USO INTERNO Nota de este examen: 6

Nota de Cursada: 6 Nota en el acta: 6 (seis)

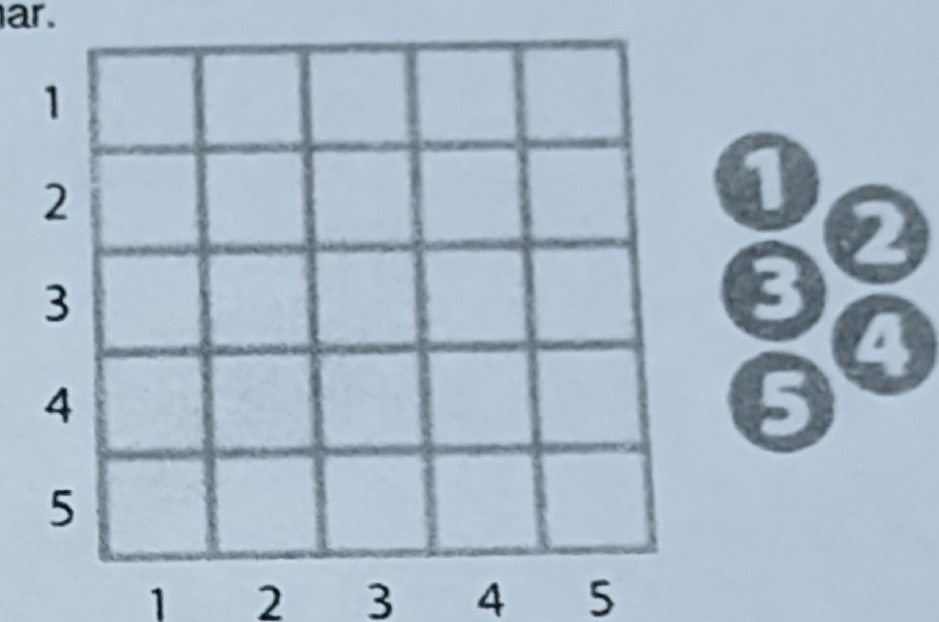
Evaluación integradora de Modelos y Optimización I (71.14 / 9104)

1ro de marzo de 2023

Apellido y nombre: del Mazo, Federico Nro.de Padrón: 100029

A Si alguna vez tuvo otro nombre, hace siglos que está olvidado y ya nadie lo menciona de otro modo que no sea éste: el Planeta del Tesoro. Su bóveda, la más inexpugnable del Universo, contiene, según la leyenda, el tesoro más valioso que ser humano, o no humano, sea capaz de imaginar.

Frente a la puerta de la bóveda el suelo está dividido en un tablero de 5 x 5, con sus filas (horizontales) y sus columnas (verticales) numeradas del 1 al 5. A un lado, cinco pesadas piedras circulares, igualmente numeradas del 1 al 5, esperan ser colocadas sobre el tablero.



Se sabe que originalmente el tablero estaba pintado, algunas casillas eran blancas y la otras, negras. Blancas y negras alternaban como en un tablero de damas o de ajedrez. Pero el correr de los milenios ha borrado la pintura y solamente se sabe que la (1,1) es negra. Si las piedras son colocadas correctamente, un mecanismo abrirá la puerta. Una inscripción sobre la puerta indica cómo deben ser colocadas las piedras. Se trata de cinco pistas:

1) Cada piedra debe ir en una casilla diferente. La piedra debe estar exactamente en el centro de la casilla correspondiente. **2)** No puede haber dos piedras en la misma fila ni en la misma columna. *No puede haber dos piedras en casillas vecinas (ni siquiera vecinas por el vértice).* **3)** Las piedras 1, 2 y 4 están en casillas negras, *las otras dos en casillas blancas.* **4)** Exactamente en un caso coincide el número de la piedra con el de la fila en *que está colocada. Exactamente en un caso coincide el número de la piedra con el de la columna en que está colocada. Ambos números son diferentes.* **5)** Se sabe que la piedra 4 debe estar lo más a la derecha posible

¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible? Se pide_

R **A1** *Análisis del problema. Objetivo completo y claro. Hipótesis necesarias para su resolución, definición de variables.* Modelo matemático para su resolución por Programación Lineal. Es importante resolverlo con un modelo y no por tanteo en base a los datos del problema. **Si este punto no es lineal, el examen estará insuficiente.** Recuerden que el análisis, el objetivo y las hipótesis tienen que ser los mismos para A1, A2 y A3.

