Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

3 de octubre de 2022

Contenidos

✓ Función Generadora de Momentos

Definición (Función Generadora de Momentos)

La función generadora de momentos (FGM) de X se define como

$$\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum e^{tx} f_X(x) & \textit{(caso discreto)} \\ \\ \int e^{tx} f_X(x) dx & \textit{(caso continuo)} \end{cases}$$

para aquellos valores de $t \in \mathbb{R}$ donde esta esperanza existe. Aquí, la suma y la integral se extienden sobre los x en el recorrido de X. Además, f_X denota la función de cuantía en el caso discreto y la función de densidad en el caso continuo.

Ejemplo (FGM para la Distribución Bernoulli)

Sea $X \sim Ber(p)$*, donde* $p \in (0,1)$*. Luego,*

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= pe^{t\times 1} + (1-p)e^{t\times 0}\\ &= pe^t + 1 - p\end{aligned}$$

Ejemplo (FGM para la Distribución Poisson)

Sea $X \sim Poisson(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Encuentre su función generadora de momentos.

Ejemplo (FGM para la Distribución Poisson)

Sea $X \sim Poisson(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Encuentre su función generadora de momentos.

Usando la definición se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\psi_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{e^{-e^t\lambda}} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-e^t\lambda}[e^t\lambda]^x}{x!}}_{1} \\
&= e^{\lambda(e^t-1)}
\end{aligned}
$$

Ejemplo (FGM para la Distribución Uniforme)

Sea $X \sim Unif(a, b)$*, donde* a *y* b *son números reales tales que* $a < b$*. Luego, para* $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \end{aligned}$$

Para $t = 0$*, en cambio, tenemos que*

$$\psi_X(0) = 1$$

Ejemplo (FGM para la Distribución Exponencial)

Sea $X \sim Exp(\beta)$*, donde* $\beta > 0$*. Para* $t < 1/\beta$*,*

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx}\frac{e^{-x/\beta}}{\beta}dx \\ &= \frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{x(t-1/\beta)}dx \\ &= -\frac{1/\beta}{t-1/\beta}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\psi_X(t) = \frac{1}{1-\beta t}$$

Ejercicio

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*, para* $\mu \in \mathbb{R}$ *y* $\sigma^2 > 0$*. Muestre que la FGM está dada por*

$$\psi_X(t) = \exp\left(\mu t + \sigma^2 t^2/2\right).$$

En particular, cuando $X \sim N(0, 1)$*,*

$$\boxed{\varphi_X(t) = \exp\left(t^2/2\right)}$$

Las derivadas de la FGM se relacionan con los momentos de X:

Si derivamos la FGM con respecto a t obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}\psi_X(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E\left(e^{tX}\right)}{\mathrm{d}t} = E\left(\frac{\mathrm{d}\{e^{tX}\}}{\mathrm{d}t}\right) = E\left(Xe^{tX}\right)$$

En general, la derivada de orden k está dada por

$$\frac{\mathrm{d}^k\psi_X(t)}{\mathrm{d}t^k} = \frac{\mathrm{d}^k E\left(e^{tX}\right)}{\mathrm{d}t^k} = E\left(\frac{\mathrm{d}^k\{e^{tX}\}}{\mathrm{d}t^k}\right) = E\left(X^k e^{tX}\right)$$

Concluímos que los momentos de la variable aleatoria X se obtienen al evaluar las derivadas de la FGM en $t = 0$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k\psi_X(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0} = E\left(X^k\right)$$

Propiedades de la FGM:

1. Sean a y b constantes y X una variable aleatoria. Si $Y = aX + b$, entonces
$$\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)$$

2. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes. Considere la variable aleatoria $Y = X_1 + \cdots + X_n$. Entonces,
$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(t)$$

Ejemplo

Una variable aleatoria $Y \sim Bin(n, p)$ se puede escribir como

$$Y = X_1 + \cdots + X_n$$

donde $X_i \sim Ber(p)$. Luego, la FGM de una variable aleatoria binomial adopta la forma

$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n}(pe^t + 1 - p) = (pe^t + 1 - p)^n$$

Teorema

Considere las variables aleatorias X e Y. Si $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ para cada t en un intervalo abierto alrededor de 0, entonces X e Y tienen la misma distribución.

Ejercicio

Sean $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ y $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ independientes, donde $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. Encuentre la distribución de la variable aleatoria

$$Y = X_1 + X_2$$

Teorema

Considere las variables aleatorias X e Y. Si $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ para cada t en un intervalo abierto alrededor de 0, entonces X e Y tienen la misma distribución.

Ejercicio

Sean $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ y $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ independientes, donde $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. Encuentre la distribución de la variable aleatoria

$$Y = X_1 + X_2$$

Solución:

Notamos que

$$\psi_Y(t) = \psi_{X_1+X_2}(t) = \psi_{X_1}(t)\psi_{X_2}(t)$$

Luego

$$\psi_Y(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

Luego $Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$

Ejercicio

Suponga que la función generadora de momentos de X es $\psi_X(t) = e^{3(e^t-1)}$. Encuentre $\mathbb{P}(X=0)$.

Ejercicio

Suponga que X es una variable aleatoria discreta con función generadora de momentos dada por:

$$\psi_X(t) = \frac{1}{7}e^{2t} + \frac{3}{7}e^{3t} + \frac{2}{7}e^{5t} + \frac{1}{7}e^{8t}.$$

Encuentre la función de masa de probabilidad y $\mathbb{E}[X]$.

Ejercicio

Suponga que un matemático determina que la función generadora de momentos de un determinado proceso, digamos X, es

$$\psi_X(t) = \frac{1}{(1 - 2500t)^4}.$$

Encuentre el valor esperado y la varianza de X.