

8. LA SUPRACONDUCTIVITE

1. Approche expérimentale

a. Propriétés électriques : une résistivité nulle

La résistivité électrique de beaucoup de métaux et alliages tombe brusquement à zéro lorsque l'échantillon est refroidi à une température suffisamment basse. Ce phénomène est observé pour la première fois par H. Kamerlingh Onnes en 1911, trois ans après la première liquéfaction de l'hélium. Son interprétation viendra bien plus tard, en 1957 par J. Bardeen, L.N. Cooper et J.R. Shrieffer. Bien qu'elle ait été observée sur beaucoup de métaux, la supraconductivité n'a pas été décelée sur les meilleurs conducteurs comme les métaux alcalins ou les métaux nobles (Cu, Ag et Au). Par contre, un certain nombre d'alliages, de composés intermétalliques, et de semiconducteurs sont supraconducteurs.

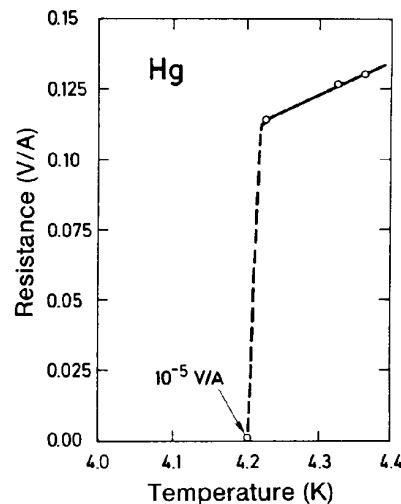


Fig 8.1 - La résistivité d'un métal supraconducteur s'annule au dessous de la température critique.

En 1980, il semblait que la limite supérieure de la température de la transition supraconductrice (T_c) était à peu près atteinte, un peu au dessus de 20 K. Une aussi basse température limite beaucoup les possibilités d'application, la plus importante étant dans ces conditions la fabrication de bobines supraconductrices pour la production de champs magnétiques intenses.

Ce fut une surprise quand, en 1986, Berdnoz et Müller présentèrent une approche entièrement nouvelle pour obtenir des supraconducteurs à haute température. Ils trouvèrent une température critique supérieure à 30 K dans une classe d'oxydes de cuivre mauvais conducteurs de l'électricité. Un représentant de cette classe a pour formule $(\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x)\text{CuO}_4$. Pour $x = 0$, il est semiconducteur et antiferromagnétique; pour $0.08 \leq x \leq 0.26$ il est métallique et devient supraconducteur lorsque sa température passe sous la valeur critique T_c (38 K pour $x \sim 0.15$). De nombreux oxydes de cuivre supraconducteurs ont été isolés depuis 1986. La créativité des chimistes du solide a été remarquable dans ce domaine. Très vite la phase $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ a été synthétisée avec un T_c de 92 K, puis des phases au Bi et au Hg ont été découvertes avec un T_c autour de 125 K et 150K respectivement. Plus récemment, d'autres supraconducteurs à « haute température critique », tels des composés à base de fullerenes (C_{60}) ou l'alliage MgB_2 ont été découverts.

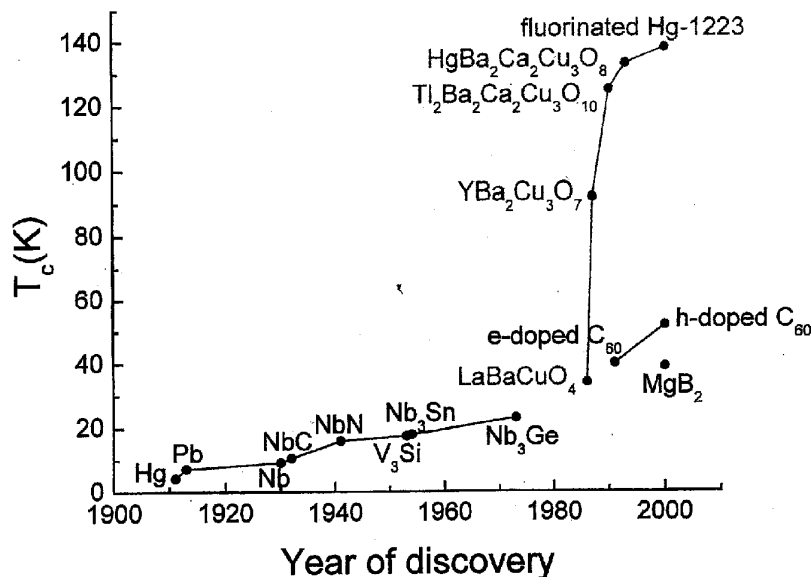


Fig 8.2 - Température critique de supraconducteurs

La structure cristalline des cuprates supraconducteurs est compliquée. L'existence de plans Cu-O est une caractéristique commune qui confère une forte anisotropie à la plupart des propriétés physiques. La supraconductivité, dont le caractère bidimensionnel est maintenant bien confirmé expérimentalement, correspond à la conduction électrique dans ces plans. Ces matériaux sont fragiles et cassants. Ils ne sont pas ductiles comme

les métaux, ce qui rend très difficile la fabrication de fils et limite considérablement pour l'instant les possibilités d'applications.

b. Propriétés magnétiques : effet Meissner

En 1933, Meissner et Ochsenfeld ont trouvé que, lorsqu'un supraconducteur est refroidi en dessous de la température de transition dans un champ magnétique, les lignes d'induction \mathbf{B} sont expulsées de l'échantillon (Fig.8.3). Ce phénomène est appelé effet Meissner. Il montre qu'un supraconducteur massif se comporte, dans un champ magnétique extérieur \mathbf{H} comme si, dans l'échantillon, nous avions $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Pour expulser les lignes de flux de l'intérieur de l'échantillon, des courants persistants sont induits en surface. Soit \mathbf{M} l'aimantation, puisque l'équation de l'état d'expulsion de l'induction s'écrit simplement $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, nous obtenons le résultat suivant:

$$(\text{CGS}) \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{0}; \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} = -\frac{1}{4\pi} \quad (8.1a)$$

$$(\text{SI}) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mathbf{0}; \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} = -1 \quad (8.1b)$$

C'est le phénomène de diamagnétisme parfait où l'aimantation diamagnétique compense exactement le champ appliqué. Une valeur de susceptibilité égale à -1 est tout à fait exceptionnelle dans le domaine de la physique condensée : les atomes ou les molécules ont des diamagnétismes orbitaux de l'ordre de 10^{-5} .

