Calcolo delle probabilità e Statistica 2023-24
(G. Caputo)

Indice

1 Lezione 01 - 06/03/2023

1.1 Il Gioco della Zara con 2 Dadi

Prevede l'utilizzo di due dadi (nel gioco originale tre), a turno ogni giocatore chiama un numero e lancia i dadi.
Se la somma dei dadi è pari al numero scelto si vince.
2 dadi onesti danno luogo a 2 punteggi da 1 a 6: P_1, P_2.
Possiamo rappresentiamo graficamente le coppie di tutti i possibili casi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\xrightarrow{Z_2}$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Possiamo notare che coppie possibili sono 36, poiché ogni dado ha 6 faccie, quindi $6^2 = 6 * 6 = 36$ possibili risultati.
Espriamo il "Lanciare i dadi" come ξ (e tondo) cioè **ESPERIMENTO ALEATORIO**.
L'insieme dei possibili risultati di ξ si può esprimere così:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, .., 6\} = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

Questo insieme Ω (omega) prende il nome di **SPAZIO CAMPIONE**.
La coppia $(i, j) \in \Omega$ è chiamato **PUNTO CAMPIONE**.
Per ogni esper. ale. ξ bisogna prendere una **FAMIGLIA DI EVENTI:**

$$\text{(f tondo) } \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

In questo caso tutti i possibili sottoinsiemi cioè l'insieme delle parti dello spazio campione.
Z_2[1] (Zara due) è una funzione che preso un punto campione restituisce la somma delle ordinate, è definita nel suguente modo:

$$Z_2 : \Omega \to \mathcal{R}$$

(tutte le funzioni finiscono sempre in $\mathcal{R}$)
Come si può facilmente notare i risultati possibili sono compresi tra 2 e 12 (inclusi).
Possiamo formalizzarlo nel seguente modo:

$$S_{Z2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Questo insieme S_{Z2} prende il nome di **SPETTRO**.
La possibilità di trovare un numero non appartente a questo insieme è nulla.

[1] Il pedice 2 sta ad indicare che stiamo considerando due dadi, è utile per distunguirlo da un eventuale Z_3, ma può essere anche omesso.

Per calcolare la probabiltà ci basta mettere a rapporto i seguenti dati:

$$\frac{\#^2\text{OCCORRENZE DI N}}{\#\text{ SPAZIO CAMPIONE}} = \frac{\# Z_2^{-1}(\{N\})}{\#\Omega}$$

Poniamo che voglia sapere la probabilità che la somma dei 2 dadi faccia 4, allora diremo che la **LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO:**

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{\# Z_2^{-1}(\{4\})}{\#\Omega} = \frac{\#\{(1,3),(2,2),(3,1)\}}{\#\Omega} = \frac{3}{36}$$

(l'antimmagine finisce sempre in $\mathcal{P}(\Omega)$ e mai in Ω)

Possiano notare che il numero con la più alta probabilità è il 7, poiché figura sei volte, quindi $\frac{6}{36}$.
Possiamo rappresentare la probabilità di ogni numero dello spettro:

$$\mathcal{P}(Z=2) = \frac{1}{36} = \mathcal{P}(Z=12)$$

$$\mathcal{P}(Z=3) = \frac{2}{36} = \mathcal{P}(Z=11)$$

$$\mathcal{P}(Z=4) = \frac{3}{36} = \mathcal{P}(Z=10)$$

$$\mathcal{P}(Z=5) = \frac{4}{36} = \mathcal{P}(Z=9)$$

$$\mathcal{P}(Z=6) = \frac{5}{36} = \mathcal{P}(Z=8)$$

$$\mathcal{P}(Z=7) = \frac{6}{36}$$

Inoltre possiamo notare che a parte la diagonale secondaria, la matrice è speculare, cioé ogni numero opposto ha la stessa probabilità di uscire.
Possiamo verificare che la probabilità che esca un numero pari è uguale ai dispari:

$$Pari = 2*(\frac{1}{36}) + 2*(\frac{3}{36}) + 2*(\frac{5}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$Dispari = 2*(\frac{2}{36}) + 2*(\frac{4}{36}) + 1*(\frac{6}{36}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Possiamo affermare che, ogni probabilità è compresa tra 0 e 1 e che la probabilità dello spazio campione è **sempre** uguale 1 (condizione di normalizzazzione), cioè la somma delle probabilità di tutti i valori dello spettro dello spazio campione (Ω) deve essere uguale a 1.

