Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

5 de diciembre de 2022

Como construir test de hipótesis

Recordemos el caso de dos hipótesis simples

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

- Si consideramos a H_0 cierta, entonces la verosimilitud sería $L(\theta_0, \underline{X})$
- Si consideramos a H_1 cierta, entonces la verosimilitud sería $L(\theta_1, \underline{X})$

Ratio de verosimilitud

Luego, podríamos comparar ambas hipótesis considerando el ratio

$$r(\theta_0, \theta_1) = \frac{L(\theta_0, \underline{X})}{L(\theta_1, \underline{X})}$$

Intuitivamente, si los datos se encontrasen en favor de H_0, entonces $L(\theta_0, \underline{X}) > L(\theta_1, \underline{X})$, y en consecuencia $r(\theta_0, \theta_1) > 1$.

Ahora explotaremos esta idea:

Ejemplos

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución normal, de media μ y varianza conocida σ^2. Se desea testear la hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \mu = \mu_1$$

Ejemplos

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución normal, de media μ y varianza conocida σ^2. Se desea testear la hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \mu = \mu_1$$

Del ratio de verosimilitud se obtiene que

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución normal, de media μ y varianza conocida σ^2. Se desea testear la hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \mu = \mu_1$$

Del ratio de verosimilitud se obtiene que

$$\lambda(\underline{X}) = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2}}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma}\right)^2}} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma}\right)^2}$$

Ejemplos (cont.)

Usando la identidad

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2+N\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\lambda(\underline{X})=e^{N\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\left(\frac{\mu_0+\mu_1}{2}-\bar{X}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(\lambda(\underline{X}) \leq c) \\
&= P(\log \lambda(\underline{X}) \leq \log c) \\
&= P\left(N \frac{(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma^2} \left(\frac{\mu_0 + \mu_1}{2} - \bar{X}\right) \leq \log c\right) \\
&= \vdots \\
&= P\left(\bar{X} \geq \frac{(\mu_0 + \mu_1)}{2} + \frac{\sigma^2 \log c}{(\mu_0 - \mu_1)}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplos (cont.)

Ahora, si asumimos que H_0 es cierto, entonces se tiene que

$$1 - \alpha = P\left(\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\right) \leq \frac{-(\mu_0 - \mu_1)}{2\sigma\sqrt{n}} + \frac{\sigma \log c}{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)}\right)$$

En consecuencia, necesitamos encontrar c tal que la probabilidad acumulada sea $1 - \alpha$. Luego,

$$\log c = -z_{1-\alpha}\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} - \frac{n}{2\sigma^2}(\mu_0 - \mu_1)^2$$

Luego, reemplazando $\log c$ se obtiene que

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$$

Recuperando el test anterior.

Ejemplo II

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución exponencial de media $1/\lambda$. Se desea testear la hipótesis

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

Sin pérdida de generalidad, consideramos que $\lambda_1 < \lambda_0$. Recordamos la verosimilitud:

$$L(\lambda, \underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda}}$$

Ejemplo (cont.)

Si H_0 fuese cierto, entonces se tiene que $L(\lambda_0, \underline{X}) = \frac{1}{\lambda_0^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda_0}}$

Si H_1 fuese cierto, entonces se tiene que $L(\lambda_1, \underline{X}) = \frac{1}{\lambda_1^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\lambda_1}}$

Luego, el ratio de verosimilitud está dado por

$$r(\lambda_0, \lambda_1) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n e^{\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Ejemplo (cont.)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}(r(\lambda_0, \lambda_1) \leq \kappa) \\
&= \vdots \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{\log \kappa + n \log \lambda_0 - n \log \lambda_1}{\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}} \right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{2}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{2}{\lambda_0} \frac{\log \kappa + n \log \lambda_0 - n \log \lambda_1}{\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}} \right) \\
&= \mathbb{P}\left(V \leq \frac{2}{\lambda_0} \frac{\log \kappa + n \log \lambda_0 - n \log \lambda_1}{\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}} \right)
\end{aligned}$$

Notamos que $V \sim \chi^2(2n)$ y luego se puede encontrar el percentil para despejar κ.

Hipótesis simple v/s compuesta

Supongamos que deseamos testear una hipótesis del estilo

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

entonces explotaremos la misma idea del caso simple versus simple.

Supongamos que deseamos testear una hipótesis del estilo

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

entonces explotaremos la misma idea del caso simple versus simple.

