Probabilidad y estadística

MAT 041, Primer semestre

Francisco Cuevas Pacheco

22 de agosto de 2022

Contenidos

En palabras simples, una colección de eventos es independiente cuando la ocurrencia de algunos de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia de los otros. A continuación, se provee una definición rigurosa.

Definición (Eventos Independientes)

Los eventos $A_1, \ldots, A_n$ son independientes si para todo conjunto no-vacío de índices $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ se cumple que

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Casos Especiales

- Para dos eventos A y B, la caracterización de independencia se reduce a la siguiente relación:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Para tres eventos A, B y C, necesitamos que se cumpla cada una de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Observación

No se debe confundir el concepto de eventos independientes con la característica de eventos disjuntos o excluyentes. De hecho, si se cumplieran ambas propiedades simultáneamente tendríamos la siguiente cadena de igualdades:

$$0 = P(\emptyset) = P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Por lo tanto, se tendría que

$$P(A) = 0 \quad \vee \quad P(B) = 0.$$

Podemos concluír que si ambas propiedades están presentes al mismo tiempo, entonces al menos uno de los dos eventos tiene probabilidad nula.

Ejemplo

Se lanza un dado dos veces. El espacio muestral contiene 36 *elementos equiprobables:*

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(i,j) : i,j = 1,\dots,6\}\,.$$

Para $i = 1, 2$, *definimos el evento* A_i : *"se obtuvo un* 3 *en el i-ésimo lanzamiento".* *Claramente,* A_1 *y* A_2 *son independientes con*

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{36}.$$

Por el contrario, si definimos el evento B : *"la suma de ambos lanzamientos es exactamente igual a* 9*", entonces* A_1 *y* B *no son independientes, ya que*

$$\frac{1}{36} = P(A_1 \cap B) \neq P(A_1)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{36}$$

Ejercicio

Sean A y B eventos independientes en un espacio de probabilidad. Muestre que los eventos A y B^c son independientes. Concluya que A^c y B^c son independientes.

Solución: Note que

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos ocupado la hipótesis de independencia entre A y B. Claramente, A y B^c satisfacen la propiedad requerida.

Solución (cont.): Usando el resultado anterior podemos concluir que A^c y B^c son independientes. De hecho

$$
\begin{aligned}
P(B^c \cap A^c) &= P(B^c) - P(B^c \cap A) \\
&= P(B^c) - P(A)P(B^c) \\
&= P(B^c)[1 - P(A)] \\
&= P(B^c)P(A^c)
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Sean A, B y C eventos independientes. Pruebe que los eventos $A \cup B$ y C son independientes.

Solución: El resultado se puede concluír desde las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
P([A \cup B] \cap C) &= P([A \cap C] \cup [B \cap C]) \\
&= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\
&= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) \\
&= [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]P(C) \\
&= P(A \cup B)P(C)
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Una urna contiene 4 *bolas numeradas del* 1 *al* 4*. Se extrae una bola al azar. Pruebe que los eventos* $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ *y* $C = \{1,4\}$ *son independientes por pareja pero no independientes.*

Solución:

Notamos que el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Primero calculamos las probabilidades de cada conjunto simple

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/2 \quad P(C) = 1/2$$

Ejercicio

Una urna contiene 4 bolas numeradas del 1 al 4. Se extrae una bola al azar. Pruebe que los eventos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ *y* $C = \{1, 4\}$ *son independientes por pareja pero no independientes.*

Solución:

Notamos que el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Primero calculamos las probabilidades de cada conjunto simple

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/2 \quad P(C) = 1/2$$

Luego, verificamos cada par de conjuntos

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\{1\}) = 1/4 = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(\{1\}) = 1/4 = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(\{1\}) = 1/4 = P(B)P(C) \end{aligned}$$

Ejercicio

Una urna contiene 4 bolas numeradas del 1 al 4. Se extrae una bola al azar. Pruebe que los eventos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ y $C = \{1, 4\}$ son independientes por pareja pero no independientes.

