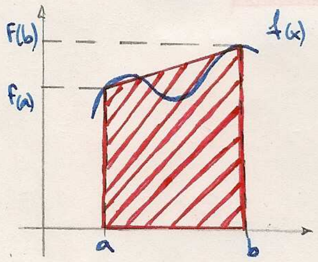
RESOLUCIÓN COLOQUIO: ANÁLISIS NUMÉRICO I

• EJERCICIO Nro. 1: INTEGRACIÓN.

MÉTODO DEL TRAPECIO

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



SE APROXIMA EL ÁREA BAJO LA CURVA $f(x)$ POR EL ÁREA DEL TRAPECIO ROJO.

$$\therefore \boxed{\tilde{I} = (f(a) + f(b)) \cdot \frac{(b-a)}{2}}$$

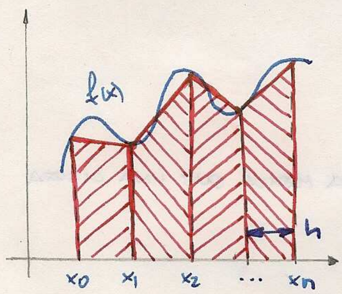
$$\boxed{E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi) \text{ con } \xi \in [a,b]}$$

E_T: ERROR COMETIDO AL APROXIMAR POR EL ÁREA DEL TRAPECIO.

NOTA: SI $f''(\xi) = 0$ EN $[a,b] \Rightarrow f(x)$ ES LINEAL $\therefore E_T = 0$

MÉTODO DEL TRAPECIO COMPUESTO.

EL MÉTODO DEL TRAPECIO SE PUEDE MEJORAR SI AL INTERVALO $[a,b]$ SE LO DIVIDE EN SUBINTERVALOS Y EN CADA UNO SE APLICA EL MÉTODO DEL TRAPECIO.



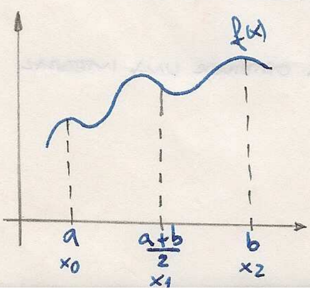
LOS x_j ESTÁN EQUIESPACIADOS, TAL QUE:

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}} \qquad \boxed{x_j = a + j \cdot h}$$

$$\therefore \boxed{\tilde{I} = \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right]}$$

$$\boxed{E_T = -\frac{(b-a) \cdot h^2}{12} \cdot f''(\xi) \text{ con } \xi \in [a,b]}$$

MÉTODO SIMPSON



UTILIZANDO EL POLINOMIO DE LAGRANGE SE OBTIENE QUE:

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{h}{3} \cdot \left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2) \right]}$$

$$\boxed{E_S = -\frac{(b-a)^5}{90} \cdot f^{IV}(\xi) \text{ con } \xi \in [a,b]}$$

MÉTODO SIMPSON COMPUESTO

SE MEJORA EL MÉTODO SIMPSON DIVIDIENDO EL INTERVALO $[a,b]$ EN SUBINTERVALOS Y APLICANDO EL MÉTODO SIMPSON EN CADA UNO DE ELLOS.

$$\therefore \quad \boxed{\tilde{I} = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0) + 2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k}) + 4\cdot\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + f(x_n)\right]}$$

$$\boxed{E_S = -\frac{(b-a)\cdot h^4}{180}\cdot f^{IV}(\xi) \text{ CON } \xi \in [a,b]}$$

SIENDO... $\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$

MÉTODO DE ROMBERG.

ÉSTE MÉTODO SE BASA EN LA EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

$$\boxed{T_k(h) = \frac{4^k\cdot T_{k-1}(h/2) - T_{k-1}(h)}{4^k - 1}}$$

SE PROCEDE CONSTRUYENDO EL SIGUIENTE ÁRBOL:

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
T_0(h) \arrow[dr] & & & \\
& T_1(h) \arrow[dr] & & \\
T_0(h/2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & T_2(h) \arrow[dr] & \\
& T_1(h/2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & T_3(h) \\
T_0(h/4) \arrow[ur] \arrow[dr] & & T_2(h/2) \arrow[ur] & \\
& T_1(h/4) \arrow[ur] & & \\
T_0(h/8) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

POR LO GENERAL SE PROCEDE HASTA QUE $T_n(h) - T_{n-1}(h)$ SEA MENOR QUE UNA CIERTA TOLERANCIA DADA.

MÉTODO DE GAUSS-LEGENDRE

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \cong \sum_{k=1}^{n} c_k\cdot f(x_k)}$$

c_k: COEFICIENTES DE LEGENDRE

x_k: RAÍCES DEL POLINOMIO DE LEGENDRE.

EL MÉTODO CONSISTE EN REALIZAR UN CAMBIO DE VARIABLE TAL DE OBTENER UNA INTEGRAL MÁS SENCILLA.

SIENDO a Y b LOS LÍMITES REALIZO EL CAMBIO DE VARIABLE PARA OBTENER UNA INTEGRAL ENTRE -1 Y 1...

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}\cdot t + \frac{(a+b)}{2}\right)\cdot dt\cdot\frac{(b-a)}{2}$$

$t = m \cdot x + n$

$$\begin{cases} -1 = m \cdot a + n \\ 1 = m \cdot b + n \end{cases} \Rightarrow (b-a) \cdot m = 2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{2}{b-a}}$$

$$\therefore \; n = 1 - \frac{2b}{b-a} \Rightarrow \boxed{n = -\frac{(a+b)}{a-b}}$$

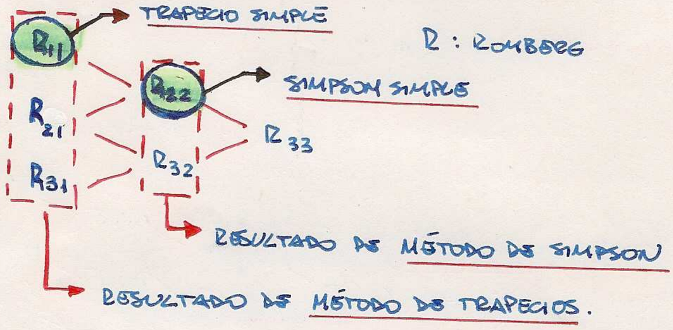
$$\Rightarrow t = \frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a} \Rightarrow \boxed{x = \frac{(b-a)}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}}$$

NOTA:
- LAS RAÍCES DEL POLINOMIO DE LEGENDRE SE OBTIENEN DE TABLAS.
- SIEMPRE EN LA INTEGRACIÓN DE GAUSS-LEGENDRE SE CUMPLE QUE: $\boxed{\sum c_i = 2}$
- SÍ O SÍ DEBE CONOCERSE LA FUNCIÓN f.