Esto se traduce en el siguiente test:

Supongamos que la hipótesis nula $H_0 : \theta \in \Theta_0$ se hace competir contra la hipótesis alternativa $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$. Diremos que un test es de razón de verosimilitud si la cantidad

$$\lambda(\underline{X}) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta, \underline{X})}{\sup_{\Theta} L(\theta, \underline{X})},$$

genera una región de rechazo de la forma $R\{\underline{x} : \lambda(\underline{x}) \leq c\}$, para algún $c \in [0, 1]$

Ejemplo, caso normal

Sea $X_1, \ldots X_n$ una muestra aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se desea testear la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Recordando la función de verosimilitud

$$L(\mu, \sigma, \underline{X}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma} \right)^2}$$

procederemos a calcular el test de razón de verosimilitud.

Primero, notamos que el denominador es el estimador máximo verosimil. Por lo tanto, se sabe que $\sup_{\mu,\sigma^2} L(\mu, \sigma^2, \underline{X}) = L(\hat{\mu}, S_n^2, \underline{X})$, donde $(\hat{\mu}, \widehat{\sigma^2}) = (\bar{X}, S_n^2)$

Como segundo ingrediente, necesitamos calcular $\sup_{\mu=\mu_0} L(\mu_0, \sigma^2, \underline{X})$.

Es fácil ver que $\widehat{\sigma_0^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$

Caso normal (cont.)

Luego, el ratio de verosimilitud está dado por

$$\begin{aligned}
\lambda(\underline{X}) &= \frac{L(\hat{\mu}, S_n^2, \underline{X})}{L(\mu_0, \sigma^2, \underline{X})} \\
&= \left(\frac{\hat{\sigma^2}}{\hat{\sigma_0^2}}\right)^{n/2} \frac{e^{-n/2}}{e^{-n/2}} \\
&= \left(\frac{\hat{\sigma^2}}{\hat{\sigma_0^2}}\right)^{n/2}
\end{aligned}$$

Luego, para establecer la región de rechazo con un error tipo I de α se tiene que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(\lambda(\underline{X}) \leq c) \\
&= P\left(\left(\frac{\hat{\sigma^2}}{\hat{\sigma_0^2}}\right)^{n/2} \leq c\right) \\
&= P\left(\left(\frac{\hat{\sigma^2}}{\hat{\sigma_0^2}}\right) \leq c^{2/n}\right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2} \leq c^{2/n}\right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n(\bar{X} - \mu_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \leq c^{2/n}\right) \\
&= P\left(\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \geq 1 - c^{n/2}\right) \\
&= P\left(\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{S_{n-1}^2} \geq (n-1)(1 - c^{n/2})\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$P\left(\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{S_{n-1}^2} \geq (n-1)(1-c^{n/2})\right)$$

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S_{n-1}}\right| \geq \sqrt{(n-1)(1-c^{n/2})}\right)$$

Ejemplo II, compuesta v/s compuesta

Considere $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n con función de densidad dada por

$$f(x|\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad x \in (0, 1), \quad \alpha > 0.$$

Se desea testear la hipótesis

$$H_0 : \alpha \leq 1 \qquad v/s \qquad H_1 : \alpha \geq 1.$$

Calculamos la verosimilitud

$$L(\alpha, \underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\alpha) = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}$$

la log-verosimilitud

$$\ell(\alpha, \underline{X}) = n \log \alpha + (\alpha - 1) \log x_i,$$

Ejemplo II, compuesta v/s compuesta

Calculamos la verosimilitud

$$L(\alpha, \underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\alpha) = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}$$

la log-verosimilitud

$$\ell(\alpha, \underline{X}) = n \log \alpha + (\alpha - 1) \log x_i,$$

y en consecuencia, el estimador máximo verosímil $\alpha_{ML} = -\frac{n}{\prod_{i=1}^{n} \log x_i}$

Ejemplo II, compuesta v/s compuesta

Para calcular el máximo sobre el espacio restrigido, consideramos lo siguiente:

Consideramos que $\Theta_0 = (0, 1]$. Luego, si $\hat{\alpha}_{ML} \geq 1$, entonces el máximo de $L(\alpha, \underline{X})$ se encuentra fuera de Θ_0. Esto ocurre cuando

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \geq e^{-N}.$$

Notemos además que la log-verosimilitud es una función creciente en α. De hecho:

$$\ell(\alpha, \underline{X}) = n \log \alpha + (\alpha - 1) \log x_i,$$

En consecuencia, si $\hat{\alpha}_{ML} \geq 1$, entonces el máximo se alcanza cuando $\alpha = 1$, es decir

$$\sup_{\alpha \geq 1} L(\alpha, \underline{X}) = L(1, \underline{X}) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Luego, notamos que

$$\lambda(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \prod_{i=1}^{n} x_i \leq e^{-n} \\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(-\frac{e}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right)^n & \text{si } \prod_{i=1}^{n} x_i > e^{-n} \end{cases}$$

