Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2021 2do semestre
DMAT - UTFSM

Abner Saavedra
Gabriel Riffo

Certamen 3

Pregunta 1 (20 puntos)

En *HVT* inversiones, se usó una muestra de tamaño 16 como base para calcular un intervalo de confianza al 95% para el retorno medio de sus inversiones. El intervalo resultante fue $[4,02; 4,26]$ usando la hipótesis de normalidad y asumiendo que la varianza es conocida.

La normativa actual, exije utilizar intervalos de confianza más amplios para tomar decisiones respecto al riesgo de los retornos. Para esto, se le pide:

1. Actualizar el intervalo de confianza al 99%. (**10 puntos**)
2. Un estudio paralelo muestra que, la desviacion estandar estimada es 1.28. Reporte el nuevo intervalo de confianza al 99%. Concluya. (**10 puntos**)

Pregunta 2 (20 puntos)

El área de control de calidad de *P. Vileda enterprise* organiza un proyecto en el cual se propone como objetivo reducir la variabilidad del llenado del envase de un particular producto de limpieza. Al inicio del proyecto, se sabe que la varianza del llenado de los envases es de $3.78[ml^2]$. El proyecto se considera existoso si luego de tomar una muestra la varianza es reducida.

1. Considerando una muestra de tamaño 13, se obtuvo una desviación estandar de $3.54[ml]$. ¿Se puede decir que el proyecto fue exitoso?. (**10 puntos**)
2. Se hizo un otro ajuste a la máquina, que propone mejorar de manera substancial el rendimiento de la máquina. Considerando una muestra de tamaño 12, se obtuvo una desviacion estandar de $3.02[ml]$. ¿Se puede decir que el proyecto fue exitoso?. Compare sus resultados. (**10 puntos**)

Pregunta 3 (60 puntos)

Sea $X_1, \dots, X_N$ una muestra aleatoria de tamaño N provenientes de una distribución $Gamma(1/2, 1/\theta)$, cuya función de densidad es:

$$f(x;\theta) = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}\theta^{1/2}} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} \quad \theta, x > 0.$$

1. Encuentre el estimador de momentos de $\hat{\theta}_{ME}$. (**15 puntos**)
2. Encuentre el estimador máximo verosímil $\hat{\theta}_{MLE}$. (**15 puntos**)
3. Pruebe que $\hat{\theta}_{MLE}$ es consistente. (**15 puntos**)
4. Considere la cantidad pivotal $Q = 2\theta \sum_{i=1}^{N} X_i$. Construya un intervalo de confianza del 95% para θ sabiendo que $Q \sim \chi^2(N)$. Evalué este intervalo considerando que $N = 10$ y que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 6$. (**15 puntos**)

Solucion 1

1. Del enunciado se concluye que

$$\bar{X} - \sigma\frac{Z_{0.975}}{\sqrt{N}} = 4.02$$
$$\bar{X} + \sigma\frac{Z_{0.975}}{\sqrt{N}} = 4.26$$

Considerando que $\sqrt{16} = 4$ y que $Z_{0.975} = 1.959$, se concluye que $\bar{X} = 4.14$ y $\sigma = 0.2449$. Luego, la actualización del intervalo de confianza requiere cambiar $Z_{0.975}$ por $Z_{0.995}$. En consecuencia, se obtiene que $IC_{99\%}(\mu) = [3.9823; 4.2977]$

2. La nueva actualización requiere asumir que la varianza es desconocida, por lo cual se debe reemplaazar σ por S y $Z_{0.995}$ por $t_{0.995}(15) = 2.9467$. Luego se tiene que $IC_{99\%}(\mu) = [3.1970; 5.0829]$

Solucion 2

1. **Opción 1:** Las hipótesis a contrastar son

$$H0: \ \sigma^2 \leq 3,75$$
$$H1: \ \sigma^2 > 3,75$$

El valor del estadístico observado es:

$$Q = \frac{(13-1)\cdot 3.54^2}{3,78} = 40.1,$$

luego el valor-p de la prueba es:

$$\text{valor-}p = P(Q > 40.1) = 6,92 \times 10^{-5}$$

como el valor p es muy pequeño hay mucha evidencia para rechazar la hipótesis de que la varianza ha disminuido.

