Ejercicio 1)

Demuestre que:

$$\frac{6n+3}{3n+1} \in \Theta(1)$$

Método 1:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{6n+3}{3n+1}\right)}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{6n+3}{3n+1}$$

Los valores 3 y 1 son insignificantes para un valor de n grande por lo tanto se pueden despreciar.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{6n}{3n} = \lim_{n \to \infty} 2 = 2 \qquad 0 < 2 < \infty \quad \rightarrow \quad \frac{6n+3}{3n+1} \in \Theta(1)$$

Método 2:

Se sabe que:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \leftrightarrow \exists c_1 \, y \, c_2 > 0 \, y \, n_0 \;\; tal\ que$$
$$c_1 * g(n) \;\geq\; f(n) \;\geq\; c_2 * g(n) \qquad \forall\, n > n_0$$

Luego:

$$f(n) = \frac{6n+3}{3n+1}, \quad g(n) = 1, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = 1, \quad n_0 = 0 \quad \rightarrow$$

$$3 \geq \frac{6n+3}{3n+1} \geq 1 \quad \forall\, n > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{6n+3}{3n+1} \in \Theta(1)$$

Ejercicio 2)

Demuestre que:

$\log(n) \in O(\sqrt{n})$

Método 1:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} \quad \leftarrow \quad \textit{Regla de l'Hôpital}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n * \ln(10)}}{\frac{1}{2 * \sqrt{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 * \sqrt{n}}{n * \ln(10)} = \frac{2}{\ln(10)} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$0 < \infty \quad \rightarrow \quad \log(n) \in O(\sqrt{n})$

Método 2:

Se sabe que:

$$f(n) \in O(g(n)) \leftrightarrow \exists c > 0 \; y \; n_0 \;\; tal\; que$$
$$f(n) \;\leq\; c * g(n) \quad \forall\, n > n_0$$

Luego:

$f(n) = \log(n), \quad g(n) = \sqrt{n}, \quad c = 1, \quad n_0 = 0 \quad \rightarrow$

$\log(n) \leq \sqrt{n} \quad \forall\, n > 0 \quad \rightarrow \quad \log(n) \in O(\sqrt{n})$

Ejercicio 3)

Demuestre que:

$$n! \in \Omega(e^n)$$

Método 1:

Se sabe que:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Luego:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{e^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{e^2}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \infty$$

$$\infty > 0 \quad \rightarrow \quad n! \in \Omega(e^n)$$

Método 2:

Se sabe que:

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \leftrightarrow \exists c > 0 \; y \; n_0 \;\; tal\,que$$
$$f(n) \;\geq\; c * g(n) \quad \forall\, n > n_0$$

Luego:

$$f(n) = n!, \quad g(n) = e^n, \quad c = 1, \quad n_0 = 5 \quad \rightarrow$$

$$n! \geq e^n \quad \forall\, n > 5 \quad \rightarrow \quad n! \in \Omega(e^n)$$