[2] # indica la cardanalità, è usato come sostituto di $\|$

2 Lezione 02 - 08/03/2023

2.1 Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio

Se una procedura di scelta si può suddividere in r sottoprocedure allora il numero n delle possibili scelte è dato da:

$$n = n_1 * n_2 * ... * n_r$$

Dove $i = 1, 2, ..., r$ rappresenta il numero delle possibili scelte nella sottoprecedura i-sima.

2.2 Esempio Ristorante

Vogliamo sapere quante possibili combinazioni di menù un ristorante può avere date:

- 3 Antipasti (n_1)
- 4 Primi (n_2)
- 3 Secondi (n_3)
- 2 Dolci (n_4)
- Poniamo $r = 4$

Il numero di combinazione possibile è:

$$n_1 * n_2 * n_3 * n_4 = 3 * 4 * 3 * 2 = 72$$

2.3 Fattoriale

Il fattoriale di $n \geq 0$ si esprime come $n!$ ed è definita come il prodotto di tutti i numeri precendenti, definiamo tramite ricorsione:

$$n! = \begin{cases} 1 \quad \text{SE} \quad n = 0 \\ n * (n-1)! \quad \text{SE} \quad n > 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$
$$\frac{13!}{11!} = \frac{13 * 12 * \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 * 12 = 156$$

2.4 Coifficiente Binomiale

Presi n e k con $k \leq n$, definiamo il cofficiente binomiale in questo modo (n su k):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! * 2!} = \frac{6 * 5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * 2!} = \frac{\cancel{6}^3 * 5}{\cancel{2}} = 3 * 5 = 15$$

2.4.1 Calcolare sottoinsiemi con C.B.

Un possibile uso del coifficiente binomiale è quello di poter sapere il numero dei sottoinsiemi di ordine k con n valori.
Esempio poniamo di avere un insieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con cardilinità $\#S = 4$, vogliamo sapere quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di ordine due:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{\cancel{4}^2 * 3 * \cancel{2!}}{\cancel{2} * \cancel{2!}} = 2 * 3 = 6$$

$$T = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \;\; \#T = 6$$

2.4.2 Propietà del C.B. con esempi

Andiamo ad elencare alcune propietà del coifficiente binomiale con i rispettivi esempi:

Propietà 01

$$\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$$

$$\binom{5}{5} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} * \underbrace{(5-5)!}_{\overset{||}{0!=1}}} = 1$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{\cancel{5!}}{1 * \cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1$$

Propietà 02

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 * \cancel{4!}}{\cancel{4!} * \underbrace{(5-4)!}_{\overset{||}{1}}} = 5$$

Propietà 03

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

DIM:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! * (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! * (\cancel{n} - \cancel{n} + k)!} = \frac{n!}{(n-k)! * k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! * \underbrace{(12-4)!}_{8!}} = \frac{\cancel{12}^{3} * 11 * \cancel{10}^{5} * 9 * \cancel{8!}}{\cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{8!}} = 5*9*11 = 495 = \frac{12!}{8! * \underbrace{(12-8)!}_{4!}} = \binom{12}{8}$$

Propietà 04 Se $n \in \mathtt{N}_0 \quad 1 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.5 Problema del Contare

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distungere il caso in cui questa è effettuata con o senza ripetizioni. Si può inoltre porre o meno l'attenzione sull'ordine con cui gli elementi di S si presentano nella selezioni.

