Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2021 2do semestre
DMAT - UTFSM

Abner Saavedra
Gabriel Riffo

Control 1
PAUTA

Pregunta 1 (25 pts)

Van a cambiar a su jefe y se barajan diversos candidatos: Humberto, con una probabilidad del 60%; Patricio, con una probabilidad del 30%; y Esteban, con una probabilidad del 10%. Se estima que:

1. si sale Humberto, la probabilidad de que se suban los sueldos es del 5%,
2. si sale Patricio, la probabilidad de que se suban los sueldo es del 20%,
3. si sale Esteban: la probabilidad de que se suban los sueldo es del 60%,

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cual es la probabilidad de que le suban el sueldo?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le suban el sueldo sabiendo que Humberto no fue escogido como jefe?

Solucion:
Sean los eventos H : Humberto es elegido jefe, P_a : Patricio es elegido jefe, E : Esteban es elegido jefe. S : Suben los sueldos. Notar que H, P_a, E es una particion del espacio muestral. Entonces

a) Por el teorema de probabilidades totales:

$$P(S) = P(S|H)P(H) + P(S|P_a)P(P_a) + P(S|E)P(S) = 0.05 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.1 = 0.15$$

(15 puntos)

b) Notar que,

$$P(S|H^c) = \frac{P(S \cap H^c)}{P(H^c)} = \frac{P(S \cap P_a) + P(S \cap E)}{P(P_a) + P(E)} = \frac{0.2 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.1}{0.3 + 0.1} = 0.3$$

(10 puntos)

Pregunta 2 (35 pts)

Se diseña un sistema de frenado para evitar que un automovil patine. Este sistema está compuesto por un sistema electrónico, uno hidráulico y uno mecánico, los cuales funcionan de manera independiente y con probabilidades p_e, p_h y p_m respectivamente.

Se le pide a usted calcular las probabilidades de los siguientes eventos.

a) Que solo uno de los sistemas de frenado funcione

b) Que funcionen dos de los sistemas de frenado

Para evitar que el automóvil sufra un accidente, es necesario que los tres sistemas de frenado funcionen. Si un sistema de frenado funciona, la probabilidad de que sufra un accidente por patinar de es p_a, mientras que al funcionar dos sistemas de frenado la probabilidad de que ocurra un accidente por patinar es de p_b

c) Calcule la probabilidad de que el automóvil sufra un accidente.

Solucion Sean los eventos E, H, M : Funcionan los sistemas de frenados electronico, hidraulico y mecanico respectivamente y A : el automovil sufre un accidente. Notemos que E, H, M son eventos independientes

a) Sea: F_i : funcionan exactamente i sistemas de frenado, entonces por la independencia:

$$\begin{aligned} P(F_1) &= P(E)P(H^c)P(M^c) + P(E^c)P(H)P(M^c) + P(E^c)P(H^c)P(M) \\ &= p_e(1-p_h)(1-p_m) + (1-p_e)p_h(1-p_m) + (1-p_e)(1-p_h)p_m \\ &= 3p_ep_hp_m - 2p_ep_h - 2p_ep_m - 2p_hp_m + p_e + p_h + p_m \end{aligned}$$

(10 puntos)

b) Queremos calcular F_2, entonces por independencia tenemos que:

$$\begin{aligned} P(F_2) &= P(E)P(H)P(M^c) + P(E)P(H^c)P(M) + P(E^c)P(H)P(M) \\ &= p_ep_h(1-p_m) + p_e(1-p_h)p_m + (1-p_e)p_hp_m \\ &= -3p_ep_hp_m + p_ep_h + p_ep_m + p_hp_m \end{aligned}$$

(10 puntos)

c) Queremos calcular P(A), para eso notemos que:

- $P(A|F_0) = 1$ y $P(F_0) = (1-p_e)(1-p_h)(1-p_m)$
- $P(A|F_1) = p_a$
- $P(A|F_2) = p_b$
- $P(A|F_3) = 0$ y $P(F_3) = p_ep_hp_m$

Como F_0, F_1, F_2, F_3 forman una particion del espacio por el teorema de probabilidades totales:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|F_0)P(F_0) + P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) \\ &= (1-p_e)(1-p_h)(1-p_m) + p_a(3p_ep_hp_m - 2p_ep_h - 2p_ep_m - 2p_hp_m + p_e + p_h + p_m) \\ &+ p_b(-3p_ep_hp_m + p_ep_h + p_ep_m + p_hp_m) \end{aligned}$$

(15 puntos)

Pregunta 3 (40 pts)

En un canal de comunicación, la información se transmite por bits. Cada bit puede tomar los valores 0 o 1. En este contexto diremos que ocurre un error cuando se transmite un 1 en vez de un 0 y viceversa. Sabiendo que los bits se empaquetan en bloques de información de longitud 8 y la transmisión de cada bit dentro del bloque es independiente del resto. Definiendo el evento correspondiente:

a) Calcular la probabilidad de que ocurran a lo más tres errores en un bloque de información.

b) Que ocurran 6 errores sabiendo que las casilla 1 y 8 no hay errores.

c) Considere el evento X_i : *el i-ésimo bit es 1*, y defina la siguiente transformación:

$$Y = \sum_{k=1}^{8} X_k 2^{k-1}.$$

Calcule:

(a) $P(Y = 1)$
(b) $P(Y = 257)$

Solucion:

1. Si denotamos por C a un bit correcto y por E a un bit erróneo, notamos que $\Omega = \{E, C\}^8$. Más aún, $|\Omega| = 2^8$.

   Definamos los eventos N_i^j : hay exactamente i bits erróneos de un total de j bits y S : total de bits erróneos. Nos interesa calcular $P(S \leq 3)$. Por el principio de independencia y el principio de equicontinuidad, se tiene que

$$P(S \leq 3) = P(N_0^8 \cup N_1^8 \cup N_2^8 \cup N_3^8) = \frac{\binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} + 1}{2^8} = \frac{93}{256} \approx 0.3633$$

(15 puntos)

2. Se sabe que las casillas 1 y 8 son conocidas. Debido a que se buscan 6 errores de un total de 6 casillas, se debe calcular $P(N_6^6) = \frac{1}{2^6} \approx 0.0156$.

(10 puntos)

3. Notar que Y es la representación binaria de los números decimales del 0 al 255. Entonces se tiene que $\text{rec}Y = \{0, \ldots, 255\}$. En consecuencia:

   (a) $P(Y = 1) = P\left((X_1 = 1) \bigcap_{i=2}^{8} (X_i = 0) \right) = \frac{1}{256} \approx 0.0039$

(10 puntos)

   (b) $P(Y = 257) = 0$, puesto que 257 es un valor fuera del recorrido de Y

(5 puntos)