Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2021 2do semestre
DMAT - UTFSM

Diego Astaburuaga
Gabriel Riffo

Ejercicios 1 - PAUTA

Pregunta 1

En Videla s.a. se fabrican pernos de dudosa calidad. El ingeniero de control de calidad estudia las diferencias entre el largo teórico y el largo real de un perno. Sea X la variable aleatoria *error de medición del largo de un perno*. El ingeniero a cargo propone que X está bien modelada por la siguiente distribución:

$$f_X(x) = \kappa(1-x)(1+x)\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$

1. Encuentre las condiciones para que $f_X(x)$ sea una densidad de probabilidad. Calcule su función de distribución.
2. Encuentre el error de medición esperado, μ, y su varianza σ^2.
3. Encuentre $P(|X-\mu| \leq k\sigma)$ para $k=1$ y $k=2$. Concluya.
4. Los ingenieros están interesados en la magnitud del error, es decir $Y = |X|$. Calcule la densidad de Y.

Pregunta 2

Se llama a un doctor para ver a un niño enfermo en su vecindario. El doctor sabe a priori que el 90% de los niños en su vecindario se enferma de gripe, mientras que el otro 10% se enferma de sarampión (Asumiendo que no hay mas enfermedades en ese vecindario).

Se sabe que si un niño tiene sarampión, el 95% tiene picazón. Por otra parte. si un niño tiene gripe, el 8% de las veces presenta picazón.

Al examinar al niño, el doctor detecta una picazón. Definiendo los eventos apropiadamente, calcule la probabilidad de que el niño tenga sarampión.

Pregunta 3

El proveedor de internet *el día is too much*, está preocupado por el rendimiento de su señal de internet. Su experiencia dice la probabilidad de experimentar una falla en la semana es de 0.1.

Sea la variable aleatoria X = número de semanas consecutivas que transcurren hasta detectar la primera falla. Bajo el supuesto de que las fallas son independientes de una semana a otra:

1. Encuentre la función de masa de X, es decir $f_X(x)$
2. Encuentre el valor esperado de semanas transcurridas hasta el primer fallo.
3. Suponga que durante las primeras 3 semanas no se ha presentado ningún fallo, ¿Cuál es la probabilidad de que se presente un fallo en la septima semana?

Solucion 1

1. Para que $f_X(x)$ esté bien definida como función de densidad de probabilidad esta debe integrar 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \kappa(1-x)(1+x)dx = \kappa(x - x^3/3)\Big|_{-1}^{1} = \kappa(1 - 1/3 - (-1 + 1/3)) = \frac{4\kappa}{3}.$$

   Luego se debe satisfcer que $\kappa = 3/4$

   Luego la función de distribución es:

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} (3/4)(1-t)(1+t)dt = (1/4)(-x^3 + 3x + 2)$$

2. $E[X] = \int_{-1}^{1} x(3/4)(1-x)(1+x)dx = 0$
   $\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{-1}^{1} x^2(3/4)(1-x)(1+x)dx = \frac{2}{10}$

3. $P(|X-\mu| \leq \sigma) = P(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma) = P(-\sqrt{0.2} \leq X \leq \sqrt{0.2}) = F_X(\sqrt{0.2}) - F_X(-\sqrt{0.2}) = 0.8131 - 0.1870 = 0.6261$

   $P(|X-\mu| \leq 2\sigma) = P(-\sqrt{0.4} \leq X \leq \sqrt{0.4}) = 0.9111 - 0.0889 = 0.8222$

4.

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(y) = P(Y \leq y) &= \frac{(-y^3 + 3y + 2)}{4} - \frac{(y^3 - 3y + 2)}{4} \\ &= \frac{-2y^3 + 6y}{4} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y) - F_X(-y) = f_X(y) + f_X(-y)$$

Solución 2

Definamos los eventos S : el niño tiene sarampión, G : el niño tiene gripe, C : El niño presenta picazón.

$$P(S|C) = \frac{P(C|S)P(S)}{P(C|S)P(S) + P(C|G)P(G)} = \frac{0.95 \times 0.1}{0.95 \times 0.1 + 0.08 \times 0.9} \approx 0.57$$

Solución 3

1. Primero, definimos el evento S_i : hay falla en la semana i-ésima. Luego notamos que

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P\left(S_k \cap \left(\bigcap_{i<k} S_i^c\right)\right), \qquad \text{por independencia} \\ &= P(S_k)\prod_{i<k} P(S_i^c) \\ &= 0.1 \cdot (0.9)^{k-1} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0.1 \cdot (0.9)^{k-1} \\ &= 0.1 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (0.9)^{k-1} \end{aligned}$$

Recordamos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p} \qquad \text{si } |p| < 1$$

Podemos notar que:

$$\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

Luego:

$$E[X] = 0.1\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (0.9)^{k-1} = 0.1\frac{1}{(1-0.9)^2} = \frac{1}{0.1} = 10$$

3.

$$\begin{aligned} P(X=7|X>3) &= \frac{P(X=7 \cap X>3)}{P(X>3)} \\ &= \frac{P(X=7)}{P(X>3)} \\ &= \frac{0.1 \cdot (0.9)^6}{1-P(X\leq 3)} \\ &= \frac{0.1 \cdot (0.9)^6}{1-0.1-0.1\cdot(0.9)^1-0.1\cdot(0.9)^2} \\ &= \frac{0.1 \cdot (0.9)^6}{(0.9)^3} \\ &= 0.1 \cdot (0.9)^3 \end{aligned}$$