine:

$$1 = P(A) + P(A^C) \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$$

### 7.5.4 Teorema 04

$\forall A \in F, P(A) \leq 1$  Dim:

Dal precedente risultato e dall'assioma  $d)$  discende immediatamente:

$$P(A) = 1 - P(A^C) \leq 1$$

### 7.5.5 Teorema 05

Se  $A \in F$  e  $B \in F$  sono tali che  $A \subseteq B$  allora  $P(A) \leq P(B)$ . Dim:

Risulta allora:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^C) = (B \cap A) \uplus (B \cap A^C) = A \uplus (B \cap A^C)$$

in quanto dall'ipotesi  $A \subseteq B$  si ha  $B \cap A = A$ .

Dalla finita additività di  $P$  e dall'assioma  $d)$  si ha che:

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^C) \geq P(A)$$

## 8 Lezione 08 - 23/03/2023

### 8.1 Recap

Sia  $\phi$  e la terna:  $(\Omega, F, P)$  spazio di probabilità:

Assiomi:

- a)  $F$  non è vuota
- b)  $F$  è stabile rispetto al complemento
- c)  $F$  è stabile rispetto a  $\cup_{n \in \mathbb{N}}()$
- d)  $P$  è non negativa e finita
- e)  $P(\Omega) = 1$
- f) è qualcosa additiva

Teoremi:

- 1)  $P(\emptyset) = 0$
- 2)  $P$  è finita additiva
- 3)  $P[(A)^C] = 1 - P(A)$
- 4)  $P(A) \leq 1$
- 5)  $P$  è monotona

### 8.2 Spazi di Probabilità Finiti

i) Posto  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $F = \mathbb{P}(\Omega)$ , posto  $i = 1, 2, \dots, n$  avremo:

$$\mathbb{P}(\{a_i\}) = p_i \quad \text{"probabilità di } \{a_i\}"$$

Bisognerà avere:

- 1)  $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$
- 2)  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

La probabilità di un qualsiasi evento  $A$  sarà dunque definita come la somma delle probabilità degli elementi di  $A$ .

### 8.3 Spazi Equiprobabili finiti

ii) Posto  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $F = \mathbb{P}(\Omega)$ , basta porre:

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n$$

Per ogni evento  $A$  la probabilità sarà definita:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{n}$$

## 8.4 Spazi di Probabilità Numerabili

iii)  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $F = P(\Omega)$  sia  $n \in N, p_n := P(a_n)$

1)  $n \in N, p_n \geq 0$

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

boh:  $\sum_{n=0}^{\infty} h^n = \frac{1}{1-h}$

## 8.5 Spazio di Probabilità infiniti non Numerabili (da rivedere)

iv)  $\#\Omega > \#N$

$$\Omega = (0, 1)$$

$$F = \{(a, b) : a < b, a, b \in [0, 1]\}$$

Questa cosa si dice **sigma algebra di Borel dell'intervallo [0,1]**.

$$P[(a, b)] = \frac{1}{b-a} = b-a$$

## 8.6 Esempi Spazi di Probabilità Numerabili

### 8.6.1 Esempio 01

Si ponga lo scalare  $\lambda > 0$  e  $n \in \mathbb{N}_0$  definiamo:

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Per verificare che sia uno spazio di probabilità **numerabile**, dobbiamo verificare la 1) e la 2).

1) È banalmente verificata poiché sono tutte quantità positive:

$$e^{-\lambda} > 0, \quad n! > 0, \quad \lambda^n > 0$$

2) Basta verificare che la serie di termine generale  $p_n$  si somma a 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = 1$$

L'ultimo passaggio si ottiene ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione  $e^x$ .

### 8.6.2 Esempio 02

Si ponga, con  $p \in (0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p'_n = p(1 - p)n - 1$ .

Procedendo come nell'esempio precedente, basta verificare che la serie di termini generale  $p'_n$  si somma a 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p'_n = \sum_{n=1}^{\infty} p(1 - p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} = p \sum_{m=0}^{\infty} (1 - p)^m = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = p \frac{1}{p} = 1$$

L'ultimo passaggio si ottiene ricordando la serie geometrica di ragione  $h \in (-1, 1)$  si somma a  $\frac{1}{1-h}$

## 8.7 Eventi non Incompatibili

### 8.7.1 Teorema 06

$\forall A \in F, \forall B \in F$  si ha:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(se  $A$  e  $B$  sono disgiunti allora abbiamo la finita additività).

Dim:

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$$

Inoltre dalla relazione:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \uplus A^C) = (B \cap A) \uplus (B \cap A^C)$$

si ricava, per la finita additività di  $P$ :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$$

$$P(B \cap A^C) = P(B) - P(A \cap B)$$

In definitiva:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Osservazione:

Se  $A \cap B = \emptyset$  allora  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$  e il risultato coincide con la finita additività.

### 8.7.2 Teorema 07

$\forall A \in F, \forall B \in F$  e  $\forall C \in F$  si ha:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$$

Dim:

Applicando le proprietà delle operazioni insiemistiche ed il risultato precedenti si ha:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P[(A \cap C) \cap (B \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P[(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

### 8.7.3 Teorema 08 (Caso Generale)

Se  $A_i \in F$  per  $i = 1, 2, \dots, n$  si ha:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Questo risultato è noto come **formula di inclusione-esclusione**.

Supponiamo ora la tesi vera per  $k - 1$ :