

**Facultad de Ingeniería,
Universidad de Buenos Aires**

**[75.12 -95.04] Análisis Numérico I,
Departamento de Computación**

Trabajo práctico 2:
1er cuatrimestre, 2019

Grupo 2

Nombre	Padrón	Mail
Rodrigo Cardella Manzur	102596	rodricardellamanzur@gmail.com
Federico del Mazo	100029	delMazoFederico@gmail.com
Froy Dennis Sarasi Merino	101691	froysarasi@gmail.com
Valentina Trotta	102604	Valentina.trotta98@gmail.com

Fecha de entrega: 26 de Junio de 2019

Temática a tratar: Aplicación de diferentes métodos para encontrar una aproximación a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Palabras Clave: Diferenciabilidad, aproximación, métodos numéricos, exactitud.

I - Introducción:

El siguiente trabajo práctico reside en encontrar una solución al problema de los tres cuerpos restringidos de Euler de forma numérica. El objetivo radica en lograr calcular a través de distintos métodos numéricos la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales correspondientes al movimiento de un determinado satélite que se desplaza entre la luna y la tierra, y que por lo tanto, ve su trayectoria afectada a causa de los campos gravitatorios ejercidos por cada uno de estos objetos. Finalmente, se propone realizar una comparación entre los resultados aportados por cada uno de estos métodos, y la solución *exacta*, que va a ser considerada como aquella provista por el software de trabajo a lo largo de esta tarea, Octave.

II - Introducción teórica:

El problema que se plantea como caso de estudio radica en la descripción de un movimiento, a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Por lo tanto, resulta intuitivo desprender la comprensión de diversos métodos numéricos que no solo permiten sino que facilitan el cálculo de la determinación de la posición de un objeto a lo largo del tiempo.

Como tenemos una ecuación diferencial de *segundo* orden, ello significa que el sistema que modela la trayectoria del satélite considerado viene dado por expresiones cuyo mayor grado de la derivada es dos. Aunque supuesto como conocido a estas alturas, una ecuación diferencial es aquella que combina una ecuación “y” y su derivada. Si bien muchas veces estas ecuaciones se prestan hacia su solución analítica, la complejidad de algunas resoluciones conlleva a la resolución de estas ecuaciones a través de métodos numéricos, que originalmente se dieron a partir de mecanismos de resolución para ecuaciones diferenciales de primer orden.

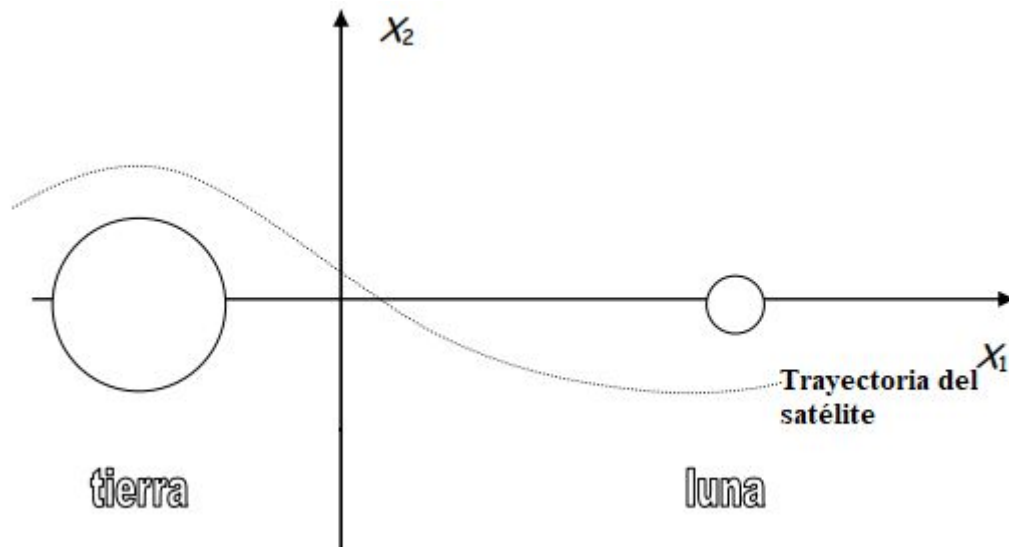
Por ejemplo, existe un método (Euler), que se desarrolla en el próximo apartado, que fue el pionero de las resoluciones diferenciales por este tipo. Si además al sistema que es caso de estudio se le imponen ciertas condiciones (como la que bien podría venir dada por un punto en la que un auto tiene que pasar por una determinada pista a cierto lapso de tiempo de estudio, con una dada velocidad y aceleración), el problema adquiere la denominación de problema de valores iniciales. Precisamente es ese tipo de sistemas los que se desarrollan en el presente trabajo (es decir, a partir de una dada velocidad y posición del satélite en un determinado instante de tiempo inicial). Ahora bien, el único problema existente que se presenta es que, como se mencionó previamente, la ecuación que representa la trayectoria del satélite es una EDO de segundo orden, mientras que los métodos que hasta ahora son conocidos, sirven para la resolución de ecuaciones de primer orden. De lo anterior resulta inmediato que ha de aplicarse una transformación al sistema considerado a modo de posibilitar el cálculo de los mismos a través de los métodos más “sencillos” y conocidos de resolución. Para ello, en el trabajo se tendrá que realizar una *discretización* del sistema, ó, dicho de otra forma, un pasaje de la ecuación de segundo orden a otra de primer orden.

A continuación, se procede a la explicación más detallada y abarcativa de cada uno de estos métodos.

III - Desarrollo:

Todo tipo de movimiento viene descrito por una posición, una velocidad y una aceleración.

En este caso, el movimiento del satélite entre la luna y la tierra viene a estar simplificado desde una perspectiva bidimensional según:



De materias previas, se sabe que:

$$Velocidad = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

$$Aceleración = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

Por lo que, como el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto en el enunciado del TP es de la forma:

$$\begin{aligned} x_1'' &= 2 \cdot x_2' + x_1 - \eta \cdot \frac{x_1 + \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{x_1 - \eta}{d_2^3} \\ x_2'' &= -2 \cdot x_1' + x_2 - \eta \cdot \frac{x_2}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{x_2}{d_2^3} \end{aligned}$$

lo que se puede realizar es una redefinición de variables en función de los parámetros físicos previamente definidos de lo que se podría llegar a decir que:

$$\begin{aligned} x_1' &= v_1, \text{ siendo } v_1 \text{ la velocidad del satélite en el eje } x_1 \\ x_2' &= v_2, \text{ siendo } v_2 \text{ la velocidad del satélite en el eje } x_2 \end{aligned}$$

Por otro lado, si se realiza un análisis más profundo de la expresión (2) se llega a que:

$$\begin{aligned}x_1'' &= v_1' \\x_2'' &= v_2'\end{aligned}$$

lo cual tiene una implicancia **muy importante** puesto que, de esa forma, se logran redefinir variables que permiten hacer de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, uno de primer orden.

