

Modelos Espacio-Temporales con Efectos de Transporte

Alfredo Alegría

Laboratorio de Modelación I, UTFSM
Septiembre, 2022



Contaminación en el Asia Ecuatorial

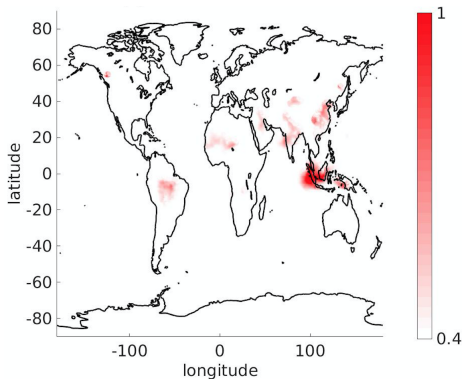


Fig. 1. Profundidad Óptica del Aerosol promedio para septiembre de 2015.

Modelo matemático

Los **campos aleatorios** permiten modelar fenómenos caracterizados por su variabilidad e incertidumbre espacio-temporal. Formalmente, un campo aleatorio es una colección de variables aleatorias de la forma

$$\{Z(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}\},$$

donde \mathbf{x} y t denotan las coordenadas espaciales y temporales, respectivamente. Cuando $\text{var}[Z(\mathbf{x}, t)] < \infty$, las funciones de **media** y **covarianza** están bien definidas:

- $\mu(\mathbf{x}, t) = E[Z(\mathbf{x}, t)]$.
- $K(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) = \text{cov}[Z(\mathbf{x}_1, t_1), Z(\mathbf{x}_2, t_2)]$.

Campo aleatorio con efecto de transporte

Considere $\mathcal{D} = \mathbb{S}^2$ y $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. El campo aleatorio se dice que tiene **efecto de transporte** si se escribe en el siguiente formato:

$$Z(\mathbf{x}, t) = Z_s(\mathbf{R}^t \mathbf{x}),$$

donde $\{Z_s(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2\}$ es un campo aleatorio puramente espacial y \mathbf{R} es una matriz de rotación aleatoria de orden 3×3 .

1. Sería interesante usar una versión más general de este modelo donde la matriz \mathbf{R} puede variar en el espacio.
2. ¿Cómo queda la función de covarianza de Z en términos de la función de covarianza de Z_s ?

Ilustración

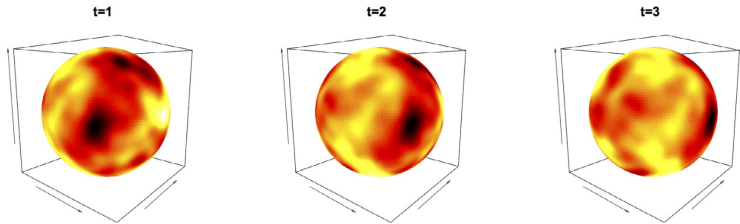


Fig. 2. Realización de un campo aleatorio con efecto de transporte.

Esquema del trabajo

El objetivo es analizar los datos de contaminación, en una escala global, para lo cual se requieren los siguientes pasos:

1. **Análisis exploratorio** de los datos (gráficos adecuados; indicadores de posición, variabilidad y forma).
2. Plantear un modelo adecuado y posteriormente la **estimación** de los parámetros involucrados en la media y en la covarianza a través de algún método apropiado (e.g., máxima verosimilitud).
3. **Predicciones** es en el espacio y/o tiempo.

Bibliografía recomendada para profundizar en el tema:

- Ailliot, P., Baxevani, A., Cuzol, A., Monbet, V., & Raillard, N. (2011). *Space-time models for moving fields with an application to significant wave height fields*. *Environmetrics*, 22(3), 354-369.
- Crippa, P., Castruccio, S., Archer-Nicholls, S., Lebron, G. B., Kuwata, M., Thota, A., Sumin, S., Butt, E., Wiedinmyer, C. & Spracklen, D. V. (2016). *Population exposure to hazardous air quality due to the 2015 fires in Equatorial Asia*. *Scientific Reports*, 6, 37074.
- Alegría, A., & Porcu, E. (2017). *The dimple problem related to space-time modeling under the Lagrangian framework*. *Journal of Multivariate Analysis*, 162, 110-121.
- Salvaña, M. L. O., Lenzi, A., & Genton, M. G. (2022+). *Spatio-temporal cross-covariance functions under the Lagrangian framework with multiple advections*. *Journal of the American Statistical Association* (in press).

Gracias. ¿Preguntas?