Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

5 de diciembre de 2022

Pruebas de Hipótesis I

Hipótesis estadística

Una hipótesis estadística es una afirmación respecto a una o varias poblaciones que se hace antes de tomar una muestra aleatoria.

Hipótesis estadística

Una hipótesis estadística es una afirmación respecto a una o varias poblaciones que se hace antes de tomar una muestra aleatoria. La afirmación puede referirse a:

- La distribución de probabilidad de alguna variable aleatoria de interés X.
- Relación entre variables aleatorias X e Y.
- Parámetros poblacionales tales como μ, σ^2, una proporción p, dos medias μ_1 y μ_2, etc.

Hipótesis estadística

Una hipótesis estadística es una afirmación respecto a una o varias poblaciones que se hace antes de tomar una muestra aleatoria. La afirmación puede referirse a:

- La distribución de probabilidad de alguna variable aleatoria de interés X.
- Relación entre variables aleatorias X e Y.
- Parámetros poblacionales tales como μ, σ^2, una proporción p, dos medias μ_1 y μ_2, etc.

Una de las hipótesis se llama hipótesis nula, se anota H_0 y está basada en el estado actual. La otra hipótesis complementa la anterior, se llama hipótesis alternativa, se anota H_1. Los datos muestrales se usan para decidir si las hipótesis respecto a la población encuentran o no apoyo en la muestra.

Algunos ejemplos:

1. Hipótesis respecto a la distribución de probabilidad:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: X \text{ tiene distribución normal} \\
H_1 &: X \text{ no tiene distribución normal}
\end{aligned}
$$

Algunos ejemplos:

1. Hipótesis respecto a la distribución de probabilidad:

$$\begin{aligned} H_0 &: X \quad \text{tiene distribución normal} \\ H_1 &: X \quad \text{no tiene distribución normal} \end{aligned}$$

2. Hipótesis respecto a la media de una población normal:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \leq \mu_0 \\ H_1 &: \mu > \mu_0 \end{aligned}$$

Algunos ejemplos:

1. Hipótesis respecto a la distribución de probabilidad:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad X \quad \text{tiene distribución normal} \\ H_1 &: \quad X \quad \text{no tiene distribución normal} \end{aligned}$$

2. Hipótesis respecto a la media de una población normal:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu \leq \mu_0 \\ H_1 &: \quad \mu > \mu_0 \end{aligned}$$

3. Hipótesis respecto a dos proporciones de poblaciones Bernoulli:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 &: \quad p_1 - p_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Algunos ejemplos:

1. Hipótesis respecto a la distribución de probabilidad:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad X \quad \text{tiene distribución normal} \\ H_1 &: \quad X \quad \text{no tiene distribución normal} \end{aligned}$$

2. Hipótesis respecto a la media de una población normal:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu \leq \mu_0 \\ H_1 &: \quad \mu > \mu_0 \end{aligned}$$

3. Hipótesis respecto a dos proporciones de poblaciones Bernoulli:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 &: \quad p_1 - p_2 \neq 0 \end{aligned}$$

4. Hipótesis respecto a la independencia de variables aleatorias:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad X \;\; e \;\; Y \quad \text{son independientes} \\ H_1 &: \quad X \;\; e \;\; Y \quad \text{no son independientes} \end{aligned}$$

Clasificacion de los test de hipótesis

Hipótesis simple

Decimos que una hipótesis es simple si esta identifica la distribución en su totalidad

Hipótesis compuesta

Decimos que una hipótesis es compuesta si no es simple

La decisión de rechazar o no rechazar H_0 a partir de una muestra aleatoria tiene implícita la posibilidad de equivocarse porque la muestra sólo entrega información parcial de lo que ocurre a nivel poblacional.

La decisión de rechazar o no rechazar H_0 a partir de una muestra aleatoria tiene implícita la posibilidad de equivocarse porque la muestra sólo entrega información parcial de lo que ocurre a nivel poblacional.

	Decisión desde la muestra	
En la población	Rechazar H_0	No Rechazar H_0
H_0 es Verdadera	Error tipo I	Correcta
H_0 es Falsa	Correcta	Error tipo II

La decisión de rechazar o no rechazar H_0 a partir de una muestra aleatoria tiene implícita la posibilidad de equivocarse porque la muestra sólo entrega información parcial de lo que ocurre a nivel poblacional.

