Ejercicio 1

Resuelva las siguientes ecuaciones de recurrencia, usando sustitución hacia atrás:

1. $T(n) = 3T(n-1) + 2n$
2. $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

Solucion Parte A

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T(n-1) + 2n \\
\\
T(n-1) &= 3T(n-2) + 2(n-1) \\
T(n) &= 3(3T(n-2) + 2(n-1)) + 2n \\
&= 3^2T(n-2) + 3 \cdot 2(n-1) + 2n \\
\\
T(n-2) &= 3T(n-32) + 2(n-2) \\
T(n) &= 3^2(3T(n-3) + 2(n-2)) + 3 \cdot 2(n-1) + 2n \\
&= 3^3T(n-3) + 3^2 \cdot 2(n-2) + 3 \cdot 2(n-1) + 2n
\end{aligned}
$$

El caso general es:

$$T(n) = 3^kT(n-k) + 2\sum_{i=0}^{k-1} 3^i(n-i)$$

Aplicando la condicion inicial $T(0) = c \rightarrow n - k = 0 \rightarrow n = k$, por ende:

$$T(n) = c \cdot 3^n + 2\sum_{i=0}^{n-1} 3^i(n-i)$$

Solucion Parte B

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

$$\begin{aligned} T\left(\frac{n}{2}\right) &= 8T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^3 \\ T(n) &= 8\left(8T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^3\right) + n^3 \\ &= 8^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\left(\frac{n}{2^2}\right) &= 8T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{n}{2^2}\right)^3 \\ T(n) &= 8^2\left(8T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{n}{2^2}\right)^3\right) + 2n^3 \\ &= 8^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n^3 \end{aligned}$$

El caso general es:

$$T(n) = 8^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn^3$$

Aplicando la condicion inicial $T(1) = 1 \rightarrow \frac{n}{2^k} = 1 \rightarrow k = \log_2 n$, por ende:

$$\begin{aligned} T(n) &= 8^{\log_2 n}T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + n^3\log_2 n \\ &= \left(2^{\log_2 n}\right)^3 T(1) + n^3\log_2 n \\ &= n^3(1 + \log_2 n) \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Demuestre que $O(1) \in O(\log n) \in O(n^k) \in O(n) \in O(n \log n) \in O(n^p) \in O(e^n) \in O(n!)$, donde $0 < k < 1$ y $p > 1$.

Solucion

Se demostrara por partes, primero por $O(1) \in O(\log n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

Por ende se concluye que $O(1) \in O(\log n)$

$O(\log n) \in O(n^k)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{kn^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{kn^k} = 0$$

Por ende se concluye que $O(\log n) \in O(n^k)$

$O(n^k) \in O(n)$ con $0 < k < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n} = \lim_{n\to\infty} n^{k-1}$$

Como $0 < k < 1$, entonces $-1 < k-1 < 0$, y por ende, $0 < -(k-1) < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-(k-1)}} = 0$$

Por ende se concluye que $O(n^k) \in O(n)$

$O(n) \in O(n \log n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

Por ende se concluye que $O(n) \in O(n \log n)$

$O(n \log n) \in O(n^p)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{p-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{(p-1)n^{p-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} = 0$$

Como $p > 1$, el limite es cero. Por ende se concluye que $O(n \log n) \in O(n^p)$.

$O(n^p) \in O(e^n)$ con $p > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{pn^{p-1}}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(p-1)n^{p-2}}{e^n} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots 1x^0}{e^n} = 0$$

Por ende se concluye que $O(n^p) \in O(e^n)$.

$O(e^n) \in O(n!)$:
Si usamos la aproximacion de stirling para $n!$:

$$Stirling(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{n^n}{e^{2n}} \sqrt{2\pi n}} = 0$$

Por ende se concluye que $O(e^n) \in O(n!)$.