Calcolo delle probabilità e Statistica 2023-24
(G. Caputo)

Indice

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.
Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.
2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2.
Possiamo rappresentiamo graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\xrightarrow{Z_2}$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.
Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.
L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, .., 6\} = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.
La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.
Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI:**

$$\text{(f tondo) } \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.
Z_2[1] (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel suguente modo:

$$Z_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in $\mathcal{R}$)
Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).
Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z2} prende il nome di **SPETTRO**.
La possibilità di trovare un numero non appartente a questo insieme è nulla.

[1] Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distunguirlo da un eventuale Z_3, ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabiltà ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2\text{OCCORRENZE DI N}}{\#\ \text{SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\#Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO:**

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{\#Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1,3),(2,2),(3,1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiano notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.
Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z=2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z=12)$$

$$\mathcal{P}(Z=3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z=11)$$

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z=10)$$

$$\mathcal{P}(Z=5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z=9)$$

$$\mathcal{P}(Z=6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z=8)$$

$$\mathcal{P}(Z=7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioé ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.
Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2*(\frac{1}{36}) + 2*(\frac{3}{36}) + 2*(\frac{5}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2*(\frac{2}{36}) + 2*(\frac{4}{36}) + 1*(\frac{6}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazzione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

[2] # indica la cardanalità, è usato come sostituto di $\|$

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * ... * n_r$$

Dove $i = 1, 2, ..., r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprecedura i-sima.

2.2 Esempio Ristorante

Vogliamo sapere quante possibili combinazioni di menù un ristorante può avere date:

- 3 Antipasti (n_1)
- 4 Primi (n_2)
- 3 Secondi (n_3)
- 2 Dolci (n_4)
- Poniamo $r = 4$

Il numero di combinazione possibile è:

$$n_1 * n_2 * n_3 * n_4 = 3 * 4 * 3 * 2 = 72$$

2.3 Fattoriale

Il fattoriale di $n \geq 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precendenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 \quad \text{SE} \quad n = 0 \\ n * (n-1)! \quad \text{SE} \quad n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$
$$\frac{13!}{11!} = \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156$$

2.4 Coifficiente Binomiale

Presi n e k con $k \leq n$, definiamo il cofficiente binomiale in questo modo (n su k):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{\cancel{6}^3 * 5}{\cancel{2}} = 3 * 5 = 15$$

2.4.1 Calcolare sottoinsiemi con C.B.

Un possibile uso del coifficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.
Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con cardilinità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{\cancel{4}^2 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2} * \cancel{2!}} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \;\; \#T = 6$$

2.4.2 Propietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune propietà del coifficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Propietà 01

$$\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} * \underset{\substack{\| \\ 0!=1}}{(5-5)!}} = 1$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{\cancel{5!}}{1 * \cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1$$

Propietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * \underset{\substack{\| \\ 1}}{(5-4)!}} = 5$$

Propietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

DIM:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! * (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! * (\cancel{n} - \cancel{n} + k)!} = \frac{n!}{(n-k)! * k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{\underset{\substack{\| \\ 8!}}{4! * (12-4)!}} = \frac{\cancel{12}^{3} * 11 * \cancel{10}^{5} * 9 * \cancel{8!}}{\cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5*9*11 = 495 = \frac{12!}{\underset{\substack{\| \\ 4!}}{8! * (12-8)!}} = \binom{12}{8}$$

Propietà 04 Se $n \in \mathtt{N}_0 \quad 1 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distungere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezioni.

2.6 Tartaglia

Applicando le propietà sul coifficienti binomiali è possibile costruire la tabella di Tartaglia:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 3 & 3 & 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & * & * & * & * \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & * & * & * \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & * & * \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & * \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Il valore dell'elemento di riga (x_i, y_i) viene calcolato dalla somma tra gli elementi di coordinata $(x_i, y_i - 1) + (x_i - 1, y_i - 1)$ della riga precedente $y - 1$.
Ogni riga di Tartaglia rappresenta i coefficienti di $(a + b)^n$
Esempio per 2: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Andando a generalizzare:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Proposizione La somma degli elementi della $n-$esima riga vale 2^n