Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

10 de septiembre de 2022

Contenidos

- ✓ Distribución Poisson
- ✓ Proceso Poisson

Distribución Poisson

Una variable aleatoria X sigue una distribución **Poisson** con parámetro $\lambda > 0$, si su función de cuantía se puede escribir de la siguiente manera:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Usaremos la notación $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Distribución Poisson

Una variable aleatoria X sigue una distribución **Poisson** con parámetro $\lambda > 0$, si su función de cuantía se puede escribir de la siguiente manera:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Usaremos la notación $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Recordatorio!

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{z^x}{x!} = e^z$$

Distribución Poisson

Si X sigue una distribución de Poisson, podemos ver que el valor esperado es

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E[X] = \lambda}$$

Distribución Poisson

Si X sigue una distribución de Poisson, podemos ver que el segundo momento es

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (i(i-1)+i) \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i!} + E[X] \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + E[X] \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

Luego se tiene que $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$ y en consecuencia

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = \lambda}$$

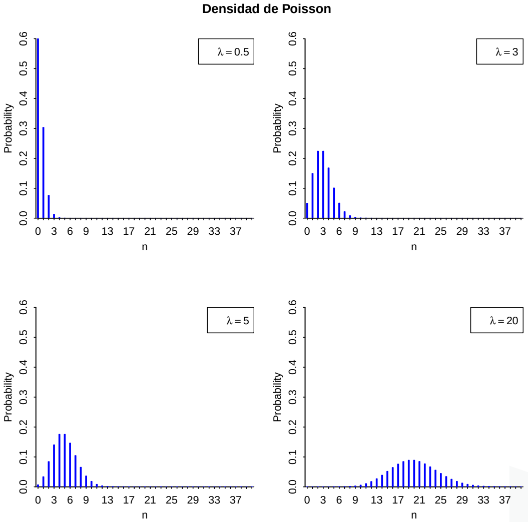

Figura 1: Distribución de Poisson

Proceso Poisson

Consideremos la siguiente variable aleatoria

$$N(t): \text{ número de eventos hasta el tiempo } t,$$

y asumamos que satisface las siguientes propiedades:

* N(0) = 0,
* si $s \leq t$ entonces $N(s) \leq N(t)$,
* N(t) es de incrementos independientes, es decir, para cualquier número entero n y secuencia de tiempos $0 < t_1 < \ldots < t_n$, se tiene que las variables aleatorias

  $$N(t_1) - N(0), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}),$$

  son independientes.
* Para todo $\delta > 0$ y tiempo $t > 0$ se tiene que $P(N(t + \delta) - N(t) = 1) \approx \lambda\delta$,
* Las variables aleatorias $N(t_2) - N(t_1)$ y $N(t_2 + \delta) - N(t_1 + \delta)$ tienen la misma distribución,
* $P(N(t + \delta) - N(t) \geq 2) \approx 0$.

Entonces $N(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad λ.

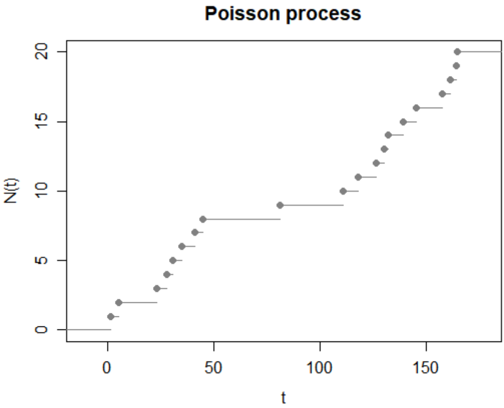

Figura 2: Ejemplo del proceso de Poisson

Derivación de la Función de Cuantía

Sin pérdida de generalidad consideremos por $N(1)$ el número de eventos que ocurren en el intervalo $[0,1]$, teniendo en cuenta una partición de tamaño $1/n$. Entonces,

$$P(N(1)=x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x=0,\ldots,n,$$

donde p es la probabilidad de que ocurra exactamente un evento en un intervalo de longitud $1/n$, es decir.

$$p=P(N((k+1)/n)-N(k/n)=1), \quad \text{para todo } k=0,\ldots,n-1.$$

Derivación de la Función de Cuantía - continuación

Note que $E(N(1)) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda/n = \lambda = np$, lo que implica que $p = \lambda/n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X = x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} \\
&\quad \times \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \times 1 \times e^{-\lambda} \times 1
\end{aligned}$$

Notar que la distribución de $N(t)$ corresponde a un reescalamiento de $N(1)$, por lo que

$$\boxed{N(t) \sim Poiss(\lambda t)}$$

Ejercicio

La ocurrencia en el tiempo de cargas estructurales en una construcción de concreto se puede modelar a través de una distribución de Poisson. Suponga que el tiempo promedio entre ocurrencias de cargas es medio año.

