Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

22 de agosto de 2022

Contenidos

- Experimentos Aleatorios
- Espacio Muestral
- σ-álgebra
- Medida de Probabilidad
- Propiedades de la Medida de Probabilidad

Experimentos aleatorios

Definición (Experimento aleatorios)

Es un experimento en el que los resultados se producen al azar y en el que se conocen de antemano todos los posibles resultados.

Ejemplo

- *Registrar el número resultante al lanzar un dado de seis caras.*
- *Experimento aleatorio: Lanzar una moneda al aire y ver el resultado.*
- *Contar el número de partículas del decaimento radioactivo de una sustancia.*

Observación

El opuesto a un experimento aleatorio es un *experimentos deterministas*. Estos son aquellos en que si se repiten las mismas condiciones iniciales se garantiza el mismo resultado.

Ejemplo (Contraejemplo)

Un móvil que circula a una velocidad constante durante un determinado tiempo, recorre siempre el mismo espacio.

Un certámen de la USM con ninguna respuesta correcta produce siempre el mismo resultado: uno.

Espacio Muestral

Definición (Espacio Muestral)

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio *lo llamaremos espacio muestral y será denotado por* Ω.

Ejemplos Discretos

Ejemplo

Si lanzamos dos veces una moneda, los resultados posibles son

$$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\},$$

donde C y S simbolizan cara y sello, respectivamente.

Ejemplo

Si lanzamos un dado tradicional de 6 caras indefinidamente, el espacio muestral es

$$\Omega = \left\{(\omega_1, \omega_2, \ldots) : \ \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}\right\}$$

Ejemplo

Suponga que escogemos un punto al azar desde el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$*. El espacio muestral está dado por* $\Omega = [0,1] \times [0,1]$*.*

Ejemplo

Suponga que compramos un artefacto electrónico. Si registramos el tiempo de vida (en segundos) del artefacto a partir de la primera vez que lo encendemos, el espacio muestral es $[0,\infty)$*.*

Asignaremos probabilidades a una clase limitada de subconjuntos de Ω, denominada σ-álgebra.

Definición (σ-álgebra)

Sea Ω un conjunto. Una σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre Ω es una colección no vacía de subconjuntos de Ω satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(2) Si $A \in \mathcal{F}$ *entonces* $A^c \in \mathcal{F}$, *donde* A^c *denota el complemento de* A *relativo a* Ω.

(3) Si $A_1, A_2, \ldots$ *pertenecen a* $\mathcal{F}$, *entonces* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Observaciones

* La definición nos dice que una σ-álgebra es cerrada bajo complementos y uniones numerables. Además, es cerrada bajo intersecciones numerables debido a la ley de Morgan:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\right)^c$$

* Es fácil ver que el conjunto vacío, denotado por $\emptyset$, pertenece a $\mathcal{F}$. Luego, la propiedad (3) es válida, en particular, para uniones (e intersecciones) finitas.

Ejercicio

Considere el siguiente conjunto:

$$\Omega = \{a, b, c\}.$$

¿Cuáles de las siguientes colecciones de subconjuntos de Ω corresponden a una σ-álgebra?

* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
* $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \Omega\}$
* $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}$
* $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$

Definición (Medida de Probabilidad)

Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre el conjunto Ω. Una medida de probabilidad es una función $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que

(1) $P(\Omega) = 1$.

(2) Si $A_1, A_2, \ldots$ pertenecen a $\mathcal{F}$ y son disjuntos por parejas, es decir, si $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i).$$

Observación

Es fácil ver que $P(\emptyset) = 0$. Luego, la propiedad (2) anterior (conocida como aditividad) es también válida para uniones finitas.

Observación

Los conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ también se llaman mutuamente excluyentes.