2.6 Tartaglia

Applicando le propietà sul coifficienti binomiali è possibile costruire la tabella di Tartaglia:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 3 & 3 & 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & * & * & * & * \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & * & * & * \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & * & * \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & * \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Il valore dell'elemento di riga (x_i, y_i) viene calcolato dalla somma tra gli elementi di coordinata $(x_i, y_i - 1) + (x_i - 1, y_i - 1)$ della riga precedente $y - 1$.
Ogni riga di Tartaglia rappresenta i coefficienti di $(a + b)^n$
Esempio per 2: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Andando a generalizzare:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Proposizione La somma degli elementi della $n-$esima riga vale 2^n

3 Lezione 03 - 13/03/2023

3.1 Disposizioni

Disposizione: è una selezione dove l'ordinamento è **IMPORTANTE**.
Per calcolare tutte le k-disposizioni con ripetizione di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Per calcolare tutte le k-disposizioni semplici di S usiamo questa formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$$

(n cardinalità dell'insieme, k la lunghezza della disposizione)

3.1.1 Esempio del gioco del Tris (Disposizione Semplice)

Dati:

- 9 Cavalli in gara $\Rightarrow$ Alfabeto costituito da 9 valori $S = \{C_1, ..., C_n\}$
- Si punta sul podio del cavallo quindi quante terne di cavalli posso avere **senza ripetizione** e **con ordine**.

Se un cavallo esce dalla terna allora non potrà ripresentarsi nella prossima posizione, quindi **senza ripetizione**.
Dunque quante sono le sequenze lunghe k ($\leq n$) composte dai simboli dell'alfabeto S.
Generalizzando abbiamo:

$$D_{n,k} = n(n-1)...(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$$

Questo tipo di calcolo combinatorio è chiamato **Disposizione /(semplice)**.

3.1.2 Esempio Totocalcio (Disposizione con Ripetezione)

Consideriamo le schedine Totocalcio, in cui abbiamo n righe in cui si può scomettere su due squadre, l'alfabeto è composta da:

$$S = \{1, x, 2\}$$

Quante sono tutte le schedine del totocalcio che si possono costruire sapendo che ci sono 11 partite?
Ogni scomessa può avere 3 valori possibili, quindi abbiamo 11 caselle con ognuna 3 possibili varianti.
Dato che **l'ordine conta** parliamo di **disposizioni** e le ripetizione sono ammesse, quindi possiamo usare la "vecchia" regola moltiplicativa cioé: n^k, quindi le disposizione con ripetizione:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k = 3^1 1 = 177147$$

3.1.3 Esempio di Disposizione

Poniamo caso di voler sapere le possibili di dispozioni normali e semplici di un dato insieme di lettere. Per semplicità consideriamo l'insieme $S = \{c, a\}$, poniamo caso che vogliamo sapere tutte le possibili parole di lunghezza 2.
Quindi $n = \#S = 2$ e $k = 2$, allora:

$$D^{(r)}_{n,k} = n^k = 2^2 = 4 = \{(c, c), (a, a), (c, a), (a, c)\}$$
$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2!}{0!} = 2! = 2 = \{(c, a), (a, c)\}$$

3.2 Permutazioni

Ogni n-disposizione semplice è detta una permutazione degli n elementi di S (Possiamo considerare le permutazioni un caso speciale delle disposizioni semplici, cioè avviene quando $n = k$)

$$(se\ k = n) \quad P_n = D_{n,n} = \underset{\substack{\| \\ 0!=1}}{\frac{n!}{(n-n)!}} = n!$$

3.3 Permutazioni con Ripezioni

Sia $n = k_1 + k_2 + ... + k_r$, Una n-selezione di S avente k_1 elementi uguali al primo elemento di S, k_2 elementi uguali al secondo elemento di S e cosi via fino a k_r è detta una $(k_1, k_2, ..., k_r)$-permutazioni con ripetizioni.
Il numbero di tutte le $(k_1, k_2, ..., k_r)$-permutazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$P^{(r)}_n = \frac{n!}{k_1! * k_2! * ... * k_r!} = \binom{n}{k_1, ..., k_r} \ (k_1 + ... + k_r) = r$$

3.4 Esempi Permutazioni

$$S = \{A, I, O, S\} \ \#S = 4 \ k = n = 4$$

Possiamo formare varie parole: OASI, SAIO, SOIA..., possiamo calcolarle:

$$P_4 = 4! = 24$$

Poniamo caso che vogliamo sapere le possibili combinazioni di $STATISTICA$, possiamo notare che più lettere si ripetono quindi mettiamo al denomitore il numero di volte che la lettere che si ripete al fattoriale, per calcore dobbiamo usare:

$${}_{n_1,n_3,n_3,...,n_r}P_n \frac{10!}{2!3!2!2!1!}$$

il 10! si riferisce alla lunghezza della parola.