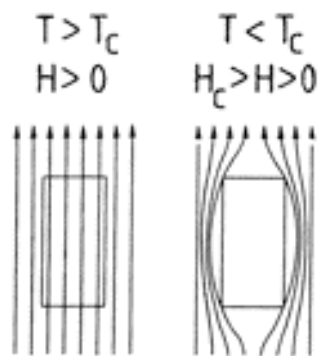


Fig 8.3 - Effet Meissner : les lignes de champ magnétique sont expulsées au dessous de T_c et l'induction est nulle

Ce résultat très important ne peut se déduire uniquement du fait qu'un supraconducteur possède une résistivité nulle. D'après la loi d'Ohm $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j}$, nous voyons que si la

résistivité ρ s'annule, alors que \mathbf{j} reste fini, \mathbf{E} doit tendre vers zéro. D'après l'équation de Maxwell, $d\mathbf{B}/dt$ est proportionnel à $\text{rot } \mathbf{E}$, d'où une résistivité nulle implique que $d\mathbf{B}/dt = 0$. Ainsi, ce résultat prédit que le flux dans le métal ne peut varier lorsqu'on le refroidit jusqu'en dessous de la température de transition. L'effet Meissner est en contradiction avec ce résultat, il suggère qu'un diamagnétique parfait est une propriété caractéristique de l'état supraconducteur. Les différents comportements entre un supraconducteur et un conducteur parfait, défini comme un conducteur ne donnant lieu à aucune diffusion pour les électrons, sont illustrés à la Fig.8.4. Dans le cas d'un conducteur parfait, on n'obtient pas le même état si on passe de l'état normal à l'état $\rho = 0$ sous champ par 2 voies différentes.

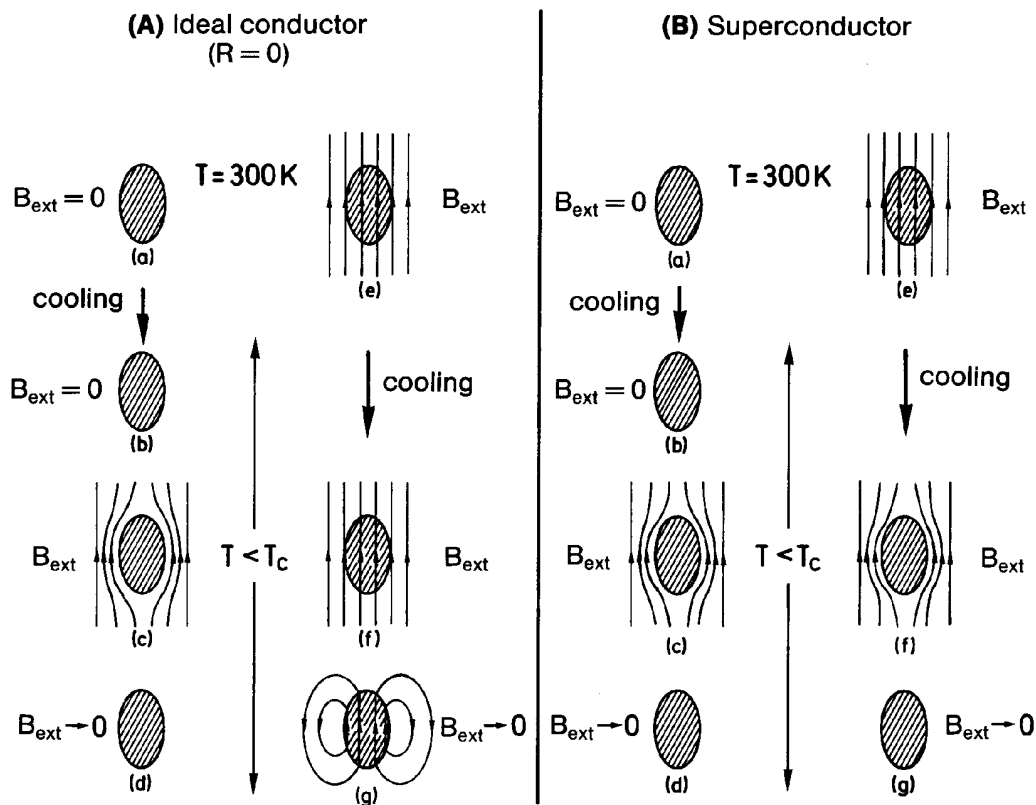


Fig 8.4 - Comparaison entre l'état de conducteur parfait et l'état supraconducteur

c. Propriétés magnétiques : un "champ critique"

