

Guía I de ejercicios: probabilidades

1. Pruebe y generalice la siguiente identidad

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

2. Muestre que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B^c)$
3. Sea $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$. Encuentre la σ -álgebra más pequeña que contenga los conjuntos $\{1\}$ y $\{2, 3\}$.
4. Muestre que si \mathcal{S} es un conjunto con elementos numerables ξ_i y que cada subconjunto $\{\xi_i\}$ es un evento, entonces todos los subconjuntos de \mathcal{S} son también eventos.
5. Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) = 1/4$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Encuentre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(B|A)$.

6. Pruebe que:

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_1)$$

7. Un tren y un bus llegan a la estación entre las 9:00 y las 10:00. El tren se detiene durante 10 minutos y el bus durante t minutos. Considerando que la llegada es al azar, encuentre t tal que la probabilidad de que el bus y el tren se encuentren en la estación sea de 0.5.
8. Una caja contiene n bolas idénticas numeradas de 1 a n . Sean m y k números naturales menores que n . Suponga que k bolas son escogidas al azar:
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que m sea el número más grande obtenido?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor obtenido sea menor que m ?
9. Supongamos que tenemos dos monedas. La primera tiene una cruz y un círculo en cada una de sus caras, mientras que la segunda tiene solamente círculos. Se toma una moneda al azar, se lanza dos veces, y se observó un círculo en los dos lanzamientos. Calcule la probabilidad de que la moneda que se lanzó fue la moneda que tiene una cruz.
10. Un par de dados de seis caras se lanza 50 veces. Encuentre la probabilidad de que se obtenga un par de seis al menos tres veces.
11. En un torneo de básquetbol compiten 16 equipos. En cada ronda los equipos se dividen en grupos de 4. En cada grupo cada equipo juega una vez contra cada uno de los equipos restantes. De cada grupo los dos mejores equipos califican para la siguiente ronda y los dos peores son eliminados. Después de la última ronda quedan dos equipos que se enfrentan en un partido para determinar al ganador del torneo. ¿Cuántos partidos se jugarán a lo largo de todo el torneo?
12. ¿Cuántos números de cinco cifras no tienen dígitos 0 ni 1?
13. ¿Una diseñadora dispone de 5 tonos de naranja, 7 tonos de verde y 4 tonos de morado, y quiere escoger dos de estos para un logotipo. Ella considera que usar dos tonos del mismo color es aburrido, pero todas las demás combinaciones le agradan. ¿Cuántas opciones tiene?
14. Entre las ciudades de San Juan, San Julián y San José hay varios caminos, cada uno de los cuales conecta a exactamente dos ciudades. De San Juan a San Julián podemos ir de 24 formas, pasando por San José. De San José a San Juan hay 18 formas, pasando por San Julián. De San Julián a San José hay 12 formas, pasando por San Juan. ¿Cuántos caminos directos hay entre San Juan y San José?