GUÍA DE RESOLUCIÓN DE PARCIALES DE ANÁLISIS NUMÉRICO

• EJERCICIO Nro. 1 → SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

- MÉTODO DE GAUSS SIN PIVOTEO (SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS)

EL MÉTODO DE GAUSS CONSISTE EN LLEVAR A LA MATRIZ ORIGINAL A UNA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (U) Y LUEGO HACER LA SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS.

* CUANTO MAYOR ES EL ELEMENTO PIVOTE, MENOR ES EL ERROR DE REDONDEO QUE SE COMETE.

U : MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR / $\boxed{L.U = A}$

L : MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

→ FORMADA POR LOS MULTIPLICADORES Y UNOS EN LA DIAGONAL.

- MÉTODO DE GAUSS CON PIVOTEO PARCIAL (SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS)

SE BASA EN BUSCAR EL ELEMENTO DE MAYOR VALOR ABSOLUTO DE UNA COLUMNA Y LLEVARLO A LA POSICIÓN DE PIVOTE. (COLOCARLO EN LA DIAGONAL)

- MÉTODO DE GAUSS CON PIVOTEO TOTAL (SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS) → NO SE SUELE TOMAR.

SE BASA EN BUSCAR EN TODA LA MATRIZ EL ELEMENTO DE MAYOR VALOR ABSOLUTO Y TRATAR DE LLEVARLO A LA POSICIÓN DE PIVOTE. (COLOCARLO EN LA DIAGONAL)

EJEMPLO: EJERCICIO DE PARCIAL.

SEA EL SIGUIENTE SEL:

$$\begin{bmatrix} 17 & 12 & 8 \\ 1800 & 1{,}2 & 1{,}4 \\ 16 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}83 \\ 18{,}2 \\ -4{,}84 \end{pmatrix}$$

ⓐ HALLAR LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA MEDIANTE EL MÉTODO DE GAUSS SIN PIVOTEO UTILIZANDO UNA GRILLA DE 3 DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y REDONDEO. HALLAR LA DESCOMPOSICIÓN LU RESULTANTE.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 12 & 8 & -3{,}83 \\ 1800 & 1{,}2 & 1{,}4 & 18{,}2 \\ 16 & 9 & 4 & -4{,}84 \end{array}\right) \xrightarrow{1^{er}\text{ PASO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 12 & 8 & -3{,}83 \\ (106) & -1270 & -847 & 424 \\ (0{,}941) & -2{,}3 & -3{,}53 & -1{,}24 \end{array}\right) \xrightarrow{2^{do}\text{ PASO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 12 & 8 & -3{,}83 \\ (106) & -1270 & -847 & 424 \\ (0{,}941) & (0{,}00181) & -2 & -2{,}01 \end{array}\right)$$

1er PASO.

$$m_{21} = \frac{1800}{17} = 106 \qquad m_{31} = \frac{16}{17} = 0{,}941 \quad \Big\} \text{ MULTIPLICADORES}$$

LUEGO...

LA CUENTA DA −1268,8 PERO DEBE TENER 3 CIFRAS SIGNIFICATIVAS SOLAMENTE !! (EL CERO NO ES CIFRA SIGNIFICATIVA)

$$a'_{22} = a_{22} - m_{21}.a_{12} = 1{,}2 - 106 * 12 = 1{,}2 - 1270 = -1270$$

$$a'_{23} = a_{23} - m_{21}.a_{13} = 1{,}4 - 106 . 8 = 1{,}4 - 848 = -847$$

$$b'_2 = b_2 - m_{21} . b_1 = 18{,}2 - 106 . (-3{,}83) = 18{,}2 + 406 = 424$$

$a'_{32} = a_{32} - m_{31} \cdot a_{12} = 9 - 0{,}941 \cdot 12 = 9 - 11{,}3 = -2{,}3$

$a'_{33} = a_{33} - m_{31} \cdot a_{13} = 4 - 0{,}941 \cdot 8 = 4 - 7{,}53 = -3{,}53$

$b'_3 = b_3 - m_{31} \cdot b_1 = -4{,}84 + 0{,}941 \cdot 3{,}83 = -4{,}84 + 3{,}60 = -1{,}24$

2DO PASO

$m_{32} = \dfrac{-2{,}3}{-1270} = 0{,}00181$

$a''_{33} = a'_{33} - m_{32} \cdot a'_{23} = -3{,}53 + 0{,}00181 \cdot 847 = -3{,}53 + 1{,}53 = -2$

$b''_3 = b'_3 - m_{32} \cdot b'_2 = -1{,}24 - 0{,}00181 \cdot 424 = -1{,}24 - 0{,}767 = -2{,}01$

SUSTITUCIÓN INVERSA.

$x_3 = \dfrac{-2{,}01}{-2} \Rightarrow \boxed{x_3 = 1{,}005}$

$-1270\, x_2 - 847 \cdot 1{,}005 = 424 \Rightarrow -1270 \cdot x_2 - 851 = 424 \Rightarrow x_2 = \dfrac{424 + 851}{-1270} \Rightarrow \boxed{x_2 = -1{,}004}$

$17 x_1 - 12 \cdot 1{,}004 + 8 \cdot 1{,}005 = -3{,}83 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-3{,}83 + 12{,}05 - 8{,}04}{17} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0{,}0106}$

$\therefore \boxed{x = \begin{pmatrix} 0{,}0106 \\ -1{,}004 \\ 1{,}005 \end{pmatrix}}$ RTA

$\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 106 & 1 & 0 \\ 0{,}941 & 0{,}00181 & 1 \end{pmatrix}}$ $\boxed{U = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 8 \\ 0 & -1270 & -847 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$

- MÉTODO DE REFINAMIENTO ITERATIVO.