PROPIEDADES DEL POLINOMIO DE LEGENDRE.

- SI EL GRADO DEL POLINOMIO ES IMPAR $\Rightarrow$ EL CERO SEGURO ES RAÍZ

ALGO MÁS DE TEORÍA DE MÉTODOS



GRADO DE EXACTITUD

EL GRADO DE EXACTITUD DE UNA FORMULA DE INTEGRACIÓN ES EL GRADO DEL POLINOMIO DE MAYOR GRADO PARA EL CUAL LA FORMULA ES EXACTA.

METODO TRAPECIOS : GRADO 1

METODO SIMPSON : GRADO 3

EJERCICIOS TIPO COLOQUIO

1] DADA LA TABLA:

x	(x_0) 1	(x_1) 2	(x_2) 3	(x_3) 4	(x_4) 5
f(x)	2,4142	2,6734	2,8974	3,0976	3,2804

SE PIDE:

a) ESTIMAR LA $I = \int_1^5 f(x)\,dx$ MEDIANTE TODOS LOS MÉTODOS QUE PUEDA (DE LOS VISTOS EN EL CURSO). COMPARAR LOS RESULTADOS. ¿CUÁL APOSTARÍA USTED QUE ES EL MÁS APROXIMADO AL VALOR VERDADERO?

b) ¿PUEDE USARSE EL MÉTODO DE GAUSS - LEGENDRE? ¿PORQUÉ SÍ Ó PORQUÉ NO?

a) CON LA TABLA DADA SE PUEDE ESTIMAR LA INTEGRAL POR LOS MÉTODOS DE TRAPECIOS SIMPLE (CON $h=4$), TRAPECIOS COMPUESTOS (CON $h=2$ Y $h=1$); SIMPSON SIMPLE (CON $h=2$) Y SIMPSON COMPUESTO (CON $h=1$). TAMBIÉN PUEDE UTILIZARSE EL MÉTODO DE ROMBERG Y OBTENER UNA BUENA ESTIMACIÓN CON EL VALOR DE R_{33}.

MÉTODO DE TRAPECIOS SIMPLE.

$$\boxed{\tilde{I} = (f(x_0) + f(x_n)) \cdot \frac{(x_n - x_0)}{2}}$$ SIENDO... $\boxed{h = x_n - x_0}$

PARA ÉSTE CASO... $h = 5-1 \Rightarrow h=4$

$x_0 = 1$

$x_n = 5$

POR LO CUAL...

$$\tilde{I} = (f(1) + f(5)) \cdot \frac{(5-1)}{2} = (2,4142 + 3,2804) \cdot \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 11,3892}$$

MÉTODO DE TRAPECIOS COMPUESTOS

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right]}$$ SIENDO... $\boxed{h = \frac{x_n - x_0}{n}}$ $\boxed{x_j = x_0 + j \cdot h}$

PARA ÉSTE CASO... $x_0 = 1$ Y $x_n = 5$

- CON $n=2 \Rightarrow h = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow \boxed{h=2}$

$$\therefore \tilde{I} = \frac{2}{2} \cdot [f(1) + 2 \cdot f(3) + f(5)]$$

$$= 1 \cdot [2,4142 + 2 \cdot 2,8974 + 3,2804]$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 11,4894}$$

• CON $n = 4 \Rightarrow h = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow \boxed{h=1}$

$$\therefore \tilde{I} = \frac{1}{2} \cdot \left[f_{(1)} + 2 \cdot \left(f_{(2)} + f_{(3)} + f_{(4)} \right) + f_{(5)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[2{,}4142 + 2 \cdot \left(2{,}6734 + 2{,}8974 + 3{,}0976\right) + 3{,}2804 \right] \Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 11{,}5157}$$

MÉTODO DE SIMPSON SIMPLE.

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{h}{3} \cdot \left[f_{(x_0)} + 4 \cdot f_{(x_1)} + f_{(x_2)} \right]} \quad \text{CON} \quad \boxed{h = \frac{x_2 - x_0}{2}}$$

EN ÉSTE CASO... $x_2 = 5$ Y $x_0 = 1 \Rightarrow h = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{h=2}$

$x_1 = x_0 + h = 1 + 2 \Rightarrow x_1 = 3$

$$\therefore \tilde{I} = \frac{2}{3} \cdot \left(f(1) + 4 \cdot f(3) + f(5) \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(2{,}4142 + 4 \cdot 2{,}8974 + 3{,}2804 \right) \Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 11{,}5228}$$

MÉTODO DE SIMPSON COMPUESTO.

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{h}{3} \cdot \left[f_{(x_0)} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{(x_{2k})} + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n/2} f_{(x_{2k-1})} + f_{(x_n)} \right]}$$

SIENDO... $\boxed{h = \frac{x_n - x_0}{n}}$

EN ÉSTE CASO... $h = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} \rightarrow \boxed{h=1}$ $(n=4)$

$$\therefore \tilde{I} = \frac{1}{3} \cdot \left[f_{(x_0)} + 2 \cdot f_{(x_2)} + 4 \cdot \left(f_{(x_1)} + f_{(x_3)} \right) + f_{(x_4)} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[f_{(1)} + 2 \cdot f_{(3)} + 4 \cdot \left(f_{(2)} + f_{(4)} \right) + f_{(5)} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[2{,}4142 + 2 \cdot 2{,}8974 + 4 \cdot \left(2{,}6734 + 3{,}0976 \right) + 3{,}2804 \right] \Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 11{,}5245}$$

MÉTODO DE ROMBERG

RECORDAR QUE PARA DETERMINAR LA 1ᴱᴿ COLUMNA DEL MÉTODO DE ROMBERG SE UTILIZA EL MÉTODO DE TRAPECIOS COMPUESTOS, CON EXCEPCIÓN DE R_{11} QUE SE OBTIENE POR EL MÉTODO DE TRAPECIOS SIMPLE.