Definición (Espacio de Probabilidad)

Un espacio de probabilidad es un triplete $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde

- *Ω es un conjunto no-vacío que contiene todos los posibles resultados de un experimento aleatorio (espacio muestral).*
- *$\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre Ω (a los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{F}$ les llamaremos eventos).*
- *$P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ es una medida de probabilidad.*

Observación

Suponga que se realiza un experimento aleatorio, obteniéndose el resultado $\omega \in \Omega$. Diremos que el evento $A \in \mathcal{F}$ ha ocurrido si $\omega \in A$. Note que podrían ocurrir dos o más eventos.

Ejemplo

Experimento: *Lanzamiento de un dado.*

- *Se tiene el espacio muestral* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Consideramos la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}$ *formada por todos los posibles subconjuntos de* Ω.
- *El evento* A_1 *:"se obtuvo un número par" está dado por*

$$A_1 = \{2, 4, 6\},$$

mientras que el evento A_2 *:"se obtuvo un número menor a 3" está dado por*

$$A_2 = \{1, 2\}.$$

Ejemplo (continuación)

Las operaciones de conjuntos tienen una interpretación tangible cuando pensamos en un experimento aleatorio:

- *El evento* $A_1 \cap A_2 = \{2\}$ *significa que han ocurrido simultáneamente* A_1 *y* A_2*, es decir, que "se obtuvo un número par menor a 3".*
- *El evento* $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 4, 6\}$ *significa que "se obtuvo un número par ó un número menor a 3", es decir, al menos uno de los dos eventos ocurrió.*
- *El evento* $A_1^c = \{1, 3, 5\}$ *quiere decir que* A_1 *no ha ocurrido, es decir, que "se obtuvo un número impar".*
- *El conjunto vacío da cuenta de eventos imposibles, como por ejemplo, "obtener un número mayor a 6".*

Ejemplo (continuación)

Basándonos en un enfoque clásico de probabilidades, la probabilidad de ocurrencia de cada elemento de Ω es $1/6$ (elementos equiprobables). De este modo, la probabilidad de un evento A se calcula a través de la expresión

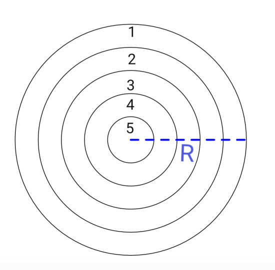
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad A \in \mathcal{F},$$

donde $|\cdot|$ simboliza la cardinalidad del conjunto. Luego, se puede corroborar que

- $P(A_1) = P(A_1^c) = 1/2$;
- $P(A_2) = 1/3$;
- $P(A_1 \cap A_2) = 1/6$;
- $P(A_1 \cup A_2) = 2/3$.

Ejercicio

Se lanza un dardo sobre un tablero circular de radio R. El puntaje obtenido corresponde al número de la región donde llega el dardo (ver la Figura). La distancia entre los aros es $R/5$. Se asume que el lanzamiento siempre llega al tablero.



(a) *¿Cuál es la probabilidad de obtener i puntos? para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.*

(b) *¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación mayor a 3?*

(c) *¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 punto ó 3 puntos?*

El siguiente teorema establece algunas propiedades útiles de las medidas de probabilidad.

Teorema

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad. Asumiendo que todos los conjuntos que se mencionan a continuación pertenecen a* $\mathcal{F}$*, tenemos que*

(1) $P(A) + P(A^c) = 1$.

(2) Si $A \subseteq B$ *entonces* $P(A) \leq P(B)$.