Reemplazando lo antedicho en nuestro sistema se llega, entonces, a que:

$$v_1' = 2 \cdot v_2 + x_1 - \eta \cdot \frac{x_1 + \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{x_1 - \eta}{d_2^3}$$

$$v_2' = -2 \cdot v_1 + x_2 - \eta \cdot \frac{x_2}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{x_2}{d_2^3}$$

$$x_1'' = v_1'$$

$$x_2'' = v_2'$$

y si al mismo además se le imponen dos condiciones iniciales (es decir, que cuando el satélite pase por la posición x_1 la velocidad del mismo sea v_1 y lo mismo con x_2), se llega a la expresión del sistema discretizado que adquiere la forma:

$$\begin{cases} v_1' = 2 \cdot v_2 + x_1 - \eta \cdot \frac{x_1 + \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{x_1 - \eta}{d_2^3} \\ v_2' = -2 \cdot v_1 + x_2 - \eta \cdot \frac{x_2}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{x_2}{d_2^3} \\ x_1'' = v_1' \\ x_2'' = v_2' \\ \left. \begin{aligned} x_1(t_0) &= x_1 \\ v_1(t_0) &= v_1 \\ x_2(t_0) &= x_2 \\ v_2(t_0) &= v_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Condiciones} \\ \text{iniciales} \end{array} \end{cases}$$

Aclaraciones:

$$d_1 = \|(x_1 + \mu, x_2)\| \text{ y } d_2 = \|(x_1 - \eta, x_2)\|$$

$$\mu = \frac{1}{81,3}$$

$$\eta = 1 - \mu$$

El producto interno es el P.I. canónico.

Con esto en mente, podemos aplicar métodos conocidos para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden para nuestro sistema.

En términos prácticos, los algoritmos de los distintos métodos se diseñaron teniendo en mente la idea de que todos compartan la misma interfaz y estructura general: recibir una sistema de ecuaciones, el intervalo en el cual se evalúa, los valores iniciales y el paso que se toma entre iteración e iteración (es decir, la granularidad de la estimación), y luego generar

una matriz de tantas filas como iteraciones e ir llenándola de los distintos valores para las distintas iteraciones con un ciclo definido.

Para facilitar la distribución y comprensión de los distintos métodos a continuación, se divide la sección en distintas partes:

Método Isode:

Como método trivial de resolución de ecuaciones diferenciales se tiene la función LSODE (Livermore Solver for Ordinary Differential Equations), un algoritmo (originalmente diseñado como función de Fortran) ideado por Alan C Hindmarsh. En el paper original en el cual se presentó [1] se describe su funcionamiento y cómo se resuelven los distintos tipos de problemas de valores iniciales. Siendo este un algoritmo tan reconocido de la librería de Octave, se tomará como punto de referencia a la hora de comparar los resultados de los distintos métodos propuestos.

1. Método de Euler:

El primero de los métodos numéricos que nos compete es quizás el más sencillo y fácil de demostrar. Sin embargo, conformémonos con expresiones ya deducidas expresadas en forma genérica y a priori especializado en nuestro caso de estudio.

La resolución para una ecuación diferencial de primer orden, el método de Euler adquiere una expresión de la forma:

$$(CLAVE 1) w_k = w_{k-1} + h \cdot f(t_{k-1}, w_{k-1}),$$

donde $f(t, w)$ bien podría venir dada por, como ejemplo:

$$y' = y + 2 \cdot t,$$

$$\text{donde } f(t, w_k) = y + 2 \cdot t,$$

y w_k representa $y(t)$ un determinado punto considerado.

Ahora, de la misma manera en que podemos generar esa expresión para calcular una ecuación diferencial de primer orden, podemos extrapolar dicha ecuación hacia un *sistema* de ecuaciones diferenciales de *segundo* orden, que, como fue oportunamente mencionado, puede ser descompuesto en otro sistema de dos ecuaciones de primer orden. De lo anterior, se pueden hacer los siguientes reordenamientos.

Si $u' = v$, entonces $u'' = v'$

Sea, entonces, el vector $Y / Y = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2]^t$

Entonces Euler queda definido para estos sistemas como:

$$W_{n+1} = W_n + h \cdot Y_n \text{ donde tanto } W \text{ como } Y \text{ son matrices.}$$

Con otro renombre sencillo, a saber:

$$u_{1n} = w_n$$

$$v_{1n} = g_n$$

$$u_{2n} = j_n$$

$$v_{2n} = z_n$$

Se obtiene que el método de Euler puede calcularse a través de 4 ecuaciones derivadas de **CLAVE 1**, llegando al resultado de:

$$W_{n+1} = W_n + h \cdot Y_n \quad \begin{cases} w_{n+1} = w_n + h \cdot g_n \\ g_{n+1} = g_n + h \cdot v1'_n \\ j_{n+1} = j_n + h \cdot z_n \\ z_{n+1} = z_n + h \cdot v2'_n \end{cases}$$

Para el caso específico del trabajo práctico, w_{n+1} y j_{n+1} vendrían a representar la posición del satélite (w en x_1 y j en x_2) para $t=t_0+h$. Por otro lado, g_{n+1} y z_{n+1} las velocidades en los respectivos ejes. Las expresiones de la velocidad se logran a partir del sistema presentado al comienzo del párrafo.

De lo anterior, el sistema de ecuaciones por Euler se resuelve con:

$$W_{n+1} = W_n + h \cdot Y_n \quad \begin{cases} w_{n+1} = w_n + h \cdot g_n \\ v_{n+1} = v_n + h \cdot \left(2 \cdot z_n + w_n - \eta \cdot \frac{w_n + \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{w_n - \eta}{d_2^3} \right) \\ j_{n+1} = j_n + h \cdot z_n \\ z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(-2 \cdot g_n + j_n - \eta \cdot \frac{g_n}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{g_n}{d_2^3} \right) \end{cases}$$

En términos prácticos, cada fila de la matriz (es decir, iteración) es la fila anterior sumada a la multiplicación del paso (h) y la función evaluada en la fila anterior a la actual.

Antes de seguir con los otros métodos, refiérase al error local que se puede cometer al resolver por discretización por Euler, que tiene la particularidad de ser un método cuyo error es “sencillo” de deducir:

Sea una ecuación diferencial de primer orden:

$$w_k = y(t_k) \approx y(t_{k-1}) + h \cdot f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))$$

$$y(t_k) - y(t_{k-1}) - h \cdot y'(t_{k-1}) = h^2/2 \cdot y''(\xi)$$

Entonces el error de discretización por Euler es:

$$\mathcal{B} = \frac{h}{2} \cdot y''(\xi)$$

por tanto es lógico, según lo que se observa, que a menores h el error será menor. Ahora, hemos de verificar esta “predicción teórica” con los resultados de los algoritmos en Octave, es decir, en la próxima sección.