$$R_{11} = \underset{n=1}{T(h=4)} = \frac{4}{2} \cdot \left(f_{(1)} + f_{(5)} \right) = 2 \cdot \left(2{,}4142 + 3{,}2804 \right) \Rightarrow \boxed{R_{11} = 11{,}3892}$$

$$R_{21} = \underset{n=2}{T(h=2)} = \frac{2}{2} \cdot \left(f_{(1)} + 2 \cdot f_{(3)} + f_{(5)} \right) = 1 \cdot \left(2{,}4142 + 2 \cdot 2{,}8974 + 3{,}2804 \right) \Rightarrow \boxed{R_{21} = 11{,}4894}$$

$$R_{31} = \underset{n=4}{T(h=1)} = \frac{1}{2} \cdot \left[f_{(1)} + 2 \cdot \left(f_{(2)} + f_{(3)} + f_{(4)} \right) + f_{(5)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[2{,}4142 + 2 \cdot \left(2{,}6734 + 2{,}8974 + 3{,}0976 \right) + 3{,}2804 \right] \Rightarrow \boxed{R_{31} = 11{,}5157}$$

$R_{1,1} = 11,3892$

$R_{2,1} = 11,4894$ → $R_{2,2} = 11,5228$

$R_{3,1} = 11,5157$ → $R_{3,2} = 11,6736$ → $R_{3,3} = 11,6836$

CON ESTOS TRES VALORES OBTENIDOS POR EL MÉTODO DE TRAPECIOS EFECTÚO LA EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON PARA OBTENER LOS RESTANTES VALORES.

$$\boxed{T_k(h) = \frac{4^k \cdot T_{k-1}(h/2) - T_{k-1}(h)}{4^k - 1}}$$

$$R_{2,2} = \frac{4^1 \cdot R_{2,1} - R_{1,1}}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot 11,4894 - 11,3892}{3} \Rightarrow \boxed{R_{2,2} = 11,5228}$$

$$R_{3,2} = \frac{4^1 \cdot R_{3,1} - R_{2,1}}{4^1 - 1} = \frac{4 \cdot 11,5157 - 11,0419}{3} \Rightarrow \boxed{R_{3,2} = 11,6736}$$

$$R_{3,3} = \frac{4^2 \cdot R_{3,2} - R_{2,2}}{4^2 - 1} = \frac{16 \cdot 11,6736 - 11,5228}{15} \Rightarrow \boxed{R_{3,3} = 11,6836}$$

$$\therefore \quad \boxed{\tilde{I} = 11,6836}$$

(b) NO SE PUEDE UTILIZAR EL MÉTODO DE GAUSS - LEGENDRE YA QUE PARA ELLO ES NECESARIO CONOCER LA FUNCIÓN.

2 (a) PARA LA FÓRMULA DE INTEGRACIÓN APROXIMADA:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \cdot dx \cong c \cdot [f(x_0) + f(x_1)]$$

ENCONTRAR c, x_0 Y x_1 DE MODO TAL QUE LA FÓRMULA RESULTE EXACTA PARA POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A 2.

(b) ADAPTAR LA FÓRMULA DE (a) PARA QUE SIRVA DE APROXIMACIÓN DE CUALQUIER INTEGRAL DE LA FORMA: $\int_a^b f(x) \cdot dx$

(c) USANDO (b) ESTIMAR $\int_0^2 \operatorname{sen}^2(x) \cdot dx$

(d) ESTIMAR LA INTEGRAL DE (c) MEDIANTE EL MÉTODO DE SIMPSON CON $h = 0,5$. ACOTAR EL ERROR.

a)

PLANTEAMOS UN POLINOMIO GENÉRICO DE GRADO 2:

$$P(x) = a_0 + a_1 . x + a_2 . x^2$$

CALCULAMOS LOS VALORES IGUALANDO LA FÓRMULA A LA INTEGRAL...

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = C . [P(x_0) + P(x_1)]$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 . x + a_2 . x^2)\,dx = C . [(a_0 + a_1 . x_0 + a_2 . x_0^2) + (a_0 + a_1 . x_1 + a_2 . x_1^2)]$$

$$\Rightarrow \left[a_0 . x + a_1 . \frac{x^2}{2} + a_2 . \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = C . [(a_0 + a_1 . x_0 + a_2 . x_0^2) + (a_0 + a_1 . x_1 + a_2 . x_1^2)]$$

$$\Rightarrow a_0 . (1-(-1)) + a_1 . \frac{(1^2 - (-1)^2)}{2} + a_2 . \frac{(1^3 - (-1)^3)}{3} = 2 . C . a_0 + C . (x_0 + x_1) . a_1 + C . (x_0^2 + x_1^2) . a_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 . C \Rightarrow \boxed{C = 1} \\ 0 = C . (x_0 + x_1) \Rightarrow x_0 + x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -\sqrt{1/3}} \\ \frac{2}{3} = C . (x_0^2 + x_1^2) \Rightarrow \frac{2}{3} = C . (x_0^2 + (-x_0)^2) = 2 . C . x_0^2 \Rightarrow \boxed{x_0 = \sqrt{1/3}} \end{cases}$$

DE ÉSTA MANERA SE OBTIENEN LOS DOS COEFICIENTES Y LAS DOS RAÍCES DEL MÉTODO DE GAUSS-LEGENDRE CON $n=2$ Y QUE INTEGRA EXACTAMENTE LOS POLINOMIOS DE HASTA GRADO 3 $(n+1)$

b) PARA MODIFICAR EL INTERVALO DE INTEGRACIÓN SE ~~DEBE~~ EFECTUAR UN CAMBIO DE VARIABLE TENIENDO EN CUENTA QUE:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(x(t)) . \frac{dx}{dt} . dt$$

$$x(t) = \frac{(b-a)}{(1-(-1))} . (t+1) + a = \frac{(b-a)}{2} . (t+1) + a$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(b-a)}{2}$$

GAUSS - LEGENDRE

ENTONCES...

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(x(t)) . \frac{dx}{dt} . dt = \int_{-1}^{1} F(x(t)) . \frac{(b-a)}{2} . dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2} . \int_{-1}^{1} F(x(t)) . dt = \frac{(b-a)}{2} . C . [F(x(t_0)) + F(x(t_1))]$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x)\,dx \cong \frac{(b-a)}{2} . \left[F\left(x(-\sqrt{1/3})\right) + F\left(x(\sqrt{1/3})\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{(b-a)}{2}\cdot\left[f\left(\frac{(b-a)}{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)+a\right)+f\left(\frac{(b-a)}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)+a\right)\right]}$$

→ ÉSTA SERÁ LA FÓRMULA QUE UTILIZAREMOS PARA APROXIMAR CON ÉSTE MÉTODO A LA INTEGRAL ENTRE a Y b.

