Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

5 de septiembre de 2022

Contenidos

- ✓ Distribución Bernoulli
- ✓ Distribución Binomial
- ✓ Distribución Geométrica

Distribución Bernoulli

Un experimento **Bernoulli** sólo tiene dos resultados posibles. Por ejemplo,

- Al realizar una tarea, podríamos obtener *éxito* o *fracaso*.
- Al extraer artículos de una muestra, el resultado podría ser un artículo *defectuoso* o *no defectuoso*.

Formalmente, sea X una variable aleatoria tal que

$$P(X=1)=p \quad \text{y} \quad P(X=0)=1-p,$$

donde $0 \leq p \leq 1$. Diremos que X sigue una distribución Bernoulli con parámetro p, y se denota por $X \sim \text{Ber}(p)$.

La función de cuantía de una variable aleatoria Bernoulli se puede escribir de la siguiente manera:

$$f_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{si } x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación

El parámetro p es la probabilidad de obtener *éxito* en el experimento. La probabilidad de *fracaso* es $1-p$.

Distribución Bernoulli

Utilizando la definición de la esperanza, tenemos que

$$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0)$$

$$\boxed{E(X) = p}$$

Observe que

$$E(X^2) = 1^2 \times P(X = 1) + 0^2 \times P(X = 0) = p$$

De este modo, la varianza está dada por

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$$

$$\boxed{\text{var}(X) = p(1 - p)}$$

Ejemplo

Ejercicio

Suponga que un basquetbolista debe lanzar un tiro libre que decide quien gana el juego. La historia dice que el jugador, en las mismas condiciones, acierta el 35 % de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador nos entregue la victoria?

Ejemplo

Ejercicio

Suponga que un basquetbolista debe lanzar un tiro libre que decide quien gana el juego. La historia dice que el jugador, en las mismas condiciones, acierta el 35 % de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador nos entregue la victoria?

Solución: Definimos la variable aleatoria

Ejercicio

Suponga que un basquetbolista debe lanzar un tiro libre que decide quien gana el juego. La historia dice que el jugador, en las mismas condiciones, acierta el 35 % de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador nos entregue la victoria?

Solución: Definimos la variable aleatoria

$$X : \text{El jugador encesta el balon en el tiro libre.}$$

Ejercicio

Suponga que un basquetbolista debe lanzar un tiro libre que decide quien gana el juego. La historia dice que el jugador, en las mismas condiciones, acierta el 35 % de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador nos entregue la victoria?

Solución: Definimos la variable aleatoria

$$X : \text{El jugador encesta el balon en el tiro libre.}$$

Sabemos que $X \sim \text{Ber}(0.35)$. Notar que denotamos por $X = 1$ al acierto y $X = 0$ a la falla.

Ejemplo

Ejercicio

Suponga que un basquetbolista debe lanzar un tiro libre que decide quien gana el juego. La historia dice que el jugador, en las mismas condiciones, acierta el 35 % de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador nos entregue la victoria?

Solución: Definimos la variable aleatoria

$$X : \text{El jugador encesta el balon en el tiro libre.}$$

Sabemos que $X \sim \text{Ber}(0.35)$. Notar que denotamos por $X = 1$ al acierto y $X = 0$ a la falla.

Luego, se tiene que $\mathbb{P}(X = 1) = 0.35$

Distribución Binomial

A continuación, se describe la distribución **binomial**. Sean $Y_i \sim \text{Ber}(p)$, para $i = 1, \ldots, n$. Definimos la variable aleatoria

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

La variable X simboliza el número de *éxitos* al realizar n experimentos Bernoulli independientes.

Diremos que X sigue una distribución binomial con parámetros n y p, y usaremos la notación $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Distribución Binomial

La función de cuantía está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Interpretación de la función de cuantía

La probabilidad de obtener x éxitos consecutivos es p^x. La probabilidad de obtener $n-x$ fracasos consecutivos es $(1-p)^{n-x}$. En los n ensayos existen $\binom{n}{x}$ formas distintas de obtener los x éxitos y $n-x$ fracasos.

