Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2022 2do semestre
DMAT - UTFSM

Ayudantes:
Diego Astaburuaga
Gabriel Riffo

Control 1

Pregunta 1 (30 pts)

Han nacido dos camadas de una particular especie de roedor. De la primera camada se tienen dos crías con pelo café y una cría con pelo gris. De la segunda camada se tienen tres crías con pelo café y dos con pelo gris. Se selecciona una de las camadas al azar y luego se selecciona una cría al azar de la camada seleccionada.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la cría tenga pelo café? (15 pts)
2. Dado que se ha seleccionado una cría con pelo café ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera camada? (15 pts)

Pregunta 2 (30 pts)

Sea X una variable aleatoria con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } 1 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Encuentre condiciones para α de manera tal que f_X sea una función de densidad. (10 pts)
2. Encuentre α tal que
   (a) $\mathbb{P}(X \leq 2) = 0.5$ (10 pts)
   (b) $\mathbb{E}[X] = 6\text{Var}[X]$ (10 pts)

Pregunta 3 (40 pts)

Dos personas lanzan, cada una, una moneda n veces. Encuentre la probabilidad de que ambas personas tengan el mísmo número de caras.

Ayuda: Considere que $\sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Pregunta 1 (30 pts)

Definimos los eventos:

C_i: Se selecciona la camada i-ésima, con $i = 1, 2$

B : Se elecciona una cría con pelo café.

Note que el conjunto $\{C_1, C_2\}$ genera una partición del espacio mmuestral.

1. $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|C_1] \cdot \mathbb{P}[C_1] + \mathbb{P}[B|C_2] \cdot \mathbb{P}[C_2] = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5}\dfrac{1}{2} = \dfrac{19}{30} \approx 0.63333$
2. $\mathbb{P}[C_1|B] = \dfrac{\mathbb{P}[B|C_1] \cdot \mathbb{P}[C_1]}{\mathbb{P}[B]} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{10}{19} \approx 0.52631$

Pregunta 2 (30 pts)

1. Notamos que $\int_1^\alpha \frac{1}{\alpha-1} = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Sin embargo, notamos que $f(x) < 0$ si $\alpha < 1$. Luego $\alpha > 1$.
2. (a) Notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \int_1^x \frac{1}{\alpha - 1} dx \\ &= \frac{x-1}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Luego, $F(2) = 0.5 = \frac{1}{\alpha-1}$, obteniendo entonces que $\alpha = 3$.

(b) Notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_1^\alpha x \frac{1}{\alpha-1} dx \\ &= \frac{\alpha^2-1}{2(\alpha-1)} \\ &= \frac{\alpha+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_1^\alpha x^2 \frac{1}{\alpha-1} dx \\ &= \frac{\alpha^3-1}{3(\alpha-1)} \\ &= \frac{\alpha^2+\alpha+1}{3}. \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que $\text{Var}[X] = \frac{(\alpha-1)^2}{12}$. Luego, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 6\text{Var}[X] \\ \frac{\alpha+1}{2} &= 6\frac{(\alpha-1)^2}{12} \\ \alpha + 1 &= (\alpha-1)^2 \\ \alpha^2 - 3\alpha &= 0 \\ \alpha(\alpha-3) &= 0 \end{aligned}$$

De donde se concluye que $\alpha = 3$.

Pregunta 3 (30 pts)

Se define el evento S_n^j: Cantidad de caras que obtiene la j-ésima persona en n lanzamientos.

Se sabe que $\mathbb{P}(S_n^j = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n$. Luego se desea calcular $\mathbb{P}(S_n^1 = S_n^2)$.

Para esto, notamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n^1 = S_n^2) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n^1 = k \cap S_n^2 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n^1 = k)\mathbb{P}(S_n^2 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$