(c) EFECTUAREMOS LA INTEGRAL POR ÉSTE MÉTODO, PERO PRIMERO CALCULAMOS LA INTEGRAL EN FORMA EXACTA YA QUE POSEE PRIMITIVA.

$$\int_0^2 \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cdot\operatorname{sen}(2x)\right]_0^2 = 1{,}1892$$

CALCULAMOS LA INTEGRAL UTILIZANDO EL MÉTODO DE (b)

$$\int_0^2 \operatorname{sen}^2(x)\,dx \cong \frac{(2-0)}{2}\cdot\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2-0)}{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)+0\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{(2-0)}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)+0\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \operatorname{sen}^2(x)\,dx \cong 1\cdot\left[\operatorname{sen}^2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)+\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)\right] = 1{,}1682$$

ES UNA APROXIMACIÓN BASTANTE ACEPTABLE.

(d) MÉTODO DE SIMPSON

$h = \frac{b-a}{n}$ SIENDO... $a=0$, $b=2$ y $h=0{,}5$ $\Rightarrow$ $\boxed{n=4}$

$$\boxed{\check{I} = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k})+4\cdot\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1})+f(x_n)\right]}$$

ENTONCES...

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a)+2\cdot\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k})+4\cdot\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1})+f(b)\right]-\frac{(b-a)}{180}\cdot h^4\cdot f^{IV}(\mu)$$

$\mu \in (a,b)$

$$\Rightarrow \int_0^2 \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{0{,}5}{3}\cdot\left[\operatorname{sen}^2(0)+2\cdot\operatorname{sen}^2(1)+4\cdot(\operatorname{sen}^2(0{,}5)+\operatorname{sen}^2(1{,}5))+\operatorname{sen}^2(2)\right]-\frac{2}{180}\cdot(0{,}5)^4\cdot f^{IV}(\mu)$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{0{,}5}{3}\cdot\left[0+2\cdot 0{,}7081+4\cdot(0{,}2298+0{,}9950)+0{,}8268\right]-7\cdot 10^{-4}\cdot f^{IV}(\mu)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^2 \operatorname{sen}^2(x)\,dx = 1{,}1904-7\cdot 10^{-4}\cdot f^{IV}(\mu)} \quad \therefore \quad \int_0^2 \operatorname{sen}^2(x)\,dx \simeq 1{,}1904$$

LUEGO DE HABER CALCULADO LA INTEGRAL POR SIMPSON (1,1904) Y POR GAUSS-LEGENDRE (1,1682) Y SABIENDO QUE LA INTEGRAL EXACTA VALE 1,1892 CALCULAREMOS LA COTA DEL ERROR Y EL ERROR VERDADERO DE LA INTEGRAL DE SIMPSON.

$$\text{ERROR} = -\frac{(b-a)}{180} \cdot h^4 \cdot f^{IV}(\mu) \Rightarrow \boxed{\text{ERROR} = -7 \cdot 10^{-4} \cdot f^{IV}(\mu) \text{ CON } \mu \in (a,b)} \quad (1)$$

ERROR DEL MÉTODO DE SIMPSON

POR PROPIEDAD DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS...

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos(2x)$$

DERIVANDO...

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$$

$$f''(x) = \cos(2x)$$

$$f'''(x) = -2 \cdot \sin(2x)$$

$$\boxed{f^{IV}(x) = -4 \cdot \cos(2x)}$$

ACOTANDO Y REEMPLAZANDO EN (1) NOS QUEDA:

$$\|\text{ERROR}\| \leq \frac{(b-a)}{180} \cdot h^4 \cdot f^{IV}(\mu) = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot \|\cos(2x)\| \Rightarrow \|\text{ERROR}\| \leq 3 \cdot 10^{-3}$$

EL ERROR VERDADERO SERÁ:

$$\text{ERROR VERDADERO} = \|1{,}1892 - 1{,}1904\| \Rightarrow \text{ERROR VERDADERO} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \leq 3 \cdot 10^{-3}$$

3 SEA LA INTEGRAL:

$$I = \int_0^5 E(x)\,dx$$

DONDE $E(x)$ SE DEFINE COMO LA FUNCIÓN QUE ASIGNA A CADA x SU PARTE ENTERA.

a) SE PIDE APROXIMAR DICHA INTEGRAL UTILIZANDO LA FÓRMULA COMPUESTA DE LOS TRAPECIOS CON $n = 3, 5$ Y 7

b) CALCULAR EL VERDADERO VALOR DE LA INTEGRAL Y COMPARARLO CON LOS RESULTADOS DEL PUNTO ANTERIOR. ¿A QUÉ SE DEBE QUE NO LLEGUE AL VALOR VERDADERO EN NINGÚN CASO? ¿QUÉ MÉTODO HUBIERA DADO EL RESULTADO EXACTO?

a) LO PRIMERO IMPORTANTE ES ENTENDER LA FORMA DE LA FUNCIÓN PARTE ENTERA DE X. DICHA FUNCIÓN PARA EL INTERVALO DADO PUEDE DEFINIRSE COMO LA SIGUIENTE FUNCIÓN PARTIDA:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 4 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

$E(5) = 5$

MÉTODO DE TRAPECIOS COMPUESTOS.

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right]} \quad \boxed{h = \frac{x_n - x_0}{n}} \quad \boxed{x_j = x_0 + j \cdot h}$$

- $n = 3$

$h = \frac{5-0}{3} \Rightarrow \boxed{h = 5/3}$

$\therefore \quad \tilde{I} = \frac{5}{6} \cdot \left[E(x_0) + 2 \cdot \left(E(x_1) + E(x_2) \right) + E(x_3) \right] = \frac{5}{6} \cdot \left[E(0) + 2 \cdot \left(E(5/3) + E(10/3) \right) + E(5) \right]$

$\Rightarrow \quad \tilde{I} = \frac{5}{6} \cdot \left[0 + 2 \cdot (1+3) + 5 \right] \Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 10,8333}$

- $n = 5$

$h = \frac{5-0}{5} \Rightarrow \boxed{h = 1}$

$\therefore \quad \tilde{I} = \frac{1}{2} \cdot \left[E(x_0) + 2 \cdot \left(E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) + E(x_4) \right) + E(x_5) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[E(0) + 2 \cdot \left(E(1) + E(2) + E(3) + E(4) \right) + E(5) \right]$

$\Rightarrow \quad \tilde{I} = \frac{1}{2} \cdot \left[0 + 2 \cdot (1+2+3+4) + 5 \right] \Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 12,5}$

