

La Ecuación del cohete de Tsiolkovsky

Michael Karkulik

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile

El objetivo

Nuestro objetivo es viajar al espacio. ¿Dónde empieza el espacio?

El objetivo

Nuestro objetivo es viajar al espacio. ¿Dónde empieza el espacio?



Figure: © xkcd

Donde empieza el espacio

- NASA otorga la denominación *astronauta* a personas approx. 80 km s.n.m.
- En 1957, el ingeniero y físico Theodore von Kármán calculó la altura a la que la densidad de la atmósfera se vuelve tan baja que la velocidad de una aeronave para conseguir sustentación aerodinámica mediante alas y hélices debería ser equiparable a la velocidad orbital para esa misma altura.

Línea de Kármán: 100 km s.n.m. (\approx 62 millas)

A grandes rasgos: 100 km s.n.m es la altura máxima que se puede alcanzar con alas.

Where Does Space Begin?

Space begins at the Kármán line, which is roughly 100 km or 62 miles above the Earth's surface.

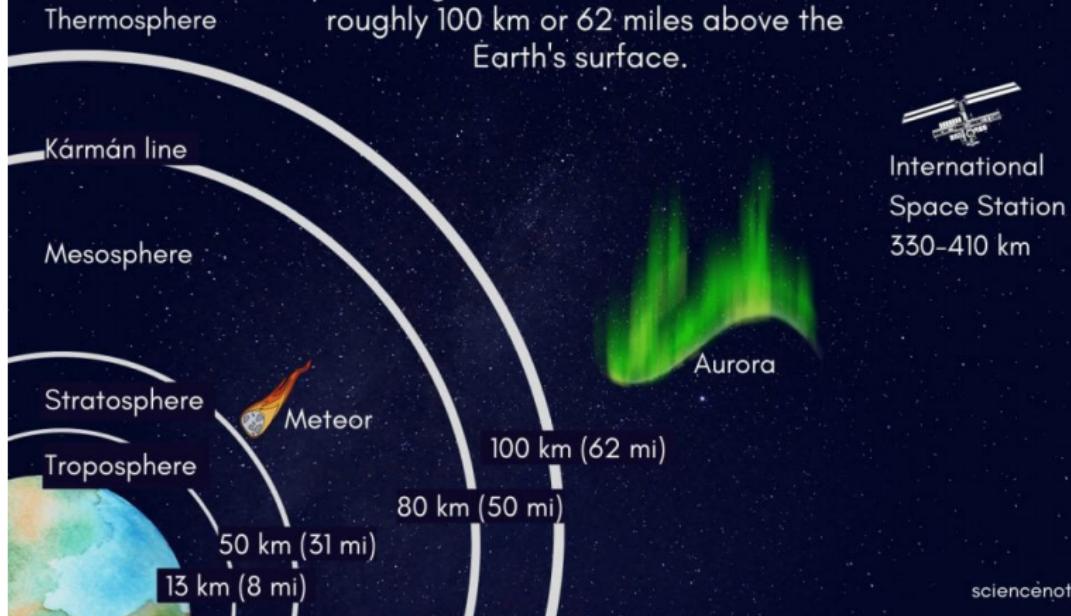


Figure: © sciencenotes.org

Ir al espacio

Consideramos la *propulsión*.

- motores de combustión interna o turbomáquinas usan aire de la atmósfera como oxidante para la combustión. La energía se usa directamente en una tobera (turbojet) para generar empuje, o para propulsar hélices que otra vez requieren atmósfera para generar empuje, o en sistemas mixtos (turbofan, común en aviones).
- propulsión de cohete: sistema que incorpora el combustible y el oxidante y genera empuje por una tobera. Por lo tanto, combustión y empuje funcionan también en el vacío.

Ir al espacio en avión

En los 1963, el *avión cohete* (alas + propulsión de cohete, lanzado en el aire) **North American X-15** alcanzo 107.8 km s.n.m.



Figure: © wikipedia

Ir al espacio en avión

En 2004, el *avión cohete* (alas + propulsión de cohete, lanzado en el aire) **SpaceShipOne** alcanzo 112 km s.n.m.



Figure: © wikipedia

Ir al espacio en avión

En 2004, el *avión cohete* (alas + propulsión de cohete, lanzado en el aire) **SpaceShipOne** alcanzo 112 km s.n.m.



Figure: © wikipedia

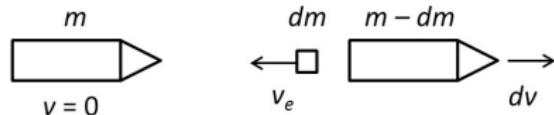
~~> *Virgin Galactic*, turismo espacial

¿Porque funciona una propulsión cohete en el espacio?