Le procédé le plus spectaculaire pour supprimer l'état supraconducteur en dessous de T_c , est d'appliquer un champ magnétique suffisamment intense, c'est-à-dire supérieure à une valeur critique H_c . Si le matériau supraconducteur est parcouru par un courant, le champ magnétique que celui-ci génère est tout aussi capable de supprimer l'état

supraconducteur. Il existe donc aussi un courant critique I_c , au dessus duquel l'état normal est restauré. La présence dans l'échantillon d'impuretés magnétiques (portant un moment magnétique), telles que les terres rares ou les atomes du groupe du fer réduit très fortement la température critique T_c . La transition entre l'état normal et l'état supraconducteur est thermodynamiquement réversible, au même titre que la transition entre la phase liquide et la phase gazeuse d'une substance que nous pouvons représenter à l'aide d'une courbe donnant la variation du champ critique H_c avec la température. La loi de variation expérimentale est approximativement parabolique :

$$H_c(T) = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (8.2)$$

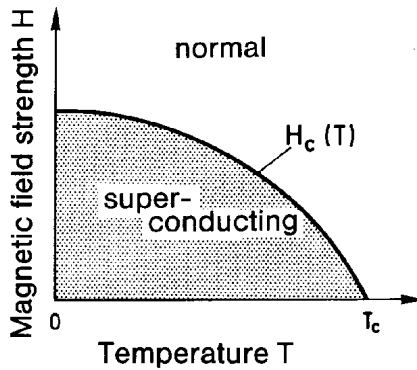


Fig 8.5 - Diagramme de phase pour un supraconducteur

Le champ critique H_c est une mesure de la différence d'énergie entre les états supraconducteur et normal au zéro absolu. Pour cela, considérons le travail exercé sur le supraconducteur quand on le fait passer d'une position infiniment éloignée (où le champ appliqué est nul) à une position \mathbf{r} dans le champ d'un aimant permanent où règne un champ extérieur \mathbf{H} . Le travail accompli est

$$W = -\mu_0 \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$$

par unité de volume de l'échantillon. Pour un supraconducteur, \mathbf{M} est relié à \mathbf{H} par (8.1b). Dès lors, l'équation thermodynamique du processus s'écrit :

$$dG_S = TdS + \mu_0 H dH$$

Par conséquent au zéro absolu, où $TdS = 0$, l'augmentation de la densité d'énergie libre de Gibbs du supraconducteur est

$$G_S(H) - G_S(0) = \frac{\mu_0}{2} H^2$$

lorsqu'il passe d'une position où le champ magnétique est nul à une position où ce champ est égal à H.

Considérons maintenant un métal normal non magnétique. Si nous négligeons la faible susceptibilité d'un métal dans l'état normal, alors $M = 0$ et l'énergie du métal normal est indépendante du champ. Dès lors :

$$G_N(H) = G_N(0)$$

A la valeur critique H_c du champ magnétique, les énergies des états normal et supraconducteur sont égales :

$$G_N(H_c) = G_S(H_c) = G_S(0) + \frac{\mu_0}{2} H_c^2$$

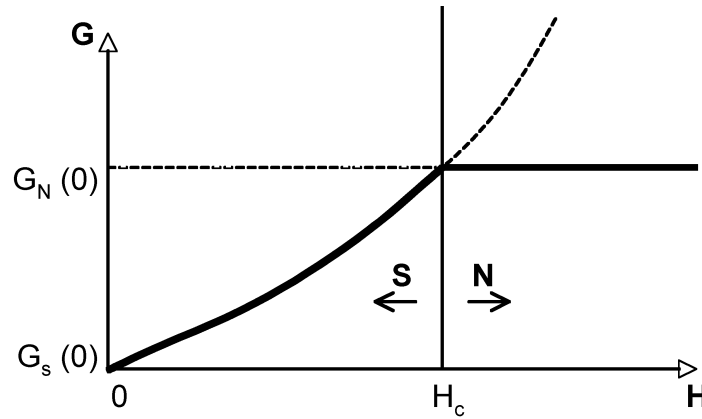


Fig 8.6 – Evolution de l'énergie libre de Gibbs d'un supraconducteur avec le champ magnétique extérieur

L'échantillon est stable dans les deux états quand le champ appliqué est égal au champ critique. Dès lors, la différence d'énergie entre les états supraconducteur et normal au zéro absolu est donné par

$$\Delta G = G_N(0) - G_S(0) = \frac{\mu_0}{2} H_c^2 \quad (8.3)$$

L'énergie de stabilisation de l'état supraconducteur par rapport à l'état normal peut également être déterminée par des mesures de la capacité calorifique. Pour cela, il suffit

de mesurer la différence des valeurs de chaleur spécifique dans un champ magnétique (état normal) et en l'absence de champ magnétique (état supraconducteur).

d. Supraconducteurs de type I et de type II

La courbe d'aimantation de nombreux métaux purs supraconducteurs est représentée Fig.8.7-partie gauche; on les appelle supraconducteurs de type I. La valeur de H_c est toujours trop basse pour ce type de supraconducteurs pour qu'ils puissent être utiles dans la construction de bobines pour aimants supraconducteurs.

D'autres matériaux ont une courbe d'aimantation de la forme montrée sur la Fig.8.7-partie droite; on les appelle supraconducteurs de type II. Ce sont, en général, des alliages ou des métaux de transition ayant une très grande résistivité électrique à l'état normal. Les supraconducteurs de type II ont des propriétés électriques supraconductrices jusqu'à un champ H_{c2} . Entre le champ critique inférieur H_{c1} et le champ critique supérieur H_{c2} , l'effet Meissner est incomplet. Dans la région comprise entre H_{c1} et H_{c2} le supraconducteur est parcouru de lignes de flux (voir Fig.8.8) : on dit qu'il est dans l'état mixte (ou état vortex). L'arrangement compact des vortex à fort champ forme un réseau d'Abrikosov. Un champ H_{c2} de 500 kG (50 teslas) a été atteint dans certains alliages à la température d'ébullition de l'hélium. Avec des solénoïdes bobinés avec un fil de supraconducteur de type II on a obtenu des champs supérieurs à 200 kG.