3.5 Combinazioni Semplici

Sia $k <= n$, una k-combinazione semplice di S si ottine indentificando tutte le k-disposizioni semplici di S senza dare importanza all'ordine.
Il numero di tutte le k-combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \quad (con\ k <= n)$$

3.5.1 Esempio Ruota di Napoli (Combinazione Semplici)

Il gioco consiste nell'estrarre tre numeri da un alfebeto: $S = \{1, 2, ..., 90\}$, i numeri estratti non possono ripetersi e l'ordine non è importante.
In questo caso dato che l'ordine non conta le disposizioni ci danno un numero troppo grande quindi dobbiamo andare a rimuovere le parte in eccesso:

$$\frac{D_{90,3}}{P_3} = \frac{90!}{(90-3)!} * \frac{1}{3!} = \frac{90!}{87!3!} = \binom{90}{3} = C_{90,3}$$

Quindi quando parliamo di sequenza senza ordine useremo il termine **combinazioni** in questo caso semplici poiché non cononta l'ordine.

3.6 Combinazioni con Ripetizioni

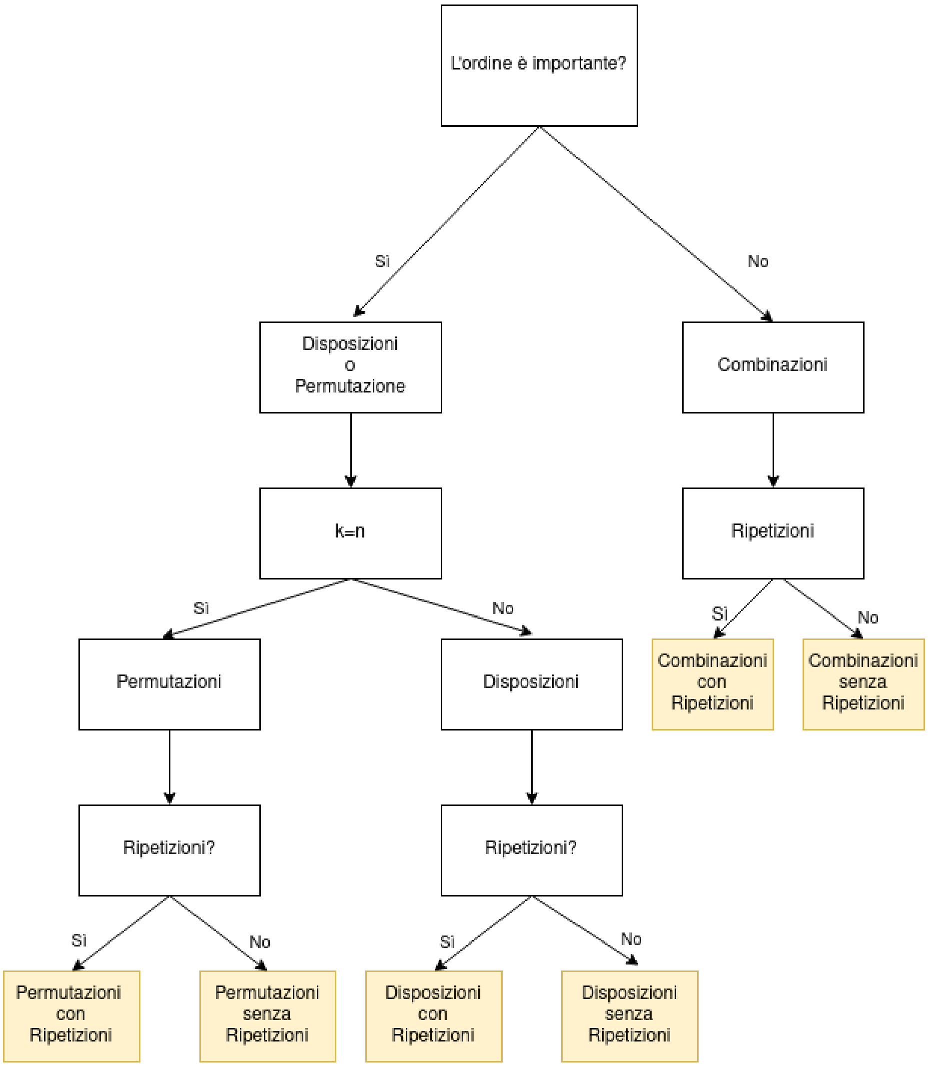
Una k-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni con ripetizioni di S aventi i medesii elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizioni di qualche elemento di S e l'ordine è ininfluente).
Il numero di tutte le k-combinazioni con ripetizioni di S è dato da:

