Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2022 2do semestre
DMAT - UTFSM

Ayudantes:
Diego Astaburuaga
Gabriel Riffo

Control 2 - PAUTA

Pregunta 1 (40 pts)

En el juego de computador Cookie Clicker aparece, de manera aleatoria, una galleta dorada que le entrega al jugador un bonus que le ayuda a avanzar en el juego. El tiempo en minutos que se demora en aparecer esta galleta dorada sigue una distribución exponencial de media 5.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al iniciar el juego en menos de 5 minutos aparezca una galleta dorada?
2. ¿Cuál es la probablidad de que aparezca en los próximos 5 minutos si han pasado 3 minutos y no ha aparecido esta galleta?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que en 10 minutos aparezcan 3 de estas galletas?
4. Suponga el programador del juego ha decido cambiár la distribución del tiempo por una distribución normal de media 5. Cuál debiese ser la varianza para que la probabilidad de que el tiempo esté entre 2 y 8 minutos sea de 95%?

Solución:

1. Sea T = tiempo transcurrido hasta que aparece la galleta dorada. $T \sim \text{Exp}(1/5)$.

   Directamente usando la función de distribución de la exponencial: $P[T < 5] = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$
2. Por la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial esto es simplemente la probabilidad de que aparezca la galleta dorada en los próximos 5 minutos, es decir 0.6321
3. Sea $N(t)$ = Cantidad de galletas que aparcen en t minutos. Como el tiempo entre eventos tiene distribución exponencial entonces el número de eventos tiene distribución de Poisson. $N(t) \sim \text{Poiss}(1/5)$. Luego:

$$P[N(10) = 3] = \frac{e^{-10/5}(10/5)^3}{3!} \approx 0.18044$$

4. Sea X = Tiempo transcurrido hasta que aparezca la galleta dorada. $X \sim \mathcal{N}(5, \sigma^2)$. Deseamos una varianza σ^2 tal que:

$$\begin{aligned} P[2 < X < 8] &= 0.95 \\ P[-3/\sigma < Z < 3/\sigma] &= 0.95 \\ \Phi(3/\sigma) - \Phi(3/\sigma) &= 0.95 \\ \Phi(3/\sigma) - (1 - \Phi(3/\sigma) &= 0.95 \\ \Phi(3/\sigma) &= 0.975 \end{aligned}$$

   Por tabla $3/\sigma = 1.96$ entonces $\sigma^2 = 1.5306^2$

Pregunta 2 (60 pts)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Calcule su función generadora de momentos.
2. Sean $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con densidad $f_{U_i}(u) = 1\mathbb{I}_{[0,1]}(u)$, y considere a $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$:
   (a) Encuentre la función de densidad de S_2.
   (b) Calcule $\mathbb{E}[S_n]$.

1 Pregunta 2

1. Procedemos por definición, es decir:

$$\begin{aligned}
\psi_X(t) = \mathbb{E}[\exp\{Xt\}] &= \int_0^2 f_X(x)\exp\{xt\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\exp\{xt\}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\exp\{xt\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\exp\{xt\}\,\mathrm{d}x + 2\int_1^2 \exp\{xt\}\,\mathrm{d}x - \int_1^2 x\exp\{xt\}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   Para calcular esta integral, requerimos resolver dos integrales:

$$\int x\exp\{tx\}\mathrm{d}x = \frac{\exp\{tx\}(tx-1)}{t^2} \qquad \int \exp\{tx\}\mathrm{d}x = \frac{\exp\{tx\}}{t}$$

   En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_X(t) &= \frac{\exp\{t\}(t-1)}{t^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{2\exp\{2t\}}{t} - \frac{2\exp\{t\}}{t} - \frac{\exp\{2t\}(2t-1)}{t^2} + \frac{\exp\{t\}(t-1)}{t^2} \\
&= \frac{\exp\{t\}(t-1)+1+\exp\{t\}(t-1)-\exp\{2t\}(2t-1)}{t^2} + \frac{2\exp\{2t\}-2\exp\{t\}}{t} \\
&= \frac{\exp\{t\}(t-1)+1+\exp\{t\}(t-1)-\exp\{2t\}(2t-1)+2t\exp\{2t\}-2t\exp\{t\}}{t^2} \\
&= \frac{2\exp\{t\}(t-1)+1-\exp\{2t\}(2t-1)+2t\exp\{2t\}-2t\exp\{t\}}{t^2} \\
&= \frac{2t\exp\{t\}-2\exp\{t\}+1-2t\exp\{2t\}+\exp\{2t\}+2t\exp\{2t\}-2t\exp\{t\}}{t^2} \\
&= \frac{\exp\{2t\}-2\exp\{t\}+1}{t^2} \\
&= \left(\frac{\exp\{t\}-1}{t}\right)^2
\end{aligned}$$

2. Procedemos mediante la función generadora de momentos:

$$\begin{aligned}
\psi_{U_1+U_2}(t) &= \psi_{U_1}(t)\cdot\psi_{U_2}(t) \\
&= \left(\frac{\exp\{t\}-1}{t}\right)\left(\frac{\exp\{t\}-1}{t}\right) \\
&= \left(\frac{\exp\{t\}-1}{t}\right)^2
\end{aligned}$$

   Luego, $f_{U_1+U_2}(u) = f_X(u)$.

3. Notamos que $U_i = \frac{1}{2}$. Luego, $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[U_i] = \frac{n}{2}$.