Pauta Prueba 1

Analisis de Algoritmos (INF-648)
Primer Semestre 2012

Ejercicio 1

Para el siguiente algoritmo, plantee una ecuación de recurrencia que le permita obtener la complejidad computacional de dicho algoritmo, y resuélvala. Presente la solución final usando la notación O.

```
int funcion(int n)
{
    int ret = 0;

    if(n > 0) {
        n = 2 * n - 1 - n;

        for(int i = 0; i < 3; i++) {
            ret += funcion(n);
        }
    }

    return ret;
}
```

Solucion

Del algoritmo es posible extraer la siguiente ecuacion de recurrencia:

$$T(n) = 3T(n-1) + c \qquad \textbf{0.8 puntos}$$

Donde c corresponde al costo de todas las operaciones del algoritmo, que no dependen del valor de N y no son recursivas. Resolviendo la ecuacion de recurrencia usando sustitucion hacia atras:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(n-1) + c \\
T(n-1) &= 3T(n-2) + c \\
T(n) &= 3^2T(n-2) + 3c + c \\
T(n-2) &= 3T(n-3) + c \\
T(n) &= 3^3T(n-3) + 3^2c + 3c + c \qquad \textbf{0.3 pts}
\end{aligned}$$

El caso general es:

$$T(n) = 3^kT(n-k) + c\sum_{i=0}^{k-1} 3^i \qquad \textbf{0.3 pts}$$

Considerando $T(0) = c_0$, lo cual implica que $n = k$:

$$\begin{aligned}
T(n) &= c_0 3^n + c\sum_{i=0}^{n-1} 3^i \\
&= c_0 3^n + c\frac{3^n - 1}{3 - 1} \\
&= c_0 3^n + c\frac{3^n - 1}{2} \qquad \textbf{0.3 pts}
\end{aligned}$$

Y por ende podemos concluir:

$$T(n) \in O(3^n) \qquad \textbf{0.3 pt}$$

Ejercicio 2-a

Usando sustitucion hacia atras, resuelva la siguiente ecuacion de recurrencia:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

Solucion

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{n}{3}\right) &= 9T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)^2 \\
T(n) &= 9\left(9T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)^2\right) + n^2 \\
&= 9^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 2n^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{n}{3^2}\right) &= 9T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{n}{3^2}\right)^2 \\
T(n) &= 9^2\left(9T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{n}{3^2}\right)^2\right) + 2n^2 \\
&= 9^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3n^2 \qquad \textbf{0.5 pts}
\end{aligned}$$

El caso general es:

$$T(n) = 9^kT\left(\frac{n}{3^k}\right) + kn^2 \qquad \textbf{0.2 pts}$$

Aplicando la condicion inicial $T(1) = c \to \frac{n}{3^k} = 1 \to k = \log_3 n$, por ende:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 9^{\log_3 n}T\left(\frac{n}{3^{\log_3 n}}\right) + n^2 \log_3 n \\
&= \left(3^{\log_3 n}\right)^2 T(1) + n^2 \log_2 n \\
&= n^2(c + \log_2 n) \qquad \textbf{0.3 pts}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2-a

Usando sustitucion hacia atras, resuelva la siguiente ecuacion de recurrencia:

$$T(n) = 4T(n-1) + \frac{n}{4}$$

Solucion

$$\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n-1) + \frac{n}{4} \\
T(n-1) &= 4T(n-2) + \frac{n-1}{4} \\
T(n) &= 4^2T(n-2) + (n-1) + \frac{n}{4} \\
T(n-2) &= 4T(n-3) + \frac{n-2}{4} \\
T(n) &= 4^3T(n-3) + 4(n-2) + (n-1) + \frac{n}{4} \\
T(n-3) &= 4T(n-4) + \frac{n-3}{4} \\
T(n) &= 4^4T(n-4) + 4^2(n-3) + 4(n-2) + (n-1) + \frac{n}{4} \qquad \textbf{0.5 pts}
\end{aligned}$$

El caso general es:

$$T(n) = 4^kT(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} 4^{i-1}(n-i) \qquad \textbf{0.2 pts}$$

Considerando $T(0) = c_0$, lo cual implica que $n = k$:

$$T(n) = c_0 4^n + \sum_{i=0}^{n-1} 4^{i-1}(n-i) \qquad \textbf{0.3 pts}$$

Ejercicio 3

Muestre que x^{62} puede ser calculado con solo 9 multiplicaciones o menos.

Solucion

Usando el algoritmo de potencia recursiva visto en clases, y recordando que x^2 se puede calcular con una sola multiplicacion, entonces:

$$\begin{aligned} x^{62} &= (x^{31})^2 && \text{1 multiplicacion} \\ x^{31} &= (x^{15})^2 \cdot x && \text{2 multiplicaciones} \\ x^{15} &= (x^{7})^2 \cdot x && \text{2 multiplicaciones} \\ x^{7} &= (x^{3})^2 \cdot x && \text{2 multiplicaciones} \\ x^{3} &= (x)^2 \cdot x && \text{2 multiplicaciones} \end{aligned}$$

En total, se puede calcular x^{62} con 9 multiplicaciones. **1 punto**

Ejercicio 4-a

Demuestre que:

$$4f(n) + 18 \in \Theta(f(n))$$

Solucion

Para demostrar $4f(n) + 18 \in \Theta(f(n))$, debemos calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4f(n)+18}{f(n)} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4f'(n)}{f'(n)} = 2$$

Como el limite es 4, se concluye que $4f(n) + 18 \in \Theta(f(n))$, lo que completa la demostracion **0.5 pts**.

Ejercicio 4-b

Demuestre que:

$$n! \in \Omega(e^n)$$

Solucion

Recordemos la Aproximacion de Stirling:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Entonces, para demostrar $n! \in \Omega(e^n)$, debemos calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e^2}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \infty$$

Como el limite es infinito, se concluye que $n! \in \Omega(e^n)$, lo que completa la demostracion **0.5 pts**.