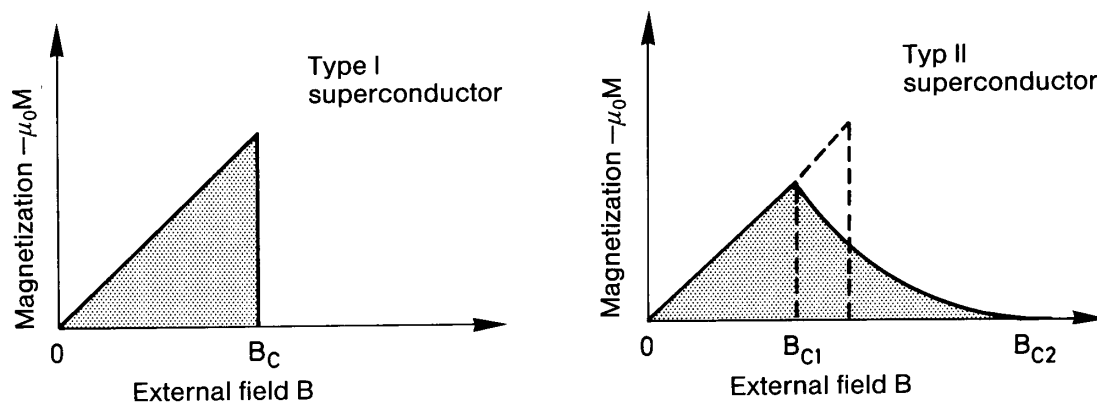


Fig 8.7 - Courbe d'aimantation d'un supraconducteur de type I et de type II

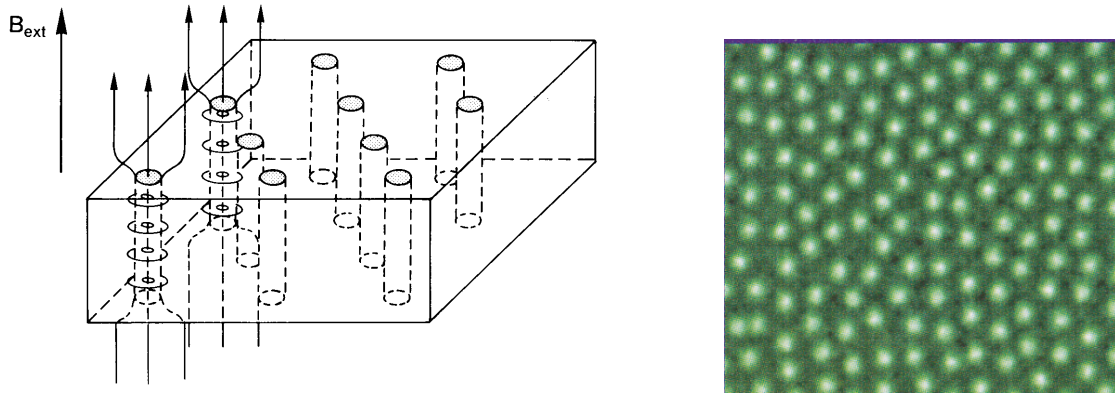


Fig 8.8 – Etat mixte dans un supraconducteur et réseau d’Abrikosov visualisé par microscopie à effet tunnel

e. Manifestations de l'existence d'une bande interdite

La chaleur spécifique

En dessous de T_c , la chaleur spécifique dans l'état normal (restauré par l'application d'un faible champ) revêt la forme $C = \gamma T + \beta T^3$: le terme linéaire en T correspond aux excitations électroniques et le terme cubique correspond aux excitations des vibrations du réseau (phonons). Dans l'exemple repris à la Fig.8.9, on note que la contribution électronique domine sur tout le domaine de température exploré. Sous champ magnétique nul, la chaleur spécifique effectue un saut au franchissement de T_c ; elle décroît ensuite rapidement lorsque la température baisse. L'analyse révèle que la contribution linéaire γT de l'état normal est remplacée par une contribution qui prend un comportement exponentiel lorsque $T \ll T_c$, de la forme $\exp(-\Delta/kT)$. Une variation analogue de la chaleur spécifique électronique serait obtenue avec un semiconducteur intrinsèque dont la largeur de bande interdite ϵ_g vaudrait 2Δ . Ce rapprochement suggère un système électronique dont les états excités seraient séparés de l'état de base par un gap de largeur 2Δ . L'expérience montre que 2Δ est ici de l'ordre de $3.5 kT_c$. Ainsi l'on peut présumer que les électrons de la phase supraconductrice ont à franchir un gap énergétique 2Δ pour atteindre les premiers états excités.

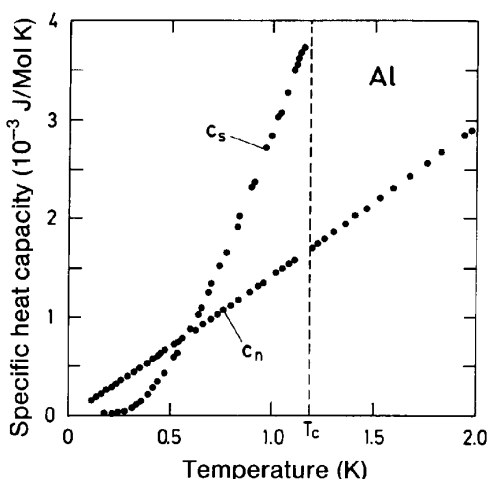


Fig 8.9 - La chaleur spécifique de l'aluminium dans l'état supraconducteur (c_s) et dans l'état normal (c_n), en mJ/mole-K. En dessous de T_c , l'état normal est restauré par l'application d'un champ de 300 Gauss.