PARA REFINAR LA SOLUCIÓN PRIMERO DEBE DETERMINARSE EL RESIDUO (r), TRABAJANDO PARA ELLO CON DOBLE PRECISIÓN.

SE DEBE RESOLVER EL SIGUIENTE SISTEMA:

$r = b - A \cdot \tilde{x} = A \cdot x - A \cdot \tilde{x} = A \cdot (x - \tilde{x}) = A \cdot d_x$

$\Rightarrow r = A \cdot d_x \Rightarrow p \cdot r = p \cdot A \cdot d_x$ CON $p \cdot A = L \cdot U$

$\Rightarrow p \cdot r = L \cdot U \cdot d_x$ TOMANDO $y = U \cdot d_x \Rightarrow \begin{cases} L \cdot y = p \cdot r & ① \\ U \cdot d_x = y & ② \end{cases}$

EL RESIDUO SE DETERMINA COMO: $\boxed{r = b - A \cdot \tilde{x}}$ ③

$\tilde{x}$: ES LA SOLUCIÓN HALLADA ANTES (PUNTO ③)

p: MATRIZ DE TRASPOSICIÓN.

PROCEDIMIENTO (2)

1º) SE DETERMINA EL RESIDUO (r) UTILIZANDO LA FÓRMULA (3) CON DOBLE PRECISIÓN

2º) SE DETERMINA y UTILIZANDO LA FÓRMULA (1)

3º) SE DETERMINA d_x UTILIZANDO LA FÓRMULA (2).

4º) SE DETERMINA LA NUEVA SOLUCIÓN REFINADA COMO: $\boxed{\tilde{x}_2 = \tilde{x} + d_x}$

EJEMPLO: CONTINUACIÓN EJERCICIO DE PARCIAL

(b) REFINAR LA SOLUCIÓN CON LA LU HALLADA PREVIAMENTE

PARA REFINAR LA SOLUCIÓN DEBO TRABAJAR CON EL RESIDUO RESOLVIENDO EL SIGUIENTE SISTEMA:

$$r = b - A\cdot\tilde{x} = A\cdot x - A\cdot\tilde{x} = A\cdot(x-\tilde{x}) = A\cdot d_x$$

$$\Rightarrow p\cdot r = p\cdot A\cdot d_x \quad \text{CON } p\cdot A = L\cdot U \Rightarrow p\cdot r = L\cdot U\cdot d_x$$

TOMO: $y = U\cdot d_x \Rightarrow \begin{cases} p\cdot r = L\cdot y & (1) \\ y = U\cdot d_x & (2) \end{cases}$

DETERMINO EL RESIDUO UTILIZANDO DOBLE PRECISIÓN:

$$\boxed{r = b - A\cdot\tilde{x}}$$

$$\Rightarrow r = \begin{pmatrix} -3{,}83 \\ 18{,}2 \\ -4{,}84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 12 & 8 \\ 1800 & 1{,}2 & 1{,}4 \\ 16 & 9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}0106 \\ -1{,}004 \\ 1{,}005 \end{pmatrix}$$

EN ÉSTE CASO CON 6 DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y REDONDEO.

$$\Rightarrow r = \begin{pmatrix} -3{,}83 \\ 18{,}2 \\ -4{,}84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17\cdot 0{,}0106 - 12\cdot 1{,}004 + 8\cdot 1{,}005 \\ 1800\cdot 0{,}0106 - 1{,}2\cdot 1{,}004 + 1{,}4\cdot 1{,}005 \\ 16\cdot 0{,}0106 - 9\cdot 1{,}004 + 4\cdot 1{,}005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}83 \\ 18{,}2 \\ -4{,}84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1802 - 12{,}048 + 8{,}04 \\ 19{,}08 - 1{,}2048 + 1{,}407 \\ 0{,}1696 - 9{,}036 + 4{,}02 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r = \begin{pmatrix} -3{,}83 \\ 18{,}2 \\ -4{,}84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3{,}8278 \\ 19{,}2822 \\ -4{,}8464 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \begin{pmatrix} -0{,}0022 \\ -1{,}0822 \\ 0{,}0064 \end{pmatrix}$$

REEMPLAZO EN (1) PARA DETERMINAR y...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}0022 \\ -1{,}0822 \\ 0{,}0064 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 106 & 1 & 0 \\ 0{,}941 & 0{,}00181 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{y_1 = -0{,}0022} \\ 106\cdot y_1 + y_2 = -1{,}0822 \\ 0{,}941\cdot y_1 + 0{,}00181\cdot y_2 + y_3 = 0{,}0064 \end{cases}$$

$$\therefore\ y_2 = -1{,}0822 + 106\cdot 0{,}0022 = -1{,}0822 + 0{,}233 \Rightarrow \boxed{y_2 = -0{,}849}$$

$$y_3 = 0{,}0064 + 0{,}941\cdot 0{,}0022 + 0{,}00181\cdot 0{,}849 = 0{,}0064 + 0{,}00207 + 0{,}00154 \Rightarrow \boxed{y_3 = 0{,}01001}$$

