Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

29 de agosto de 2022

Contenidos

Definición (Valor Esperado)

Sea X una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. El valor esperado de $g(X)$ se define como

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum g(x) f_X(x) & (\text{caso } \textit{discreto}) \\ \\ \int g(x) f_X(x) dx & (\text{caso } \textit{continuo}) \end{cases}$$

donde la suma y la integral se extienden sobre los x en el recorrido de X. Aquí, f_X denota la función de cuantía en el caso discreto y la función de densidad en el caso continuo.

Observación

Note que el valor esperado de $g(X)$ podría ser $\pm\infty$ o no estar definido.

Tomando $g(x) = x^k$, donde k es un número natural en la definición anterior, obtenemos **el momento de orden k de una variable aleatoria X**.

El momento de orden uno se conoce como valor esperado y representa el valor promedio de la variable aleatoria.

Definición (Esperanza)

La esperanza de una variable aleatoria X se define como

$$E(X) = \begin{cases} \sum x \cdot f_X(x) & \textit{(caso discreto)} \\ \\ \int x \cdot f_X(x) dx & \textit{(caso continuo)} \end{cases}$$

Tomando $g(x) = [x - E(X)]^2$ en la definición general, obtenemos la varianza de X, la cual captura el nivel de dispersión de la variable aleatoria.

Definición (Varianza)

La varianza de una variable aleatoria X es una cantidad no-negativa que se define como

$$\begin{aligned} var(X) &= E([X - E(X)]^2) \\ &= \begin{cases} \sum [x - E(X)]^2 f_X(x) & \text{(caso discreto)} \\ \int [x - E(X)]^2 f_X(x) dx & \text{(caso continuo)} \end{cases} \end{aligned}$$

Observación

Notar que si $\mathbb{E}[X] = 0$ entonces $\mathrm{var}(X) = E(X^2)$. Por lo que el momento de segundo orden contiene la información sobre la variabilidad de la variable aleatoria X.

Observación

La varianza siempre es no negativa (Verifíquelo).

Propiedades

Sean a y b constantes y X una variable aleatoria. Entonces, las siguientes propiedades se desprenden directamente desde la definición:

* $E(a) = a$
* $E(aX + b) = a\,E(X) + b$
* $\text{var}(a) = 0$
* $\text{var}(aX + b) = a^2\,\text{var}(X)$

Fórmula alternativa para la varianza

Con las propiedades anteriores se puede probar que:

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

En efecto, usando la notación $\mu = E(X)$ y las propiedades anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= E([X-\mu]^2) \\
&= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con recorrido $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tal que

$$P(X = j) = \frac{1}{6}, \qquad j = 1, \ldots, 6.$$

Calcule $E(X)$ y $var(X)$.

Solución: La esperanza está dada por

$$E(X) = \sum_{j=1}^{6} j \cdot P(X = j) = \sum_{j=1}^{6} j \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} j = \frac{7}{2}$$

En la última igualdad hemos usado la identidad conocida:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Solución (continuación): Para obtener la varianza, utilizamos la fórmula alternativa. Debemos calcular $E(X^2)$. En efecto,

$$E(X^2) = \sum_{j=1}^{6} j^2 \cdot P(X = j) = \sum_{j=1}^{6} j^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j^2 = \frac{91}{6}$$

En la última igualdad hemos usado la identidad conocida:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Finalmente, concluímos que

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Ejercicio

Se lanza dos veces un dado tradicional de 6 *caras. Sea* X *la suma de ambos lanzamientos.*

(a) *Determine el recorrido de* X.

(b) *Determine la función de cuantía de* X.

(c) *Calcule* $P(X < 6)$ *y* $P(|X - 5| \leq 2)$.

(d) *Calcule* $E(X)$ *y* $var(X)$.

Solución:

- $$rec(X) = 2, 3, ..., 11, 12$$

-

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- $P(X < 6) = P(X \leq 5) = 10/36$
  $P(|X - 5| < 2) = P(-2 < X - 5 < 2) = P(4 \leq X \leq 6) = 12/36 = 1/3$
- E[X] = 7; V[X] = 5.83

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2/x^3 & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ x < 1 \end{cases}$$

Calcule $E(X)$ y $var(X)$.