	Decisión desde la muestra	
En la población	Rechazar H_0	No Rechazar H_0
H_0 es Verdadera	Error tipo I	Correcta
H_0 es Falsa	Correcta	Error tipo II

La idea es crear reglas de decisión que mantengan bajo control las probabilidades de error tipo I y tipo II. Estas se definen de la siguiente manera.

$$\alpha = P(Error\ \ tipo\ \ I) = P(Rechazar\ \ H_0 \mid H_0\ \ es\ \ Verdadera)$$

$$\beta = P(Error\ \ tipo\ \ II) = P(No\ rechazar\ \ H_0 \mid H_0\ \ es\ \ Falsa)$$

La potencia de una regla de decisión o test se define como la probabilidad de hacer una decisión correcta del tipo Rechazar H_0 (a partir de la muestra) cuando H_0 es Falsa (en la población)

$$\text{Potencia} = P(\mathit{Rechazar} \;\; H_0 \mid H_0 \;\; \mathit{es} \;\; \mathit{Falso}) = 1 - \beta.$$

La potencia de una regla de decisión o test se define como la probabilidad de hacer una decisión correcta del tipo Rechazar H_0 (a partir de la muestra) cuando H_0 es Falsa (en la población)

$$\text{Potencia} = P(Rechazar \;\; H_0 \;\mid\; H_0 \;\; es \;\; Falso) = 1 - \beta.$$

¿Cuál de los dos errores es más grave? ¿El Error tipo I o el Error tipo II?

La potencia de una regla de decisión o test se define como la probabilidad de hacer una decisión correcta del tipo Rechazar H_0 (a partir de la muestra) cuando H_0 es Falsa (en la población)

$$\text{Potencia} = P(Rechazar \;\; H_0 \;\mid\; H_0 \;\; es \;\; Falso) = 1 - \beta.$$

¿Cuál de los dos errores es más grave? ¿El Error tipo I o el Error tipo II?

La mayoría de las veces resulta más grave el Error tipo I. Por tanto, la metodología estadística fija en primer lugar la probabilidad α y luego entre todas las reglas de decisión que tienen una probabilidad de Error tipo I menor o igual que α se busca la regla de decisión con la mayor potencia o menor β.

Estadística de prueba, valor crítico y región de rechazo

Consideremos el caso en que compiten dos hipótesis simples.

Supongamos que $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ con σ^2 conocida y que se quieren contrastar la hipótesis,

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad v/s \qquad H_1 : \mu = \mu_1; \qquad con \qquad \mu_0 < \mu_1$$

Sabemos que $\bar{X} = \sum X_i / n$ es un estimador de μ y parece natural rechazar $H_0 : \mu = \mu_0$ en favor de $H_1 : \mu = \mu_1$ cuando $\bar{X} > c$.

El conjunto $C = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) / \bar{X} > c\}$ se llama región crítica o región de rechazo y el complemento $C' = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) / \bar{X} \leq c\}$ se llama región de no rechazo ~~o región de aceptación~~ de H_0.

La constante c que define ambas regiones se llama valor crítico y es determinada fijando la probabilidad α de Error tipo I.

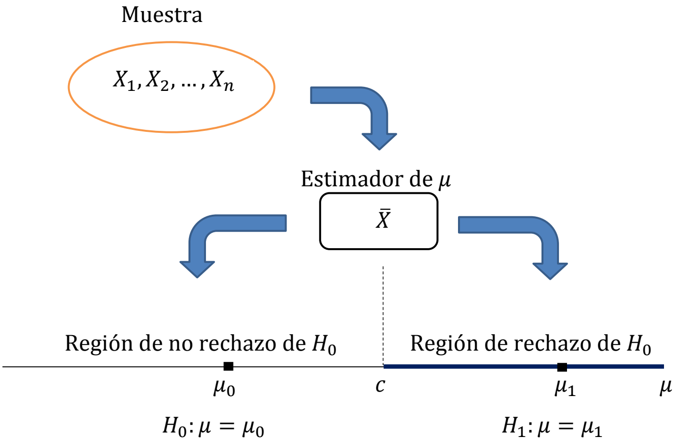


Figura 1: Criterio de decisión para $H_0 : \mu = \mu_0$ v/s $H_1 : \mu = \mu_1$; $\mu_0 < \mu_1$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(Rechazar \;\; H_0 \mid H_0 \;\; es \;\; Verdadero) \\
&= P(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \;\; porque \;\; Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0;1) \\
&\Leftrightarrow \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_{1-\alpha} \\
&\Leftrightarrow c = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

Entonces, la regla de decisión es:

$$Rechace \;\; H_0 \;\; si \; \bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$$

Supongamos que $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 64$ y que se quieren contrastar la hipótesis $H_0 : \mu = 12 \quad v/s \quad H_1 : \mu = 15$. Se toma una muestra de tamaño $n = 25$ y resulta una media $\bar{X} = 14,7$.