La réponse à une onde électromagnétique

L'existence d'une bande interdite dans un supraconducteur suggère l'étude de la transmission du rayonnement électromagnétique, en fonction de la fréquence. En spéculant sur la comparaison avec le semiconducteur, on examine si le milieu est transparent pour les photons d'énergie inférieure au gap. L'expérience montre que tel est bien le cas; elle révèle aussi que le métal supraconducteur ne se distingue plus du métal normal vis à vis des rayonnements de fréquences supérieures à $2\Delta/h$ (pas de transmission). Le seuil de transmission attendu à la position $h\nu = 2\Delta$ est bien trouvé à très basse température ($T < T_c$). L'expérience montre d'autre part que la largeur de la bande interdite dépend de la température : 2Δ est une fonction décroissante de T qui s'annule lorsque $T = T_c$. Cependant, des expériences basées sur le principe de l'effet tunnel sont beaucoup plus précises pour les mesures du gap : nous n'aborderons pas ce point dans ce chapitre.

f. Effet isotopique

On a observé que la température critique des supraconducteurs varie avec la masse isotopique. Dans le mercure, T_c varie de 4,185 K à 4,146 K quand la masse isotopique moyenne M varie de 199.5 à 203.4 unités de masse atomique. La température de transition varie lentement lorsque l'on mélange des isotopes différents du même élément. Les résultats expérimentaux, pour chaque série d'isotopes, peuvent être représentés par une relation de la forme

$$M^\alpha T_c = \text{constante} \quad (8.4)$$

où, pour un bon nombre de solides supraconducteurs de type I, $\alpha \sim 1/2$ (Fig.8.10). La relation (8.4) entre T_c et la masse isotopique nous apprend que les vibrations du réseau et donc les interactions entre électrons et réseau interviennent beaucoup dans la supraconductibilité. Il n'y a aucune autre raison pour que la température de transition supraconductrice dépende du nombre de neutrons dans le noyau. Si l'on se rappelle que la pulsation des phonons est proportionnelle à $M^{-1/2}$, on constate que $T_c \propto M^{-1/2} \propto \theta_{\text{Debye}}$. Cependant, l'introduction d'interactions de Coulomb entre les électrons change la relation (8.4). La valeur $\alpha = 1/2$ n'est pas "sacrée".

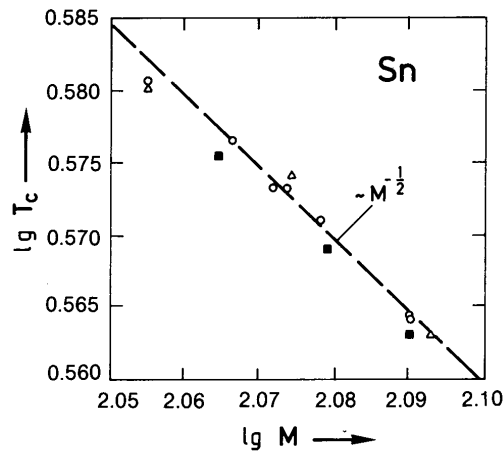


Fig 8.10 Variation de la température critique de l'étain avec la masse isotopique

2. Etudes théoriques

Une compréhension théorique des phénomènes associés à la supraconductibilité a été atteinte à différents niveaux. De nombreux résultats importants peuvent être décrits par des équations phénoménologiques : les équations de London (1935) et les équations de Landau-Ginzburg (1950). Une théorie quantique de la supraconductibilité a été élaborée avec succès par Bardeen, Cooper et Schrieffer (1957), et a servi de base aux études ultérieures. Josephson (1962) a mis en évidence l'importance de la phase de la fonction d'onde supraconductrice.

a. Equations de London: profondeur de pénétration du champ

L'aimantation diamagnétique $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$ est produite par les super-courants qui circulent dans le métal au voisinage de la surface. La densité de courant ne pouvant être infinie, ces courants circulent dans une couche d'épaisseur non nulle. Pour déterminer l'épaisseur de pénétration du champ, il faut coupler 3 grandeurs : \mathbf{j} , \mathbf{E} et \mathbf{B} à l'aide de plusieurs équations.

La relation classique pour la densité de courant dans l'état supraconducteur :

$$\mathbf{j}_s = n_s q_s \langle \mathbf{u}_s \rangle \quad (8.5)$$

où q_s est la charge des particules qui circulent le super-courant, n_s est leur concentration et $\langle \mathbf{u}_s \rangle$ leur vitesse moyenne de dérive. L'équation de mouvement classique de l'électron

$$m_s \frac{d\langle \mathbf{u}_s \rangle}{dt} = q_s \mathbf{E} - \frac{m_s}{\tau} \langle \mathbf{u}_s \rangle = q_s \mathbf{E} \quad (8.6)$$

où le terme de frottement, proportionnel à la vitesse, est égal à zéro dans le supraconducteur (τ est le temps de relaxation). Les équations (8.5) et (8.6) conduisent à la première équation de London :

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{E} \quad (8.7)$$

Par ailleurs, les équations de Maxwell :

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (8.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s \quad (8.9)$$

L'équation (8.9) peut écrire :

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j}_s$$

Par ailleurs, des équations (8.7) et (8.8), on tire :

$$\frac{d}{dt} \left[\text{rot } \mathbf{j}_s + \frac{n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{B} \right] = 0$$

Cette équation indique que \mathbf{j}_s et \mathbf{B} sont stationnaires lorsque le métal devient supraconducteur. Mais cela décrit une situation où le champ est gelé plutôt qu'expulsé, ce qui est en désaccord avec l'effet Meissner. London propose alors une condition plus forte, qui conduit à la seconde équation de London :

$$\text{rot } \mathbf{j}_s + \frac{n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{B} = 0 \quad (8.10)$$

En combinant les équations (8.9) et (8.10), on trouve l'expression suivante, qui décrit la variation spatiale de \mathbf{B} :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mu_0 n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{B} \quad (8.11)$$

Pour un champ uniforme parallèle à la surface du solide supraconducteur (plan yz et $\partial \mathbf{B} / \partial y = \partial \mathbf{B} / \partial z = 0$), cette équation admet comme solution

$$B(x) = B(0) \exp(-x/\lambda_L) \quad (8.12)$$

ce qui introduit une longueur caractéristique λ_L , appelée « longueur de pénétration de London » :

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}} \quad (8.13)$$

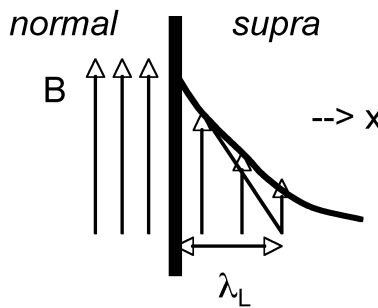


Fig 8.11 - Variation de l'induction magnétique au voisinage de la surface d'un supraconducteur

Une valeur typique de λ_L pour l'aluminium est de 500\AA , pour le plomb 330\AA . Soulignons que la première équation de London décrit l'état conducteur parfait et la seconde, le diamagnétisme parfait.