Solución: La esperanza es

$$E(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3} \mathrm{d}x = 2 \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{2}{x}\bigg|_1^\infty = 2$$

Por otro lado, la varianza es infinita ya que

$$E(X^2) = \int_1^\infty x^2 \cdot \frac{2}{x^3} \mathrm{d}x = 2 \int_1^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 2 \ln(x)\bigg|_1^\infty = \infty$$

Problema:

Si transformamos una variable aleatoria por medio de una función conocida, ¿cómo se relaciona la ley de probabilidad de la variable original con la ley de probabilidad de la variable transformada?

- Comenzaremos discutiendo el caso discreto a través de un ejemplo (el caso discreto es sencillo).
- Posteriormente, daremos un resultado general para el caso continuo, conocido como el teorema de cambio de variable, el cual nos permite relacionar las funciones de densidad antes y después de la transformación.

Ejemplo (discreto)

Sea X una variable aleatoria (discreta) con recorrido $rec(X) = \{-1, 0, 1\}$*, donde*

$$P(X = -1) = 1/4, \quad P(X = 0) = 1/4, \quad P(X = 1) = 1/2.$$

- *La variable aleatoria* $Y = X + 1$ *tiene recorrido* $rec(Y) = \{0, 1, 2\}$*, donde*

$$P(Y = 0) = 1/4, \quad P(Y = 1) = 1/4, \quad P(Y = 2) = 1/2.$$

- *La variable aleatoria* $Y = X^2$ *tiene recorrido* $rec(Y) = \{0, 1\}$*, donde*

$$P(Y = 0) = 1/4, \quad P(Y = 1) = 3/4.$$

- *La variable aleatoria* $Y = X^3$ *sigue la misma distribución que* X.

Teorema (Teorema de Transformación)

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$. Definamos

$$Y = g(X),$$

donde g es una función diferenciable e inyectiva. Entonces, la función de densidad de Y está dada por

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|,$$

para cada $y \in rec(Y)$.

Demostración: Note que g es invertible y su inversa es una función monótona. Asumamos que su inversa g^{-1} es creciente. Para $y \in \text{rec}(Y)$, la función de distribución de Y está dada por

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= F_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Derivando a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}$$

El caso donde g^{-1} es decreciente es análogo.

$\square$

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ e^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de $Y = \ln(X)$.

Solución: Claramente, $\text{rec}(Y) = \mathbb{R}$. Sea $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln(X) \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y).$$

Derivando a ambos lados, obtenemos

$$f_Y(y) = f_X(e^y)\frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y} = e^{-e^y}e^y, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos la variable aleatoria $Y = X^2$.

(a) *Encuentre la función de distribución de X.*

(b) *Encuentre la función de densidad de Y.*

(c) *Calcule $E(Y)$ y $var(Y)$.*

Solución: Notar que, $\text{rec}(Y) = [0,1]$. Sea $y \in [0,1]$, entonces

Solución (a):

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(s)\mathrm{d}s = x\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

Solución (b):

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}).$$

Derivando a ambos lados, obtenemos

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbb{I}_{(0,1)}(\sqrt{y}), \qquad y \in (0,1).$$

Solución (c):

El valor esperado es:

$$E[Y] = \int_0^1 \frac{y}{2\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{y} \mathrm{d}y = \frac{2}{3}$$

Para calcular la varianza utilizaremos el segundo momento:

$$E[Y^2] = \int_0^1 \frac{y^2}{2\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \int_0^1 y^{3/2} \mathrm{d}y = \frac{2}{5}$$

Luego, la varianza es

$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{45}.$$

Ejercicio (Propuesto)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ son números conocidos.

(a) Muestre que $E(X) = \alpha$ y $var(X) = 2\beta^2$.

(b) Calcule $P(X > \alpha)$.

(c) Encuentre un número z tal que $P(X > z) = 1/4$.

Ejercicio (Propuesto)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = 6x(x-1), \qquad x \in [0,1],$$

(a) Encuentre la densidad de la variable aleatoria $Y = X^3$.

(b) Encuentre el valor esperado y la varianza de Y.

(c) Calcule $P\left(Y > \frac{1}{8}\right)$.

Ejercicio (Propuesto)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = 1, \qquad x \in [0,1],$$

Encuentre la densidad de la variable aleatoria $Y = -\frac{\ln X}{\lambda}$.