Supongamos que $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 64$ y que se quieren contrastar la hipótesis $H_0 : \mu = 12 \quad v/s \quad H_1 : \mu = 15$. Se toma una muestra de tamaño $n = 25$ y resulta una media $\bar{X} = 14,7$.

a) Si se fija la probabilidad de Error tipo I en $\alpha = 0,05$ cree usted que la muestra apoya la hipótesis nula?

b) ¿Cuál es la potencia de la regla de decisión usada?

Supongamos que $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 64$ y que se quieren contrastar la hipótesis $H_0 : \mu = 12 \quad v/s \quad H_1 : \mu = 15$. Se toma una muestra de tamaño $n = 25$ y resulta una media $\bar{X} = 14,7$.

a) Si se fija la probabilidad de Error tipo I en $\alpha = 0,05$ cree usted que la muestra apoya la hipótesis nula?

b) ¿Cuál es la potencia de la regla de decisión usada?

Solución

a) Estadística de prueba observada:

$$Z_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(14,7 - 12)}{8/\sqrt{25}} \approx 1,69$$

Valor crítico: $Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1,645$

Región de rechazo o región crítica: $Z > 1,645$

Decisión: Como $Z_{obs} = 1,69 > 1,645$ la estadística de prueba cae en la región de rechazo y por tanto se rechaza $H_0 : \mu = 12$ en favor de $H_1 : \mu = 15$ con $\alpha = 0,05$.

Conclusión: Con $\alpha = 0,05$ la muestra no es consistente con H_0 y sugiere aceptar $H_1 : \mu = 15$

Decisión: Como $Z_{obs} = 1,69 > 1,645$ la estadística de prueba cae en la región de rechazo y por tanto se rechaza $H_0 : \mu = 12$ en favor de $H_1 : \mu = 15$ con $\alpha = 0,05$.

Conclusión: Con $\alpha = 0,05$ la muestra no es consistente con H_0 y sugiere aceptar $H_1 : \mu = 15$

b) De acuerdo a la regla de decisión, la probabilidad de Error tipo II es

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\text{No rechazar } \ H_0 \mid H_0 \ \textit{es} \ \textit{Falso}) \\
&= P\left(\bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} \mid \mu = \mu_1\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
\Leftrightarrow \beta &= P\left(Z \leq \frac{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Reemplazando los datos se obtiene que

$$\beta = P\left(Z \leq \frac{12 + \frac{8}{\sqrt{25}}1,645 - 15}{\frac{8}{\sqrt{25}}}\right) \approx P(Z \leq -0,23) \approx 0,4090$$

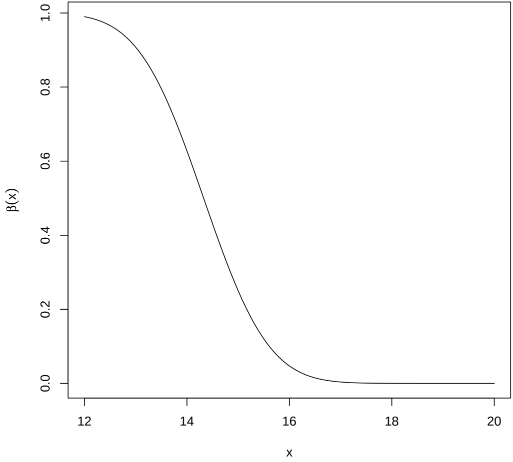
Por tanto la potencia es:

$$potencia = 1 - \beta = 1 - 0,4090 = 0,5910$$

La potencia de 0,5910 obtenida en el ejemplo anterior no es muy buena . Entonces, surgen la pregunta ¿Cómo aumentar la potencia manteniendo el valor de α y manteniendo la regla de decisión?
la respuesta es aumentar el tamaño de la muestra.