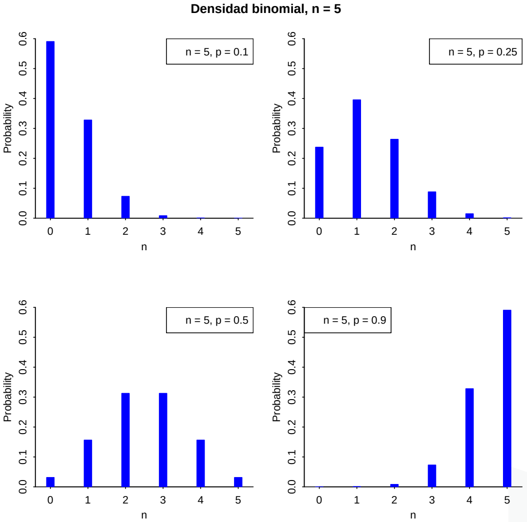

Figura 1: Distribución binomial, $n = 5$

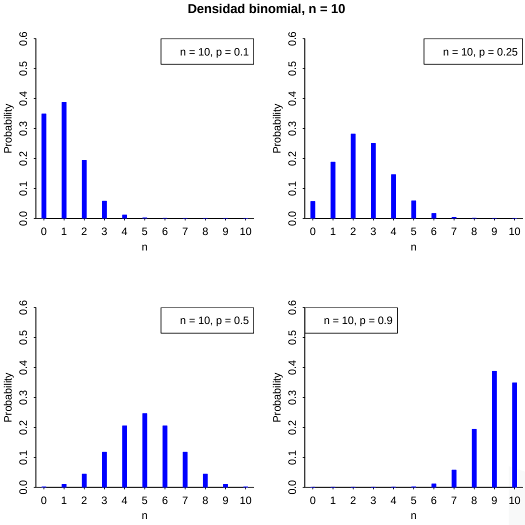

Figura 2: Distribución binomial, $n = 10$

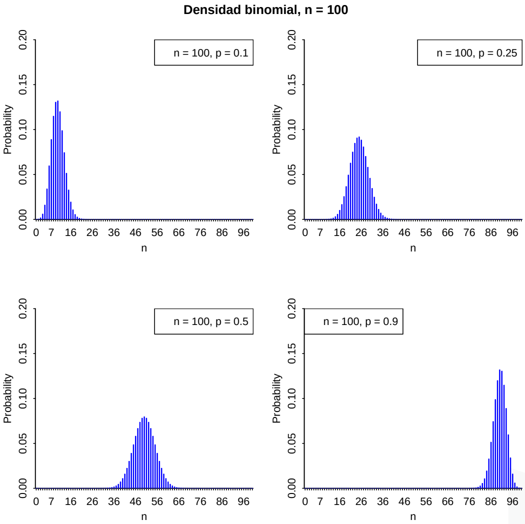

Figura 3: Distribución binomial, $n = 100$

Distribución Binomial

El teorema del binomio de Newton es útil cuando trabajamos con la distribución binomial:

$$(a+b)^m = \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!} a^y b^{m-y}$$

Se tiene que

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

El siguiente paso consiste en hacer los cambios de variables $y = x - 1$ y $m = n - 1$. Note que $m - y = n - x$.

Obtenemos la siguiente expresión para la esperanza:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{y=0}^{m} \frac{(m+1)!}{y!(m-y)!} p^{y+1}(1-p)^{m-y} \\ &= (m+1)p \underbrace{\sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^{y}(1-p)^{m-y}}_{1} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

Ejercicio

Sea $X \sim Bin(n, p)$. Muestre que la varianza de X es

$$\boxed{var(X) = np(1-p)}$$

Distribución Binomial [Alternativa]

Recordemos que

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Luego

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$V[X] = V\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

Ejercicio

Se analiza el impacto de cierta medicina en el tratamiento de una enfermedad. Algunos estudios indican que el 65 % *de la población evoluciona favorablemente cuando es inyectada con una dosis de la medicina. Se aplica el medicamento a* 15 *personas de manera independiente y se observa si la respuesta es favorable o desfavorable en cada caso.*

(a) *Calcule la probabilidad de que exactamente* 12 *personas evolucionen favorablemente.*

(b) *Calcule la probabilidad de que al menos* 10 *personas muestren una respuesta favorable.*

Solución: Definimos la variable

$$X : \text{número de personas que evolucionan favorablemente}$$

Sabemos que $X \sim \text{Bin}(15, 0.65)$.

(a) $P(X = 12) = \binom{15}{12} 0.65^{12}\, 0.35^{3} = 0.111$

(b) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \sum_{x=0}^{9} \binom{15}{x} 0.65^{x}\, 0.35^{15-x} = 0.564$

Ejercicio

Un estudiante contesta un examen de 20 preguntas de selección múltiple. Cada pregunta tiene 4 alternativas. El estudiante sabe la respuesta de 10 preguntas, pero no tiene idea sobre las otras 10 así que las responde al azar. La nota en el examen (denotada por X) corresponde al **número total de respuestas correctas**.