2. Método de Runge - Kutta:

2.1 ORDEN 2:

Este método puede ser aplicado para resolver una ecuación diferencial de segundo orden, partiendo de:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2} &= f(t, u, v, v') \\ \frac{du}{dt} &= f_1(t, u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= f_2(t, u, v)\end{aligned}$$

Por lo tanto, resolviendo el siguiente sistema se puede llegar a la solución deseada:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2} (f_1(t_n, u_n, v_n) + f_1(t_n + h, u_n + hf_1(t_n, u_n, v_n), v_n + hf_2(t_n, u_n, v_n, v_n')))) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} (f_2(t_n, u_n, v_n, v_n') + f_2(t_n + h, u_n + hf_1(t_n, u_n, v_n), v_n + hf_2(t_n, u_n, v_n, v_n'))))\end{aligned}$$

Pudiendo también reordenarlo de otra manera:

$$\begin{aligned}q_1 &= hf(t_n; u_n) \\ q_2 &= hf(t_n + h; u_n + q_1)\end{aligned}$$

llegando así a que $u_{n+1} = u_n + \frac{q_1 + q_2}{2}$ y de esta manera, aplicado al ejemplo genérico se obtiene:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + \frac{q_{11} + q_{21}}{2} \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{q_{12} + q_{22}}{2},\end{aligned}$$

donde q_i son respectivamente:

$$\begin{aligned}q_{11} &= hf_1(t_n, u_n, v_n) \\ q_{12} &= hf_2(t_n, u_n, v_n) \\ q_{21} &= hf_1(t_n + h, u_n + q_{11}, v_n + q_{12}) \\ q_{22} &= hf_2(t_n + h, u_n + q_{11}, v_n + q_{12})\end{aligned}$$

Para el caso del enunciado se puede aplicar partiendo de:

$$\begin{aligned}u_1 &= x_1 \\ u_2 &= x_2 \\ \frac{du_i}{dt} &= f_{1(i)}(t, u_i, u_j, v_i, v_j) = v_i = x'_i \\ \frac{dv_i}{dt} &= f_{2(i)}(t, u_i, u_j, v_i, v_j) = v'_i = x''_i \\ \frac{dv_1}{dt} &= f_{2(1)}(t, u_i, u_j, v_i, v_j, v'_i, v'_j) = v'_1 = x''_1 = 2v_2 + x_1 - \eta \frac{x_1 + \mu}{(x_1 + \mu x_2)^{3/2}} - \mu \frac{x_1 - \eta}{(x_1 - \eta x_2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = f_2(t, u_i, u_j, v_i, v_j, v_i', v_j') = v_2' = x_2'' = -2v_1 + x_2 - \eta \frac{x_2}{(x_1 + \mu x_2)^{3/2}} - \mu \frac{x_2}{(x_1 - \eta x_2)^{3/2}}$$

Por lo tanto, se calcularán para cada $i = 1, 2$ las expresiones correspondientes de u_{n+1} y v_{n+1} , según:

$$\begin{aligned} u_{n+1(1)} &= u_{n(1)} + \frac{q_{11(1)} + q_{21(1)}}{2} \\ v_{n+1(1)} &= v_{n(1)} + \frac{q_{12(1)} + q_{22(1)}}{2} \\ u_{n+1(2)} &= u_{n(2)} + \frac{q_{11(2)} + q_{21(2)}}{2} \\ v_{n+1(2)} &= v_{n(2)} + \frac{q_{12(2)} + q_{22(2)}}{2} \end{aligned}$$

para lo cual también se necesitan los valores respectivos de q_{jk} para cada $i=1,2$

a. Con $i=1$:

$$\begin{aligned} q_{11(1)} &= h v_{n(1)} \\ q_{12(1)} &= h x_1'' = h \left[2 v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right] \\ q_{21(1)} &= h(v_{n(1)} + q_{12(1)}) = h(v_{n(1)} + h \left[2 v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right]) \\ q_{22(1)} &= h f_2(t_n + h, x_n + q_{11}, v_n + q_{12}) = h x_1''(t_n + h, x_{n(i)} + q_{11(i)}, v_{n(i)} + q_{12(i)}) = \\ q_{22(1)} &= h \left(2(v_{n(2)} + h \left[-2 v_{n(1)} + x_{n(2)} - \eta \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right]) + [x_{n(1)} + h v_{n(1)}] \right. \\ &\quad \left. - \eta \frac{x_{n(1)} + h v_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + h v_{n(1)} + \mu x_2)^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} + h v_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} + h v_{n(1)} - \eta x_2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

b. Para $i=2$:

$$\begin{aligned} q_{11(2)} &= h v_{n(2)} \\ q_{12(2)} &= h x_2'' = h \left[-2 v_{n(1)} + x_{n(2)} - \eta \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right] \\ q_{21(2)} &= h(v_{n(2)} + q_{12(2)}) = h(v_{n(2)} + h \left[-2 v_{n(1)} + x_{n(2)} - \eta \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right]) \\ q_{22(2)} &= h \left[-2(v_1 + h \left[-2 v_{n(1)} + x_{n(2)} - \eta \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right]) + x_2 + h v_{n(2)} \right. \\ &\quad \left. - \eta \frac{x_2 + h v_{n(2)}}{(x_1 + \mu(x_2 + h v_{n(2)}))^{3/2}} - \mu \frac{x_2 + h v_{n(2)}}{(x_1 - \eta(x_2 + h v_{n(2)}))^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

De esta manera, se puede calcular la posición del satélite resolviendo el sistema reemplazando en las ecuaciones correspondientes las expresiones previamente halladas.

$$\begin{aligned} u_{n+1(1)} &= u_{n(1)} + \frac{h v_{n(1)} + h(v_{n(1)} + h \left[2 v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right])}{2} \\ u_{n+1(2)} &= u_{n(2)} + \frac{h v_{n(2)} + h(v_{n(2)} + h \left[-2 v_{n(1)} + x_{n(2)} - \eta \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(2)}}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right])}{2} \end{aligned}$$

En términos prácticos, en cada iteración se calculan los q y luego se genera la nueva fila de la matriz teniendo esos datos en cuenta.

Un detalle de los algoritmos es que si bien inicialmente se optó por recibir por parámetro el orden del método, se terminó decidiendo por no hacer esto y dividir ambos métodos en dos algoritmos (y archivos) distintos, para más explicitud en el código y para consistencia en la interfaz de todos los algoritmos propuestos.

2.2 ORDEN 4:

En este caso, se deberá resolver la siguiente operación para hallar la solución para una ecuación diferencial de primer orden, para así introducirnos en la idea de Runge-Kutta de orden 4, de manera más amena:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \varphi_4}{6}$$

donde φ_i son respectivamente:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= h f(t_n, u_n) \\ \varphi_2 &= h f(t_n + h/2, u_n + \varphi_1/2) \\ \varphi_3 &= h f(t_n + h/2, u_n + \varphi_2/2) \\ \varphi_4 &= h f(t_n + h, u_n + \varphi_3)\end{aligned}$$

Y por lo tanto, de manera análoga para un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden se podrá resolver de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + \frac{\varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 2\varphi_{31} + \varphi_{41}}{6} \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{\varphi_{12} + 2\varphi_{22} + 2\varphi_{32} + \varphi_{42}}{6},\end{aligned}$$

donde:

con φ_i :