DETERMINO d_x REEMPLAZANDO EN ② ...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 12 & 8 & -0,0022 \\ 0 & -1270 & -847 & -0,849 \\ 0 & 0 & -2 & 0,01001 \end{array}\right)$$

- $d_{x3} = \frac{0,01001}{-2} \Rightarrow \boxed{d_{x3} = -0,005005}$ x

- $-1270 \cdot d_{x2} - 847 \cdot d_{x3} = -0,849 \Rightarrow d_{x2} = \frac{-0,849 - 847 \cdot 0,005005}{-1270} = \frac{-0,849 - 4,24}{-1270}$

$\Rightarrow \boxed{d_{x2} = 0,004007}$ x

- $17 \cdot d_{x1} + 12 \cdot d_{x2} + 8 \cdot d_{x3} = -0,0022 \Rightarrow d_{x1} = \frac{-0,0022 - 12 \cdot 0,004007 + 8 \cdot 0,005005}{17}$

$\Rightarrow d_{x1} = \frac{-0,0022 - 0,04808 + 0,04004}{17} \Rightarrow d_{x1} = \frac{-0,01024}{17} \Rightarrow \boxed{d_{x1} = 0,0006024}$ x

FINALMENTE...

$$x_2 = x_1 + d_x = \begin{pmatrix} 0,0106 \\ -1,004 \\ 1,005 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0006024 \\ 0,004007 \\ -0,005005 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_2 = \begin{pmatrix} 0,0112 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$ RTA

ESTIMACIÓN DE K(A)

K(A) ES EL NÚMERO DE CONDICIÓN DE LA MATRIZ. A PARTIR DEL MISMO SE PUEDE DETERMINAR SI LA MATRIZ ESTÁ BIEN CONDICIONADA O MAL CONDICIONADA.

$$\boxed{K(A) \cong \frac{\|d_x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \cdot b^t}$$

$b = 10$ (GENERALMENTE)

t: INDICADO EN LA GRILLA.

- SI $1 \leq K(A) \leq 100 \Rightarrow$ LA MATRIZ ESTÁ BIEN CONDICIONADA
- SI $K(A) > 100 \Rightarrow$ LA MATRIZ ESTÁ MAL CONDICIONADA.

EL VALOR EXACTO DE K(A) SE DETERMINA COMO: $\boxed{K(A) = \|A\| . \|A^{-1}\|}$

SIN EMBARGO NUNCA SE PIDE YA QUE ES REALIZAR MUCHAS CUENTAS.

EJEMPLO: CONTINUACIÓN EJERCICIO DE PARCIAL.

ⓒ DIFIERE EN ALGO SI SE UTILIZA PIVOTEO PARCIAL O TOTAL. INDICAR SI CON LOS RESULTADOS DE ⓐ Y ⓑ SE PUEDE OBTENER UNA ESTIMACIÓN DE K(A).

AL UTILIZAR PIVOTEO PARCIAL O TOTAL SE COMETE UN MENOR ERROR PUESTO QUE SE BUSCA COLOCAR COMO PIVOTE (EN LA DIAGONAL) EL ELEMENTO DE MAYOR MÓDULO, LO CUAL AFECTA POSITIVAMENTE A LOS MULTIPLICADORES Y POR ENDE AL RESTO DE LA FILA.

EN RESUMEN, SE REDUCE EL ERROR DE REDONDEO PROPIOS DE LOS MÉTODOS DIRECTOS

RESUELVO POR MÉTODO DE GAUSS CON PIVOTEO PARCIAL POR FILAS

③

↳ ES EL MÉTODO QUE SE TOMA SIEMPRE.

NOTA: CUANDO SE RESUELVE CON PIVOTEO PARCIAL O TOTAL TENER CUIDADO EN COMO QUEDA LA MATRIZ P.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 12 & 8 & -3{,}83 \\ 1800 & 1{,}2 & 1{,}4 & 18{,}2 \\ 16 & 9 & 4 & -4{,}84 \end{array}\right) \xrightarrow{1^{er}\text{ PASO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1800 & 1{,}2 & 1{,}4 & 18{,}2 \\ 17 & 12 & 8 & -3{,}83 \\ 16 & 9 & 4 & -4{,}84 \end{array}\right) \xrightarrow{2^{do}\text{ PASO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1800 & 1{,}2 & 1{,}4 & 18{,}2 \\ (0{,}00944) & 12 & 7{,}99 & -4{,}002 \\ (0{,}00889) & 8{,}99 & 3{,}99 & -5{,}002 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3^{er}\text{ PASO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1800 & 1{,}2 & 1{,}4 & 18{,}2 \\ (0{,}00944) & 12 & 7{,}99 & -4{,}002 \\ (0{,}00889) & (0{,}749) & -1{,}99 & -2{,}002 \end{array}\right)$$

1^{er} PASO → INTERCAMBIO $F_1 \leftrightarrow F_2$ (TAMBIÉN SE INTERCAMBIAN EN LA MATRIZ P !!)