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demostración:

(1) Sabemos que los conjuntos A y A^c son siempre disjuntos y su unión es el espacio completo:

$$A \cup A^c = \Omega$$

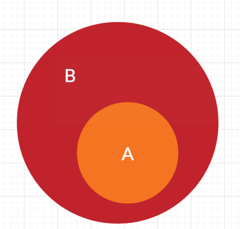
El resultado sigue desde la propiedad de aditividad de la medida de probabilidad:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$$

Demostración (continuación):

(2) El conjunto B se puede escribir como la unión de dos conjuntos disjuntos:

$$B = A \cup (A^c \cap B)$$



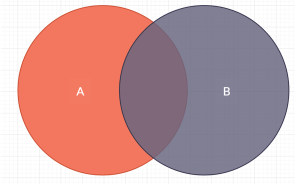
La aditividad y la no-negatividad de P implican que

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A).$$

Demostración (continuación):

(3) $A \cup B$ se puede escribir como la unión de conjuntos disjuntos:

$$A \cup B = [A \cap B^c] \cup [A^c \cap B] \cup [A \cap B]$$



Luego, la aditividad implica que

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B) \\ &= \underbrace{[P(A \cap B^c) + P(A \cap B)]}_{P(A)} + \underbrace{[P(A^c \cap B) + P(A \cap B)]}_{P(B)} - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo

Considere el experimento aleatorio que consiste en el lanzamiento de dos dados de 6 lados:

- *Identifique el espacio muestral*
- *Calcule la probabilidad de que la suma de ambos dados sea mayor o igual a* 3
- *Calcule la probabilidad de que la suma de ambos dados sea* 2 *o* 12

Solución:

Solución:

- El espacio muestral corresponde Ω corresponde a todos los pares $\{(i,j)\}$ con $i,j = 1,\ldots,6$.

Solución:

- El espacio muestral corresponde Ω corresponde a todos los pares $\{(i,j)\}$ con $i,j = 1,\ldots,6$.
- Sea A el evento **la suma de los dados es mayor o igual a 3**.

Solución:

- El espacio muestral corresponde Ω corresponde a todos los pares $\{(i,j)\}$ con $i,j = 1,\ldots,6$.
- Sea A el evento **la suma de los dados es mayor o igual a 3**.
  Notamos que el evento A^c es **la suma de los dados es igual a 2**.

Solución:

- El espacio muestral corresponde Ω corresponde a todos los pares $\{(i,j)\}$ con $i,j = 1,\ldots,6$.
- Sea A el evento **la suma de los dados es mayor o igual a 3**.
  Notamos que el evento A^c es **la suma de los dados es igual a 2**.
  Notamos que $|\Omega| = 36$ y que $|A^c| = 1$. Luego

Solución:

- El espacio muestral corresponde Ω corresponde a todos los pares $\{(i,j)\}$ con $i,j = 1,\ldots,6$.
- Sea A el evento **la suma de los dados es mayor o igual a 3**.
  Notamos que el evento A^c es **la suma de los dados es igual a 2**.
  Notamos que $|\Omega| = 36$ y que $|A^c| = 1$. Luego

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 1/36 = 35/36.$$

- Sea B el evento **la suma de ambos dados es 12**. Luego, nos interesa calcular $P(A^c \cup B)$. Notamos que $P(A^c \cap B) = 0$ y entonces

$$P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) = 2/36 = 1/18$$

Ejercicio

Sean A, B y C tres eventos. Definimos

$$N = A \cap (B \cup C).$$

Tenemos la siguiente información:

- $P(A) = 0.7$;
- $P(A \cap B) = 0.45$;
- $P(A \cap C) = 0.35$;
- $P(A \cap B \cap C) = 0.15$.

Muestre que $P(N) = 0.65$.

Solución:

$$\begin{aligned}
P(N) &= P(A \cap (B \cup C)) \\
&= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= 0.45 + 0.35 - 0.15 = 0.65
\end{aligned}$$

Ejercicio

Suponga que A y B son eventos en un espacio de probabilidad, y que conocemos $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

(a) *Escriba una fórmula para la probabilidad de que exactamente uno de los dos eventos ocurra.*

(b) *Escriba una fórmula para la probabilidad de que a lo más uno de los dos eventos ocurra.*

Ejercicio

Sean A y B eventos en un espacio de probabilidad. Asuma que $P(A) = 1/3$ y $P(B^c) = 1/4$. ¿Es posible que A y B sean disjuntos?