Solución:

Notamos que el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Primero calculamos las probabilidades de cada conjunto simple

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/2 \quad P(C) = 1/2$$

Luego, verificamos cada par de conjuntos

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(\{1\}) = 1/4 = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) = P(\{1\}) = 1/4 = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) = P(\{1\}) = 1/4 = P(B)P(C) \end{aligned}$$

Finalmente, se verifica el conjunto triple

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8$$

Probabilidad condicional

La probabilidad condicional es la medida de que ocurra un evento dado otro evento (ya sea por suposición, presunción, afirmación o evidencia) ocurrido. Esto implica la siguiente definición

Definición (Probabilidad Condicional)

Sean A y B eventos, donde $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A dado B se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observación

Algunos autores prefieren definir la probabilidad condicional mediante la equivalencia $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Ejemplo

En la siguiente tabla de contingencia se muestran las probabilidades de ser fumador/no fumador y hombre/mujer en una cierta población.

	Fumador	No fumador	Total
Hombre	0.41	0.08	0.49
Mujer	0.45	0.06	0.51
Total	0.86	0.14	1

¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar sea hombre dado que es fumador? Para responder a esta pregunta definimos los eventos A : la persona escogida es hombre y B : la persona escogida es fumador. Entonces,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.41}{0.86} = 0.47$$

Observaciones

- En la definición de probabilidad condicional podemos intercambiar los roles de A y B. En efecto, si $P(A) > 0$, se tiene
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$
Entonces,
$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$
- Si A y B son independientes,
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Ejercicio

Sean A y B dos eventos tales que

$$P(A) = 1/4, \quad P(B|A) = 1/2, \quad P(A|B) = 1/4.$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $A \subset B$;

(b) A y B son independientes;

(c) A^c y B^c son independientes;

(d) A y B son disjuntos;

(e) $P(A^c|B^c) = 1/2$;

(f) $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$.

Definición (Partición)

Los eventos $A_1, \ldots, A_n$ forman una partición del espacio muestral Ω si $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, y

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Ejemplo

Escogemos una persona al azar desde cierta población y averiguamos su edad. Considere los eventos:

- A_1 : *"la edad está en el rango* $(0, 30]$ *años"*
- A_2 : *"la edad está en el rango* $(30, 60]$ *años"*
- A_3 : *"la edad está en el rango* $(60, \infty)$ *años"*

Estos tres eventos definen una partición del espacio muestral.

Teorema (Probabilidades Totales)

Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral Ω. Sea A un evento, entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i).$$

Demostración: Note que $[A \cap A_i] \cap [A \cap A_j] = \emptyset$, para $i \neq j$. Además,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} [A \cap A_i].$$

Entonces, la aditividad implica que

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} [A \cap A_i]\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i).$$

$\square$

Ejemplo

Una persona tiene una probabilidad del 0.15 de enfermarse de gripe cuando hace frío, de 0.08 cuando el clima es templado y 0.001 cuando hace calor. Si el 40 % de los días hace frío, el 20 % de los días son templados y hace calor el 40 % de los días. ¿Cuál es la probabilidad de enfermarse de gripe?.

Ejemplo

Una persona tiene una probabilidad del 0.15 de enfermarse de gripe cuando hace frío, de 0.08 cuando el clima es templado y 0.001 cuando hace calor. Si el 40 % de los días hace frío, el 20 % de los días son templados y hace calor el 40 % de los días. ¿Cuál es la probabilidad de enfermarse de gripe?.

Solución: Definamos los siguientes eventos:

- C_1 : hace frío en el día
- C_2 : el día es templado
- C_3 : hace calor
- G: Tener gripe

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|C_1)P(C_1) + P(G|C_2)P(C_2) + P(G|C_3)P(C_3) \\ &= (0.15)(0.4) + (0.08)(0.2) + (0.001)(0.4) \\ &= 0.0764 \end{aligned}$$

Ejemplo

En un destacado banco se suelen aplicar acciones de recuperación cuando los clientes no pagan. Se sabe que se toman las siguientes acciones de manera aleatoria: (a) con probabilidad 0.6 se llama por teléfono, (b) con probabilidad 0.3 se envía un correo, y (c) no se hace nada. Sabiendo que el índice de recuperación de dinero es de un 70 %, determine la probabilidad de recuperar dinero dado que se envía un correo sabiendo que esta probabilidad es 2 veces la probabilidad de recuperar dinero dado que se llama por teléfono y 4 veces la probabilidad de recuperar dinero dado que no se hace nada.