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= h f_{1i}(t_n, u_n, v_n) \\ \varphi_{12} &= h f_{2i}(t_n, u_n, v_n) \\ \varphi_{21} &= h f_{1i}(t_n + h/2, u_n + \varphi_{11}/2, v_n + \varphi_{12}/2) \\ \varphi_{22} &= h f_{2i}(t_n + h/2, u_n + \varphi_{11}/2, v_n + \varphi_{12}/2) \\ \varphi_{31} &= h f_{1i}(t_n + h/2, u_n + \varphi_{21}/2, v_n + \varphi_{22}/2) \\ \varphi_{32} &= h f_{2i}(t_n + h/2, u_n + \varphi_{21}/2, v_n + \varphi_{22}/2) \\ \varphi_{41} &= h f_{1i}(t_n + h, u_n + \varphi_{31}, v_n + \varphi_{32}) \\ \varphi_{42} &= h f_{2i}(t_n + h, u_n + \varphi_{31}, v_n + \varphi_{32}).\end{aligned}$$

Reemplazando en estas expresiones para el caso propuesto en el enunciado:

- Para $i=1$

$$\varphi_{11} = h v_{n(1)}$$

$$\varphi_{12} = h \left[2 v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}} \right]$$

$$\varphi_{21} = h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)$$

$$\varphi_{22} = 2(v_{n(2)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]) + x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}}$$

$$\varphi_{31} = h\{v_{n(1)} + [2(v_{n(2)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]) + x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}}]/2\}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{32} = & h[2v_{n(2)} + \{(2(v_{n(2)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]) + x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}}\}/2 \\ & + x_{n(1)} + \{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2 \\ & - \eta \frac{x_{n(1)} + (\{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2) + \mu}{(x_{n(1)} + (\{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2) + \mu x_{n(2)} + A2)^{3/2}} \\ & - \mu \frac{x_{n(1)} + (\{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2) - \eta}{(x_{n(1)} + \{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2 - \eta x_{n(2)} + A2)^{3/2}}] \end{aligned}$$

siendo A2 = $\{h(v_{n(2)} + h[2v_{n(1)} + x_{n(2)} - \eta \frac{x_{n(2)} + \mu}{(x_{n(2)} + \mu x_{n(1)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(2)} - \eta}{(x_{n(2)} - \eta x_{n(1)})^{3/2}}]/2)\}/2$

(se escribe aparte por falta de espacio de hoja para escribirlo sobre la ecuación)

$$\begin{aligned} \varphi_{41} = & h.v_n + h[2v_{n(2)} + \{(2(v_{n(2)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]) + x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} + \mu x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} + hv_{n(1)} - \eta x_{n(2)} + hv_{n(2)})^{3/2}}\}/2 \\ & + x_{n(1)} + \{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2 \\ & - \eta \frac{x_{n(1)} + (\{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2) + \mu}{(x_{n(1)} + (\{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2) + \mu x_{n(2)} + A2)^{3/2}} \\ & - \mu \frac{x_{n(1)} + (\{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2) - \eta}{(x_{n(1)} + \{h(v_{n(1)} + h[2v_{n(2)} + x_{n(1)} - \eta \frac{x_{n(1)} + \mu}{(x_{n(1)} + \mu x_{n(2)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} - \eta}{(x_{n(1)} - \eta x_{n(2)})^{3/2}}]/2)\}/2 - \eta x_{n(2)} + A2)^{3/2}}] \end{aligned}$$

siendo $A2 = \{h(v_{n(2)} + h[2v_{n(1)} + x_{n(2)} - \eta \frac{x_{n(2)} + \mu}{(x_{n(2)} + \mu x_{n(1)})^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(2)} - \eta}{(x_{n(2)} - \eta x_{n(1)})^{3/2}}]/2)\}/2$
(se escribe aparte por falta de espacio de hoja para escribirlo sobre la ecuación)

$$\varphi_{42} = h.(2v_{n(2)} + \varphi_{32}(2) + x_{n(1)} + \varphi_{31}(1) - \eta \frac{x_{n(1)} + \varphi_{32}(1) + \mu}{(x_{n(1)} + \varphi_{32}(1) + \mu x_{n(2)} + \varphi_{32}(2))^{3/2}} - \mu \frac{x_{n(1)} + \varphi_{32}(1) - \eta}{(x_{n(1)} + \varphi_{32}(1) - \eta x_{n(2)} + \varphi_{32}(2))^{3/2}})$$

En φ_{42} se escribieron todas las funciones sin los alfa reemplazados, porque, según entendemos, complican y hacen engorroso el desarrollo de la ecuación, al derivar en una expresión larga y confusa.

Dada la extensión de los anteriores, se informa que se debe proceder de **igual manera** que en $i=1$ para $i=2$ con la premisa que todo aquel subíndice que para los casos anteriores diga (1) ha de pasar a ser (2), y viceversa.

El método es terriblemente tedioso para que, a fin de cuentas, la trayectoria del satélite logre calcularse a través de:

$$u_{n+1i} = u_{ni} + \frac{\varphi_{11i} + 2\varphi_{21i} + 2\varphi_{31i} + \varphi_{41i}}{6}$$

$$u_{n+1j} = u_{nj} + \frac{\varphi_{11j} + 2\varphi_{21j} + 2\varphi_{31j} + \varphi_{41j}}{6}$$

teniendo que realizar los cálculos de todos los alfa previamente señalados, realizando las cuentas correspondientes. La complejidad de este método se prestará a priori para analizar si su complejidad aritmética amerita el esfuerzo que la misma imprime, en función de la precisión de los resultados que se obtengan, con respecto a la solución “exacta”.

En la práctica este algoritmo es mucho más fácil de codificar que lo que la versión analítica parecía prometer. Muy similar al algoritmo de orden 2, simplemente en cada iteración se calculan los q, y luego se genera la nueva fila teniendo en cuenta los 4 distintos q. Es más sencilla la versión programática que la de las cuentas porque se recae mucho en el uso de operaciones vectoriales de Octave: en vez de calcular cada q por separado (y tener 4 sub-q por q), se terminan teniendo solo 4, los originalmente propuestos.

3. Método de Nyström:

Análogo a todos los métodos trabajados previamente, las operaciones a realizar para calcular la solución de una ecuación diferencial por este mecanismo son:

$$(CLAVE 4) u_{i_{n+1}} = 2.u_{i_n} - u_{i_{n-1}} + h^2.f(t_n, u_n, v_n),$$

siendo:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(t_n, u_n, v_n) &= \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \text{b. } v_n &= \frac{u(n+1) - u(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Si hemos de extrapolar lo previamente dicho a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, entonces hemos de escribir **CLAVE 4** dos veces y adaptado a las condiciones del sistema se llega a que:

Dirección y velocidad en x_1 :

$$u_{1_{n+1}} = 2.u_{1_n} - u_{1_{n-1}} + h^2.f(t_n, u_{1_n}, v_{1_n})$$

$$v_n^{(1)} = \frac{u_{n+1}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)}}{2.h}$$

