Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco
24 de agosto de 2022

Contenidos

- ▷ Principio Multiplicativo
- ▷ Factorial
- ▷ Permutación
- ▷ Combinatoria

Motivación

Recordemos la fórmula clásica para el cálculo de probabilidades en el caso discreto:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#\text{Casos favorables}}{\#\text{Casos totales}}$$

Motivación

- ¿De cuántas formas se pueden ordenar los dígitos?
- Se lanza una moneda 100 veces. ¿Cuántas secuencias de cara-sello se pueden generar?.
- De un grupo de 5 profesores y 5 ayudantes se escogen tres personas. ¿Cuántos formas tengo para escoger dos ayudantes y un profesor?

¿Por qué necesitamos introducir las técnicas de conteo?

- En determinadas situaciones, nos otorgan una manera eficiente de contar el número de *casos favorables* versus el número de *casos totales*.
- En consecuencia, nos ayudan en el cálculo de ciertas probabilidades.

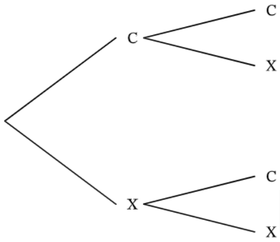

Figura 1: Árbol de posibilidades para el lanzamiento de dos monedas secuenciales

Principio Multiplicativo:

- El procedimiento 1 se puede realizar de n_1 formas distintas y el procedimiento 2 se puede hacer de n_2 formas distintas.
- Cada una de las maneras de hacer 1 puede ser seguida por cualquiera de las maneras de efectuar 2.
- Luego, el procedimiento 1 seguido por 2 se puede hacer de $n_1 \times n_2$ maneras.

Observación

Este principio se puede generalizar a r procedimientos. Suponga que cada uno se puede hacer de n_i maneras, para $i = 1, \ldots, r$. Entonces, el procedimiento 1, seguido por 2, ... , seguido por r, se puede llevar a cabo de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ maneras.

Problema 1: Suponga que tenemos n elementos distintos y queremos reordenarlos de todas las maneras posibles. ¿Cuántas configuraciones distintas existen?

Sabemos que para la primera posición hay n posibilidades, para la segunda existen $n-1$ posibilidades (ya que el primer elemento no se puede volver a escoger), para la tercera posición hay $n-2$ posibilidades, etc.

Gracias al principio multiplicativo, concluímos que el número total de reordenamientos es

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Observación

Este ejemplo es un problema de "extracción sin reposición".

Ejemplo

A continuación, se ilustran los distintos reordenamientos de 3 elementos:

$\boxed{A\ B\ C}$ $\boxed{A\ C\ B}$ $\boxed{B\ A\ C}$ $\boxed{B\ C\ A}$ $\boxed{C\ B\ A}$ $\boxed{C\ A\ B}$

Ejemplo

En una competencia artística hay 5 *participantes y cada uno es evaluado sólo una vez por el jurado. Entonces, los participantes pueden salir de* $5! = 120$ *formas distintas al escenario.*

Ejemplo

Un grupo de amigos ha decidido ver una maratón de películas. Han seleccionado 4 *películas interesantes que pertenecen a diferentes géneros cinematográficos. Deben decidir en qué orden verán las películas. Existen* $4! = 24$ *formas distintas de llevar a cabo la maratón.*

Ejercicio

Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares ¿De cuántas maneras se puede hacer?

Solución: Sabemos que se debe tener la siguiente estructura:

$$\male \quad \female \quad \male \quad \female \quad \male \quad \female \quad \male \quad \female \quad \male$$

Los hombres se pueden reordenar internamente de $5! = 120$ maneras, mientras que las mujeres se pueden reordenar internamente de $4! = 24$ formas. Por lo tanto, el número de configuraciones distintas es

$$5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880.$$

Problema 2: De un total de n elementos (o símbolos) disponibles, buscamos generar un código de r elementos (los elementos se pueden repetir). ¿De cuántas maneras posibles se puede realizar esta tarea?

En cada paso tenemos n alternativas. El principio multiplicativo implica que se pueden formar

$$\underbrace{n \times \cdots \times n}_{r \text{ veces}} = n^r$$

códigos diferentes de r simbolos.

Observación

Este es un problema de "extracción con reposición".

Ejemplo

Vamos a formar códigos de 3 *letras con el conjunto de símbolos* $\{A, B\}$. *En este caso,* $n = 2$ *y* $r = 3$. *El número de códigos posibles es* $2^3 = 8$. *Para este ejemplo se pueden escribir explícitamente los códigos sin mayor esfuerzo:*

$$AAA \quad AAB \quad ABA \quad ABB \quad BAA \quad BAB \quad BBA \quad BBB$$

Observación

En general, para problemas de mayor dimensión, no es recomendable escribir todos los casos *a mano*, ya que podrían ser demasiados. Justamente las técnicas de conteo nos ofrecen una forma eficiente de calcular el número de combinaciones sin la necesidad de escribirlos uno por uno.

