Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

27 de septiembre de 2022

Contenidos

- ✓ Distribución Uniforme
- ✓ Distribución Exponencial

A continuación, se describe la distribución **uniforme**. Sea X una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[a, b]$, donde a y b son parámetros finitos. Si la función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

diremos que X sigue una distribución uniforme y usaremos la notación $X \sim \text{Unif}(a, b)$.

Distribución Uniforme

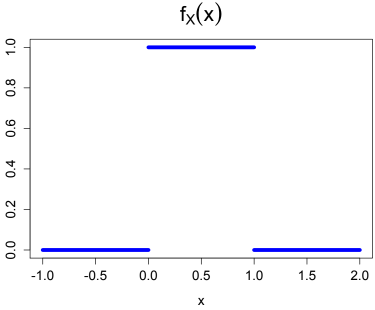
Para $a \leq x \leq b$,

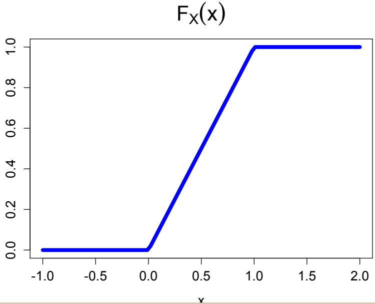
$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} \mathrm{d}u = \frac{x-a}{b-a}$$

Por lo tanto, la función de distribución es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Distribución Uniforme





La esperanza se obtiene fácilmente desde la integral

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

Se concluye que

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

Por otro lado,

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

Luego, la varianza es

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Observación

La distribución uniforme está relacionada con el concepto de equiprobabilidad, es decir, para dos intervalos $A_1, A_2 \subset [a, b]$ tales que la longitud de $|A_1| = |A_2| = \ell$, se cumple que

$$P(x \in A_1) = P(x \in A_2) = \frac{\ell}{b - a}$$

Observación

La distribución uniforme es la piedra angular para simular números aleatorios con distribuciones mas complejas (no será tópico de este curso).

Recuerdo

En lo que viene, se utilizará la función indicatriz $\mathbb{I}_A(x) = 1$ si $x \in A$ y 0 en otro caso.

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con distribución Unif$(0,3)$.

(a) Calcule el valor esperado $E[\mathbb{I}_{[0,1]}(X)]$

(b) Definimos la variable aleatoria

$$Y = \begin{cases} 0 & si\ X \leq 1 \\ 1 & si\ X > 1 \end{cases}$$

Determine el recorrido de Y y calcule su función de cuantia. ¿Cómo distribuye Y?

(c) Sea X_n una variable aleatoria con distribución Unif$(0,n)$. Se define la variable aleatoria

$$Y_n = \lfloor X_n \rfloor.$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la función piso (entero pequeño). Calcule su función de cuantía.

Solución:

(a) Por definición se tiene que

$$E[\mathbb{I}_{[0,1]}(X)] = \int_0^1 \mathbb{I}_{[0,p]}(x)\frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

(b) Notamos que rec$(0,1)$. Luego, estudiamos las probabilidades:

- $P(Y=0) = P(X \leq 1) = \frac{1}{3}$
- $P(Y=1) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = \frac{2}{3}$

Luego $Y \sim \mathrm{Ber}(1/3)$

(c) Notamos que rec$(0,1,\ldots,n-1)$. Para calcular la función de cuantía notamos que para $k \in$ rec se tiene que

$$P(Y_n = k) = P(k < X_n < k+1) = \frac{1}{n}.$$

Decimos que una variable aleatoria X sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si la función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0$$

Por cálculo directo podemos obtener su función de distribución:

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0$$

Usamos la notación $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Sabemos que la esperanza y la varianza son

$$\boxed{\mathrm{E(X)} = \frac{1}{\lambda}} \quad \boxed{\mathrm{var(X)} = \frac{1}{\lambda^2}}$$