En general, el resultado de la función de potencia puede ser calculado cuando la hipótesis alternativa simple, toma un valor específico μ, dando la fórmula

$$potencia(\mu) = 1 - \beta(\mu) = 1 - \phi\left(\sqrt{25}\left(\frac{12-\mu}{8}\right) + Z_{1-\alpha}\right)$$



Tamaño de la muestra para α y β dados

Habiendo fijado el valor α ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la regla de decisión no supere el valor β?

$$
\begin{aligned}
\beta &= P(Aceptar \;\; H_0 \mid H_0 \;\; es \;\; Falso) \\
&= P\left(\bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} \mid \mu = \mu_1\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)
\end{aligned}
$$

Esta condición se cumple si

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_\beta = -Z_{1-\beta} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sigma}{\sqrt{n}} [Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}] = \mu_1 - \mu_0 \\
\Leftrightarrow \quad & n = \sigma^2 \left(\frac{Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2
\end{aligned}
$$

La formula anterior permite resaltar varios hechos importantes.

1. Determina el tamaño de muestra necesario para contrastar las hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu = \mu_1$, $\mu_0 < \mu_1$, para probabilidades de error tipo I y II α y β dadas.
2. Permite establecer que para un tamaño de muestra n fijo no es posible disminuir simultáneamente las probabilidades de error tipo I y II α y β.
3. Mientras más cerca está μ_1 de μ_0 la diferencia $\mu_1 - \mu_0$ se hace más pequeña y en consecuencia el tamaño de muestra n deberá ser más grande para discernir una diferencia entre μ_1 y μ_0.

5. La formula anterior puede ser escrita como

$$n = \left(\frac{Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}}{\delta} \right)^2$$

donde

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

se llama tamaño de efecto y su valor absoluto representa la distancia estandarizada entre las dos distribuciones normales propuestas por las hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu = \mu_1$. Es decir, el tamaño de efecto indica que fracción es la distancia entra las dos distribuciones normales $\mu_1 - \mu_0$ de la desviación estándar común σ.

Ejemplo:

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza $\sigma^2 = 64$. Hasta ahora se sabía que $\mu = 50$ pero hay sospechas de que esa media ha aumentado a 60. Para probar esta hipótesis se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$ y resulta $\bar{X} = 54$. Usando $\alpha = 0,05$ establezca si la muestra es consistente con H_0.

Ejemplo:

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza $\sigma^2 = 64$. Hasta ahora se sabía que $\mu = 50$ pero hay sospechas de que esa media ha aumentado a 60. Para probar esta hipótesis se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$ y resulta $\bar{X} = 54$. Usando $\alpha = 0,05$ establezca si la muestra es consistente con H_0.

Solución

Hipótesis: $H_0 : \mu = 50$ v/s $H_1 : \mu = 60$,

Ejemplo:

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza $\sigma^2 = 64$. Hasta ahora se sabía que $\mu = 50$ pero hay sospechas de que esa media ha aumentado a 60. Para probar esta hipótesis se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$ y resulta $\bar{X} = 54$. Usando $\alpha = 0,05$ establezca si la muestra es consistente con H_0.

Solución

Hipótesis: $H_0 : \mu = 50$ v/s $H_1 : \mu = 60$,

Estadística de Prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Ejemplo:

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza $\sigma^2 = 64$. Hasta ahora se sabía que $\mu = 50$ pero hay sospechas de que esa media ha aumentado a 60. Para probar esta hipótesis se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$ y resulta $\bar{X} = 54$. Usando $\alpha = 0,05$ establezca si la muestra es consistente con H_0.

Solución

Hipótesis: $H_0 : \mu = 50$ v/s $H_1 : \mu = 60$,

Estadística de Prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Valor observado de la estadística de prueba:

$$Z_{obs} = \frac{54 - 50}{8/\sqrt{36}} = 3,0$$

Región de rechazo: $Z > z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,645$, Región de rechazo: $Z > z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,645$,

Decisión: Como $3 > 1,645$ la estadística de prueba resultó estar en la región de rechazo y en consecuencia la decisión es rechazar $H_0 : \mu = 50$ en favor de $H_1 : \mu > 50$. Conclusión: Los datos del problema sugieren que la media poblacional ha aumentado por sobre el valor $\mu = 50$.

Pruebas de Hipótesis II