El principio de repulsión

¿Porque funciona una propulsión cohete en el espacio? El principio de repulsión

En un sistema mecánico de partículas aislado en el cual las fuerzas externas son cero, se conserva el momento lineal total del sistema.



$$mv = p(t) = p(t + \Delta t) = (v + dv)(m - dm) + dm(v + v_e)$$

Usando $\Delta m = -dm$, se obtiene

$$m\dot{v} = \dot{m}v_e.$$

El principio de repulsión

$$m\dot{v} = \dot{m}v_e$$

Supongamos $v_e = \text{const}$ y ninguna fuerza externa, entonces

$$\dot{v} = v_e \frac{\dot{m}}{m}$$

$$\int_0^t \dot{v}(s) ds = v_e \int_0^t \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} ds = v_e \int_0^t \ln(m(s))' ds$$

y obtenemos la **ecuación de Tsiolkovsky**

$$\Delta v(t) := v(t) - v(0) = -v_e \ln \left(\frac{m(0)}{m(t)} \right)$$

Consideraciones de carga útil

- m masa total de cohete
- $m_0 = m(0)$ masa total al lanzamiento
- m_p masa de propelente
- m_s masa structural
- m_L masa de carga útil

Al final del trayecto $m_p(T) = 0$, y podemos concluir

$$\frac{m(T)}{m_0} = \frac{\varepsilon + \lambda}{1 + \lambda},$$

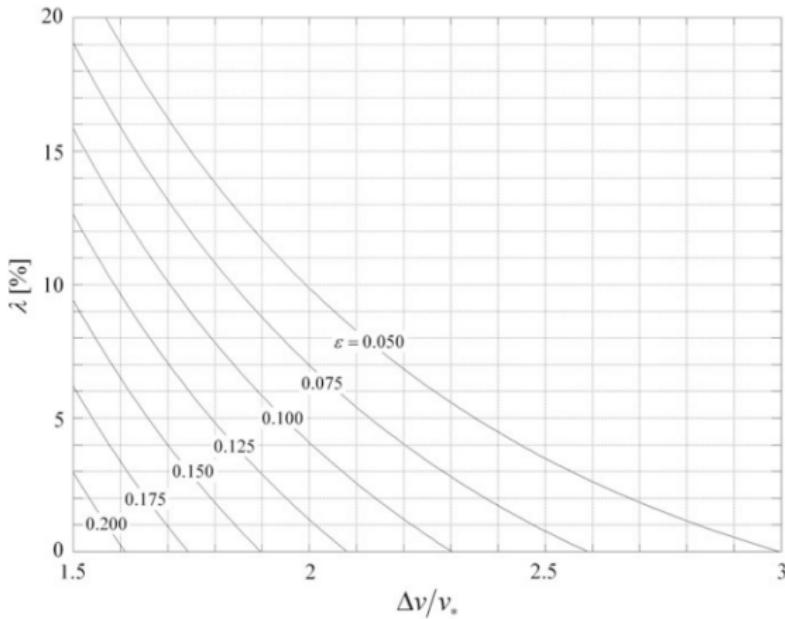
donde

$$\varepsilon = \frac{m_s}{m_s + m_p(0)}, \quad \lambda = \frac{m_L}{m_s + m_p(0)}.$$

Obtenemos

$$\frac{|\Delta v(t)|}{|v_e|} = -\ln \left(\frac{\varepsilon + \lambda}{1 + \lambda} \right)$$

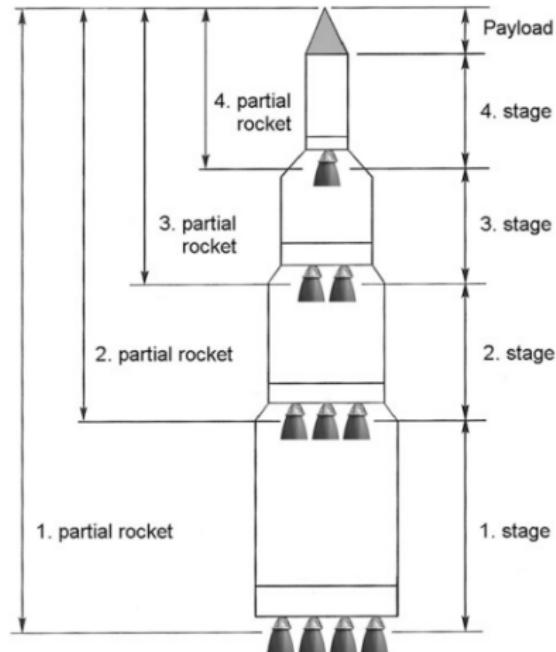
Consideraciones de carga útil



En la práctica $|v_e| \leq 4$ km/s, y $\varepsilon \leq 7.5\%$.

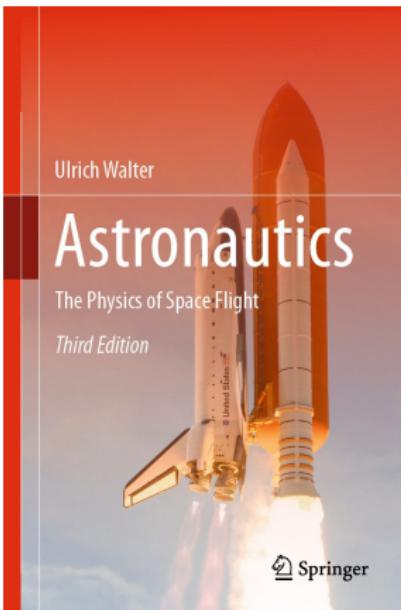
Para llegar a la órbita 200 km s.n.m se requiere $|\Delta v| = 9$ km/s.
~~ $\lambda = 3.4\%$.

Cohete multietapa



Objetivos

- Derivar la ecuación del cohete en campo gravitacional
- Extender la ecuación del a cohetes multietapas
- Optimizar uso de las etapas para maximizar λ y Δv
- Implementar modelos en Python para visualizar resultados
- ...



Gracias por su atención!

`mkarkulik.mat.utfsm.cl`