Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

22 de agosto de 2022

El Problema de Monty Hall:

- Suponga que estamos frente a tres puertas. Detrás de una puerta hay un auto y detrás de las otras dos hay una cabra.
- Escoges una puerta al azar (digamos la N$^\circ$1) con la expectativa de ganar el auto.
- El animador sabe qué hay detrás de cada puerta, así que abre una de las puertas que tiene una cabra (digamos la N$^\circ$3)
- **Pregunta:** ¿Quieres modificar tu elección y cambiarte a la puerta N$^\circ$2? ¿Te conviene? Se puede argumentar que es conveniente cambiarse, ya que esta acción implica que tendrás una probabilidad de 2/3 de ganar el auto.

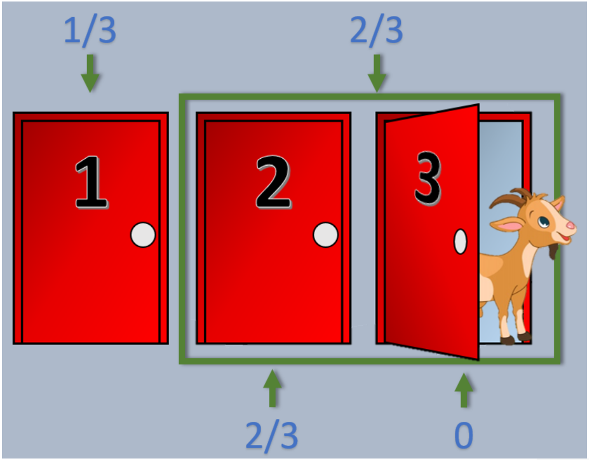

Figura 1: Ilustración del problema de Monty Hall (imagen extraída desde Wikipedia).

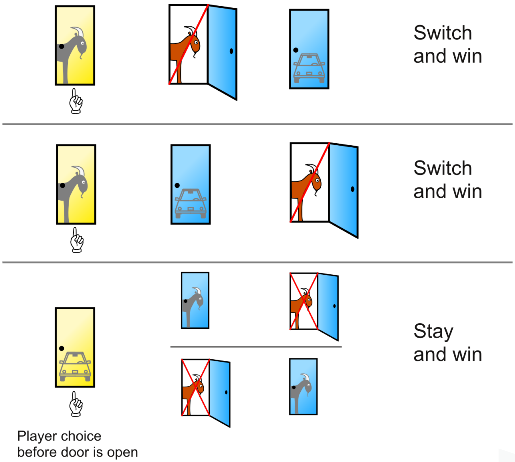

Figura 2: Ilustración de las combinaciones posibles (imagen extraída desde Wikipedia).

Para $i = 1, 2, 3$, considere los siguientes eventos:

- C_i: "el auto está en la puerta i-ésima"
- X_i: "escogemos la puerta i-ésima"
- H_i: "el animador abre la puerta i-ésima"

Sabemos que $P(C_i) = 1/3$. Además, nuestra elección es independiente de la posición del auto (ya que no sabemos donde está), así que

$$P(C_i \cap X_j) = P(C_i)P(X_j).$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} P(H_3 | \{C_1 \cap X_1\}) &= 1/2 \\ P(H_3 | \{C_2 \cap X_1\}) &= 1 \\ P(H_3 | \{C_3 \cap X_1\}) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Probabilidades Totales:

$$P(H_3 \cap X_1) = P(H_3 \cap C_1 \cap X_1) + P(H_3 \cap C_2 \cap X_1) + P(H_3 \cap C_3 \cap X_1).$$

Luego, utilizando la definición de probabilidad condicional:

$$P(H_3 \cap X_1) = P(H_3 | \{C_1 \cap X_1\}) P(C_1 \cap X_1) + P(H_3 | \{C_2 \cap X_1\}) P(C_2 \cap X_1) + P(H_3 | \{C_3 \cap X_1\}) P(C_3 \cap X_1)$$

Entonces,

$$P(H_3 \cap X_1) == \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{6}.$$

Concluímos que

$$P(H_3 | X_1) = \frac{P(H_3 \cap X_1)}{P(X_1)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}.$$

Nuevamente, utilizando la definición de probabilidad condicional:

$$P(C_2|\{H_3 \cap X_1\}) = \frac{P(C_2 \cap H_3 \cap X_1)}{P(H_3 \cap X_1)} = \frac{P(H_3|\{C_2 \cap X_1\})P(C_2 \cap X_1)}{P(H_3|X_1)P(X_1)}$$

Recordemos que $P(H_3|\{C_2 \cap X_1\}) = 1$ y $P(C_2 \cap X_1) = P(C_2)P(X_1)$. Por lo tanto,

$$P(C_2|\{H_3 \cap X_1\}) = \frac{P(C_2)}{P(H_3|X_1)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

La última igualdad nos dice que si escogemos la puerta 1 y el animador abre la puerta 3, la probabilidad de que el auto esté en la puerta 2 es 2/3. Por lo tanto, si nos cambiamos a la puerta 2, ganaremos con probabilidad 2/3.