2^{do} PASO

$$m_{21} = \frac{17}{1800} = 0{,}00944$$

$$m_{31} = \frac{16}{1800} = 0{,}00889$$

LUEGO...

$$a'_{22} = a_{22} - m_{21} \cdot a_{21} = 12 - 0{,}00944 \cdot 1{,}2 = 12 - 0{,}0113 = 12$$

$$a'_{23} = a_{23} - m_{21} \cdot a_{13} = 8 - 0{,}00944 \cdot 1{,}4 = 8 - 0{,}0132 = 7{,}99$$

$$b'_2 = b_2 - m_{21} \cdot b_1 = -3{,}83 - 0{,}00944 \cdot 18{,}2 = -3{,}83 - 0{,}172 = -4{,}002$$

$$a'_{32} = a_{32} - m_{31} \cdot a_{12} = 9 - 0{,}00889 \cdot 1{,}2 = 9 - 0{,}0107 = 8{,}99$$

$$a'_{33} = a_{33} - m_{31} \cdot a_{13} = 4 - 0{,}00889 \cdot 1{,}4 = 4 - 0{,}0124 = 3{,}99$$

$$b'_3 = b_3 - m_{31} \cdot b_1 = -4{,}84 - 0{,}00889 \cdot 18{,}2 = -4{,}84 - 0{,}162 = -5{,}002$$

3^{er} PASO.

$$m_{32} = \frac{8{,}99}{12} = 0{,}749$$

$$a''_{33} = a'_{33} - m_{32} \cdot a'_{23} = 3{,}99 - 0{,}749 \cdot 7{,}99 = 3{,}99 - 5{,}98 = -1{,}99$$

$$b''_3 = b'_3 - m_{32} \cdot b'_2 = -5{,}002 + 0{,}749 \cdot 4{,}002 = -5{,}002 + 3 = -2{,}002$$

SUSTITUCIÓN INVERSA.

$$x_3 = \frac{-2{,}002}{-1{,}99} \Rightarrow \boxed{x_3 = 1{,}006}$$

$$12 \cdot x_2 + 7{,}99 \cdot 1{,}006 = -4{,}002 \Rightarrow x_2 = \frac{-4{,}002 - 8{,}04}{12} = \frac{-12{,}04}{12} \Rightarrow \boxed{x_2 = -1{,}003}$$

$$1800 \cdot x_1 - 1{,}2 \cdot 1{,}003 + 1{,}4 \cdot 1{,}006 = 18{,}2 \Rightarrow x_1 = \frac{18{,}2 + 1{,}204 - 1{,}408}{1800} = \frac{18}{1800} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0{,}01}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ -1{,}003 \\ 1{,}006 \end{pmatrix}} \text{ RTA}$$

ESTIMACIÓN DE $K(A)$

$$K(A) = \frac{\|dx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \cdot 10^3 = \frac{0{,}005005}{1{,}005} \cdot 10^3 \Rightarrow \boxed{K(A) = 4{,}98} \text{ RTA}$$

COMO $1 \leq K(A) \leq 100 \Rightarrow$ LA MATRIZ ESTÁ BIEN CONDICIONADA.

ALGO MAS DE TEORÍA.

SI $\boxed{|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ con } i \neq j} \Rightarrow$ LA MATRIZ ES ESTRICTAMENTE DIAGONAL DOMINANTE

LA VENTAJA DE ÉSTAS MATRICES ES QUE NO HAY QUE HACER INTERCAMBIO DE FILAS CUANDO SE APLICA GAUSS.

NORMA DE UN VECTOR

$$\| \ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} > 0$$

- NORMA 1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- NORMA 2

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

- NORMA ∞

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI

1º) SE OBTIENEN LAS ECUACIONES DEL SISTEMA DADO

2º) SE PROPONE UNA SOLUCIÓN INICIAL; POR LO GENERAL $x_0 = (0;0;0)$

3º) SE DETERMINAN LAS SIGUIENTES SOLUCIONES A PARTIR DE LAS ANTERIORES.

- MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

1º) SE OBTIENEN LAS ECUACIONES DEL SISTEMA DADO

2º) SE PROPONE UNA SOLUCIÓN INICIAL; POR LO GENERAL $x_0 = (0;0;0)$

3º) SE DETERMINAN LAS SIGUIENTES SOLUCIONES A PARTIR DE LAS ANTERIORES Y DE LAS OBTENIDAS PARA ESA NUEVA SOLUCIÓN.

NOTA: LA DIFERENCIA ENTRE LOS MÉTODOS DE JACOBI Y GAUSS-SEIDEL SE BASA EN QUE EN EL SEGUNDO MÉTODO DEBE UTILIZARSE LOS DATOS MAS RECIENTES HALLADOS PARA DETERMINAR LA SOLUCIÓN; DE ESTA MANERA SE LLEGA A LA SOLUCIÓN FINAL EN MENOS ITERACIONES. (4)

POR JACOBI $\rightarrow$ $x_i^{(k+1)} = f(x_i^{(k)})$

POR GAUSS-SEIDEL $\rightarrow$ $x_i^{(k+1)} = f(x_i^{(k+1)})$ CUANDO ES POSIBLE.

EL PROCESO DE ITERACIÓN SE DETIENE CUANDO:

- $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \varepsilon$

O

- CANTIDAD ITERACIONES $\geqslant N_{MÁX}$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

SI $\boxed{|a_{ii}| > \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \text{ con } i \neq j}$ $\Rightarrow$ LA MATRIZ ES ESTRICTAMENTE DIAGONAL DOMINANTE.