- $n = 7$

$h = \frac{5-0}{7} \Rightarrow \boxed{h = 0,7143}$

$\therefore \quad \tilde{I} = \frac{0,7143}{2} \cdot \left[E(x_0) + 2 \cdot \left(E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) + E(x_4) + E(x_5) + E(x_6) \right) + E(x_7) \right]$

$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{0,7143}{2} \cdot \left[E(0) + 2 \cdot \left(E(0,7143) + E(1,43) + E(2,14) + E(2,86) + E(3,57) + E(4,29) \right) + E(5) \right]$

$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{0,7143}{2} \cdot \left[0 + 2 \cdot (0+1+2+2+3+4) + 5 \right] \Rightarrow \boxed{\tilde{I} = 10,357}$

b) AHORA CALCULAMOS EL VERDADERO VALOR DE LA INTEGRAL.

$$I = \int_0^5 E(x)\,dx = \int_0^1 E(x)\,dx + \int_1^2 E(x)\,dx + \int_2^3 E(x)\,dx + \int_3^4 E(x)\,dx + \int_4^5 E(x)\,dx$$

$\Rightarrow I = \int_0^1 0 \cdot dx + \int_1^2 1 \cdot dx + \int_2^3 2\,dx + \int_3^4 3\,dx + \int_4^5 4\,dx$

$\Rightarrow I = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \Rightarrow \boxed{I = 10}$

VEMOS QUE EL VALOR MÁS APROXIMADO SE DA PARA $n = 7$, LUEGO PARA $n = 3$ Y EL MÁS ALEJADO ES PARA $n = 5$.

EN NINGÚN CASO SE LLEGA AL VALOR VERDADERO PUESTO QUE ÉSTE MÉTODO NO RESULTA EL MÁS ADECUADO, AUNQUE AL IR DISMINUYENDO EL PASO SE DISMINUIRÁ EL ERROR.

OTROS MÉTODOS EXPLÍCITOS DE 1 PASO.

MÉTODO RUNGE - KUTTA.

$$\boxed{\begin{aligned} w_{j+1} &= w_j + \frac{1}{4}\cdot(q_1 + 3\cdot q_2) \\ q_1 &= h\cdot f(t_j; w_j) \\ q_2 &= h\cdot f\left(t_j + \frac{2}{3}h ; w_j + \frac{2}{3}q_1\right) \end{aligned}}$$

MÉTODO RUNGE - KUTTA DE ORDEN 2

$$\boxed{\begin{aligned} w_{j+1} &= w_j + \frac{1}{2}\cdot(q_1 + q_2) \\ q_1 &= h\cdot f(t_j; w_j) \\ q_2 &= h\cdot f(t_{j+1}; w_j + q_1) \end{aligned}}$$

MÉTODO RUNGE - KUTTA DE ORDEN 4

$$\boxed{\begin{aligned} w_{j+1} &= w_j + \frac{1}{6}\cdot(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \\ q_1 &= h\cdot f(t_j; w_j) \\ q_2 &= h\cdot f\left(t_j + h/2 ; w_j + \frac{1}{2}q_1\right) \\ q_3 &= h\cdot f\left(t_j + h/2 ; w_j + \frac{1}{2}q_2\right) \\ q_4 &= h\cdot f(t_{j+1}; w_j + q_3) \end{aligned}}$$

ALGO MAS DE TEORÍA DE ED. DE 1^er^ ORDEN

CONSISTENCIA

ANALIZA EN QUÉ MEDIDA LA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS APROXIMA A LA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

RECORDAR QUE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PASAN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL A UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS AL APLICAR EL DESARROLLO DE TAYLOR. PUESTO QUE DICHO DESARROLLO NO ES HASTA INFINITO, ENTONCES NO ES EXACTO!

$$\boxed{\tau_j = \frac{Y(t_{j+1}) - Y(t_j)}{h} - f(t_j; Y(t_j))} \rightarrow \text{ERROR DE TRUNCAMIENTO.}$$

MÉTODO HÍBRIDO ENTRE EULER Y EULER IMPLÍCITO

PLANTEANDO LA ECUACIÓN DE DIFERENCIAS...

$$\boxed{w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}\cdot\left[f(t_j;w_j) + f(t_{j+1};w_{j+1})\right]}$$

ESTE MÉTODO SE LLAMA MÉTODO CRANCK - NICHOLSON

AL SER UN MÉTODO IMPLÍCITO DEBE COMBINARSE POR UNO EXPLÍCITO EN UN ESQUEMA PREDICTOR - CORRECTOR.

MÉTODOS MULTIPASOS

HASTA AHORA PARA OBTENER EL VALOR DE UN w UTILIZAMOS EL w DEL PASO ANTERIOR. LOS MÉTODOS MULTIPASOS UTILIZAN MUCHOS VALORES DE MUCHOS PASOS ANTERIORES. EXISTEN MÉTODOS MULTIPASOS IMPLÍCITOS Y EXPLÍCITOS.

MÉTODO DE 2 PASOS (SALTO DE RANA O RAYUELA)

$$\boxed{w_{j+1} = w_{j-1} + 2.h.f(t_j;w_j)}$$

PARA HALLAR w_{j-1} Y w_j UTILIZO UN MÉTODO DE UN PASO. CONVIENE UTILIZAR UN MÉTODO DE UN PASO DE ORDEN 2, COMO POR EJEMPLO EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA.

MÉTODO ADAMS - BASHFORTH (4 PASOS)

$$f(t_j;w_j) = f_j$$

- (menos)

$$\boxed{w_{j+1} = w_j + \frac{h}{24}\cdot\left(55.f_j - 59.f_{j-1} + 37.f_{j-2} + 9.f_{j-3}\right)}$$

PARA CALCULAR LOS VALORES DE ARRANQUE UTILIZO EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA ORDEN 4

MÉTODO DE ADAMS - MOULTON

ES UN MÉTODO IMPLÍCITO.

$$\boxed{w_{j+1} = w_j + \frac{h}{24}\cdot\left(9.f_{j+1} + 19.f_j - 5.f_{j-1} + f_{j-2}\right)}$$

COMO PREDICTOR DE ESTE MÉTODO SE SUELE USAR EL MÉTODO DE ADAMS - BASHFORTH

ESTABILIDAD

ANALIZA CÓMO VARÍA LA SOLUCIÓN DE LA E.D. AL VARIAR LAS CONDICIONES INICIALES - ES UNA PROPIEDAD QUE DEPENDE DEL PROBLEMA QUE SE ESTÉ RESOLVIENDO.

