Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

3 de octubre de 2022

Contenidos

Definición (Vector Aleatorio)

Considere un experimento aleatorio con espacio muestral Ω. Un vector aleatorio de dimensión p es una función vectorial (medible) de la forma

$$\boxed{\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}^p}$$

En otras palabras, a cada resultado de un experimento aleatorio le asignamos un vector de dimensión p:

$$\omega \;\mapsto\; \mathrm{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_p(\omega))^\top$$

Observaciones

- La variable aleatoria X_k es la componente k-ésima del vector aleatorio X.

- En particular, cuando $p = 1$, obtenemos una variable aleatoria (unidimensional).

- Nos enfocaremos principalmente en el caso bivariado ($p = 2$), en cuyo caso el vector aleatorio será denotado generalmente como $(X, Y)^\top$.

Definición (Función de Cuantía Conjunta)

Sea $(X, Y)^\top$ un vector aleatorio con componentes ***discretas****. La función de cuantía* ***conjunta*** *se define como*

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x \ \wedge \ Y = y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Notación

Por simplicidad, en lugar de usar la notación $P(X = x \ \wedge \ Y = y)$, emplearemos la notación $P(X = x, Y = y)$.

Propiedades

La función de cuantía conjunta satisface las siguientes propiedades:

- $f_{XY}(x, y) > 0$ para $(x, y) \in \text{rec}(X) \times \text{rec}(Y)$
- $f_{XY}(x, y) = 0$ para $(x, y) \notin \text{rec}(X) \times \text{rec}(Y)$
- $\sum \sum f_{XY}(x_i, y_j) = 1$, donde la primera suma se extiende sobre los $x_i \in \text{rec}(X)$, mientras que la segunda suma se extiende sobre los $y_j \in \text{rec}(Y)$.

Ejemplo

La siguiente tabla muestra la función de cuantía conjunta para el vector aleatorio $(X, Y)^\top$.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$1/12$	$3/12$	$2/12$
$X = 1$	$1/12$	$4/12$	$1/12$

En este caso, $rec(X) = \{0, 1\}$ *y* $rec(Y) = \{0, 1, 2\}$. *Desde esta tabla podemos obtener todas las probabilidades asociadas a este vector aleatorio, como por ejemplo,* $f_{XY}(1, 2) = P(X = 1, Y = 2) = 1/12$. *Observe que*

$$\sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} f_{XY}(x, y) = 1.$$

Definición (Función de Densidad Conjunta)

Sea $(X, Y)^\top$ *un vector aleatorio con componentes* ***continuas****. La función de densidad* ***conjunta*** *es una función* f_{XY} *que satisface las siguientes propiedades:*

(1) $f_{XY}(x, y) \geq 0$*, para cada* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dxdy = 1$

(3) Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$*,*

$$P((X, Y) \in A) = \int\int_A f_{XY}(x, y)dxdy$$

Ejemplo

La siguiente función

$$g(x,y) = \begin{cases} x + y & \textit{si } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad conjunta válida, ya que no toma valores negativos y

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1.$$

Ejercicio

Considere la función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c\,x^2 y & \textit{si } -1 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encuentre la constante c.

(b) Muestre que $P(X \geq Y) = \dfrac{3}{20}$.

Definición (Función de Distribución Conjunta)

La función de distribución de un vector aleatorio $(X, Y)^\top$ *se define como*

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Observación

En el caso continuo, la función de distribución acumulada está dada por

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

Además, tenemos la relación

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \, \partial y} = f_{XY}(x, y),$$

en los puntos donde F_{XY} es diferenciable.

Definición (Funciones de Cuantía Marginales)

Sea $(X, Y)^\top$ un vector aleatorio con componentes discretas.

- *La función de cuantía marginal de X está dada por*

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f_{XY}(x, y),$$

  donde la suma se extiende sobre los $y \in rec(Y)$.

- *La función de cuantía marginal de Y está dada por*

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x f_{XY}(x, y),$$

  donde la suma se extiende sobre los $x \in rec(X)$.

Ejemplo

En el ejemplo visto anteriormente obtenemos las distribuciones marginales:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	
$X=0$	$1/12$	$3/12$	$2/12$	$1/2$
$X=1$	$1/12$	$4/12$	$1/12$	$1/2$
	$2/12$	$7/12$	$3/12$	

En este caso,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & si\ x \in \{0,1\} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2/12 & si\ y = 0 \\ 7/12 & si\ y = 1 \\ 3/12 & si\ y = 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Definición (Funciones de Densidad Marginales)

Sea $(X, Y)^\top$ *un vector aleatorio con componentes continuas.*

- *La función de densidad marginal de* X *está dada por*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy.$$

- *La función de densidad marginal de* Y *está dada por*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx.$$

Ejercicio

Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \textit{si } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Muestre que $X \sim Exp(1)$.

Solución: La función de densidad marginal de X, para $x \geq 0$, está dada por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\mathrm{d}y = e^{-x} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-y}\mathrm{d}y}_{1} = e^{-x}$$

Definición (Funciones de Probabilidad Condicionales)

Sea $(X, Y)^\top$ un vector aleatorio con función de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$. Entonces,

- *La función de probabilidad condicional de X dado $Y = y$ está dada por*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- *La función de probabilidad condicional de Y dado $X = x$ está dada por*

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Observación

Las fórmulas anteriores son válidas en el caso de componentes discretas y continuas.

Ejercicio

Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,(1+xy) & \textit{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determinar el valor de la constante c.

(b) Hallar las distribuciones marginales de X e Y.

(c) Hallar la distribución condicional de X dado $Y = y$.

Solución:

(a) Resolvemos la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} c\,(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 5c/4.$$

Por lo tanto, $\boxed{c = 4/5}$

Solución (continuación):

(b) La función de densidad marginal de X está dada por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{4}{5}(1+xy)\mathrm{d}y.$$

Al resolver esta integral obtenemos

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}\left(1+\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La variable aleatoria Y tiene la misma distribución que X, ya que la distribución conjunta es simétrica respecto a los argumentos x e y.

(c) Utilizando la definición de la distribución condicional:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1+xy}{1+y/2}, \qquad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1.$$

Ejercicio

Sea $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ *un vector aleatorio con densidad*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\mathbb{I}_{[0,1]^4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

1. *Calcule la distribución marginal* (X_1, X_2)
2. *La distribución condicional* X_1, X_2 *dado que* $(x_3, x_4) = (1/3, 2/3)$
3. $\mathbb{P}\left(X_1 \leq \frac{1}{2}, X_2 \leq \frac{3}{4}, X_4 \leq \frac{1}{2}\right)$