Dirección y velocidad en x_2 :

$$u_{2_{n+1}} = 2.u_{2_n} - u_{2_{n-1}} + h^2.f(t_n, u_{2_n}, v_{2_n})$$

$$v_n^{(2)} = \frac{u_{n+1}^{(2)} - u_{n-1}^{(2)}}{2.h}$$

Por lo tanto el sistema queda definido según:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1n+1} = 2 \cdot u_{1n} - u_{1n-1} + h^2 \cdot 2 \cdot v_{2n} + u_{1n} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n} + \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n} - \eta}{d_2^3} \\ v_n^{(1)} = \frac{u_{n+1}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)}}{2 \cdot h} \\ u_{2n+1} = 2 \cdot u_{2n} - u_{2n-1} + h^2 \cdot -2 \cdot v_{1n} + u_{2n} \cdot \eta \cdot \frac{u_{2n}}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{2n}}{d_2^3} \\ v_n^{(2)} = \frac{u_{n+1}^{(2)} - u_{n-1}^{(2)}}{2 \cdot h} \end{array} \right.$$

Nótese algunos comentarios interesantes para realizar: por un lado $u' = v$ es calculada por el método numérico de la *derivada centrada*. Ello trae como consecuencia que recién se puede calcular la derivada de v_{i1} , puesto que para calcular v_{i0} necesitaría de v_{i-1} , la cual por cuestiones triviales es no existente. Consecuentemente, Ello complica el panorama de querer calcular u_{i1} a partir del método considerado. Consecuentemente, lo que se hace es utilizar un método *iniciador* como bien pudiera ser Euler, y a priori desde u_{i1} calcular las correspondientes respuestas a partir de Nystrom.

En la práctica, primero se calcula la segunda iteración (es decir la segunda fila de la matriz) con el método, como mencionado, de Euler (aunque se optó por no usarlo como función externa, por un lado para tener bien encapsulados y aislados los algoritmos entre sí, y por otro para que, de querer calcularse con otro algoritmo, sea sencillamente reemplazar una línea de código), y luego se itera la matriz y se generan las cuatro columnas de la fila con las ecuaciones planteadas analíticamente. El cálculo de la primera y la última fila por separado (fuera del ciclo) se hace para evitar un error de out of bounds (ya que se necesita retroceder dos pasos para evaluar la función en la iteración actual, si se itera desde la primera posición se intentaría acceder a la iteración -1).

4. Método de Newmark:

Genéricamente, el método numérico obedece al sistema (bajo nomenclatura indicada):

$$\begin{aligned} v &= u' \\ u'' &= v' \\ u_{n+1} &= u_n + h \cdot u'_n + \frac{h^2}{2} \cdot v'_n \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot (v'_n + v'_{n+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema queda definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1}^{(1)} = u_n^{(1)} + h \cdot u_n^{(1)} + \frac{h^2}{2} \cdot (2 \cdot v_n^{(2)} + u_{1n}^{(1)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(1)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(1)} \eta}{d_2^3}) \\ u_{n+1}^{(2)} = u_n^{(2)} + h \cdot u_n^{(2)} + \frac{h^2}{2} \cdot (2 \cdot v_n^{(1)} + u_{1n}^{(2)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(2)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(2)} \eta}{d_2^3}) \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)}(h/2) \cdot (2 \cdot v_n^{(2)} + u_{1n}^{(1)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(1)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(1)} \eta}{d_2^3}) + 2 \cdot v_{n+1}^{(2)} + u_{1n+1}^{(1)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(1)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(1)} \eta}{d_2^3} \\ v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)}(h/2) \cdot (2 \cdot v_n^{(1)} + u_{1n}^{(2)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(2)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(2)} \eta}{d_2^3}) + 2 \cdot v_{n+1}^{(1)} + u_{1n+1}^{(2)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(2)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(2)} \eta}{d_2^3} \end{array} \right.$$

Nótese el impedimento en el cálculo de $v_{n+1}^{(i)}$, pudiendo ser i tanto 1 como 2, a propósito de la dependencia de la derivada segunda con $v_{n+1}^{(j)}$, es decir, para el cálculo de la velocidad, necesito datos o parámetros de funciones que desconozco.

¿Cómo se puede solventar este inconveniente?, despejando una función respecto a la otra, llegando a:

$$v_{n+1}^{(1)} = \frac{v_n^{(1)}(h/2) \cdot (2 \cdot v_n^{(2)} + u_{1n}^{(1)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(1)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(1)} \eta}{d_2^3}) + 2 \cdot [v_n^{(2)}(h/2) \cdot (2 \cdot v_n^{(1)} + u_{1n}^{(2)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(2)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(2)} \eta}{d_2^3}) + u_{1n+1}^{(2)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(2)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(2)} \eta}{d_2^3}) + u_{1n+1}^{(1)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(1)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(1)} \eta}{d_2^3}]}{1-h^2}$$

$v_{n+1}^{(2)}$ se podrá despejar de la relación previamente enunciada:

$$v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)}(h/2) \cdot (2 \cdot v_n^{(1)} + u_{1n}^{(2)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(2)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(2)} \eta}{d_2^3}) + 2 \cdot v_{n+1}^{(1)} + u_{1n+1}^{(2)} \cdot \eta \cdot \frac{u_{1n+1}^{(2)} \mu}{d_1^3} - \mu \cdot \frac{u_{1n-1}^{(2)} \eta}{d_2^3}$$

La relación es muy complicada y larga, sí. Pero la dependencia de la derivada con el parámetro que se desea calcular complica los cálculos.

Sin embargo, en la práctica esto es mucho más sencillo, solo basta con que en cada iteración se evalúe a la función en un vector que contenga 3 elementos de la fila anterior, y el elemento a calcular de la fila actual.

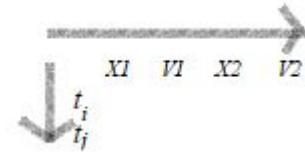
IV - Resultados:

Análoga a la división presentada anteriormente, se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de cada método por subdivisiones:

Nota: Para plasmar los resultados en el informe se utiliza un h mucho más grande (0.2) que el planteado en el enunciado para que la matriz final sea más chica y legible. Sin embargo, los gráficos del final del apartado están hechos con el h propuesto originalmente (0.01)

La manera de posibilitar la lectura es la siguiente:

Cada fila de la matriz tiene 4 columnas. Todos los parámetros expresados en cada fila representan los valores de x_1 (columna 1), v_1 (columna 2), x_2 (columna 3) y v_2 (columna 4), que se obtuvieron para un t_i dado. Básicamente, por cada fila que se descienda en la matriz, se obtienen los resultados correspondientes a $t_j = t_i + h$, donde $j = i + 1$.