$$C^{(r)}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

3.7 Recap

Piccolo recap di tutte le formule:

- Disposizioni con Ripetizioni: $D^{(r)}_{n,k} = n^k$
- Disposizioni senza Ripetizioni: $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k <= n)$
- Permutazioni con Ripetizioni: $P^{(r)}_n = \binom{n}{k_1,...,k_r}$ $(k_1 + ... + k_r) = r$
- Permutazioni senza Ripetizioni: $P_n = n!$
- Combinazioni con Ripetizioni: $C^{(r)}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$
- Combinazioni senza Ripetizioni: $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ $(con\ k <= n)$



4 Lezione 04 - 15/03/2023

4.1 Riassunto Algebra

Begin	Algebra degli Insiemi
$\emptyset$	Insieme Vuoto
$\mathbb{N}$	Interi positivi (senza zero)
$\mathbb{N}_0$	Numeri Naturali (con zero)
$\mathbb{Z}$	Numeri Relativi
$\mathbb{Q}$	Numeri Razionali
$\mathbb{R}$	Numeri Reali
Ω	Insieme universo
A	Insieme
$A \cup B$	Unione di A e B
$A \setminus B$	Differenza tra A e B
A^C	Complementare di A
$A \cap B$	Intersezione tra A e B
$A \subset B$	A contenuto in B
$]a, b[$	Intervallo aperto
$[a, b]$	Intervallo chiuso

Le operazioni di uninione e intersezione hanno propietà di idempotenza, associtività, commutatività, distrubutività, identità, complementanzione, de morgan.

4.2 Cardinalità Insiemi

4.2.1 Insieme Finito

Un insieme è **finito** se è possibile mettere ogni elemento dell'insieme in corrispondenza biuniva.

$$|\Omega| = \#\Omega = n$$

4.2.2 Insieme Numerabile

Ω si dice **numerabile** se è possibile mettere ogni elemento dell'insieme in corrispondenza biuniva con $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$

$$|\Omega| = \#\Omega = \alpha_0$$

4.2.3 Insieme Continuo

Ω si dice **continuo** se non ne finito ne numerabile

$$|\Omega| = \#\Omega = c$$

4.3 Classi (Famiglie)

Quando gli elementi di un insieme a sono a loro volta degli insiemi si usa per a la parola **classe**.

$$a = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$$

In particolare se Ω è un insieme, la classe di tutti i sottinisiemi di Ω si dice l'insieme delle parti di Ω e si indica con $P(\Omega)$.
Se Ω è un insieme e a è una classe di sottinsimi di Ω tale che l'unione di essi ha come risultato Ω allora a è detta essere un **ricoprimento** di Ω.
Un ricoprimento a di Ω è detto essere una **partizione** di Ω se i suoi elementi a due a due disgiunti.
Esempio:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 7\}, \{7, 8, 9\}\} \text{ è un ricomprimento ma non una partizione}$$

$$a = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\} \text{ è partizione poiché tutti gli insiemi sono disgiunti}$$

