Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

27 de agosto de 2022

Contenidos

- ▷ Definición de Variable Aleatoria
- ▷ Funciones de Distribución, Cuantía y Densidad

Definición (Variable Aleatoria)

Considere un experimento aleatorio con espacio muestral Ω. Una variable aleatoria es una función (medible) de la forma

$$\boxed{X : \Omega \to \mathbb{R}}$$

Interpretación: Una variable aleatoria asigna un número a cada resultado de un experimento aleatorio:

$$\omega \mapsto X(\omega)$$

Esto permite analizar cualquier espacio muestral de manera cuantitativa.

Ejemplo

Experimento: *Se lanza una moneda* 5 *veces.*

- *Sea* X *el número de caras en los* 5 *lanzamientos.*
- *El recorrido de* X *es* $rec(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- *Por ejemplo, si* $\omega = CSSCS$, *entonces* $X(\omega) = 2$.

Ejemplo

Experimento: *Se observa el cielo.*

- *Sea* X *el tiempo transcurrido hasta observar una estrella fugaz.*
- *El recorrido de* X *es* $rec(X) = [0, \infty)$.

Ejemplo

Experimento: *Se escoge un punto al azar desde el disco unitario*

$$\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$$

Un resultado del experimento aleatorio adopta la forma $\omega = (u, v)$. *A continuación, se ilustran dos variables aleatorias para este ejemplo:*

- $X(\omega) = u$, *entonces* $rec(X) = [-1, 1]$
- $Y(\omega) = \sqrt{u^2 + v^2}$, *entonces* $rec(Y) = [0, 1]$

Notación

Sea B un subconjunto de la recta real y X una variable aleatoria. Usaremos la siguiente notación

$$P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}).$$

Observación

- Una variable aleatoria X es discreta si su recorrido es numerable (finito o infinito).
- Una variable aleatoria X es continua si su recorrido es un subintervalo de la recta real.
- Una variable aleatoria X es mixta si su recorrido toma valores contínuos y discretos[1]

[1] no es tópico de esta clase

Definición (Función de Distribución)

Sea X una variable aleatoria. La función de distribución acumulada se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Propiedades

La función de distribución acumulada satisface las siguientes propiedades:

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $F_X(x)$ es una función no decreciente y continua a la derecha.

Definición (Función de Cuantía)

Sea X una variable aleatoria discreta. La función de cuantía o masa de probabilidad de X se define como

$$f_X(x) = P(X = x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Propiedades

La función de cuantía satisface las siguientes propiedades:

- $f_X(x) > 0$ para $x \in \text{rec}(X)$
- $f_X(x) = 0$ para $x \notin \text{rec}(X)$.
- $\sum f_X(x_i) = 1$, donde la suma se extiende sobre los $x_i \in \text{rec}(X)$

Ejercicio

Se lanza una moneda dos veces. Sea X el número de caras obtenidas. Determine las funciones de cuantía y distribución. Calcule $P(X \geq 1)$.

Solución: El espacio muestral es

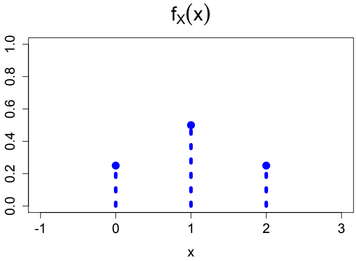
$$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}.$$

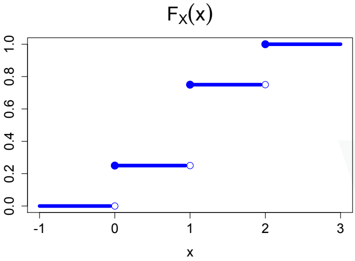
Además, $\mathrm{rec}(X) = \{0, 1, 2\}$. Las funciones de cuantía y distribución están dadas por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1/4 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 1/4 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 3/4 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 1 & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Finalmente, note que $P(X \geq 1) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Solución (continuación): En los siguientes gráficos se ilustran las funciones de cuantía y distribución para la variable aleatoria X:





Para variables aleatorias continuas, la función de cuantía debe ser reemplazada por la función de densidad.

Definición (Función de Densidad)

Considere una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

- $f_X(x) \geq 0$, *para cada* $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Diremos que f_X *es la función de densidad de* X *si*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx, \qquad a \leq b.$$

Observaciones

- Para una variable aleatoria X continua, las probabilidades puntuales son nulas, es decir,

$$P(X = x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Tenemos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u.$$

Luego,

$$F_X'(x) = f_X(x),$$

para cada x donde F_X es diferenciable.

