Carlos Schwarzenberg
DMAT - UTFSM

Ayudante:
Abner Saavedra

Certamen 1

MAT041

1er Semestre 2022

Pregunta 1 (40 puntos)

En un esfuerzo por obtener el máximo rendimiento en una reacción química, un experto analiza los valores de las siguientes variables:

T: Temperatura (en $°C$).

P: Porcentaje de material convertido al producto deseado.

Los datos, para una muestra de tamaño $n = 20$, se resumen a continuación.

$T\backslash P$	$40-50$	$50-60$	$60-70$	$70-80$	Total
$160-170$	3	x	0	0	4
$170-180$	0	3	5	0	8
$180-190$	0	2	3	3	y
Total	z	6	8	3	20

a) Encuentre los valores de x, y y z. [10 puntos]

b) Calcule los promedios y varianzas marginales de cada variable. ¿Cuál variable es más homogénea? [20 puntos]

c) Se ha reportado que $\text{Cov}(T, P) = 42.25$, ¿Existe evidencia de asociación lineal? [10 puntos]

Solución:

a) Sumando hacia la derecha y hacia abajo es fácil completar los valores faltantes en la tabla, así:

$$x = 1, \quad y = 8, \quad z = 3$$

b) Usando los intervalos de las clases de cada variable podemos calcular las marcas de clases correspondientes, además usando las distribuciones marginales podemos construir las siguientes tablas que nos permiten calcular promedios y varianzas.

m_i	n_i
165	4
175	8
185	8

Así el promedio se calcula como $\overline{T} = \frac{1}{N}\sum m_i \cdot n_i = 177$

Por su parte la varianza $S_T^2 = \frac{1}{n}\left(\sum n_i \cdot m_i^2 - n\overline{T}^2\right) = 56$

m_i	n_i
45	3
55	6
65	8
75	3

$\overline{P} = \frac{1}{N}\sum m_i \cdot n_i = 60.5$

$S_P^2 = \frac{1}{n}\left(\sum n_i \cdot m_i^2 - n\overline{P}^2\right) = 84.75$

Para ver cual es más homogénea calculamos el coeficiente de variación

$$CV_T = \frac{\sqrt{56}}{177} = 0.042, \qquad CV_P = \frac{\sqrt{84.75}}{60.5} = 0.152$$

Por lo tanto la variable T es la más homogénea.

c) De la pregunta anterior tenemos

$$S_T = 7.48, \qquad S_P = 9.21$$

Así:

$$\text{Corr} = \frac{42.25}{7.48 \cdot 9.21} = 0.61$$

Por lo tanto se aprecia una leve pero no despreciable relación lineal directa entre las variables.

Fé de Erratas, la covarianza en realidad es 49, por lo que la correlación real es 0.71

Pregunta 2 (30 puntos)

Suponga que una persona está postulando a un trabajo y ha sido preseleccionada. Para continuar en el proceso debe someterse a un test que consiste en responder tres preguntas: P_1, P_2 y P_3. La probabilidad de que conteste correctamente la pregunta P_1 es 0.7; la de P_2 es 0.85 y la de P_3 es 0.9. Si se sabe que la respuesta de P_3 es independiente de las otras dos, mientras que la probabilidad de que conteste correctamente P_2 dado que ha contestado correctamente $P1$ es 0.95. Responda lo siguiente:

a) Defina de forma adecuada los eventos asociados a este problema. [5 puntos]

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona responda de forma correcta las tres preguntas? [10 puntos]

c) ¿Cuál es la probabilidad de se equivoque en al menos una pregunta? [10 puntos]

Solución:

a) Definimos los eventos

$$P_i: \text{ La persona responde de forma correcta la pregunta } i\text{-ésima}$$

b) El evento *Responder de forma correcta las tres preguntas* podemos expresarlo como: $P_1 \cap P_2 \cap P_3$, así

$$P[P_1 \cap P_2 \cap P_3] = P[P_2 \cap P_1] \cdot P[P_3] = P[P_2|P_1] \cdot P[P_1] \cdot P[P_3] = 0.95 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.5985$$

c) El evento *Que se equivoque en al menos una* se puede interpretar como que se equivoque en P_1 o en P_2 o en P_3, es decir el evento $P_1^c \cup P_2^c \cup P_3^c$

$$P[P_1^c \cup P_2^c \cup P_3^c] = 1 - P[P_1 \cap P_2 \cap P_3] = 1 - 0.5985 = 0.4015$$

Pregunta 3 (30 puntos)

Una compañía aseguradora tiene un 20% de clientes de tipo I, un 30% de tipo II y un 50% de tipo III. Si un cliente sufre un siniestro, la compañía paga 500 mil pesos a los clientes de tipo I, 250 mil pesos a los de tipo II y 100 mil pesos a los de tipo III. Las probabilidades que los clientes de tipos I, II y III tengan exactamente un siniestro durante un año son 0.25, 0.16 y 0.10, respectivamente.

a) Determine e interprete la probabilidad que un cliente sea de tipo I, dado que este cliente tuvo exactamente un siniestro durante un año. [20 puntos]

b) Repita sin interpretar el cálculo de la probabilidad determinada en **a** para clientes de tipo II y clientes de tipo III. [10]

Solución:

a) Definimos los eventos

I: El cliente es de tipo I.
II: El cliente es de tipo II.
III: El cliente es de tipo III.
S: Ocurre un siniestro en el año.

Entonces se pide calcular

$$P[I|S] = \frac{P[S|I] \cdot P[I]}{P[S]}$$

de esto último desconocemos la probabilidad de S pero podemos calcularla mediante probabilidades totales

$$P[S] = P[S|I] \cdot P[I] + P[S|II] \cdot P[II] + P[S|III] \cdot P[III] = 0.25 \cdot 0.2 + 0.16 \cdot 0.3 + 0.10 \cdot 0.5 = 0.148$$

Así:

$$P[I|S] = \frac{P[S|I] \cdot P[I]}{P[S]} = \frac{0.25 \cdot 0.2}{0.148} \approx 0.338$$

b)

$$P[II|S] = \frac{P[S|II] \cdot P[II]}{P[S]} = \frac{0.16 \cdot 0.3}{0.148} \approx 0.324$$

$$P[III|S] = \frac{P[S|III] \cdot P[III]}{P[S]} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.148} \approx 0.338$$