B **A2** Alí Babá propone la siguiente heurística de construcción para resolver el problema:

Colocar la piedra 1 en el (1,1) y luego ir colocando cada piedra en la fila y columna que tiene su número

Indique qué inconvenientes o fallas tiene esta heurística con respecto al problema dado, si es que los tiene. ¿Cuándo va a funcionar mal? y ¿qué condiciones se deberían dar para que funcione bien?

B- **A3** Plantee una heurística de construcción para resolver el problema. Recuerde que su heurística debe tender al mejor resultado y que no debe tener los problemas que criticó en el punto A2.

B) Nuestra empresa fabrica los productos X1 y X2 a partir de los recursos R1 y R2. Además, se pide fabricar como mínimo 10 unidades de X2. Aquí vemos el planteo del problema:

2 X1 + 2 X2 <= 80 (kilos de R1/mes)
X1 + 2 X2 <= 50 (kilos de R2/mes)
X2 >= 10 (unidades/mes)
Z = 30 X1 + 20 X2 (MAXIMO)
(30 es el precio de venta de X1 y 20 es el precio de venta de X2)

C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
30	X1	30	1	0	1/2	0	1
0	X4	0	0	0	-1/2	1	1
20	X2	10	0	1	0	0	-1
	Z =	1100	0	0	15	0	10
			80	50	-10		

C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5
80	Y1	15	1	1/2	0	-1/2	0
-10	Y3	10	0	-1	1	-1	1
	Z =	1100	0	0*	0	-30	-10

B **B1)** Una famosa empresa amiga nos ofrece la siguiente alternativa:

Nos vende unidades de X2 ya elaborado a $ 24 cada una. Esas unidades de X2 tienen las mismas características que las unidades elaboradas por nuestra empresa (es decir, podemos entregarlas a los clientes en lugar de las que fabricamos nosotros) ¿Es conveniente comprar? Si no es conveniente ¿por qué? Si es conveniente, ¿cuántas unidades conviene comprar? Justifique las respuestas.

R **B2)** Otra opción que tenemos es la de conseguir kilos de R1 entregando kilos de R2 (por cada kilo de R1 conseguido hay que entregar 2 kilos de R2). ¿Es conveniente este negocio? Si el negocio es conveniente ¿Cuántas unidades se van a conseguir de R1?

NOTA: Los puntos B1 y B2 se contestan en forma independiente. Detalle los cálculos efectuados.

Para aprobar debe tener Bien dos puntos de A y uno de B. Además, A1 no puede estar Mal.

Federico del Mazo 100029 | Modelo | A | (1) | HOJA Nº 2/34 | FECHA 1/3/23

A1

Análisis

- Se tiene un problema de asignación cuadrática en el que hay que colocar elementos en casillas siguiendo reglas estrictas

NP

Objetivo

- Determinar la colocación de las piedras tal que se abra la bóveda

MAX / MIN?

Hipótesis

- La piedra #4 debe ir en la columna 5 ("lo más a la derecha posible")

¿Y si no se puede?

- La solución encontrada debe cumplir las 5 reglas.

Modelo

Cada celda es $i,j \rightarrow$ Fila i, columna j

Celdas Negras $\rightarrow (1,1),(1,3),(1,5)\ldots$

Celdas Blancas $\rightarrow (1,2),(1,4),(2,1)$

} Constante

$Y^{p}_{i,j} \rightarrow$ La piedra $\underbrace{p}_{\in(1,5)}$ se coloca en la celda $\underbrace{i,j}_{\in(1,1)\ldots(5,5)}$

$Y^{p}_{Fila} \rightarrow$ La piedra p coincide en número con su fila

$Y^{p}_{COL} \rightarrow$ La piedra p coincide en número con su columna

NOTA

Federico del Mazo 100029 | B | SIMPLEX | HOJA Nº 3/4 | FECHA 1/3/2023

$2X_1 + 2X_2 \leq 80$ (n_2 lunes)

Los Piedras se colocan una vez, obligatoriamente

$$\sum_{i,j \in Celdas} Y^{1}_{i,j} = 1 \qquad \text{~~Idem~~ } \forall \text{ Piedras}$$

Piedra

Celda

Se Coloca hasta 1 Piedra Por Celda

$$\sum_{p \in (1,5)} Y^{p}_{1,1} \leq 1 \qquad \text{~~Idem~~ } \forall \text{ celdas}$$