On notera, par ailleurs, que l'équation (8.10) entraîne :

$$\mathbf{j}_s = -\frac{n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{A} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{A}$$

si bien que \mathbf{j}_s est proportionnel à \mathbf{A} (potentiel vecteur) dans l'état supraconducteur.

De même, l'équation (8.10) conduit à :

$$\text{rot rot } \mathbf{j}_s + \frac{n_s q_s^2}{m_s} \text{rot } \mathbf{B} = 0$$

Utilisant (8.9), on obtient :

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{j}_s) - \nabla^2 \mathbf{j}_s = -\frac{\mu_0 n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{j}_s \quad (8.14)$$

En électromagnétisme, le potentiel vecteur \mathbf{A} est seulement un outil mathématique commode dont la définition exacte est souvent laissée au gré de l'utilisateur. Une densité de courant \mathbf{j}_s par contre constitue une grandeur physique parfaitement définie. On utilise la condition de jauge de London : $\text{div } \mathbf{A} = 0$. C'est ainsi que l'on assure $\text{div } \mathbf{j}_s = 0$. Par conséquent, l'équation (8.14) se réduit à :

$$\nabla^2 \mathbf{j}_s = \frac{\mu_0 n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{j}_s \quad (8.15)$$

qui, par analogie avec (8.11), admet comme solution :

$$\mathbf{j}_s(x) = \mathbf{j}_s(0) \exp(-x / \lambda_L) \quad (8.16)$$

si bien que les courants supraconducteurs circulent à l'intérieur d'une couche superficielle d'épaisseur λ_L .

En conséquence, un champ magnétique appliqué H pénétrera un film mince uniformément si l'épaisseur est très inférieure à λ_L : l'effet Meissner n'est pas complet. Dans ce cas, le champ influe nettement moins sur la densité d'énergie dans l'état supraconducteur. L'approche thermodynamique montre que le champ critique H_c des films minces placés dans un champ magnétique parallèle peut être très élevé.

b. La théorie microscopique

La supraconductivité est restée longtemps une propriété mystérieuse et extraordinaire de certains métaux. Le phénomène a été expliqué dans les années 50, plus de 40 ans après sa découverte.

L'approximation des électrons indépendants, évoluant dans un potentiel moyen ou "potentiel effectif" parfaitement périodique, est la base de la théorie des bandes (chapitre 3). A première vue, il peut sembler que la principale correction à apporter soit la prise en considération de la répulsion électrostatique de Coulomb affectant les électrons à courte distance. Ce serait sous-estimer l'importance des mouvements du réseau. H. Fröhlich (1950) montre comment en réalité un électron dans le cristal peut en attirer un autre, par l'entremise du réseau des ions. Un électron parcourant le solide attire les ions positifs à son passage et laisse derrière lui un sillage de déformation du réseau à cause de l'inertie des ions. Ce sillage est caractérisé par une densité accrue d'ions positifs qui lui confère un pouvoir d'attraction sur un second électron. Mais le premier électron est déjà loin quand s'exerce l'attraction sur le second, suffisamment loin pour que les deux électrons ne soient pas exposés à leur répulsion coulombienne mutuelle (Fig. 8.12). Ces paires d'électrons en interaction attractive faible porteront le nom de paires de Cooper.

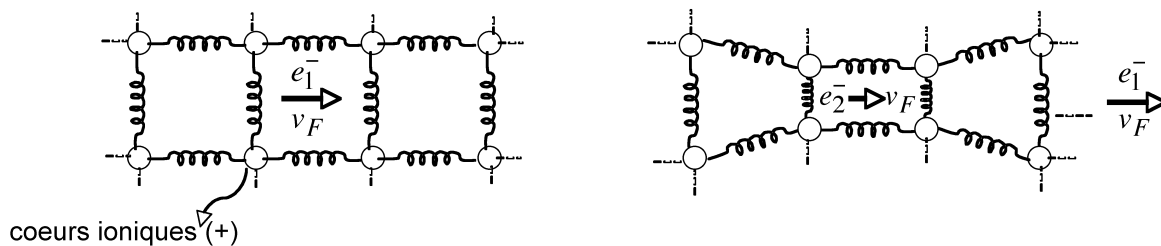


Fig 8.12 – Mécanisme d'appariement des électrons impliquant le réseau cristallin

J. Bardeen, L.N. Cooper et J.R. Shrieffer (1957) démontrent comment une attraction effective entre électrons, aussi faible soit-elle, a pour conséquence que le gaz d'électrons appariés est plus stable que le gaz d'électrons libres. L'état fondamental du système électronique est donc un gaz d'électrons appariés. On se rappelle que l'état fondamental d'un gaz de Fermi d'électrons sans interactions est juste la sphère de Fermi remplie. Cet état permet des excitations arbitrairement petites : nous pouvons former un état excité en prenant un électron de la surface de Fermi et en le portant juste au-dessus de la surface de Fermi. Au contraire, la théorie de BCS montre qu'avec une attraction appropriée

entre électrons, l'état fondamental, à $T = 0\text{K}$ est séparé du premier état excité par l'énergie 2Δ . Ainsi l'accès au premier état excité exige l'apport de l'énergie de gap 2Δ et correspond à la dissociation d'une paire de Cooper en deux particules indépendantes. En sens inverse, les deux particules du supraconducteur excité peuvent se recombiner pour constituer une paire de Cooper en libérant l'énergie 2Δ sous la forme d'un photon ou d'un phonon.