Aclaradas estas cuestiones más bien de notación, se procede a informar los resultados obtenidos de las funciones y métodos programados:

Resolución por Isode:

1.20000	0.00000	0.00000	-0.80000
1.17387	-0.25438	-0.15574	-0.73805
1.10215	-0.45248	-0.28926	-0.58574
0.99687	-0.59058	-0.38619	-0.37498
0.86977	-0.67086	-0.43601	-0.11533
0.73217	-0.69702	-0.42912	0.19281
0.59331	-0.68995	-0.35480	0.56331
0.45237	-0.75108	-0.19650	1.04518
0.25026	-1.54320	0.07092	1.56119
-0.20234	-2.11693	0.19829	-0.51603
-0.51306	-1.18383	0.07881	-0.48564

Resultado final para comparar: $x1 = -0.51306$; $x2 = 0.07881$

1. Resolución por Euler:

1.20000	0.00000	0.00000	-0.80000
1.20000	-0.26899	-0.16000	-0.80000
1.14620	-0.50776	-0.32000	-0.68617
1.04465	-0.69337	-0.45723	-0.49336
0.90598	-0.81992	-0.55591	-0.23683
0.74199	-0.87898	-0.60327	0.07645
0.56619	-0.86318	-0.58798	0.44502
0.39356	-0.77282	-0.49898	0.88348

0.23899 -0.63889 -0.32228 1.46587
0.11121 -0.72864 -0.02911 2.59118
-0.03451 -11.60689 0.48913 5.69059

Antes de pasar a ilustrar los resultados que se obtengan por otros métodos, nótese que en la comparación que se obtiene de los resultados en el algoritmo planteado (es decir, con $h=0.01$ vs. $h=0.2$) son mucho más precisos (tomando como referencia la solución por *lsode*) por lo que la predicción teórica que se pudo hacer en el apartado anterior respecto a h en relación a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con el error local de discretización resulta verificada en la práctica.

Errores absolutos para comparar: (todos los métodos se comparan respecto a la mismas filas). Se expresan como errores absolutos en forma de vector según: $(\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2})$. La idea de la elección de estos puntos no es arbitraria, sino para ilustrar el ascenso del error con el número de cuentas.

- Fila 2: (0.0261,0.06195)
- Fila 5:(0.03621,0.12309)
- Fila 11:(0.47855,0.41032)

La iteración 11 presenta un error muy considerable.

2. Resolución por Runge - Kutta:

3.1 Orden 2:

1.20000 0.00000 0.00000 -0.80000
1.17310 -0.25388 -0.16000 -0.74308
1.09928 -0.45582 -0.29713 -0.59097
0.99118 -0.59670 -0.39690 -0.37755
0.86078 -0.67835 -0.44868 -0.11330
0.71987 -0.70407 -0.44272 0.20196
0.57892 -0.69532 -0.36827 0.58433
0.44085 -0.76391 -0.20889 1.08960
0.26908 -1.58317 0.06888 1.54758
-0.20843 -2.00106 0.38709 1.58600
-0.50181 -1.14692 0.06984 1.72509

Errores absolutos para comparar: (todos los métodos se comparan respecto a la mismas filas). Se expresan como errores absolutos en forma de vector según: $(\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2})$.

La idea de la elección de estos puntos no es arbitraria, sino para ilustrar el ascenso del error con el número de cuentas.

- Fila 2: (0.00077,0.00426)
- Fila 5:(0.00899,0.01267)
- Fila 11:(0.01125,0.0897)

Muy preciso, en comparación con el resto, aún a t_i altos.

3.2 Orden 4:

1.20000	0.00000	0.00000	-0.80000
1.17388	-0.25443	-0.15573	-0.73788
1.10216	-0.45246	-0.28921	-0.58554
0.99689	-0.59050	-0.38610	-0.37478
0.86982	-0.67073	-0.43588	-0.11518
0.73226	-0.69688	-0.42897	0.19286
0.59347	-0.68992	-0.35466	0.56311
0.45277	-0.75196	-0.19642	1.04376
0.25310	-1.53794	0.07225	1.52036
-0.14525	-1.93015	0.20921	-0.55167
-0.37290	-0.49087	0.02983	-0.99445

Errores absolutos para comparar: (todos los métodos se comparan respecto a la mismas filas). Se expresan como errores absolutos en forma de vector según: $(\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{x2})$. La idea de la elección de estos puntos no es arbitraria, sino para ilustrar el ascenso del error con el número de cuentas.

- Fila 2: (0.00001,0.00001)
- Fila 5:(0.00005,0.00013)
- Fila 11:(0.14016,0.04898)

Muy preciso, en comparación con el resto, aún a t_i altos.

3. Resolución por Nyström:

1.20000	0.00000	0.00000	-0.80000
1.20000	-0.26899	-0.16000	-0.80000
1.15225	-0.11939	-0.29723	-0.74308
1.06257	-0.34358	-0.42631	-0.66578
0.93421	-0.54508	-0.53148	-0.58561
0.76731	-0.73814	-0.59616	-0.42463
0.56498	-0.92309	-0.59958	-0.17027
0.33259	-1.08681	-0.51131	0.21212

0.07295	-1.23005	-0.27000	0.82395
-0.26571	-1.49573	0.52899	2.60075
-0.35708	-0.22843	1.36513	2.09036

Errores absolutos para comparar: (todos los métodos se comparan respecto a la mismas filas). Se expresan como errores absolutos en forma de vector según: $(\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2})$. La idea de la elección de estos puntos no es arbitraria, sino para ilustrar el ascenso del error con el número de cuentas.

- Fila 2: (0.02613,0.00426)
- Fila 5:(0.06444,0.09547)
- Fila 11:(0.15598,1.28632)

Errores, y por ende imprecisiones muy elevadas en el cálculo de x_2 a $t=11$.