CONVERGENCIA

EXISTE UN TEOREMA QUE ASEGURA QUE SI UN PROBLEMA ES CONSISTENTE Y ESTABLE ENTONCES ES CONVERGENTE.

E.D. ORDINARIAS DE 2^{do} ORDEN

LAS ED ORDINARIAS DE 2^{do} ORDEN SE RESUELVEN PLANTEANDO UN CAMBIO DE VARIABLE Y TRANSFORMANDOLA EN UN SISTEMA DE E.D. ORDINARIAS DE 1^{er} ORDEN, LAS CUALES SE RESUELVEN CON LO VISTO ANTERIORMENTE.

$$\begin{cases} y' = f_1(t;y;z) & y(t_0) = y_0 \\ z' = f_2(t;y;z) & z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

EN LUGAR DE PLANTEAR 1 ECUACIÓN EN DIFERENCIAS VOY A TENER QUE PLANTEAR 2, TAL QUE...

w_j APROXIMA A $y(t_j)$

v_j APROXIMA A $z(t_j)$

RESUELVO LA SIGUIENTE E.D. DE 2^{do} ORDEN:

$$y'' = f_2(t;y;y') \quad \text{con} \quad y(t_0) = y_0$$

TOMO: $z_0 = y'(t_0)$

EL SISTEMA DE E.D. DE 1^{er} ORDEN A RESOLVER SERÁ...

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f_2(t;y;z) \end{cases}$$

→ PUEDE OBSERVARSE COMO LA RESOLUCIÓN DE LA ED DE 2^{do} ORDEN SE TRANSFORMA EN RESOLVER UN SISTEMA DE DOS E.D. DE 1^{er} ORDEN.

MÉTODO DE EULER

$$\boxed{\begin{aligned} w_{j+1} &= w_j + h \cdot f_1(t_j;w_j;v_j) \\ v_{j+1} &= v_j + h \cdot f_2(t_j;w_j;v_j) \end{aligned}}$$

MÉTODO DE RUNGE - KUTTA DE ORDEN 4

$$w_{j+1} = w_j + \frac{1}{6} \cdot (q_1 + 2 \cdot q_2 + 2 \cdot q_3 + q_4)$$

$$v_{j+1} = v_j + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$q_1 = h \cdot f_1 (t_j ; w_j ; v_j)$$

$$k_1 = h \cdot f_2 (t_j ; w_j ; v_j)$$

$$q_2 = h \cdot f_1 (t_j + h/2 ; w_j + \tfrac{1}{2} \cdot q_1 ; v_j + \tfrac{1}{2} k_1)$$

$$k_2 = h \cdot f_2 (t_j + h/2 ; w_j + \tfrac{1}{2} \cdot q_1 ; v_j + \tfrac{1}{2} \cdot k_1)$$

$$q_3 = h \cdot f_1 (t_j + h/2 ; w_j + \tfrac{1}{2} \cdot q_2 ; v_j + \tfrac{1}{2} \cdot k_2)$$

$$k_3 = h \cdot f_2 (t_j + h/2 ; w_j + \tfrac{1}{2} q_2 ; v_j + \tfrac{1}{2} k_2)$$

$$q_4 = h \cdot f_1 (t_{j+1} ; w_j + q_3 ; v_j + k_3)$$

$$k_4 = h \cdot f_2 (t_{j+1} ; w_j + q_3 ; v_j + k_3)$$

MÉTODO SALTO DE RANA.

$$w_{j+1} = w_{j-1} + 2 \cdot h \cdot f (t_j ; w_j)$$

TOMO: $w_{j-1} = v_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{j+1} = v_j + 2 \cdot h \cdot f(t_j ; w_j) \\ v_{j+1} = w_j \end{cases}$$

MÉTODO PREDICTOR - CORRECTOR

$$w_{j+1}^* = w_j + h \cdot f (t_j ; w_j)$$

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t_j ; w_j) + f (t_{j+1} ; w_{j+1}^*) \right]$$

REEMPLAZANDO w_{j+1}^* EN LA CORRECTORA SE OBTIENE UNA SOLA ECUACIÓN EXPLÍCITA.

EJERCICIOS TIPO COLOQUIO

1 DADA LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL: $y''(t) + t^2 \cdot y(t) = 0$ CON $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ Y $t \geq 0$

SE PIDE:

DISCRETIZARLA USANDO EL MÉTODO DE NYSTRÖM, EL CUAL PARA LA ECUACIÓN $y''(t) = f(t; y(t); y'(t))$ PROPONE LA SIGUIENTE ECUACIÓN EN DIFERENCIAS:

$$w_{n+1} - 2 \cdot w_n + w_{n-1} = h^2 \cdot f\left(t_n; w_n; \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2 \cdot h}\right)$$

¿QUÉ TIPO DE MÉTODO RESULTA: EXPLÍCITO, IMPLÍCITO, MULTIPASO, DE PASO SIMPLE? ¿POR QUÉ?

DADO $h = 0{,}1$; ESTIMAR $y(0{,}2)$

DE SER NECESARIO CALCULE w COMO: $w_1 = y(t_0) + h \cdot y'(t_0) + \frac{h^2}{2} \cdot f(t_0; y(t_0); y'(t_0))$

AHORA DISCRETICE LA ECUACIÓN PROPUESTA CON EL MÉTODO DE EULER:

$$w_{n+1} = w_n + h \cdot f(t_n; w_n)$$

PARA ESTE CASO PLANTEE LA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS PARA LAS PERTURBACIONES Y MUESTRE LA MATRIZ DE AMPLIFICACIÓN.

a) DISCRETICÉMOSLA. TENER EN CUENTA QUE SÓLO APARECE EL PARÁMETRO t Y LA VARIABLE y, NO ASÍ LA DERIVADA DE LA VARIABLE.

$$w_{n+1} - 2 \cdot w_n + w_{n-1} = -h^2 \cdot t_n^2 \cdot w_n$$

$$w_{n+1} = 2 \cdot w_n - w_{n-1} - h^2 \cdot t_n^2 \cdot w_n$$

$$\boxed{w_{n+1} = w_n \cdot (2 - h^2 \cdot t_n^2) - w_{n-1}}$$

ÉSTA ÚLTIMA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS NOS QUEDA UN MÉTODO EXPLÍCITO (EL TÉRMINO $n+1$ DEPENDE DEL TÉRMINO EN n Y EN $n-1$) Y MULTIPASO (YA QUE DEPENDE DE LOS DOS PASOS ANTERIORES).

b) COMENZAMOS CON LOS CÁLCULOS.