$\hookrightarrow$ LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL SON MAYORES QUE LA SUMA DEL RESTO DE LOS ELEMENTOS DE ESA FILA (TODO EN MÓDULO)

SI A ES ESTRICTAMENTE DIAGONAL DOMINANTE $\Rightarrow$ JACOBI Y GAUSS-SEIDEL CONVERGEN

EJEMPLO: EJERCICIO DE PARCIAL

RESUELVA EL SIGUIENTE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES $A \cdot x = b$;

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) UTILIZANDO EL MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI HASTA QUE $\| x^k - x^{k+1} \| \leq 10^{-2}$

COMO $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ con } i \neq j \Rightarrow$ LA MATRIZ ES ESTRICTAMENTE DIAGONAL DOMINANTE

$\therefore$ EL MÉTODO CONVERGE.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 & (1) \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 & (2) \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 & (3) \end{cases}$$

DE (1) ... $\boxed{x_1 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} x_2}$

DE (2) ... $\boxed{x_2 = \frac{7}{10} + \frac{1}{10} x_1 + \frac{2}{10} x_3}$

DE (3) ... $\boxed{x_3 = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} x_2}$

K	x_1	x_2	x_3	ε
0	0	0	0	—
1	0,9	0,7	0,6	1,288
2	0,97	0,91	0,74	0,262
3	0,991	0,945	0,782	0,0586
4	0,9945	0,9555	0,789	0,01309
5	0,99555	0,95725	0,7911	0,00325 $< 10^{-2}$

→ UTILIZO $x = (0;0;0)$

→ UTILIZO $x = (0,9\,;0,7\,;0,6)$

→ UTILIZO $x = (0,97\,;0,91\,;0,74)$

⋮

$$\rightarrow \boxed{x = \begin{pmatrix} 0,99555 \\ 0,95725 \\ 0,7911 \end{pmatrix}}$$ RTA

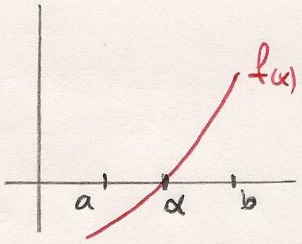
ⓑ IDEM AL PUNTO ⓐ CON EL MÉTODO DE GAUSS – SEIDEL.

K	x_1	x_2	x_3	ε
0	0	0	0	—
1	0,9	0,79	0,758	1,417
2	0,979	0,9495	0,7899	0,1808
3	0,99495	0,957475	0,791495	0,0179
4	0,9957475	0,9578737	0,7915747	0,000895 $< 10^{-2}$

$$\rightarrow \boxed{x = \begin{pmatrix} 0,9957475 \\ 0,9578737 \\ 0,7915747 \end{pmatrix}}$$ RTA

EJERCICIO Nro. 2 → CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE UNA FUNCIÓN.

LOS MÉTODOS QUE SE UTILIZAN SON MÉTODOS ITERATIVOS QUE CONSISTEN EN PROPONER UNA RAÍZ x_0 E IR PROBANDO Y FORMANDO UNA SUCESIÓN DE RAÍCES QUE SEGURAMENTE VAN A CONVERGER A α.



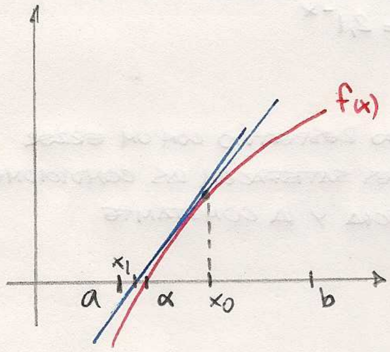
LOS DISTINTOS MÉTODOS DIFIEREN EN LA FORMA EN QUE SE BUSCAN LOS $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$

- MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

ORDEN DE CONVERGENCIA : O.C. = 2

CONSTANTE ASINTÓTICA DEL ERROR = C.A. = 0,485

$$\boxed{C.A. = \frac{f''(x)}{2 \cdot f'(x)}}$$



LA RECTA TANGENTE EN x_0 CORTA AL EJE EN x_1 SI AHORA LA RECTA TANGENTE EN x_1 CORTO EL EJE MAS CERCA DE α

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$ → FÓRMULA GENERAL PARA ITERAR

CONDICIÓN DE PARADA. → $|x_{n-1} - x_n| \leq \varepsilon$ CON ε: ERROR ABSOLUTO PREFIJADO
o → NUMERO DE ITERACIONES.

CONDICIONES DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO

1ª) $f'_{(x)} \neq 0$ EN $[a;b]$
2ª) $f''_{(x)}$ MANTENGA EL SIGNO EN $[a,b]$

} ES DECIR QUE $f_{(x)}$ DEBE SER MONÓTONA CRECIENTE Ó DECRECIENTE.

PROCEDIMIENTO.

1ª) VERIFICAR QUE HAYA UNA RAÍZ EN EL INTERVALO DADO ANALIZANDO LA FUNCIÓN EN LOS EXTREMOS.

2ª) VERIFICAR QUE SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO (TPF)

3ª) DETERMINAR LA FUNCIÓN DE ITERACIÓN DE NEWTON-RAPHSON E ITERAR

- MÉTODO DE ITERACIÓN DE PUNTO FIJO.

PASAMOS DE UN PROBLEMA DEL TIPO $f(x)=0$ A OTRO DEL TIPO $g(x)=x$ DONDE LOS PUNTOS FIJOS DE $g(x)$ SON RAÍCES DE $f(x)$

CONDICIONES DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO. (TPM)

1] $g(x)$ ES CONTINUA EN $[a,b]$

2] $g(x): [a,b] \rightarrow [a,b]$

3] $|g'(x)| \leq k < 1$ → ÉSTA NO SE DEMUESTRA NUNCA.