(a) Encuentre el recorrido de X.

(b) Encuentre la función de cuantía de X.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una nota superior a 15?

¿Cuál es el puntaje esperado?

Solución:

Definimos la variable aleatoria X : Nota obtenida en el examen.

(a) $\text{rec}(X) = \{10, 11, \ldots, 20\}$

(b) Notar que la función de cuantía de la variable $Y = X - 10$ es la misma que la de la variable X. Luego $Y \sim \text{Bin}(10, 0.25)$

(c) $P(X > 15) = P(X \geq 16) = P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) = 0.0197$

(d)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[Y + 10] \\ &= \mathbb{E}[Y] + 10 \\ &= 10 * 0.25 + 10 = 12.5 \end{aligned}$$

Distribución Geométrica

Considere un experimento Bernoulli con probabilidad de éxito p y probabilidad de fracaso $1 - p$. Definimos la variable aleatoria

$$X: \quad \text{número de repeticiones independientes hasta obtener el primer éxito}$$

Diremos que X sigue una distribución **geométrica** con parámetro p y usaremos la notación $X \sim \text{Geo}(p)$. Su función de cuantía está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{si } x \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

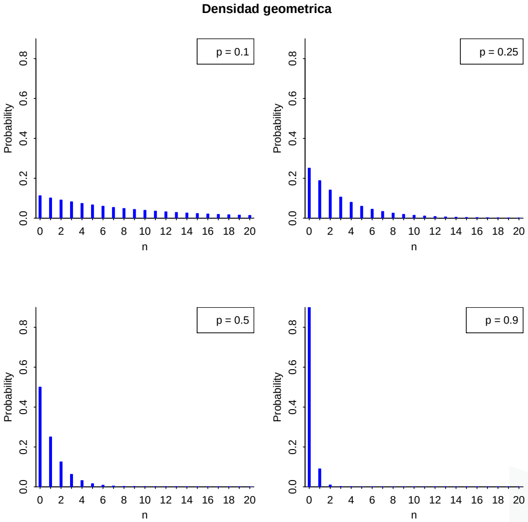

Figura 4: Densidad geométrica

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{si } x \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Interpretación de la función de cuantía

Se obtienen $x - 1$ fracasos consecutivos, cuya probabilidad es $(1-p)^{x-1}$. En el ensayo x-ésimo se obtiene el primer éxito, cuya probabilidad es p.

Observación

Es la repetición de eventos Bernoulli fallidos hasta obtener obtener un exito. Esto Se refleja en la ausencia del factor de combinatoria.

Los siguientes argumentos permiten obtener la esperanza de X:

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} &= -p \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(1-p)^{x} \\ &= -p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x}\right) = -p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right). \end{aligned}$$

Concluímos que

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

Hemos utilizado el resultado conocido de la serie geométrica:

$$\sum_{x=0}^{\infty} c^{x} = \frac{1}{1-c}, \qquad -1 < c < 1$$

Un truco similar se puede hacer para calcular la varianza (propuesto). Donde se obtiene que

$$\boxed{\operatorname{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Ejemplo

Ejercicio

Una persona debe ir al mecánico para poder reparar su vehículo. Si encuentra más de cuatro autos en la fila, esta persona se retira y regresa al día siguiente. Se sabe que la probabilidad de encontrar cuatro autos o menos en la fila es de 0.25.

(a) *Defina la variable aleatoria X y encuentre su recorrido.*

(b) *Calcule la probabilidad de tener que ir tres días consecutivos al mecánico.*

(c) *¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que asistir al mecánico hasta 5 veces?.*

(d) *¿Cuál es el número esperado de días que debe regresar esta persona hasta reparar el vehículo?.*

(e) *¿Hasta cuántos días consecutivos tendrá que ir la persona para tener un 95 % de probabilidad de reparar su vehículo?.*

Solución:

(a) X: Número de días que la persona debe regresar para reparar su vehículo. $\text{rec}(X) = \{1, 2, \ldots\}$

(b) $X \sim \text{Geo}(0.25)$. Luego $P(X = 3) = 0.1406$

(c) $P(X \leq 5) = 0.76300$

(d) $E[X] = 1/0.25 = 4$

(e) $P(X \leq x) = 0.95$, luego observamos que

$$P(X \leq 10) = 0.94368 \quad \text{y} \quad P(X \leq 11) = 0.95776$$