Se Coloca hasta 1 Piedra Por Fila

$$\sum_{j \in 1,5} \sum_{p \in 1,5} Y^{p}_{1,j} \leq 1 \qquad \forall \text{ ~~Idem~~ Filas}$$

Y hasta 1 Por Columna

$$\sum_{i \in 1,5} \sum_{p \in 1,5} Y^{p}_{i,1} \leq 1 \qquad \forall \text{ ~~Idem~~ Columnas}$$

Piedras 1,2,4 en Negras. 3 y 5 en Blancas

$$\sum_{i,j \in Negras} Y^{1}_{i,j} = 1 \qquad \text{Idem } p=2 \text{ y } 4$$

$$\sum_{i,j \in Blancas} Y^{3}_{i,j} = 1 \qquad \text{Idem } p=5$$

Piedra 4 en Columna 5

$$\sum_{i \in 1,5} Y^{4}_{i,5} = 1$$

R.

Federico del Mazo 100029 | B | SIMPLEX | HOJA Nº 3/4 | FECHA 1/3/2023

$2X_1 + 2X_2 \le 80$ (n_1 hes)

Federico del Mazo 100029 | Modelo | A | (2) | HOJA Nº 2/4 | FECHA 1/3/23

Si la Piedra 1 esta en la Celda (3,3), los otros Piedras no Pueden estar en sus vecinos $\begin{pmatrix} 2,2; & 2,3; & 2,4 \\ 3,2 & & 3,4 \\ 4,2 & 4,3 & 4,4 \end{pmatrix}$

$$\sum_{\substack{i,j \in \text{Celdas} \\ \text{vecinas} \\ \text{de } 3,3}} \sum_{p \in 2,5} Y^p_{i,j} \le \left(1 - Y^1_{3,3}\right)$$

Idem todas las Celdas, con todas las Combinaciones de Piedras*

Si la Piedra 1 esta en la Fila 1, lo indicamos con Y^1_{Fila}

no

$$Y^1_{Fila} \le \sum_{j \in 1,5} Y^1_{1,j} \le 5\, Y^1_{Fila}$$?

Idem Piedras y Filas

Lo mismo con las columnas

$$Y^1_{COL} \le \sum_{i \in 1,5} Y^1_{i,1} \le 5\, Y^1_{COL}$$

Idem Piedras y Columnas

esto sucede exactamente 1 vez para Fila y columna

$$\sum_{p \in 1,5} Y^p_{FILA} = 1$$

$$\sum_{p \in 1,5} Y^p_{COL} = 1$$

NOTA

el número de Y^P_{FILA} e Y^P_{COL} debe ser distinto:
(Si Y^1_{FILA} se prende, Y^1_{COL} se apaga)

$$Y^1_{FILA} + Y^1_{COL} \le 1$$ Idem Piedras.

el Funcional es la sumatoria de bivalentes

$$Z_{MIN} = \sum_{P \in P} \sum_{i,j \in celdas} Y^P_{i,j} = 5$$

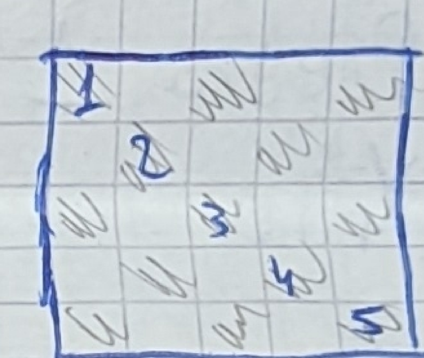
redundante

Me

A2

La Propuesta de Alí Baba no cumple con lo pedido, ya que rompe varias reglas

- Más de 1 vez coincide el número de piedra con el de fila y columna (y esos números son el mismo.)
- Las piedras ocupan celdas vecinas (la celda 2,2 es vecina de la 1,1, por ejemplo)
- Las piedras 3 y 5 están en celdas negras.
- La piedra 4 no está lo más a la derecha posible



A3

Se propone comenzar por la regla más restrictiva:
- La 4 debe estar en la columna 5. (¡y celda negra!)