Ejemplo

En un destacado banco se suelen aplicar acciones de recuperación cuando los clientes no pagan. Se sabe que se toman las siguientes acciones de manera aleatoria: (a) con probabilidad 0.6 se llama por teléfono, (b) con probabilidad 0.3 se envía un correo, y (c) no se hace nada. Sabiendo que el índice de recuperación de dinero es de un 70 %, determine la probabilidad de recuperar dinero dado que se envía un correo sabiendo que esta probabilidad es 2 veces la probabilidad de recuperar dinero dado que se llama por teléfono y 4 veces la probabilidad de recuperar dinero dado que no se hace nada.

Solución: Definamos los siguientes eventos:

- M : Enviar correo
- C : Llamar por teléfono
- N : Hacer nada
- R: Recuperar dinero

$$
\begin{aligned}
P(R) &= P(R|M)P(M) + P(R|C)P(C) + P(R|N)P(N) \\
0.6 &= (4\alpha)(0.3) + (2\alpha)(0.6) + (\alpha)(0.1) \\
\alpha &= 0.24\ldots
\end{aligned}
$$

Luego $P(R|M) = 24/25 = 0.96$

Teorema (Bayes)

Sean A y B dos eventos donde $P(B) > 0$. Luego se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Teorema (Bayes)

Sean A y B dos eventos donde $P(B) > 0$. Luego se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Demostración:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)P(A)}{P(A)P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Ejercicio

En una cierta ciudad, el 51 % de los adultos son hombres. Además, se sabe que 9.5 % de los hombres de esa ciudad son fumadores, mientras que 1.7 % de las mujeres son fumadoras. Una persona adulta es seleccionada aleatoriamente para una encuesta sobre el consumo de cigarrillos. Si la persona seleccionada es fumadora, hallar la probabilidad de que esa persona sea un hombre.

Solución: Definimos los eventos A : "la persona seleccionada es hombre" y B : "la persona seleccionada es fumadora". Sabemos que

$$P(A) = 0.51, \quad P(B|A) = 0.095, \quad P(B|A^c) = 0.017$$

Entonces,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{0.095 \cdot 0.51}{0.095 \cdot 0.51 + 0.017 \cdot 0.49}$$

En consecuencia, $P(A|B) = 0.853$.

Usando el teorema de probabilidades totales se obtiene una nueva versión del teorema de Bayes:

Teorema (Bayes totales)

Sean $A_1, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral Ω y A un evento. Entonces,

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|A_j)P(A_j)}.$$

Demostración: La demostración consiste en aplicar directamente el Teorema de Probabilidades Totales:

$$P(A_i|A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|A_j)P(A_j)}.$$

□

Ejercicio

Una urna contiene 5 *dados. El dado i-ésimo* ($i = 1, \ldots, 5$) *tiene* i *de sus caras blancas y el resto rojas. Se selecciona un dado de la urna y se lanza.*

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara roja?

(b) Dado que la cara obtenida fue roja, ¿cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea el i-ésimo?

Solución:

(a) Definamos los eventos

- R : se escoge el color rojo,
- D : Dado escogido,
- C_i: Color del dado i-ésimo.

Notamos entonces que $P(D = i) = 1/5$ y $P(C_i = i|D = i) = i/6$. Luego

$$\begin{aligned} P(R) &= \sum_{i=1}^{5} P(C_i = i|D = i) \times P(D = i) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} P(C_i = i|D = i) \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5} i \\ &= \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solución:

(b)

$$P(D=i|R)=\frac{P(R|D=i)P(D=i)}{P(R)}=\frac{\frac{i}{6}\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{i}{15}$$

Ejercicio

El 30 % *de los usuarios de computadoras utiliza Macintosh, el* 50 % *usa Windows, y el* 20 % *usa Linux. El* 65 % *de los usuarios de Mac han tenido un virus en su computadora, mientras que este porcentaje es* 82 % *y* 50 % *para los usuarios de Windows y Linux, respectivamente. Seleccionamos una persona al azar y nos enteramos que su computadora ha sido infectada con un virus. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona use Windows?*