Opción 2: Las hipótesis a contrastar son

$$H0: \ \sigma^2 \geq 3.75$$
$$H1: \ \sigma^2 < 3.75$$

El valor del estadístico observado es:

$$Q = \frac{(13-1)\cdot 3.54^2}{3,78} = 40.1,$$

luego el valor-p de la prueba es:

$$\text{valor-}p = P(Q < 40.1) = 0,9999$$

como el valor p es muy grande hay mucha evidencia que apoya la hipótesis de que la varianza no ha disminuido.

2. Nuévamente las hipótesis son

$$H0: \ \sigma^2 \geq 3.75$$
$$H1: \ \sigma^2 < 3.75$$

Ahora el valor del estadístico es:

$$Q = \frac{(12-1)\cdot 3.02^2}{3.78} = 26.75,$$

en este caso el valor-p es

$$\text{valor-}p = P(Q < 26.75) = 0.9949$$

Solucion 3

1. Sabemos que si $X \sim Gamma(1/2, 1/\theta)$, entonces se tiene que $E[X] = \frac{\theta}{2}$. Luego despejando θ de la ecuación $E[X] = \bar{X}$ se obtiene que $\hat{\theta}_{ME} = 2\bar{X}$.

2. La función de verosimilitud $L(\theta; \underline{X})$ es

$$L(\theta; \underline{X}) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{x_i^{-1/2}}{\sqrt{\pi}\theta^{1/2}} \exp\left\{-\frac{x_i}{\theta}\right\}$$

la cual puede ser escrita como

$$L(\theta; \underline{X}) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i; \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}^N \theta^{N/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{\theta}\right\} \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1/2}$$

Para efectos de maximizar la función de verosimilitud, es conveniente trabajar con la log-verosimilitud, digamos $\ell(\theta; \underline{X})$, dada por

$$\ell(\theta; \underline{X}) = \log L(\theta; \underline{X}) = -\frac{N}{2}\log(\pi) - \frac{N}{2}\log(\theta) - \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log(x_i)$$

Encontrando los puntos críticos obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\ell(\theta; \underline{X})}{d\theta} &= 0 \\ -\frac{N}{2}\frac{1}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{\theta^2} &= 0 \\ \frac{N}{2}\theta^2 &= \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \hat{\theta}_{MLE} &= 2\bar{X} \end{aligned}$$

3. Para verificar la consistencia, debemos probar que $ECM[\hat{\theta}_{MLE}] \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para esto calculamos primero el sesgo:

$$E[\hat{\theta}_{MLE}] = E[2\bar{X}] = \frac{2}{N}E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} E[X_i] = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} E[X_i] = 2E[X] = 2\frac{\theta}{2} = \theta,$$

y la varianza del estimador

$$V[\hat{\theta}_{MLE}] = V[2\bar{X}] = \frac{4}{N^2} V\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N} V[X_i] = \frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N} V[X_i] = \frac{4}{N} V[X] = \frac{2}{N}\theta^2.$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
ECM[\hat{\theta}_{MLE}] &= (\theta - E[\hat{\theta}_{MLE}])^2 + V[\hat{\theta}_{MLE}] \\
&= (\theta - \theta)^2 + \frac{2}{N}\theta^2 \\
&= \frac{2}{N}\theta^2
\end{aligned}$$

En consecuencia $ECM[\hat{\theta}_{MLE}] \to 0$ cuando $N \to \infty$.

4. Sabemos que Q es cantidad pivotal ya que

   (a) Contiene al verdadero parámetro θ

   (b) Contiene al estimador máximo verosimil, ya que

   $$Q = 2\theta \sum_{i=1}^{N} X_i = 2N\theta\hat{\theta}_{MLE}$$

   (c) La distribución de Q no depende del parámetro.

   Utilizando el método de la cantidad pivotal, y asumiendo simetría en las colas, se obtiene que

   $$P(\chi^2_{\alpha/2}(N) \leq Q \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(N)) = 1 - \alpha$$

   Por lo tanto, el intervalo de confianza pedido es

   $$\begin{aligned}
   IC_\alpha(\theta) &= [\chi^2_{\alpha/2}(N) \leq Q \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(N)] \\
   &= [\chi^2_{\alpha/2}(N) \leq 2N\theta\hat{\theta}_{MLE} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(N)] \\
   &= \left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(N)}{2N\hat{\theta}_{MLE}} \leq \theta \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(N)}{2N\hat{\theta}_{MLE}}\right]
   \end{aligned}$$

   Finalmente, el intervalo de confianza al 95% está dado por $[0.2706; 1.7069]$.