Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2021 2do semestre
DMAT - UTFSM

Abner Saavedra
Gabriel Riffo

Control 2

Pregunta 1 (100 pts)

En una reconocida empresa, está preocupada por analizar los tiempos de falla de cuatro componentes de un camión.

Se sabe que el camión tiene cuatro componentes, las cuales están enumeradas del 1 al 4. Los ingenieros de esta empresa acuerdan que la variable aleatoria

$$T_i\text{: Tiempo hasta la falla [Mh] de la } i-\text{ésima componente}$$

está bien modelada por la siguiente distrubución:

$$F_i(x) = 1 - \exp\left(-(\lambda_i x)^{\gamma_i}\right), \quad x \geq 0,$$

donde $\lambda_i > 0$, $\gamma_i > 0$. Asumiendo que $\gamma_1 = \gamma$, y $\lambda_1 = \lambda$, se le pide:

1. Verifique que F_1 es una función de distribución. (5 pts)
2. Calcule $\mu^k_{\lambda,\gamma} = E[T_1^k]$. Reporte $\mu^5_{1,1}$ (20 pts)

Luego de realizar experimentos, los ingenieros proponen que las variables aleatorias T_i son independientes y que $\lambda_i = 2/i$ y $\gamma_i = i$, para $i = 1, \ldots, 4$. Se pide:

3. Calcular la probabilidad de que el tiempo de falla de la i-ésima sea mayor a 1[Mh]. (15 pts)
4. Se sabe que el camión falla si ocurre una de las siguientes situaciones:
   - Falla la primera componente,
   - Fallan la segunda y tercera componente,
   - Falla la cuarta componente.

   Calcule la probabilidad de que el camión sobreviva más de un tiempo t_0. (30 pts)
5. Para la primera componente, calcule la probabilidad de que el número de fallas totales sea menor que 4 en un periodo de 16[Mh]. (20 pts)
6. ¿Cuál es el tiempo esperado para observar 7 fallas en la primera componente?. (10 pts)

1. Notamos que

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \gamma\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}\exp\left(-(\lambda x)^{\gamma}\right)$$

Luego:

a) $f_1(x) > 0$ para todo $x \geq 0$, lo que muestra que F_1 es no decreciente.
b) $F_1(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $\lim_{x\to\infty} F_1(x) = 1$, por lo tanto, F_1 es densidad.

2. Notamos que

$$\mu^k_{\lambda,\gamma} = E[T_1^k] = \int_0^\infty x^k f_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^k\gamma\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}\exp\left(-(\lambda x)^{\gamma}\right)\mathrm{d}x.$$

Con el cambio de variable $u = (\lambda x)^\gamma$ se tiene que $\mathrm{d}u = \gamma\lambda^\gamma x^{\gamma-1}\mathrm{d}x$. Luego

$$\mu^k_{\lambda,\gamma} = \int_0^\infty x^k\gamma\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}\exp\left(-(\lambda x)^{\gamma}\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{u^{1/\gamma}}{\lambda}\right)^k \exp\left(-u\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda^k}\Gamma\left(\frac{k}{\gamma}+1\right)$$

Luego $\mu^5_{1,1} = 5!$

3. Se pide calcular $P(T_i \geq 1)$, luego

(a) $P(T_1 \geq 1) = 0,1353$,
(b) $P(T_2 \geq 1) = 0,3679$,
(c) $P(T_3 \geq 1) = 0,7436$,
(d) $P(T_4 \geq 1) = 0,9394$.

4. Se sabe que la probabilidad de que la i-ésima componente sobreviva más de un tiempo t_0 es $P(T_i \geq t_0) = 1 - F_i(t)$. Luego, el camión sobrevivirá si

$$\begin{aligned} P(T_1 \geq t_0 \cap (T_2 \geq t_0 \cup T_3 \geq t_0) \cap T_4 \geq t_0) &= P(T_1 \geq t_0)P(T_2 \geq t_0 \cup T_3 \geq t_0)P(T_4 \geq t_0) \\ &= P(T_1 \geq t_0)(1 - P(T_2 \leq t_0 \cap T_3 \leq t_0))P(T_4 \geq t_0) \\ &= P(T_1 \geq t_0)(1 - P(T_2 \leq t_0)P(T_3 \leq t_0))P(T_4 \geq t_0) \\ &= (1 - F_1(t_0))(1 - F_2(t_0)F_3(t_0))(1 - F_4(t_0)). \end{aligned}$$

5. Notamos que para la primera componente, $\lambda = 2$ y $\gamma = 1$. Luego, podemos notar que $T_1 \sim \exp(\lambda)$ y, en consecuencia, la variable aleatoria $N(t)$: Número de fallas hasta el tiempo t, tiene una distribución de Poisson, de parámetro $t\lambda = 16 \times 2 = 32$.

   Luego $P(N(16 \cdot 2) < 4) = \sum_{x=0}^{3} \frac{\exp(-32)32^x}{x!} \approx 7.6065 \cdot 10^{-11}$

6. Sea T_1^j: Tiempo de la $j-$ésima falla [Mh] de la primera componente, Luego se tiene que $S_7 = \sum_{j=1}^{7} T_1^j \sim Gamma(7,2)$ y en consecuencia $E[S_7] = 7/2 \approx 3.5$