Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2021 2do semestre
DMAT - UTFSM

Abner Saavedra
Gabriel Riffo

Certamen 1

Pregunta 1 (30 puntos)

Un banco crediticio utiliza un *call center* para captar potenciales clientes. Se sabe que el 70% de las llamadas no se contestan. Si una llamada se acepta, el 20% de los clientes corta antes de contactarlo con un ejecutivo. Cuando el cliente habla con el ejecutivo, se sabe que el 80% de las veces el cliente acepta los productos del banco. Diremos que la captación es exitosa si acepta el producto. Si rechaza el producto directa o indirectamente, se dirá que la captación no fue efectiva.

Definiendo los eventos correspondientes:

1. Calcule la probabilidad de que la captación sea exitosa. (10 puntos)
2. Sabiendo que la captación no fue efectiva, calcule la probabilidad de que la persona haya hablado con el ejecutivo. (15 puntos)
3. Sabiendo que la captación si fue efectiva, calcule la probabilidad de que la persona haya hablado con el ejecutivo. (5 puntos)

Pregunta 2 (40 puntos)

La empresa *Jeg elske fiskel* utiliza un sofisticado sistema para realizar capturas en el oceano. Los pescadores que utilizan este sistema reportan que, luego de la captura, se encuentran otras especies que están prohibidas de capturar, las cuales se deben regresar al mar.

Considere la variable aleatoria X : *total de especies prohibidas capturadas*. Los analistas proponen, en base a su experiencia, que la densidad debe tener la siguiente forma

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.4	α	0.15	β	0.05

1. Encuentre condiciones sobre α y β para que $f_X(x)$ sea una función de masa de probabilidad (5 puntos)
2. Encuentre α y β sabiendo que $P(X \geq 1) = 0.6$ y que $P(X \leq 2) = 0.85$ (10 puntos)
3. Para α y β encontrados anteriormente, calcule $E[X]$ y $V[X]$. (15 puntos)
4. La entidad fiscalizadora ha decidido poner una multa según la cantidad peces prohibidos que se se han capturado. Esta multa está dada por la siguiente variable:

$$Y = X(100.000 + 50.000 \cdot X + 10.000 \cdot X^2).$$

   Encuentre el valor esperado de la multa. (10 puntos)

Pregunta 3 (30 puntos)

Se dice que la variable aleatoria X sigue una *distribución de Pareto* de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} & \alpha < x < \infty \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

1. Verifique que $f_X(x)$ es una función de densidad, además encuentre su función de distribuición. (5 puntos)
2. Encuentre las condiciones necesarias para β de tal forma que exista el n-ésimo momento de esta distribución. (15 puntos)
3. Sea $\kappa > 0$. Calcule la distribución de $Y_\kappa = \kappa X$. Calcule $P(Y_3 \leq 3)$. (10 puntos)

1 Solucion 1

1. Se definen los siguientes eventos:

   - C : El cliente contesta la llamada.
   - E : El cliente habla con un ejecutivo.
   - A : El cliente acepta los productos del banco.
   - K : La captación fue efectiva.

   Se nos pide la probabilidad de K

   $$\begin{aligned} P[K] &= P[A \cap E \cap C] = P[A|E \cap C] \cdot P[E \cap C] = P[A|E \cap C] \cdot P[E|C] \cdot P[C] \\ &= 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.192 \end{aligned}$$

2. Se nos pide calcular

   $$P[E|K^c] = \frac{P[K^c|E] \cdot P[E]}{P[K^c]}$$

   La probabilidad $P[E]$ de puede calcular como:

   $$P[E] = P[E|C] \cdot P[C] + P[E|C^c] \cdot P[C^c] = 0.8 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.7 = 0.24$$

   luego,

   $$P[E|K^c] = \frac{P[K^c|E] \cdot P[E]}{P[K^c]} = \frac{0.2 \cdot 0.24}{1 - 0.192} \approx 0.0594$$

3. Se nos pide calcular

   $$P[E|K] = \frac{P[K|E] \cdot P[E]}{P[K]} = \frac{0.8 \cdot 0.24}{0.192} = 1$$

2 Solucion 2

1. $\alpha + \beta = 0.4$, $0 \leq \alpha \leq 0.4$ y $0 \leq \beta \leq 0.4$

2. Se sabe que

   $$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 0.2 + \alpha + \beta = 0.6 \\ P(X \leq 2) &= 0.4 + \alpha + 0.15 = 0.85 \end{aligned}$$

   De donde notamos que se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0.4 \\ \beta &= 0.1 \end{aligned}$$

   De donde se obtiene que $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.1$

3. $\mathrm{E}[X] = 1.1$, $\mathrm{E}[X^2] = 2.6$, $\mathrm{V[X]} = 1.39$

4. Notar que $\mathrm{E}[X^3] = 7.4$. Luego

   $$Y = 100.000 \cdot X + 50.000 \cdot X^2 + 10.000 \cdot X^3.$$

   Finalmente,

   $$\begin{aligned} E[Y] &= E[100.000 \cdot X + 50.000 \cdot X^2 + 10.000 \cdot X^3]. \\ &= 100.000 \cdot E[X] + 50.000 \cdot E[X^2] + 10.000 \cdot E[X^3] \\ &= 314.000 \end{aligned}$$

3 Solución 3

1. Notar que $f_X(x) > 0$ y que $\int_\alpha^\infty \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\,dx = \beta\alpha^\beta \frac{x^{-\beta}}{-\beta}\Big|_\alpha^\infty = 0 - \beta\alpha^\beta\frac{\alpha^{-\beta}}{-\beta} = 1$

   Por otra parte, notamos que

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta, \quad x \geq \alpha$$

2. Calculamos el valor esperado por definición

$$E[X^n] = \int_\alpha^\infty x^n \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x = \alpha\beta^\alpha \int_\alpha^\infty x^{n-\beta-1}\mathrm{d}x = \frac{x^{n-\beta}}{n-\beta}\Big|_\alpha^\infty$$

   Luego, si $\beta > n$ se tiene que

$$E[X^n] = \frac{\beta\alpha^n}{\beta - n}$$

3. Utilizando el teorema de transformación se tiene que

$$\begin{aligned} P(Y_\kappa \leq y) &= P(\kappa X \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y}{\kappa}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

   Luego $P(Y_3 \leq 3) = P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - \alpha^\beta$.