Francisco Cuevas
Carlos Schwarzenberg
MAT 041 - 2021 2do semestre
DMAT - UTFSM

Abner Saavedra
Gabriel Riffo

Certamen 2

Pregunta 1 (40 puntos)

La empresa de servicios de envíos expresos, *Perdidos ya*, propone pagar a cada repartidor en función del tiempo de entrega T (en minutos):

$$S(T) = \begin{cases} 1000[\text{UAH}] & \text{si } T \leq 15[min] \\ 500[\text{UAH}] & \text{si } 15 < T \leq 30[min] \\ 250[\text{UAH}] & \text{si } 30 < T \leq 55[min] \\ 0[\text{UAH}] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Considerando que la experiencia de la empresa muestra que T sigue una distrubución $Gamma(5, 1/6)$, se le pide:

1. Calcular $E[S(T)]$. (10 puntos)
2. Si a un repartidor se le asignan 10 repartos diarios. ¿Cuál es la probabilidad de que en un solo día mas de cuatro repartos no sean pagados?. (10 puntos)
3. Para el mismo repartidor, ¿cuál es el número de días esperado hasta encontrar el primer día con mas de cuatro repartos que no sean pagados? (10 puntos)
4. Suponga que otro de los repartidores trabaja con la dinámica de recibir pedidos hasta lograr conseguir 3 repartos con pagos igual a 1000[UAH], ¿Cuál es la probabilidad de que este repartidor haga menos de 10 pedidos diarios? (10 puntos)

Solucion

1. Notamos que

$$E[S(T)] = 1000P(T \leq 15) + 500P(15 < T \leq 30) + 250P(30 < T \leq 55) + 0P(T > 55)$$

Considerando que $P(T \leq 15) = 0.1088$, $P(15 < T \leq 30) = 0.4507$, $P(30 < T \leq 55) = 0.3909$, $P(T > 55) = 0.0496$, se tiene que $E[S(T)] = 431.889$.

2. Notamos que la probabilidad de que un reparto no sea pagado es $p = P(T > 55) = 0.0496$. Luego, si definimos la variable aleatoria X: *Número de repartos no pagados de un total de 10*, notamos que $X \sim \text{bin}(10, \text{p})$. Por lo tanto $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = \approx 0.0001$.

3. Notamos que la probabilidad de encontrar un día con más de cuatro repartos que no sean pagados es $q = P(X \geq 4) = 0.0001$. Luego, si definimos la variable aleatoria Y: *número de días pasados hasta encontrar el primero con más de cuatro repartos que no sean pagados*, podemos notar que $Y \sim \text{Geo(q)}$. Luego $E[Y] = 1/q = 10000$

4. La probabilidad de que un pago sea igual a 1000[UAH] es $r = P(X \leq 15) = 0,1088$. Luego si definimos W : *número de repartos hasta lograr el tercero con un ingreso igual a 1000[UAH]*, entronces $W \sim \text{BN}(r)$. Luego $P(W < 10) = P(W \leq 9) = 0.065$

Pregunta 2 (30 puntos)

Sean X e Y variables aleatorias independientes con las siguientes funciones generadoras de momentos:

$$m_X(t) = \frac{1}{(1-5t)}, \text{ si } t < \frac{1}{5}, \quad m_Y(t) = \frac{1}{(1-5t)^2}, \text{ si } t < \frac{1}{5}.$$

1. Calcule $E[(X+Y)^2]$ (15 puntos)
2. Sea $W = X - Y$. Considere una secuencia de variables aleatorias independientes $W_1, \ldots, W_n$ con la misma distribución de W. Encuentre una aproximación para

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \leq -5\right),$$

cuando n tiende a infinito. Justifique. (15 puntos)

Solución

1. Definiendo la variable $Z = X + Y$, notamos que $m_Z(t) = m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t) = m_X(t)^3$. Luego, notamos que

$$E[(X+Y)^2] = E[Z^2] = \left.\frac{\mathrm{d}^2 m_Z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = 300$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}m_Z(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{15}{(1-5t)^4} \\ \frac{\mathrm{d}^2 m_Z(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{300}{(1-5t)^5} \end{aligned}$$

2. Para aproximar la probabilidad pedida, utilizaremos el teorema del límite central. Este se puede calcular debido a que la función generadora de momentos de W existe. De hecho,

$$m_W(t) = m_X(t)m_Y(-t) = \frac{1}{(1-5t)(1+5t)^2} \qquad \text{si } t \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Para encontrar la aproximación, se debe calcular el primer y segundo momento de W. Esto se puede hacer de manera directa mediante la función generadora de momentos:

$$\begin{aligned} E[W] &= \left.\frac{\mathrm{d}m_Z(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -5 \\ E[W^2] &= \left.\frac{\mathrm{d}^2 m_Z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = 100 \\ V[W] &= 100 - 25 = 75 \end{aligned}$$

Finalmente se tendrá que

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \leq 5\right) &= P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i + 5}{\sqrt{75}} \leq 0\right) \\
&\approx P\left(Z_n \leq 0\right) \\
&= 0.5,
\end{aligned}
$$

donde Zn distribuye aproximadamente $N(0,1)$.

Pregunta 3 (30 puntos)

Sea $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio Normal, con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matrix de covarianzas Σ dados por

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 2.1 \\ 0 & 2.1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcule la matriz de correlaciones, $\boldsymbol{R}$ donde $\boldsymbol{R}_{ij} = \rho_{ij} = \mathrm{corr(X_i, X_j)}$. ¿Qué puede decir sobre las variables X_1 y X_3? (10 puntos)
2. Calcule $P(X_1 + X_2 \leq X_3)$ (10 puntos)
3. Considere el vector normal bivariado (X_2, X_3). Calcule $E[X_2|X_3 = x_3]$.(10 puntos)

1. Notamos que

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, se concluye que X_1 y X_3 son independientes.

2. Notamos que $Z = X_1 + X_2 - X_3 \sim N(\mu, \sigma^2)$ donde $\mu = E[X_1 + X_2 - X_3] = E[X_1] + E[X_2] - E[X_3] = -1$ y

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathrm{V}[X_1 + X_2 - X_3] \\
&= V[X_1] + V[X_2] + V[X_3] + 2Cov[X_1, X_2] - 2Cov[X_1, X_3] - 2Cov[X_2, X_3] \\
&= 4 + 9 + 1 + 2 \times 3 - 2 \times 2.1 \\
&= 15.8
\end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$P(X_1 + X_2 - X_3 \leq 0) = P(Z \leq 0) = P\left(\frac{Z+1}{\sqrt{15.8}} \leq \frac{1}{\sqrt{15.8}}\right) = 0.6235692$$

3. Sabemos que $X_2|X_3 = x_3 \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = \mu_{X_2} + \rho_{X_2 X_3}(\sigma_{X_2}/\sigma_{X_3})(x_3 - \mu_{X_3})$, reemplazando:

$$\mu = 1 + 0.7 \cdot (3/1) \cdot (x_3 - 2) = 2.1 \cdot x_3 - 3.2$$

así $E[X_2|X_3 = x_3] = 2.1 \cdot x_3 - 3.2$