5 Lezione 05 - 16-03-2023

5.1 Definizioni simboli Insiemestici ed Eventi

Begin	Algebra degli Insiemi	Logica degli Eventi
Ω	Insieme universo	Spazio Campione
$A \in F$	Insieme	Evento
A^C	Complementare di A	Si verifica quando non si verifica A
$A \cup B$	Unione di A e B	OR degli eventi, deve verificarli almeno uno tra A e B
$A \cap B$	Intersezione tra A e B	AND degli eventi, devono verificarsi entrambi
$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$	Unione finita	n verifica almeno una tra $A_1, A_2, ..., A_n$
$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	""
$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$	Intersezione finita	Si verifica se tutti gli eventi $A_1, ..., A_n$ si verificano
$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$	Unione numerabile	""
$\emptyset$	Insieme Vuoto	Evento Impossibile
$A \cap B = \emptyset$	A e B sono disgiunti	Eventi Incompatibili
$A \subset B$	A contenuto in B	Il verificare di finita di due elementiA implica il verificare di B
$\uplus_k A_k = \Omega$	Ricoprimento disgiunto (partizione)	$A_1, A_2, ..., A_n$ eventi neccessari

5.2 Unione Finita/Numerabile

Unione finita cioè che preso n finito di insiemi la loro unione è chiusa:

$$\bigcup_{i=n}^{n} A_i \rightarrow \quad \text{ciclo finito con inizio e fine}$$

Unione numerabile è un unione di un numero non finito di insiemi ma che si possono contare:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \quad \text{ciclo infinito di unione}$$

Tutto questo vale anche per l'intersezione tramite **de morgan**.

5.3 Algebra e Sigma Algebra

Preso un Ω spazio campione e un a (a tondo), classe non vuota di sottinsiemi di Ω allora:

$$a \text{ è un algebra} \Leftrightarrow$$

$$i) A \in a \Rightarrow A^C \in a \quad \text{(a è chiusa rispetto il complemento)}$$

$$ii) A_1, A_2 \in a \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in a \quad \text{(a è chiusa rispetto l'unione finita di due elementi)}$$

C'è un anche una sua variante chiamanta Sigma(numerabile) Algebra definita così:

$$a \text{ è una } \sigma\text{-algebra} \Leftrightarrow$$

$$i) uguale$$

$$ii) n \in N, A_n \in a \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in a \quad \text{(a è chiusa rispetto l'unione numerabile)}$$

Riassumendo:
"Un'algebra è chiusa rispetto all'unione/intersezione di due suoi elementi e rispetto al complemento."
"Una σ-algebra è chiusa rispetto all'unione/intersezione numerabile di suoi elementi e rispetto al complemento."

5.3.1 Osservazioni

Posto $a = \{\{2,3\},\{6\},\{4,5\}\}$, osserviamo i seguenti esempi:

$$\{4,5\} \subseteq a \text{ SBAGLIATO}$$
$$\{4,5\} \in a \text{ CORRETTO}$$
$$\{\{4,5\}\} \subseteq a \text{ CORRETTO}$$

5.3.2 Casi Particolari

Poniamo $A \subseteq \Omega$, si definisce **algebra(sigma) banale**, a posto come:

$$a = \{\emptyset, \Omega\}$$

È l'unica algebra a due elementi, ovviamente entrambe le propietà sono banalmente dimostrate poiché:

$$\Omega^C = \emptyset$$

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega \in a$$

Gli elementi $\emptyset$ e Ω sono neccessari per essere un **algebra**. Poniamo caso di un $a = \{A, A^c\}$ questa non è un algebra poiché $A \cup A^c = \Omega \notin a$, se aggiunssimo solo Ω non sarebbe rispettata la prima condizione poiché $\Omega^c = \emptyset \notin a$.
Ricapitolando:

$$a = \{A, A^C\} \ \textbf{non è algebra} \quad a = \{A, A^C, \emptyset, \Omega\} \quad \textbf{è algebra (sigma)}$$

Per contrapposizione la (sigma) algebra più grande è $P(\Omega)$, tutte le altre algebra(sigma) sono sottoinsiemi di $P(\Omega)$

5.4 Propietà (conseguenze)

1. a è una algebra (sigma) $\Rightarrow \ \emptyset, \Omega \in \ a$ (come abbiamo osservato prima)
   Tutti gli elementi dell'algebra banale devono essere presenti in ogni algebra(sigma).

2. L'unione finita di elementi di un algebra (sigma) appartiene comunque ad a
   Per *ii*) abbiamo visto come l'unione si applica per due elementi, ma essendo $\cup$ associativa nel caso di $n - elementi$ basta operarli a due a due e quindi portare questa propietà fino a n elementi.