EJEMPLO : EJERCICIO DE PARCIAL

DADA LA FUNCIÓN $f(x) = x - 2{,}1^{x}$; SE PIDE ENCONTRAR EL CERO DE $f(x)$ QUE SE ENCUENTRA EN EL INTERVALO $[0;1]$

(a) MEDIANTE LA FUNCIÓN DE ITERACIÓN DE PUNTO FIJO $g_1(x) = 2{,}1^{-x}$

(b) MEDIANTE EL MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON.

EN AMBOS CASOS EFECTÚE LOS CÁLCULOS PARA LLEGAR AL PUNTO FIJO RESPECTIVO CON UN ERROR ABSOLUTO MENOR QUE $\mathcal{E} = 10^{-4}$. VERIFIQUE SI AMBAS FUNCIONES SATISFACEN LAS CONDICIONES DE TPF. CALCULE EN AMBOS CASOS EL ORDEN DE CONVERGENCIA Y LA CONSTANTE ASINTÓTICA DEL ERROR.

(a) $g(x) = 2{,}1^{-x}$

SOLUCIÓN INICIAL : $x_0 = 0$

ITERACIÓN : $\boxed{x_{n+1} = g(x_n)}$

n	x	g(x)	$\mathcal{E}$
0	0	1	
1	1	0,476190476	
2	0,476190476	0,702363995	
3	0,702363995	0,593860695	
4	0,593860695	0,643645212	
5	0,643645212	0,620304731	
6	0,620304731	0,631140205	
7	0,631140205	0,626086656	
8	0,626086656	0,628438522	
9	0,628438522	0,627342893	
10	0,627342893	0,627855306	
11	0,627855306	0,627615455	
12	0,627615455	0,627726106	$0{,}0001106 > 10^{-4}$
13	0,627726106	0,627674574	$0{,}0000515 < 10^{-4}$

$\therefore$ $\boxed{\alpha = 0{,}627674574}$ RTA

(b) (6)

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

SIENDO...

$$f(x) = x - 2{,}1^{-x} = x - e^{\ln(2{,}1^{-x})} \Rightarrow \boxed{f(x) = x - e^{-x.\ln(2{,}1)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 1 + e^{-x.\ln(2{,}1)} . \ln(2{,}1)}$$

POR LO TANTO...

$$\boxed{\phi(x) = x - \frac{x - 2{,}1^{-x}}{1 + e^{-x.\ln(2{,}1)} . \ln(2{,}1)}}_{x}$$

SOLUCIÓN INICIAL : $x_0 = 0$

ITERACIÓN : $\boxed{x_{n+1} = \phi(x_n)}$

n	x	$\phi(x)$	ε
0	0	0,57407346	
1	0,57407346	0,6273473399	
2	0,6273473399	0,627690933	0,000343 > 10^{-4}
3	0,627690933	0,627690947	0,0000000014 < 10^{-4}
4			

$\therefore$ $\boxed{\alpha = 0{,}627690947}$ RTA

VERIFICO QUE LAS DOS FUNCIONES SATISFACEN LAS CONDICIONES DE TPF

- PARA $g(x)$

1) $g(x)$ ES CONTINUA EN $[0;1]$

2) $g(x) : [0;1] \to [0;1]$

$g(0) = 1 \in [0;1]$

$g(1) = 0{,}47619... \in [0;1]$

DEBO VERIFICAR QUE PASA DENTRO DEL INTERVALO :

$g'(x) = e^{-x.\ln(2{,}1)} . (-\ln(2{,}1)) < 0 \ \forall\ x \in [0;1] \Rightarrow$ $g(x)$ ES MONÓTONA DECRECIENTE.

COMO $g(x)$ ES MONÓTONA DECRECIENTE $\Rightarrow$ NO HAY NINGÚN PUNTO EN DONDE $g'(x) = 0$ Y TENGA UN "PICO" QUE SE ESCAPE DEL INTERVALO.

- PARA $\phi(x)$

1) $\phi(x)$ ES DISCONTINUA $\Leftrightarrow 1 + e^{-x.\ln(2{,}1)} . \ln(2{,}1) = 0$

$\nexists\, x \in [0;1] \,/\, 1 + e^{-x.\ln(2{,}1)} . \ln(2{,}1) = 0 \Rightarrow \phi(x)$ ES CONTINUA $\forall\ x \in [0;1]$

2) $\phi(x) : [0;1] \to [0;1]$

$\phi(0) = 0{,}57407... \in [0;1]$

$\phi(1) = 0{,}613... \in [0;1]$

DEBO ANALIZAR QUÉ PASA DENTRO DEL INTERVALO:

YO SÉ QUE $f(\alpha)=0$, $\phi(\alpha)=\alpha$ Y $\phi'(\alpha)=0$

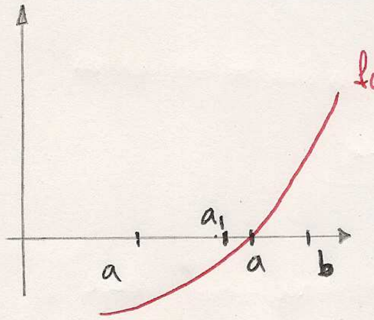
COMO $\phi(x)$ POSEE UN EXTREMO LOCAL EN α Y $\phi(\alpha)=\alpha$ Y POR HIPÓTESIS $\alpha \in [0;1]$

$\Rightarrow$ PUEDE AFIRMARSE QUE $\phi(x): [0;1] \to [0;1]$

- MÉTODO DE LA BISECCIÓN → POCO USUAL QUE SE TOME.