Ejercicio

Suponga que hay cuatro personas en un bus cuando sólo quedan 5 estaciones más para el final de la línea. Cualquier pasajero se podría bajar en cualquier estación. ¿De cuántas maneras distintas se pueden bajar los pasajeros?

Solución: Para representar cada resultado posible, nos conviene asignar el número de estación a cada pasajero. Por ejemplo, el resultado

$$III \quad II \quad II \quad V$$

significa que el primero se bajó en la estación III, el segundo y tercero se bajaron en la estación II y el cuarto se bajó en la estación V.

Como cada pasajero podría bajarse en cualquiera de las 5 estaciones, el resultado que buscamos es $5^4 = 625$.

Problema 3: De un total de n elementos, ¿de cuantas maneras se puede seleccionar un subconjunto de r elementos?

Tenemos n posibilidades para la primera elección, $n-1$ alternativas para la segunda elección, y así sucesivamente, hasta completar las r extracciones:

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Generalmente se utiliza la notación

$$n\mathrm{P}r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Esta cantidad se conoce como permutación.

Ejemplo

De un grupo de 10 *candidatos, queremos seleccionar a* 3 *personas para desempeñarse en* 3 *cargos directivos (presidente, secretario y tesorero). Utilizando la permutación, observe que podemos formar* 720 *mesas directivas distintas.*

Observación

Hemos empleado la permutación cuando el orden de los elementos es importante. En el ejemplo anterior, si intercambiamos las posiciones de las personas seleccionadas tendremos una mesa directiva distinta, por lo tanto el orden es primordial.

Problema 4: De un total de n elementos, ¿de cuantas maneras se puede seleccionar un subconjunto de r elementos sin importar el orden de los elementos escogidos?

Podemos escoger $n\mathrm{P}r$ combinaciones posibles. Sin embargo, existen varias configuraciones que son "repetidas". El número de resultados repetidos son todos los posibles reordenamientos de los r elementos seleccionados (ya vimos que esta cantidad es $r!$). Luego, la cantidad que buscamos es

$$\frac{n\mathrm{P}r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Generalmente se utiliza la notación

$$n\mathrm{C}r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Esta cantidad se conoce como combinatoria.

Ejemplo

En una fábrica de ampolletas se han producido 20 *unidades. Suponga que las ampolletas están etiquetadas con números. Para realizar un control de calidad se seleccionan* 2 *ampolletas al azar. Por ejemplo, es lo mismo escoger las ampolletas* $N^\circ 5$ *y* $N^\circ 11$ *(en ese orden), que escoger las ampolletas* $N^\circ 11$ *y* $N^\circ 5$*. El número de parejas de ampolletas que se podrían seleccionar es*

$$\binom{20}{2} = \frac{20(20-1)}{2} = 190.$$

Ejemplo

En un juego de azar se escogen 6 *números desde el* 1 *hasta el* 41*. Existen*

$$\binom{41}{6} = 4496388$$

cartillas de juego posibles. La probabilidad de ganar el premio (es decir, de escoger los 6 *números ganadores) es igual a*

$$\frac{1}{4496388} \approx 0.0000002$$

Es decir, la probabilidad de perder es aproximadamente 0.9999998*. Incluso si jugamos cada semana durante* 10 *años (cada año tiene aproximadamente* 52 *semanas), la probabilidad de no ganar es significativa:*

$$0.9999998^{520} = 0.999896.$$

Ejercicio

Una empresa inmobiliaria convoca a una reunión a 5 ingenieros, 4 arquitectos y 3 constructores. En la reunión se acuerda formar una comisión integrada por 3 profesionales.

(a) *¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?*

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que la comisión tenga tres tipos de profesionales?*

(c) *¿Cuál es la probabilidad de que la comisión quede formada por exactamente dos personas de igual profesión?*

Solución:

(a) El número total de comisiones con 3 integrantes es
$$\binom{12}{3} = 220.$$

(b) Existen $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas de escoger comisiones con tres tipos de profesionales. El resultado se obtiene al hacer el cuociente entre los *casos favorables* y los *casos totales*: $60/220 = 0.272$.

(c) Los *casos favorables* son
$$\binom{5}{2} \times 7 + \binom{4}{2} \times 8 + \binom{3}{2} \times 9 = 145.$$
El resultado es $145/220 = 0.659$.

Ejercicio

Se seleccionan 4 libros de matemática de un total de 6 libros de matemática diferentes y 3 libros de inglés de un total de 5 libros de inglés diferentes. Los libros son organizados en una estantería de manera arbitraria. Calcule las siguientes probabilidades:

(a) Que cuatro libros de matemática queden juntos.

(b) Que un libro de matemática quede en la primera posición.

(c) Que los libros de matemática e inglés alternen.

(d) Que un libro de matemática quede en la primera posición y uno de inglés quede al medio.

Solución:

- $6P4 \times 4$
- $6\binom{5}{3}\binom{5}{3}$
- $6P4 \times 5P3$
- para hacer

Ejercicio

Las diagonales de un polígono se obtienen uniendo parejas de vértices no adyacentes. Utilice técnicas de conteo apropiadas para determinar el número de diagonales en un polígono de n *lados.*