3. *Sigma algebra* $\Rightarrow$ *Algebra* MA *Sigma algebra* $\not\Leftarrow$ *Algebra*
   Questo poiché un unione finita da 0 a $+\infty$ non appartiene a tutte le algebra, cose che invece accade con le sigma algebra.

6 Lezionie 06 - 20/03/2023

6.1 SigmaAlgebra Generata

Sia C una classe su Ω, esiste una σ-algebra F che contiene C ed è contenuta in tutte le σ-algebra che contengono C.
Tale minima σ-algebra contenente C si dice **GENERATA DA** C.
In primo luogo esiste, per ogni C, una σ-algebra che la contiene e l'insieme delle parti.
Dopo di ciò:

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i \text{ con } i \in I$$

6.1.1 Dimostrazione?

Sia $\mathcal{F}_i$ una sigma algebra su Ω, $\forall_i \in \mathcal{I}$
Poniamo $\mathcal{F} = \cap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$ è una classe di sottoinsiemi di Ω e in particolare:

$$\mathcal{F} \text{ è una sigma algebra di } \Omega$$

Andiamo a verificare sia effettivamente una sigma algebra tramite i tre punti:

- Non Vuota

$$\Omega \in \mathcal{F}_i \quad \forall_i \in \mathcal{I} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F} = \cap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$$

Quindi $\mathcal{F}$ **è una classe non vuota.**

- i)

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \cap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i \Rightarrow$$

- ii)

6.1.2 Esempio (Buonocore)

Poniamo di lanciare due dadi onesti, assumiamo i possibili risultati:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{5, 6\}$$

Considerando la famiglia G in questo modo:

$$G = \{A, B\}$$

Possiamo considerare la σ-algebra generata da una famiglia:

$$\sigma(G)$$

Per trovarci gli atomi dobbiamo andare a intersercare tutte le possibili combinazioni tra A e B:

$$A \cap B = \{6\}$$

$$A \cap B^C = \{2,4\}$$
$$A^C \cap B = \{5\}$$
$$A^C \cap B^C = \{1,3\}$$

Abbiamo trovato **4 atomi**, per ottenere tutto l'insieme dobbiamo andare a intersecare gli atomi a due a due:

$$\sigma(G) = \{\{6\},\{5\},\{2,4\},\{1,3\},\{5,6\},\{1,3,5\},\{2,4,5\},\{1,3,6\},\{2,4,6\},$$
$$\{1,2,3,4\},\{1,3,5,6\},\{2,4,5,6\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,5\},\Omega,\emptyset\}\}$$

$\emptyset, \Omega \in \sigma(G)$ per come abbiamo dimostrato un paio di lezioni fa.

6.2 Probabilità di Laplace (Classica)

Sia Ω è finito, ed un evento appartente a una famiglia di eventi $E \in F$, allora la probabilità dell'evento E si può rappresentare nel seguente modo:

$$P_c(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

Questa è un ottima definizione ma solo se c'è simmetria. Considerando il caso di due eventi disgiunti cioé che non possono mai verifarsi insieme, in questo caso con l'unione disgiunta cioè che deve verifacarsi o uno o l'altro:

$$\mathbb{P}(A_1 \uplus A_2) = \frac{N_{A_1} \uplus A_2}{N} = \frac{N_{A_1} + N_{A_2}}{N} = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

6.3 Probabilità Frequentista (Statistica)

Se un esperimento aleatorio E si ripete un numero indefinito di volte, possiamo considerare il rapporto:

$$n \in N \quad P_f(E) = \frac{n_E}{n}$$

n è il numero delle ripetizioni di E
n_E è il numero delle prove tra le quali E_n si è presentato.
Questo definizione però è molto approsimativa, quella più corretta e precisa è:

$$P_f(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_E}{n} >= 0$$

Considerando il caso di due eventi disgiunti cioé che non possono mai verifarsi insieme, in questo caso con l'unione disgiunta cioè che deve verifacarsi o uno o l'altro:

$$\mathbb{P}(A_1 \uplus A_2) = \frac{N_{A_1} \uplus A_2}{N} = \frac{N_{A_1} + N_{A_2}}{N} = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$