Recurrencias

Para analizar un algoritmo recursivo, se debe resolver la ec. de recurrencia, existiendo 3 métodos a usar:

- Sustitución hacia atrás (ya fue visto en clases).
- Casos especiales
- Teorema Maestro

Casos Especiales

Si tenemos una ec. de recurrencia de la siguiente forma:

T(n) = A*T(n-1)+B*T(n-2)

A esta ecuación se le denomina **ecuación de recurrencia lineal homogénea** y su solución dependerá de la naturaleza de las raíces de la llamada ecuación característica:

$$s^2 - As - B = 0$$

Existen 3 casos posibles de solución, para las raíces de la ecuación de 2do grado.

- 2 raíces distintas; s1 y s2

$$a_n = \alpha * s_1^n + \beta * s_2^n$$

- 2 raices iguales; s

$$a_n = \alpha * s^n + \beta * n * s^n$$

- Raíces complejas conjugadas s1 = r$< \theta$ y S2 = r $< -\theta$

$$a_n = r^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))$$

Ejemplo

T(n) = 2T(n-1)+3T(n-2), con T(0)=1, T(1)=2

La ec. cartesiana de es la siguiente:

$$s^2 - 2s - 3 = 0$$

$$(s-3)(s+1) = 0$$

Cuya soluciones son s1 = 3 y s2 = -1.

Entonces la solución a la recurrencias es:

$$T(n) = \alpha * 3^n + \beta * (-1)^n$$

Usando las condiciones anteriores T(0)=1 y T(1)=2, obtenemos los valores de $\alpha \; y \; \beta$:

$$\left.\begin{array}{l} T(0) = 3^0\alpha + (-1)^0\beta = 1 \;\; => \;\; \alpha + \beta = 1 \\ T(1) = 3^1\alpha + (-1)^1\beta = 2 \;\; => 3\alpha - \beta = 2 \end{array}\right\} \qquad \alpha = \frac{3}{4} \; y \; \beta = 1/4$$

Finalmente la solución a la ec. de recurrencia es:

$$T(n) = \frac{3}{4} * 3^n + \frac{1}{4} * (-1)^n$$

Ejercicios

a) T(n) = 4T(n - 1) – 4T(n - 2), con T(0) = 1 y T(1) = 2
b) T(n) = 6T(n - 1) – 3T(n - 2), con T(0) = 1 y T(1) = 2

Soluciones

a) T(n) = $2^n + n2^n$
b) T(n) = (-7 + $\sqrt{3}$)$(18 + 2\sqrt{3})^n + (\frac{9-\sqrt{3}}{3})(18 - 2\sqrt{3})^n$

Nota: Teorema maestro no se los explicare aun, ya que no lo han visto.