Observaciones

Notamos que

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \qquad a \leq b.$$

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

(a) *Calcule el valor de k.*

(b) *Encuentre la función de distribución $F_X(x)$.*

(c) *Calcule $P(X \geq 4)$ y $P(|X-2| < 1)$.*

Solución:

(a) f_X es claramente no-negativa cuando $k \geq 0$. Adicionalmente, debemos seleccionar k de tal manera que esta función integre 1. En efecto,

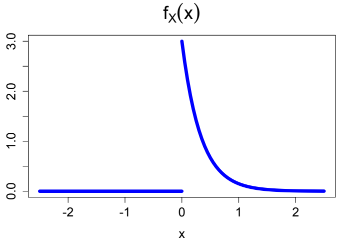
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} ke^{-3x}\mathrm{d}x = \left.\frac{-ke^{-3x}}{3}\right|_0^{\infty} = \frac{k}{3}$$

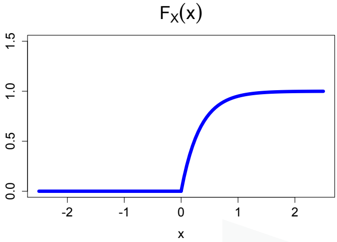
La integral anterior es igual a 1 cuando $\boxed{k = 3}$

Solución (continuación):

(b) Si $x \leq 0$, claramente $F_X(x) = 0$. Por otro lado, para $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{x} 3e^{-3u}\mathrm{d}u = -e^{-3u}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-3x}.$$





Solución (continuación):

(c) Primero, observe que

$$P(X \geq 4) = \int_4^\infty 3e^{-3x} \mathrm{d}x = -e^{-3x}\Big|_4^\infty = e^{-12}$$

Por otro lado, $|X-2| < 1$ si y solamente si $1 < X < 3$. Luego,

$$P(|X-2|<1) = P(1 < X < 3) = \int_1^3 3e^{-3x}\mathrm{d}x = -e^{-3x}\Big|_1^3 = e^{-3} - e^{-9}$$

Ejercicio

Determine si las siguientes funciones son funciones de densidad válidas:

$$f(x) = \frac{1/\pi}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < 0 \\ 1/(1 + x) & \textit{si } x \geq 0 \end{cases}$$

De ser así, calcule la función de distribución correspondiente.

Solución:

- $f(x)$ si es una función de densidad. De hecho

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\arctan(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

Solución:

- $f(x)$ si es una función de densidad. De hecho

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

- $h(x)$ no es una función de densidad debido a que la integral diverge

Un experimento consiste de lanzar tres veces una moneda. Sea la variable aleatoria X: Número de caras que se obtienen, se pide

1. Calcule la función de probabilidad de X.
2. Calcule la función de distribución de X.
3. Calcule la probabilidad de obtener a lo más dos caras
4. Calcule la probabilidad de obtener a al menos dos caras

La variable aleatoria X: número de hijos por familia de Valparaíso, tiene la siguiente distribución de probabilidad

X	0	1	2	3	4	5	6
$f(X = x)$	0.47	0.3	0.1	0.06	α	0.02	0.01

1. Encuentre el valor de α tal que f sea una densidad de probabilidad.
2. Encuentre la función de cuantía.
3. Encuentre la probabilidad de que el número de hijos sea menor o igual a 3.
4. Encuentre el número de hijos por familia tal que la probabilidad acumulada sea de un 95 %
5. Si se encuestan tres familias,
   1) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna tenga hijos?
   2) ¿Cuál es la probabilidad de que solo una tenga hijos?
   3) ¿Que las tres tengan al menos 3 hijos?

Los tiempos de llegada de un bus, en horas, se modelan mediante la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

1. Hallar la función de densidad.
2. Calcule la probabilidad de que bus se demore entre 30 y 90 minutos.
3. Suponga que vienen 5 buses. ¿Cuál es la probabilidad que estos se demoren menos de 30 y más de 90 minutos?

Considere la siguiente función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 < x \leq \kappa \\ 1 & x > \kappa \end{cases}$$

1. Encuentre κ tal que $F(x)$ sea función de distribución. Haye su densidad.
2. Hallar $P(X \leq 0.5)$ y $P(X > 0.25)$