ORDEN DE CONVERGENCIA = O.C. = 1

CONSTANTE ASINTÓTICA DEL ERROR = C.A. = 0,5



SE PROCEDE TOMANDO EL PUNTO MEDIO DEL INTERVALO DADO Y ANALIZANDO LA FUNCIÓN EN LOS EXTREMOS Y PUNTO MEDIO PARA DETERMINAR EL NUEVO INTERVALO A ANALIZAR, Y ASÍ SUCESIVAMENTE HASTA HALLAR α.

UNA PROPIEDAD IMPORTANTE DE ESTE MÉTODO ES QUE **SIEMPRE** CONVERGE A LA RAÍZ (α)

CÓMO ESTABLECER LA CANTIDAD DE ITERACIONES PREVIAMENTE.

$$\boxed{\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon}$$

n: NÚMERO DE ITERACIONES

$a_0; b_0$: EXTREMOS DEL INTERVALO INICIAL

ε: ERROR ADMITIDO.

EJEMPLO: EJERCICIO DE PARCIAL

SEA LA FUNCIÓN $f(x) = \ln\left(\frac{x}{5}\right) + x^2$. SE DESEA ENCONTRAR EL CERO QUE POSEE DICHA FUNCIÓN EN EL INTERVALO $[1;2]$.

(a) ENCONTRAR EL CERO POR EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN CON UN ERROR ABSOLUTO DE 10^{-2}. ESTIMAR PREVIAMENTE LAS ITERACIONES NECESARIAS.

(a) PARA DETERMINAR EL NRO. DE ITERACIONES UTILIZO LA SIGUIENTE FÓRMULA:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{2-1}{0{,}01} \leq 2^{n+1} \Rightarrow \log_2(100) \leq n+1 \Rightarrow \frac{\log_{10}(100)}{\log_2(2)} - 1 \leq n$$

$$\Rightarrow n \geq 5{,}644 \Rightarrow \boxed{n \geq 6} \text{ RTA}$$

n	a	b	Xm	f(a)	f(b)	f(Xm)
1	1	2	1,5	<0	>0	>0
2	1	1,5	1,25	<0	>0	>0
3	1	1,25	1,125	<0	>0	<0
4	1,125	1,25	1,1875	<0	>0	<0
5	1,1875	1,25	1,21875	<0	>0	>0
6	1,1875	1,21875	1,203125	<0	>0	>0

COMO $f(1{,}1875) < 0$ Y $f(1{,}203125) > 0$ LLEGANDO A LA SEXTA ITERACIÓN 7

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{SE PUEDE AFIRMAR QUE } \exists\, \alpha \in [1{,}1875 ; 1{,}203125] \,/\, f(\alpha) = 0}$ RTA

• EJERCICIO Nro. 3 → POLINOMIO INTERPOLANTE.

- MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE NEWTON

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i;x_{i+1}]$ $\equiv f'(x_i)$	$f[x_i;x_{i+1};x_{i+2}]$	$f[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0;x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0;x_1;x_2]$	
		$f[x_1;x_2]$		$f[x_0;x_1;x_2;x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1;x_2;x_3]$	
		$f[x_2;x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

$$\boxed{f[x_i;x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}} \qquad \boxed{f[x_i;x_{i+1};x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1};x_{i+2}] - f[x_i;x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}}$$

EL POLINOMIO QUEDA FORMADO POR...

$$\boxed{P(x) = f(x_3) + f[x_2;x_3].(x-x_3) + f[x_1;x_2;x_3].(x-x_3)(x-x_2) + f[x_0;x_1;x_2;x_3].(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)}$$

O BIEN...

$$\boxed{P(x) = f(x_0) + f[x_0;x_1].(x-x_0) + f[x_0;x_1;x_2].(x-x_0)(x-x_1) + f[x_0;x_1;x_2;x_3].(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

DE CUALQUIERA DE LAS DOS MANERAS SE LLEGA A LO MISMO.

NOTA: UNA VEZ HALLADO EL POLINOMIO DEBE VERIFICARSE QUE SE CUMPLAN LAS CONDICIONES DADAS.

EJEMPLO: EJERCICIO DE PARCIAL

DADAS LAS SIGUIENTES 5 CONDICIONES, SE PIDE HALLAR EL POLINOMIO INTERPOLANTE DE MENOR GRADO QUE SATISFAGA.

x	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$
-1	0	1
0	1	NO
1	0	1

$\boxed{\text{GRADO DEL POLINOMIO} = n - 1}$ $\quad n$: CANTIDAD DE CONDICIONES.

NOTA: SE DEBEN REPETIR AQUELLOS x_i CUYA $f'(x_i)$ ESTÁ DADA COMO CONDICIÓN!!