4. Resolución por Newmark:

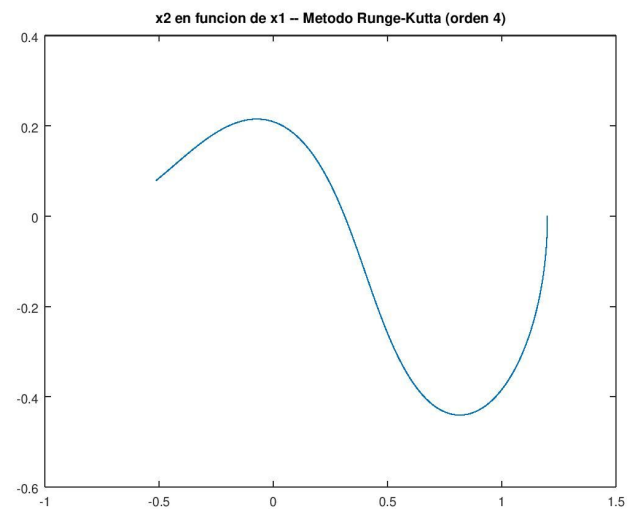
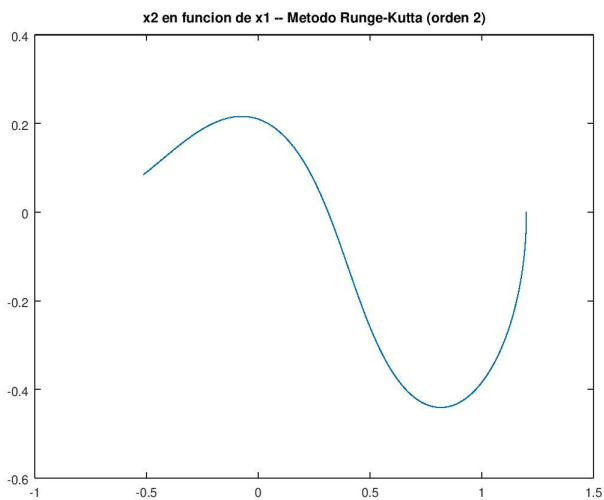
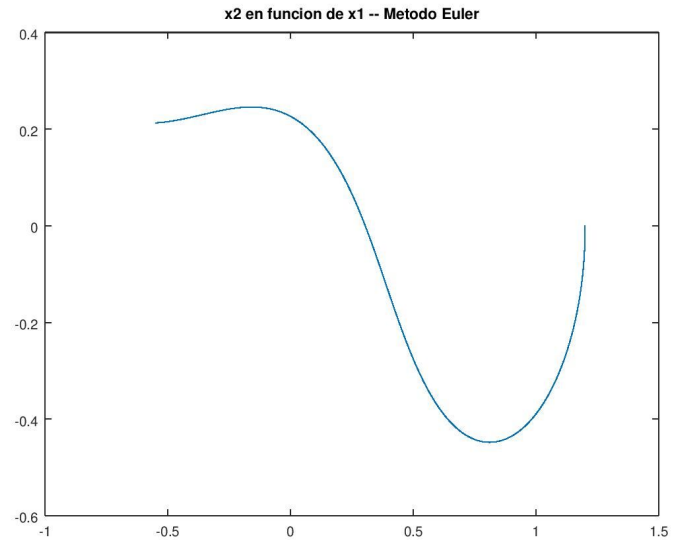
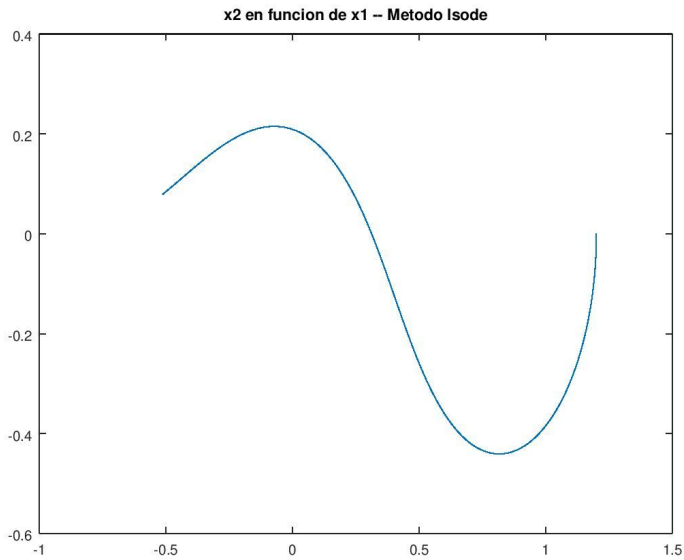
1.20000	0.00000	0.00000	-0.80000
1.17310	-0.28326	-0.16000	-0.79688
1.09125	-0.55653	-0.30672	-0.68292
0.95919	-0.79049	-0.42092	-0.47020
0.78539	-0.98944	-0.48337	-0.15990
0.57774	-1.14180	-0.47285	0.26606
0.34503	-1.24381	-0.36134	0.86024
0.08419	-1.30471	-0.09216	1.76701
-0.90648	-4.56868	1.07798	6.13499
-1.58647	-2.30907	2.50151	8.26825
-1.74807	0.67700	4.29563	9.85748

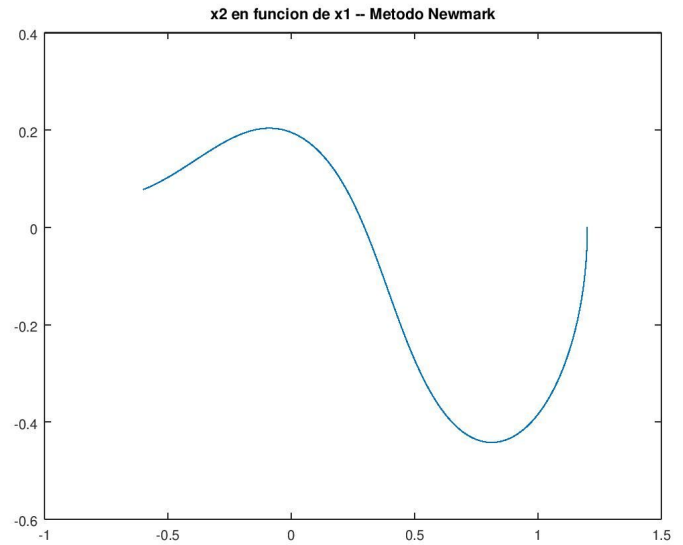
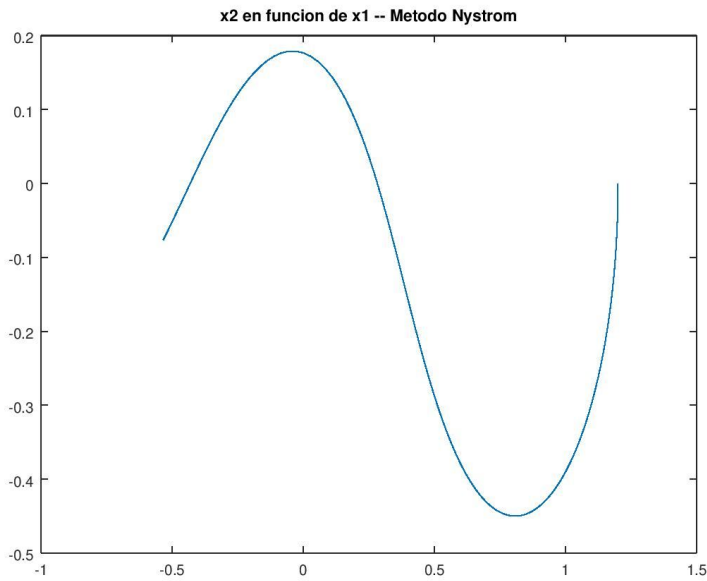
Errores absolutos para comparar: (todos los métodos se comparan respecto a la mismas filas). Se expresan como errores absolutos en forma de vector según: $(\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2})$. La idea de la elección de estos puntos no es arbitraria, sino para ilustrar el ascenso del error con el número de cuentas.

- Fila 2: (0.00077,0.00426)
- Fila 5:(0.08438,0.04736)
- Fila 11:(1.23501,4.21682)