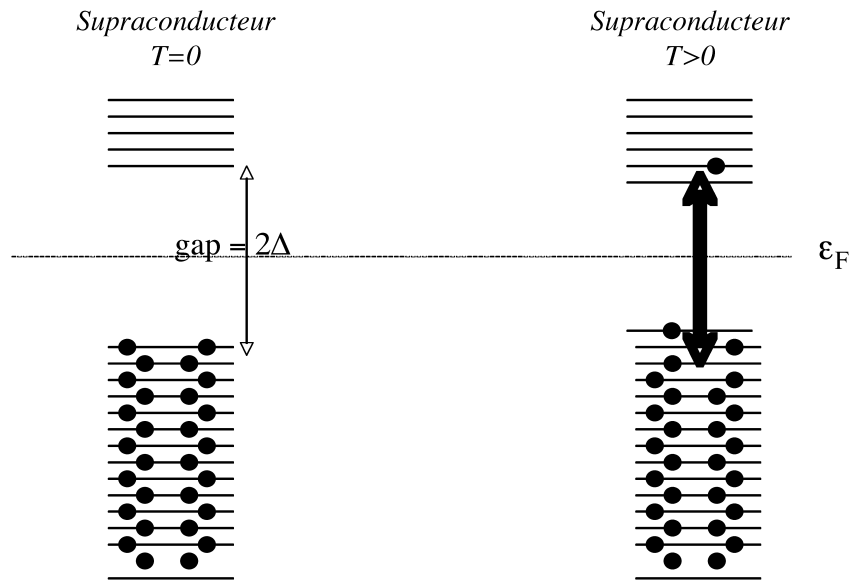


Fig 8.13 – Représentation « semiconducteur » du gap d'énergie dans un supraconducteur

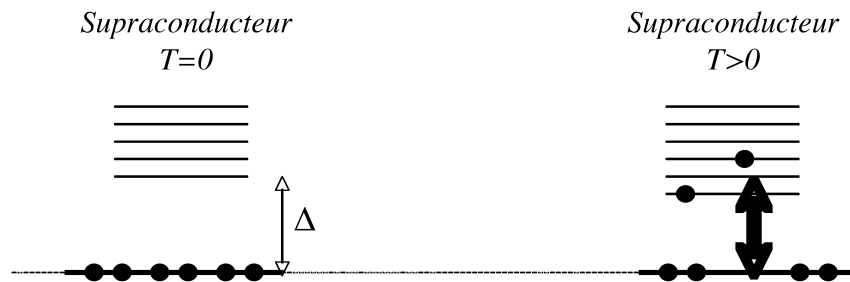


Fig 8.14 – Représentation de « condensation de bosons »

La théorie BCS montre également que l'état supraconducteur est formé de paires d'électrons \mathbf{k} , $s_z=+\hbar/2$ et $-\mathbf{k}$, $s_z=-\hbar/2$ (Fig.8.15). Ces paires d'électrons ont un spin nul et de nombreuses caractéristiques des bosons. L'effet isotopique est une illustration parfaite du rôle du réseau dans le processus d'appariement.

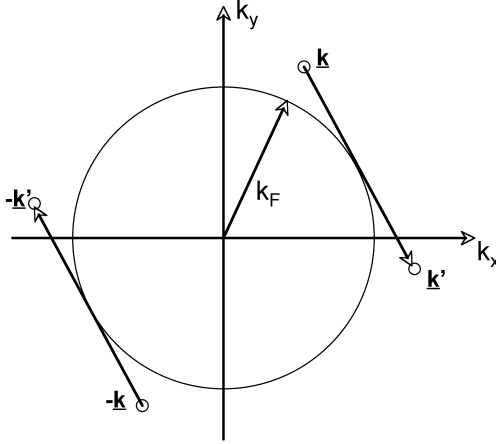


Fig 8.15 – Etat quantique des électrons appariés

Un paramètre fondamental de la théorie BCS est la longueur de cohérence ξ qui fournit une mesure de l'extension spatiale des paires de Cooper. Dans le cas des métaux, on trouve typiquement $\xi (T=0) \approx 10^3 \text{Å}$. Ce résultat indique que sur le domaine occupé par une paire se trouve le centre d'un nombre très important ($\sim 10^5$) d'autres paires: les paires sont donc extrêmement enchevêtrées et cela s'avère essentiel à la stabilité de l'état supraconducteur. Lorsque la température s'élève, le nombre de paires de Cooper dissociées augmente. Pour $T=T_c$, toutes les paires sont dissociées et la description en terme de gaz d'électrons libres devient correcte.

c. Quantification du flux magnétique

Un autre résultat important de la théorie BCS est la quantification du flux magnétique dans un anneau supraconducteur; en effet, il constitue une preuve de l'existence des paires de Cooper.

Montrons tout d'abord que l'on peut piéger le flux magnétique dans un anneau supraconducteur. Pour cela, nous considérons un anneau qui est soumis aux transformations 1-2-3-4 (Fig.8.16). Le flux magnétique ϕ qui traverse l'anneau vérifie la loi de Lenz

$$\int_C \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{d\phi}{dt}$$

où le contour C peut être pris à l'intérieur du supraconducteur, où $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Cela veut dire que ϕ est constant, et que l'extinction du champ magnétique conduit à un flux piégé.