Se han estudiado pruebas para la media de una población normal con varianza σ^2 conocida tal como $H_0 : \mu = \mu_0$ v/s $H_0 : \mu > \mu_0$. El test o regla de decisión es:

$$\text{Rechace } H_0 \text{ si } Z_{obs} > z(1 - \alpha),$$

donde $Z_{obs} = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$. Algunas características de este procedimiento son:

El valor p y el valor de significancia

Se han estudiado pruebas para la media de una población normal con varianza σ^2 conocida tal como $H_0 : \mu = \mu_0$ v/s $H_0 : \mu > \mu_0$. El test o regla de decisión es:

$$\text{Rechace } H_0 \text{ si } Z_{obs} > z(1-\alpha),$$

donde $Z_{obs} = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$. Algunas características de este procedimiento son:

1. Rechazar o no rechazar H_0 depende de la elección de α.

   Por ejemplo, si $Z_{obs} = 1,73$ y $\alpha = 0,05$ entonces $z_{1-\alpha} = z_{1-0,05} = 1,645$ y la decisión será rechazar H_0. Pero, si $\alpha = 0,025$ entonces $z1 - \alpha = z_{1-0,025} = 1,960$ y la decisión será no rechazar H_0.

2. El nivel de significancia α permite rechazar o no rechazar H_0 pero no permite diferenciar el grado de evidencia que hay a favor o en contra de H_0.

   Por ejemplo, para $\alpha = 0,05$ se tiene que $z_{1-\alpha} = z_{1-0,05} = 1,645$ y en consecuencia tanto para $Z_{obs1} = 1,73$ como para $Z_{obs2} = 3,41$ la decisión es rechazar H_0. Sin embargo, $Z_{obs2} = 3,41$ ofrece mayor evidencia en contra de H_0.

2. El nivel de significancia α permite rechazar o no rechazar H_0 pero no permite diferenciar el grado de evidencia que hay a favor o en contra de H_0.

   Por ejemplo, para $\alpha = 0,05$ se tiene que $z_{1-\alpha} = z_{1-0,05} = 1,645$ y en consecuencia tanto para $Z_{obs1} = 1,73$ como para $Z_{obs2} = 3,41$ la decisión es rechazar H_0. Sin embargo, $Z_{obs2} = 3,41$ ofrece mayor evidencia en contra de H_0.

El valor p permite enfrentar los dos problemas anteriores: permite evaluar el peso de la evidencia muestral en contra de H_0 y tomar una decisión para cualquier α.

Se define el *valor p* de una regla de decisión como la probabilidad de obtener una discrepancia mayor o igual a la observada en la muestra cuando H_0 es cierta.

Esto es equivalente a encontrar el mínimo valor de α para el cual rechazamos H_0. Esto es, se rechaza H_0 para cualquier α tal que valor $p \leq \alpha$.

Se define el *valor p* de una regla de decisión como la probabilidad de obtener una discrepancia mayor o igual a la observada en la muestra cuando H_0 es cierta.

Esto es equivalente a encontrar el mínimo valor de α para el cual rechazamos H_0. Esto es, se rechaza H_0 para cualquier α tal que valor $p \leq \alpha$.

En el caso de pruebas para la media de una población normal con varianza σ^2 conocida tal como $H_0 : \mu = \mu_0$ v/s $H_0 : \mu > \mu_0$ la medida de discrepancia observada en la muestra cuando $H_0 : \mu = \mu_0$ es cierta es $Z_{obs} = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ y el valor p de acuerdo a la definición es

$$p = P(Z \geq Z_{obs})$$

Siempre es deseable que el valor p sea lo más grande posible. En general mayor a $0,1$

Población Bernoullí

Si de la producción diaria de una máquina más del 10 % de los artículos están defectuosos, es necesario repararla. Una muestra de 100 artículos contiene 15 defectuosos. Se desea averiguar si hay información suficiente para decidir si se debe reparar la máquina. Calcule el valor p de la prueba de hipótesis correspondiente.

Comparación de varianzas

La siguiente tabla muestra los tiempos en minutos para realizar una tarea con dos métodos diferentes. El interés recae en la varianza de dichos tiempos.

Método 1	66	81	67	55	57	60	69	77	79	68
Método 2	61	53	70	65	78	68	55	60	74	56

¿Se puede inferir de la muestra que los tiempos para realizar la tarea con ambos métodos tienen la misma varianza?. ¿Qué supuestos son necesarios para resolver el problema?.

Hint: $S_1^2 = 81.2$ y $S_2^2 = 71.1$

Solución

Población Bernoullí

Sol: valor-$p = 0{,}0478$

Comparación de varianzas

$F_{obs} = S_1^2/S_2^2 = 1,142$; valor $p = 0,8464$ y no se rechaza igualdad de varianzas.