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i;x_{i+1}]$	$f[x_i;x_{i+1};x_{i+2}]$	$f[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3}]$	$f[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3};x_{i+4}]$
$x_0=-1$	$f(x_0)=0$	$f[x_0;x_1]=1$	$f[x_0;x_1;x_2]=0$	$f[x_0;x_1;x_2;x_3]=-\frac{1}{2}$	$f[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4]=1$
$x_1=-1$	$f(x_1)=0$	$f[x_1;x_2]=1$	$f[x_1;x_2;x_3]=-1$	$f[x_1;x_2;x_3;x_4]=\frac{3}{2}$	
$x_2=0$	$f(x_2)=1$	$f[x_2;x_3]=-1$	$f[x_2;x_3;x_4]=2$		
$x_3=1$	$f(x_3)=0$	$f[x_3;x_4]=1$			
$x_4=1$	$f(x_4)=0$				

$f[x_0;x_1] = f'(x_0) = f'(x_1) = 1 \qquad f[x_3;x_4] = f'(x_3) = f'(x_4) = 1$

$f[x_1;x_2] = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{1-0}{0+1} = 1 \qquad f[x_2;x_3] = \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \dfrac{0-1}{1-0} = -1$

$$f[x_0;x_1;x_2] = \frac{f[x_1;x_2]-f[x_0;x_1]}{x_2-x_0} = \frac{1-1}{0+1} = 0$$

$$f[x_1;x_2;x_3] = \frac{f[x_2;x_3]-f[x_1;x_2]}{x_3-x_1} = \frac{-1-1}{1+1} = -1$$

$$f[x_2;x_3;x_4] = \frac{f[x_3;x_4]-f[x_2;x_3]}{x_4-x_2} = \frac{1+1}{1-0} = 2$$

$$f[x_0;x_1;x_2;x_3] = \frac{f[x_1;x_2;x_3]-f[x_0;x_1;x_2]}{x_3-x_0} = \frac{-1-0}{1+1} = -1/2$$

$$f[x_1;x_2;x_3;x_4] = \frac{f[x_2;x_3;x_4]-f[x_1;x_2;x_3]}{x_4-x_1} = \frac{2+1}{1+1} = 3/2$$

$$f[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4] = \frac{f[x_1;x_2;x_3;x_4]-f[x_0;x_1;x_2;x_3]}{x_4-x_0} = \frac{3/2+1/2}{1+1} = 1$$

LUEGO...

$$P(x) = f(x_4) + f[x_3;x_4]\cdot(x-x_4) + f[x_2;x_3;x_4]\cdot(x-x_4)(x-x_3) + f[x_1;x_2;x_3;x_4]\cdot(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)$$
$$+ f[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4]\cdot(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

$$\Rightarrow P(x) = 0 + 1\cdot(x-1) + 2\cdot(x-1)(x-1) + \frac{3}{2}\cdot(x-1)(x-1)(x-0) + 1\cdot(x-1)(x-1)(x-0)(x+1)$$

$$\Rightarrow P(x) = x-1+2\cdot(x^2-2x+1)+\frac{3}{2}\cdot x\cdot(x^2-2x+1)+x\cdot(x^2-2x+1)(x+1)$$

$$\Rightarrow P(x) = x-1+2x^2-4x+2+\frac{3}{2}\cdot(x^3-2x^2+x)+x\cdot(x^3+x^2-2x^2-2x+x+1)$$

$$\Rightarrow P(x) = \cancel{x} - \cancel{1} + \cancel{2x^2} - \cancel{4x} + \cancel{2} + \frac{3}{\cancel{2}}x^3 - \cancel{3x^2} + \frac{3}{\cancel{2}}x + x^4 + \cancel{x^3} - \cancel{2x^3} - \cancel{2x^2} + \cancel{x^2} + \cancel{x}$$

8

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1} \quad \underline{\text{RTA}}$$

VERIFICO QUE SE CUMPLAN LAS CONDICIONES.

$$P'(x) = 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2}$$

- $P(-1) = (-1)^4 + \frac{1}{2}.(-1)^3 - 2.(-1)^2 - \frac{1}{2}.(-1) + 1 \Rightarrow P(-1) = 0$ ✓
- $P(0) = 1$ ✓
- $P(1) = (1)^4 + \frac{1}{2}.(1)^3 - 2.(1)^2 - \frac{1}{2}.(1) + 1 \Rightarrow P(1) = 0$ ✓
- $P'(-1) = 4.(-1)^3 + \frac{3}{2}.(-1)^2 - 4.(-1) - \frac{1}{2} \Rightarrow P'(-1) = 1$ ✓
- $P'(1) = 4.(1)^3 + \frac{3}{2}.(1)^2 - 4.(1) - \frac{1}{2} \Rightarrow P'(1) = 1$ ✓

OTRA FORMA PARA DETERMINAR $P(x)$

$$P(x) = f(x_0) + f_{[x_0;x_1]}.(x-x_0) + f_{[x_0;x_1;x_2]}.(x-x_0)(x-x_1) + f_{[x_0;x_1;x_2;x_3]}.(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+ f_{[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4]}.(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$\Rightarrow P(x) = \cancel{0} + 1.(x+1) + \cancel{0.(x+1)(x+1)} - \frac{1}{2}.(x+1)(x+1)(x-0) + 1.(x+1)(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$\Rightarrow P(x) = x + 1 - \frac{1}{2}.x.(x^2+2x+1) + x.(x^2+2x+1)(x-1)$$

$$\Rightarrow P(x) = x + 1 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + x.(x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1)$$

$$\Rightarrow P(x) = \cancel{x} + 1 - \frac{1}{\cancel{2}}x^3 - \cancel{x^2} - \frac{1}{\cancel{2}}x + x^4 - \cancel{x^3} + 2x^3 - 2x^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1} \quad \underline{\text{RTA}}$$

PUEDE OBSERVARSE QUE SE OBTIENE EL MISMO POLINOMIO UTILIZANDO CUALQUIERA DE LOS DOS CAMINOS.