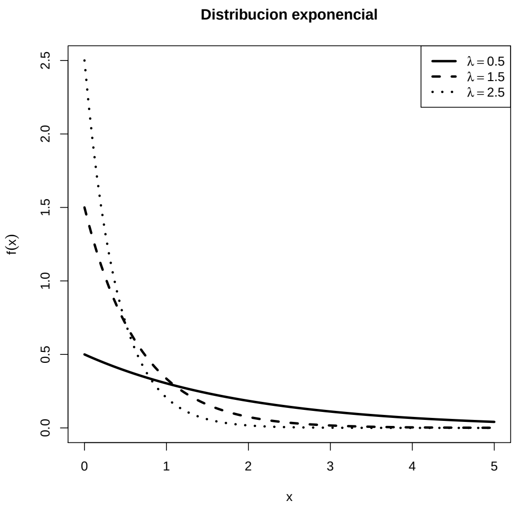


Figura 2: Densidad exponencial

Ejercicio

El tiempo de vida (en años) de un equipo electrónico fabricado por cierta compañía sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 3$. ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo de esa marca dure más de 6 años?

Solución: Considere la variable aleatoria

X: tiempo de vida (en años) del artefacto,

donde $X \sim \text{Exp}(3)$. Entonces,

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = e^{-18} \approx 0$$

Distribución de los tiempos de ocurrencia en proceso Poisson

Recordemos el proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$ y definamos la variable aleatoria $N(t)$: *numero de eventos hasta el tiempo t*. Si consideramos la variable aleatoria T_i: *tiempo de espera hasta la $i-$ésima ocurrencia*, entonces notamos que

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Más aún, si consideramos

- $P(T_2 > t | T_1 = s) = P(N(s+t) - N(s) = 0 | N(s) = 1)$ Por la propiedad de eventos independientes se tiene que

$$P(N(s+t) - N(s) = 0 | N(s) = 1) = P(N(s+t) - N(s) = 0) = e^{-\lambda t}$$

- En general se tiene que
$$\begin{aligned} P(T_k > t | T_{k-1} = s_{k-1}, T_{k-2} = s_{k-2}) &= P(N(t + s_{k-1}) - N(s_k) = 0 | N(s_k) = k-1) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Distribución de los tiempos del proceso Poisson

Teorema

El proceso de conteo $N(t)$ es de Poisson con parámetro λ si y solamente si, los tiempos de ocurrencia $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ distribuyen exponenciales de parámetro λ.

Ejercicio

En astronomía, una bola de fuego es un meteoríto con un brillo inusual que posee más de 0.1 *kilotones de energía. Se sabe que el número de bolas de fuego detectadas por los sistemas satelitales es bien modelado por un proceso Poisson con una tasa de 2 bolas de fuego por año.*

(a) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos bolas de fuego sea menor a un año.

(b) Se sabe que una bola de fuego se observó en marzo. ¿Cuál es la probabilidad de observar otra bola de fuego en los próximos 6 meses?

Solución:

(a) Sea T_i: tiempo de ocurrencia de la i-ésima bola de fuego. Luego, por la caracterización del proceso Poisson sabemos que $T_i \sim \text{Exp}(2)$. Por lo tanto $P(T_1 \leq 1) = 1 - e^{-2}$

(b) $P(T_2 \leq 0.5) = 1 - e^{-1}$

Ejercicio

El tiempo de vida de una bacteria tiene una distribución exponencial. Se sabe que la vida promedio de la bacteria es de 5 días.

1. *Defina la variable aleatoria y establezca sus parámetros.*
2. *¿Cuál es la probabilidad de que la bacteria viva, a lo más, una semana?*
3. *¿Cuál es la probabilidad de que de 10 bacterias se encuentren 5 que vivan más de una semana?*
4. *Supongamos que se estudian bacterias hasta encontrar la primera que dure más de una semana. ¿Cuántas se esperan estudiar?, ¿con cuánta variabilidad?*