VAMOS A USAR LA SUGERENCIA PARA ENCONTRAR EL PRIMER PASO, SIN EMBARGO NO ES LA ÚNICA FORMA YA QUE TAMBIÉN PUEDE USARSE EL CONCEPTO DE NODO FANTASMA.

$h = 0{,}1$

$t_0 = 0$

$y(t_0) = 1$

$y'(t_0) = 0$

$$w_1 = y(t_0) + h \cdot y'(t_0) + \frac{h^2}{2} \cdot f(t_0; y(t_0); y'(t_0))$$

$$w_1 = y(t_0) + h \cdot y'(t_0) + \frac{h^2}{2} \cdot (-t_0^2 \cdot y(t_0)) \Rightarrow w_1 = 1 + 0{,}1 \cdot 0 + \frac{(0{,}1)^2}{2} \cdot (-0^2 \cdot 1) \Rightarrow \boxed{w_1 = 1}$$

RESUELVO TAMBIÉN UTILIZANDO EL CONCEPTO DE NODO FANTASMA PARA MOSTRAR CÓMO SE RESUELVE.

$h = 0{,}1$

$t_0 = 0$

$Y(t_0) = 1$

$y'(t_0) = 0 = \dfrac{(w_1 - w_{-1})}{2.h} \Rightarrow \boxed{w_1 = w_{-1}}$

$w_1 = w_0 . (2 - h^2 . t_0^2) - w_{-1} = 1 . (2 - (0{,}1)^2 . 0^2) - w_1$

$\Rightarrow 2 . w_1 = (2 - (0{,}1)^2 . 0^2) . 1 \Rightarrow 2 . w_1 = 2 \Rightarrow \boxed{w_1 = 1}$

FINALMENTE CALCULAMOS w_2 QUE NOS DA LA ESTIMACIÓN DE $Y(0{,}2)$

$h = 0{,}1$

$t_1 = 0{,}1$

$w_2 = w_1 . (2 - h^2 . t_1^2) - w_0 = 1 . (2 - (0{,}1)^2 . (0{,}1)^2) - 1 \Rightarrow \boxed{w_2 = 0{,}9999}$

$\therefore \; Y(0{,}2) \approx w_2 = 0{,}9999$

(c) AHORA DISCRETIZAMOS LA ECUACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE EULER. TENER EN CUENTA QUE DEBEREMOS MODIFICAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE SEGUNDO ORDEN PARA EXPRESARLA COMO UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\begin{cases} x' = f(t; x; y) = y \\ y' = g(t; x; y) = -t^2 . x \end{cases}$$

CON LO CUAL DEBEREMOS EFECTUAR LOS CAMBIOS PARA GENERAR EL SEDO.

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + h . f(t_n; v_n; w_n) \\ w_{n+1} = w_n + h . g(t_n; v_n; w_n) \end{cases}$$

AHORA EXPRESAMOS LA ECUACIÓN A RESOLVER COMO UN SEDO DE PRIMER ORDEN.

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + h . w_n \\ w_{n+1} = w_n - h . t_n^2 . v_n \end{cases}$$

NO SE PIDEN LAS CUENTAS PERO LAS VAMOS A HACER PARA ENTENDER EL PROCEDER.

$$\begin{cases} v_1 = v_0 + h . w_0 \\ w_1 = w_0 - h . t_0^2 . v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 + 0{,}1 . 0 = 1 \\ w_1 = 0 - 0{,}1 . 0^2 . 1 = 0 \end{cases}$$

SEGUIMOS CON LAS CUENTAS...

$$\begin{cases} v_2 = v_1 + h.w_1 \\ w_2 = w_1 - h.t_1^2.v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = 1 + 0,1.0 = 1 \\ w_2 = 0 - 0,1.(0,1)^2.1 = -0,001 \end{cases} \Rightarrow \boxed{w_2 = -0,001}$$

SI NOS FIJAMOS EL VALOR NO ES TAN BUENO COMO EL HALLADO EN a

ANALIZAMOS LA ESTABILIDAD. → PRESTAR ATENCIÓN! NO ESTÁ EXPLICADO EN LA TEÓRICA.

PERTURBEMOS AMBAS ECUACIONES - SE PERTURBA SÓLO LAS VARIABLES, NO EL TIEMPO.

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + h.w_n \\ w_{n+1} = w_n - h.t_n^2.v_n \end{cases}$$

$v_n \to v_n + d_n$

$w_n \to w_n + \varepsilon_n$

$v_{n+1} \to v_{n+1} + d_{n+1}$

$w_{n+1} \to w_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$

→ MATRIZ DE PERTURBACIONES.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ \varepsilon_{n+1} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & h \\ -h.t_n^2 & 1 \end{pmatrix}} . \begin{pmatrix} d_n \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

AHORA ANALIZAMOS EL RADIO ESPECTRAL DE LA MATRIZ DE PERTURBACIONES.

$$M_{\text{PERTURBACIÓN}} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h.t_n^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_p - \lambda.Id) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & h \\ -h.t_n^2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)^2 + (h.t_n)^2 = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 2.\lambda + 1 + (h.t_n)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(1+(h.t_n)^2)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - (1 + (h.t_n)^2)}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-(h.t_n)^2} \quad \text{como } (h.t_n)^2 > 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = 1 \pm h.t_n.i}$$

ENTONCES EL RADIO ESPECTRAL QUEDARÁ:

$$\rho(\lambda_{1,2}) = \max_{1 \le j \le 2} (\|1 \pm h.t_n.i\|) = \max_{1 \le j \le 2} \left(\sqrt{1 + (h.t_n)^2}\right) = \sqrt{1 + (h.t_n)^2} > 1$$

CON LO CUAL EL SISTEMA SERÁ INESTABLE.

2 DADA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE 1er ORDEN $y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2$

CON $y(1) = -1$ y $t \geq 1$

SE PIDE:

ESTIMAR $y(1,2)$ USANDO EL MÉTODO PREDICTOR - CORRECTOR:

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + h \cdot f_n \\ w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f_n + f_{n+1}] \end{cases}$$

CON $h = 0{,}1$ y $f_n = f(t_n; w_n)$

IDEM (a) CON EL MÉTODO $w_{n+1} = w_{n-1} + 2 \cdot h \cdot f_n$. SI PRECISA VALORES DE ARRANQUE CALCÚLELOS CON EL MÉTODO DE (a).