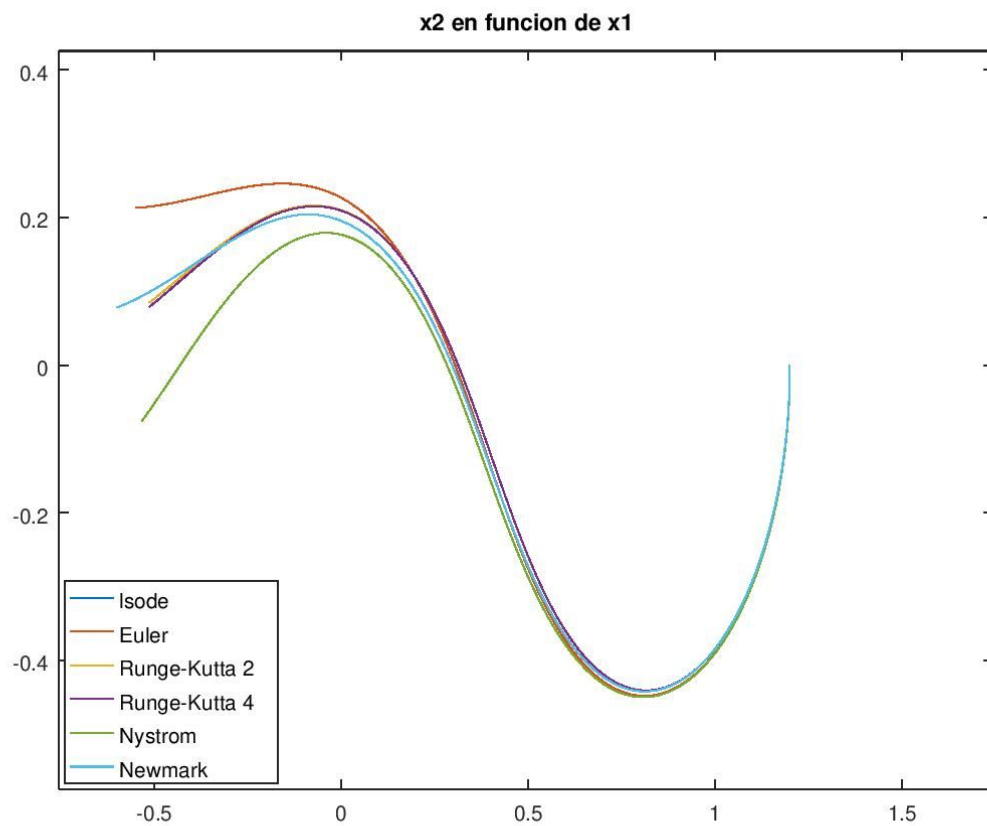
Errores, y por ende imprecisiones extremadamente elevadas, destacándose el error en el cálculo de x_2 a $t=11$.

Acaso porque resulta absurdo no alegar en la practicidad y facilidad en la que se convierte una comparación con los correspondientes gráficos a los distintos métodos, se adjuntan ilustraciones gráficas de los mismos:





Todos los gráficos pueden superponerse y así permitir una perspectiva comparativa más sencilla entre métodos:



V - Conclusiones:

Una de las maneras en la que más fácilmente se puede llegar a intuir la precisión y utilidad de aplicación de estos métodos es a través de una comparación gráfica de los mismos.

A través de Octave, se llegó a la ilustración oportunamente ilustrada en el apartado precedente, usando los algoritmos adjuntos.

En la gráfica se puede apreciar claramente un patrón común, que se condice con los resultados numéricos obtenidos. En lo que concierne las primeras iteraciones (en realidad, más que iteración refiere a n pequeñas, siendo n el número de fila de la matriz presentada con los resultados), se nota que todos los métodos matemáticos aplicados dan resultados aproximadamente coincidentes, por lo que se puede afirmar que los métodos son eficientes en ese rango. Adicionalmente, se aprecia (para ello es necesario comparar los resultados plasmados en el algoritmo a los presentados en el informe), que a h más pequeños, los saltos entre pasos son más chicos, y los errores entre los resultados de aplicar los métodos y l_{sode} son más pequeños. Si bien puntualmente el cálculo y predicción teórica se hizo únicamente vía Euler, una pequeña vista hacia los errores absolutos en el cálculo de la precisión de los métodos a menores h permite corroborar que lo antedicho es aplicable a todos los métodos numéricos estudiados en este práctico.

No obstante, se aprecia que en los pasos sucesivos de cálculo que se realizan, los errores de cálculo aumentan progresivamente para todos los métodos. En ese punto radica y se interpreta la necesaria minimización necesaria en el valor de h . Sin embargo, particularmente en el método de Euler produce otro problema. Euler es un método que minimiza su error a h más pequeños, puesto que sus líneas rectas siguen de manera “más directa” la gráfica de la ecuación diferencial presentada. A pesar de ello, eso deriva en que, a h más pequeños, se requieren mayor cantidad de cálculos para llegar a un número w distanciado de t_0 por $w-t_0=r$. Es decir, para llegar al valor de la función en w hay que realizar mayor cantidad de cálculos hasta saltar r valores y así llegar a la función evaluada en el punto requerido. Lo que se minimiza de error al achicar h , se ve contrarrestado por el aumento en la cantidad de operaciones necesarias. De allí, que el aumento de h tampoco hace a Euler un método precisamente mejor, por lo que es, aún así, conveniente utilizar otros, como Runge-Kutta. Lo que se destaca entre los métodos propuestos es que ambos, Runge Kutta de orden 2 y 4 presentaron los resultados cercanos al original. Esto, en otras palabras, quiere decir que el error absoluto del método es muy pequeño. Esto es intuitivo al comparar los resultados del método con los obtenidos por Euler, puesto que este último se basa en la aproximación de un cálculo de una gráfica similar a una curva por una secuencia de rectas. De allí, que el error por aproximación al aplicar este método es trivial, y más teniendo en cuenta la gráfica del movimiento del satélite obtenida por Octave.

Los resultados obtenidos por la aplicación de Newmark y Nyström no fueron excepción al respecto de la diferencia bastante apreciable del cálculo de la posición del satélite ya para la operación 8. Desde el punto de vista numérico, al aplicar Nyström se tiene un sistema explícito, y se lo quiere resolver a través de un método directo de orden de

consistencia 2. En ese sentido, no hay mucho desde donde se pueda justificar el incremento de los errores en el avance de los saltos, sino a través de alegar dicha disidencia en torno a cuestiones de la que este informe no trata, como por ejemplo la estabilidad. Es probable, entonces, que el método sea inestable o condicionalmente estable, cuando menos, en nuestro caso de aplicación. Básicamente, el hecho que un sistema sea inestable representa un gran impacto en el resultado de la aplicación del método numérico para la ecuación diferencial, si se produce alguna breve modificación en algún parámetro de los necesarios para llevar a cabo los pertinentes cálculos. ¿En dónde estaría la perturbación en el caso de estudio? En las implícitas, pero existentes aproximaciones y errores de truncamiento que Octave realiza en cada sucesiva cuenta de aproximación de cálculo de la ecuación diferencial. Por último, en lo que refiere al cálculo por Newmark, si bien lo comentado al respecto de la estabilidad sigue siendo válido, también se podría llegar a pensar que en vistas de que éste último es un método implícito en el cálculo de $\frac{du}{dt} = v$, y que el sistema considerado es explícito, entonces la precisión de la resolución pudo haberse visto afectada a tales fines.

De todo lo descrito, aquel astrónomo/físico que quiera calcular la posición de un cierto satélite considerado afectado por la influencia gravitatoria de la luna y la tierra puede hacerlo utilizando cualquiera de estos métodos como mecanismo predictor, para después esbozar cálculos más precisos por otros métodos o mecanismos de cálculos. Por lo comentado, también, se le recomienda usar RK, sea de orden 2 o 4, quienes probaron ser los métodos más eficaces y aproximados para la resolución de este sistema.

VI - Referencias:

- [1]: LSODE and LSODI, two new initial value ordinary differential equation solvers
(<https://dl.acm.org/citation.cfm?id=1218054>) [20/6 at 16.59]