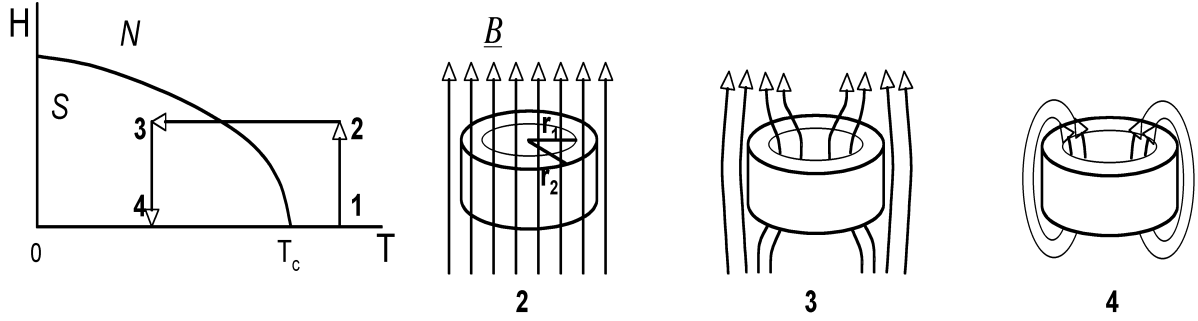


Fig 8.16 -Transformations conduisant au piégeage du flux magnétique dans un anneau supraconducteur

A $T = 0K$, une fraction des électrons de conduction condensent dans l'état fondamental. On décrit ce condensat par un paramètre d'ordre $\Psi(\mathbf{r}, t)$, qui est une fonction à valeur complexe comme la fonction d'onde. L'interprétation de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ est la suivante : $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ représente la densité n_s d'électrons condensés au point \mathbf{r} , à l'instant t dans le supraconducteur. Ainsi $\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r}$ est égal au nombre total d'électrons condensés. Ce qui est remarquable dans cette grandeur physique, c'est qu'une seule phase est nécessaire pour décrire l'état fondamental de toutes les paires de Cooper.

Dans un état stationnaire, on peut écrire :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_s} e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (8.17)$$

où θ est la phase de la fonction d'onde. Comment explique-t-on cette cohérence de phase pour un système comportant un si grand nombre d'électrons ? C'est la condensation de Bose-Einstein qui est la clef de ce phénomène. A basse température, les bosons peuplent l'état fondamental du gaz. Cette condensation est accompagnée par l'apparition d'une cohérence de phase dans la fonction d'onde de l'état condensé.

La densité de courant est définie en mécanique quantique par la relation :

$$\mathbf{j}_s = q_s \psi^* \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} \psi \quad (8.18)$$

où, en présence de champ magnétique, l'opérateur quantité de mouvement est donné par :

$$\hat{\mathbf{p}} = -i \hbar \nabla - q_s \mathbf{A} \quad (8.19)$$

Dès lors, la densité de courant diamagnétique dans l'anneau s'écrit :

$$\mathbf{j}_s = \frac{n_s q_s}{m_s} (\hbar \nabla \theta(\mathbf{r}) - q_s \mathbf{A}) \quad (8.20)$$

Nous prenons le rotationnel des deux membres, d'où

$$\text{rot } \mathbf{j}_s = - \frac{n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{B} \quad (8.21)$$

obtenue en utilisant le fait que le rotationnel du gradient d'un scalaire est identiquement nul. L'équation (8.21) est une des formes de l'équation de London. La constante qui multiplie \mathbf{B} est en accord avec le résultat (8.10). Nous rappelons que l'effet Meissner est une conséquence de l'équation de London que nous venons de retrouver.

La quantification du flux magnétique à travers un anneau est une conséquence spectaculaire de l'équation (8.20). Considérons une boucle C à l'intérieur de l'anneau supraconducteur à bonne distance de la surface. L'effet Meissner nous dit que \mathbf{B} et \mathbf{j}_s sont nuls à l'intérieur. Mais (8.20) est nul si

$$\hbar \nabla \theta(\mathbf{r}) = q_s \mathbf{A} \quad (8.22)$$

Nous obtenons

$$\oint_C \nabla \theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \Delta \theta$$

changement de phase après un tour d'anneau. La phase de la fonction d'onde est définie à un facteur 2π près. Dès lors :

$$\Delta \theta = n 2\pi \quad (8.23)$$

avec n entier.

D'après le théorème de Stokes, nous avons également,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \phi \quad (8.24)$$

où $d\mathbf{s}$ est un élément d'aire d'une surface bornée par la courbe C , et ϕ est le flux magnétique à travers C . D'après (8.22), (8.23) et (8.24), nous avons

$$2\pi \hbar n = q_s \phi$$

soit

$$\phi = \frac{h}{q_s} n \quad (8.25)$$

Par conséquent, le flux au travers de l'anneau est quantifié en multiples entiers de h/q_s . Expérimentalement $|q_s| = |2e|$ ce qui correspond à des paires d'électrons, et le quantum de flux dans un supraconducteur est

$$\phi_0 = \frac{h}{|2e|} \sim 2 \cdot 10^{-15} \text{ tesla m}^2 \quad (8.26)$$

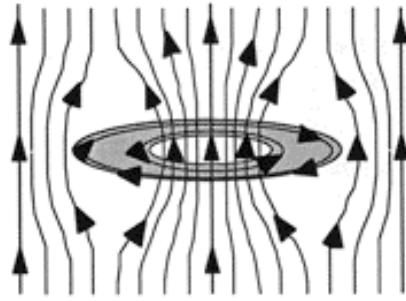


Fig 8.17 – Quantification du flux magnétique à travers un anneau supraconducteur

Cette unité de flux est appelée fluxoïde. Le flux qui traverse l'anneau est la somme du flux ϕ_{ext} dû aux sources extérieures et du flux ϕ_{sc} dû aux courants supraconducteurs qui parcourent la surface de l'anneau: $\phi = \phi_{\text{ext}} + \phi_{\text{sc}}$. Le flux ϕ est quantifié. Normalement le flux dû aux sources extérieures n'est pas quantifié; par conséquent ϕ_{sc} doit s'ajuster lui-même de façon à permettre à ϕ de prendre une valeur quantifiée.

Nous remarquons également que le résultat simple (8.25) ne s'applique pas si le flux pénètre dans l'anneau lui-même, comme ce serait le cas pour un anneau mince.