(a) ¿Cuántas cargas se espera que ocurran durante dos años?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran más de 3 cargas durante dos años?

(c) ¿Cuán largo debe ser un periodo para que la probabilidad de que no ocurra ninguna carga durante ese tiempo sea a lo sumo 0.1*?*

Solución:

(a) En promedio se esperan 2 ocurrencias por año. La respuesta es directa: se esperan en promedio 4 ocurrencias en 2 años.

(b) Definamos la variable aleatoria $X(t)$: número de ocurrencias durante un período de t años. Utilizando la parte (a), sabemos que $X(t) \sim \text{Poisson}(2t)$. En particular, $X(2) \sim \text{Poisson}(4)$. Luego,

$$\begin{aligned} P(X(2) > 3) &= 1 - P(X(2) \leq 3) \\ &= 1 - \left(\sum_{x=0}^{3} e^{-4} \frac{4^x}{x!} \right) \\ &= 0.566 \end{aligned}$$

Solución (continuación):

(c) Considere nuevamente la variable aleatoria $X(t) \sim \text{Poisson}(2t)$. Debemos encontrar t de tal manera que

$$P(X(t) = 0) \leq 0.1$$

Esto es equivalente a la condición

$$e^{-2t} \leq 0.1$$

Resolviendo esta desigualdad, concluímos que

$$t \geq -\frac{1}{2}\ln(0.1) = 1.15 \text{ (años)}$$

Ejercicio

Una marca de comida rápida dispone de 5 sucursales. Cada sucursal funciona durante las 24 horas del dia. El número de clientes que llega a cada sucursal sigue una distribución de Poisson con una llegada promedio de 2 clientes por minuto. Las afluencias de clientes en las 5 sucursales son independientes.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, no llegue ningún cliente a la primera sucursal?*

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, exactamente en cuatro de las cinco sucursales no llegue ningún cliente?*

(c) *Escriba una expresión para la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, todas las sucursales reciban el mismo número de clientes.*

Ejercicio

En un campo están distribuídos al azar saltamontes según una distribución de Poisson con una media de 2 *saltamontes por* km^2*. ¿Qué longitud debe tener el radio* R *de una región circular de muestreo para que la probabilidad de hallar al menos* 1 *saltamonte en dicha región sea igual a* 0.99*?*

Solución:

Sea $N(s)$ el número de saltamontes en $s\text{km}^2$. Notamos que $\lambda = 2$ y asumiremos que $N(s) \sim Poiss(\lambda s)$. Se debe buscar s tal que $P(N(s) \geq 1) \geq 0.99$, o lo que es equivalente $P(N(s) = 0) \leq 0.01$. Luego

$$\begin{aligned} e^{-2s} &\leq 0.01 \\ -2s &\leq log(0.01) \\ s &\geq -ln(0.01)/2 \\ s &\geq 1.1513 \end{aligned}$$

Luego, $s \geq 1.1513$. Si consideramos que s es una región circular, $s = \pi R^2$, entonces $R \geq \sqrt{1.1513/\pi} \approx 0.6054$.

Ejercicio

El número de partículas que emite una fuente radioactiva durante 60 *segundos sigue una distribución de Poisson con promedio* 18 *partículas en ese periodo.*

(a) *¿Cuál es la probabilidad de observar más de* 20 *partículas en un periodo de un minuto y medio?*

(b) *Se dice que la fuente radioactiva tiene poca energía si se observan más de 5 periodos disjuntos de minuto y medio con menos de* 20 *partículas. ¿Cuál es la probabilidad de decir que la fuente tiene poca energía?*

(c) *Se observan 6 periodos de 2 minuto. ¿Cuál es la probabilidad de observar 4 que tengan como mínimo 15 partículas?*

Solución:

Sea $N(t)$: la cantidad de partículas observadas hasta el tiempo t.

(a) $P(N(1.5) > 20) = 1 - P(N(1.5) \leq 20)$

(b) Sea Y : número de periodos de minuto y medio con más de 20 partículas hasta encontrar el primero que tenga menos de 20. Luego $Y \sim \text{Geo}(p_1)$, donde $p_1 = P(N(1.5) \leq 20)$. Luego se cálcula $P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 4)$.

(c) Sea Z: número de periodos de dos minutos que poseen 15 partículas de una muestra de tamaño 6.
Luego $Z \sim \text{Bin}(6, p_2)$ donde $p_2 = \mathbb{P}(N(2) > 15)$. De aquí se concluye que $P(Z = 4) = .$