COMPARAR LOS RESULTADOS DE (a) Y (b) CON EL VALOR VERDADERO, SABIENDO QUE $y(t) = -\frac{1}{t}$

(a) EL MÉTODO DADO ES EL MÉTODO DE SEGUNDO ORDEN LLAMADO MÉTODO DE EULER MODIFICADO Ó MÉTODO DE CRANCK-NICHOLSON.

EFECTUAREMOS LOS CÁLCULOS CON EL MISMO:

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_{n+1}^{(0)} = w_n + h \cdot f(t_n; w_n) \\ w_{n+1}^{(k+1)} = w_n + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t_n; w_n) + f(t_{n+1}; w_{n+1}^{(k)}) \right] \end{cases}$$

AHORA USAMOS LA FUNCIÓN PARA EFECTUAR LOS CÁLCULOS:

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_{n+1}^{(0)} = w_n + h \cdot \left[\frac{1}{t_n^2} - \frac{w_n}{t_n} - w_n^2 \right] \\ w_{n+1}^{(k+1)} = w_n + \frac{h}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{t_n^2} - \frac{w_n}{t_n} - w_n^2 \right) + \left(\frac{1}{t_{n+1}^2} - \frac{w_{n+1}^{(k)}}{t_{n+1}} - w_{n+1}^{(k)\,2} \right) \right] \end{cases}$$

REEMPLAZAMOS POR LOS VALORES DADOS COMENZAMOS CON LOS CÁLCULOS:

$$\begin{cases} w_1 = w_1^{(0)} = w_0 + h \cdot \left[\frac{1}{t_0^2} - \frac{w_0}{t_0} - w_0^2 \right] \\ w_1^{(1)} = w_0 + \frac{h}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{t_0^2} - \frac{w_0}{t_0} - w_0^2 \right) + \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{w_1^{(0)}}{t_1} - w_1^{(0)\,2} \right) \right] \end{cases}$$

TENER EN CUENTA QUE PARA LLEGAR A $t = 1{,}2$ CON UN PASO DE CÁLCULO DE $h = 0{,}1$ DEBEREMOS EFECTUAR 2 PASOS DE CÁLCULO.

COLOQUIO - (1.

$h=0{,}1$

$w_0=-1$

$t_0=1$

$$\begin{cases} w_1 = w_1^{(0)} = (-1)+0{,}1\cdot\left[\frac{1}{1^2}-\frac{(-1)}{1}-(-1)^2\right] \\ w_1^{(1)} = (-1)+0{,}05\cdot\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{(-1)}{1}-(-1)^2\right)+\left(\frac{1}{(1{,}1)^2}-\frac{w_1^{(0)}}{1{,}1}-w_1^{(0)2}\right)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_1^{(0)} = (-1)+0{,}1\cdot[1+1-1] = -0{,}9 \\ w_1^{(1)} = (-1)+0{,}05\cdot\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{(-1)}{1}-(-1)^2\right)+\left(\frac{1}{(1{,}1)^2}-\frac{(-0{,}9)}{1{,}1}-(-0{,}9)^2\right)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_1^{(1)} = (-1)+0{,}05\cdot[(1+1-1)+(0{,}82645+0{,}81818-0{,}81)] \Rightarrow \boxed{w_1^{(1)}=-0{,}90827}$$

LUEGO DE ESTOS CÁLCULOS OBTUVIMOS UNA ESTIMACIÓN PARA $Y(1{,}1)$.

VOLVEMOS A EFECTUAR LOS CÁLCULOS.

$h=0{,}1$

$w_1=-0{,}90827$

$t_1=1{,}1$

$$\begin{cases} w_2 = w_2^{(0)} = (-0{,}90827)+0{,}1\cdot\left[\frac{1}{(1{,}1)^2}-\frac{(-0{,}90827)}{1{,}1}-(-0{,}90827)^2\right] \\ w_2^{(1)} = (-0{,}90827)+0{,}05\cdot\left[\left(\frac{1}{(1{,}1)^2}-\frac{(-0{,}90827)}{1{,}1}-(-0{,}90827)^2\right)+\left(\frac{1}{(1{,}2)^2}-\frac{w_2^{(0)}}{1{,}2}-w_2^{(0)2}\right)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_2 = w_2^{(0)} = (-0{,}90827)+0{,}1\cdot[0{,}82645+0{,}8257-0{,}82495] = -0{,}82555 \\ w_2^{(1)} = (-0{,}90827)+0{,}05\left[(0{,}82645+0{,}8257-0{,}82495)+\left(\frac{1}{(1{,}2)^2}-\frac{(-0{,}82555)}{1{,}2}-(-0{,}82555)^2\right)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_2^{(1)} = (-0{,}90827)+0{,}05\cdot[(0{,}8272)+(0{,}69444+0{,}68796-0{,}68153)]$$

$$\Rightarrow \boxed{w_2^{(1)}=-0{,}83187}$$

Y LLEGAMOS A LA ESTIMACIÓN DE $Y(1{,}2) \Rightarrow Y(1{,}2)\cong -0{,}83187$

(b) EL MÉTODO DADO ES EL MÉTODO DE SEGUNDO ORDEN MULTIPASO DENOMINADO SALTO DE RANA.

RECORDAR QUE DEBEREMOS USAR UN VALOR PARA EL PRIMER PASO (USAREMOS EL DE (a))

$$w_{n+1} = w_{n-1} + h \cdot f(t_n ; w_n)$$

$$w_{n+1} = w_{n-1} + h \cdot \left[\frac{1}{t_n^2} - \frac{w_n}{t_n} - w_n^2 \right]$$

AHORA CALCULAMOS SÓLO EL w_2 YA QUE EL w_0 ES DATO Y EL w_1 LO SACAMOS DEL CÁLCULO DE ②...

$$w_2 = w_0 + h \cdot \left[\frac{1}{t_1^2} - \frac{w_1}{t_1} - w_1^2 \right]$$

$$\Rightarrow \quad w_2 = (-1) + 0{,}1 \cdot \left[\frac{1}{(1{,}1)^2} - \frac{(-0{,}90827)}{1{,}1} - (-0{,}90827)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \quad w_2 = (-1) + 0{,}1 \cdot \left[0{,}82645 + 0{,}8257 - 0{,}82495 \right] = (-1) + 0{,}1 \cdot 0{,}8272$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{w_2 = -0{,}91728} \quad \therefore \quad Y(1{,}2) \cong -0{,}91728$$