~~Colocar P4 en Celda (1,5)~~

Mientras no esté resuelto el problema:

Colocar P4 en Celda (1,5) → siguiente iteración: (3,5) y finalmente: (5,5)

Tomar la primera P en orden asc y ponerla en la primera celda B/N correspondiente que no sea vecina de la P4, sobre la columna 4

→ Ir iterando las columnas de la 4 a la 1, y las Piedras 1 2 3 y 5 procurando cumplir las reglas dadas

Si el problema no se resolvió, mover P4 a la siguiente celda negra sobre col 5 / VOLVER A EMPEZAR

Federico del Mazo
100029

$\boxed{B}$ SiMPLEX

HOJA Nº 3/4
FECHA 1/3/2023

$2X_1 + 2X_2 \leq 80$ (R_1/mes)
$X_1 + 2X_2 \leq 50$ (R_2/mes)
$X_2 \geq 10$ (D/mes)
$Z_{MAX} = 30X_1 + 20X_2$

$\boxed{B_1}$ Nos venden X_2 a \$24. ¿Compro? ¿Cuánto?

- Lo primero que notamos es que X_1 es más valioso que X_2
  - Consume menos recursos
  - Se vende más caro.
- También, vemos de la directa que la sol óptima implica producir lo mínimo posible de X_2 tal que cumpla con la demanda.
- Relajar esa demanda nos beneficia en \$10 ($Z_j - C_j$ de A_5 en la dir).

↳ vender una X_1 más y una X_2 menos.

ES decir, por cada X_2 elaborado que compremos, ganamos \$10 ~~y~~ y perdemos \$24, y ganamos \$20 al venderlo

↓

~~Nos conviene~~

Cada ~~...~~ trueque nos beneficia en \$6.

-

Si yo compro 10 unidades, cumplo la demanda mínima y los recursos se utilizan para X_1 → $2X_1 + 0 \leq 80$
$X_1 + 0 \leq 50$
↓
$X_1 = 40$

¿Monto?

NOTA

Si compro 10 unidades me beneficio en los $6 . 10 que justifique anteriormente

$$Z = \$30 \cdot \underset{x_1}{40} + \$20 \cdot \underset{x_2}{10} - \$24 \cdot 10 = 1160$$

(el funcional original era 1160)

Comprar más de 10 no tiene sentido ya que vuelvo más los X_1 que los X_2.

<u>Conviene comprar 10</u>

$\boxed{B_2}$ Nos dan 1kg de R_1 por cada 2kg de R_2 que entreguemos.

~~$VMR_1 = \$15$~~

~~$VMR_2 = \$10$~~

			$80+d$	$50-2d$	-10		
$80+d$	y_1	15	1	$1/2$	0	$-1/2$	0
-10	y_3	10	0	-1	1	-1	1
			0	$-5/2\,d$	0	$-30 - 1/2\,d$	-10

~~Si yo entrego R_2, mis X_1 se van a ir achicando, que es lo que no quiero.~~

Sigo siendo óptimo si todo es ≤ 0

$-10 \leq 0$ ✓

$-5/2\,d \leq 0$

$-30 - 1/2\,d \leq 0$

$d \leq 0$

No me conviene el negocio.

NO

~~Que disminuyendo mi funcional por estar limitado a 10~~

Federico del Rozo
100029

SIMPLEX (2)

HOJA N° 4/4
FECHA 1/3/23

Pruebo B2 sobre la Solución Alternativa

$$\begin{array}{ccc|ccccc} & & & 80 & 50 & -10 & & \\ 80 & Y_1 & 15 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ -10 & Y_3 & 10 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & -30 & -10 \end{array}$$

↳ entra Y_2 → Pivot = 1/2
sale Y_1

$$\begin{array}{ccc|ccccc} & & & 80 & 50 & -10 & & \\ 50 & Y_2 & 30 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & Y_3 & 40 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & -30 & -10 \end{array}$$

~~La sol alternativa retorna el mismo plan de producción ($X_1 = 30$, $X_2 = 10$) por lo que el análisis de tanto B_1 como B_2 sigue siendo válido~~

$$\begin{array}{ccc|ccccc} & & & 80+d & 50-2d & -10 & & \\ 50-2d & Y_2 & 30 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & Y_3 & 40 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline & & & -5d & 0 & 0 & -30+2d & -10 \end{array}$$

$d \in 0,15 \leftarrow$ $-5d \leq 0$
$-30+2d \leq 0$

NOTA

Probemos los extremos de mi rango:

Si yo hiciese 15 trueques, me quedaría:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 80 + 15$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 50 - 2 \cdot 15$$
$$x_2 \geq 10$$

↓

esto resolvería a un plan de producción de $10 x_2$ y ningún x_1, lo cual da un función muy menor.

↓

Se mantiene la respuesta de que no conviene ningún trueque.