FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Trabajo Práctico 1

[75.29/95.06] Teoría de Algoritmos I
Primer cuatrimestre de 2018

Grupo MinMax

Alumno	Padrón	Mail
del Mazo, Federico	100029	delmazofederico@gmail.com
Djeordjian, Esteban Pedro	100701	edjeordjian@gmail.com
Kristal, Juan Ignacio	99779	kristaljuanignacio@gmail.com
Raveszani, Nicole	101031	nraveszani@gmail.com

Índice

1. Cálculo Empírico de Tiempos de Ejecución

1.1. Complejidad Teórica

1.1.1. Selección

El ordenamiento de selección es uno de los algoritmos de ordenamiento más fáciles de implementar. En cada iteracion, se halla el mínimo elemento de la sección del arreglo desordenado y se intercambian las posiciones de este valor y el último elemento. Se reduce en una unidad la sección del arreglo desordenado y al resto se lo considera ordenado.

De acuerdo a nuestra implementación[1] del ordenamiento de selección, la complejidad teórica es:

T Selección(n) $\in \mathcal{O}(2 + 1 + n * (1 + 1 + 1 + n * (1 + 1) + 1 + 2)) = \mathcal{O}(n^2 + 6n + n) \in \mathcal{O}(n^2)$

Esto viene de analizar línea por línea teniendo en cuenta:

- Hacer una asignación y comparar variables: $O(1)$
- Operadores aritméticos básicos: $O(1)$
- Sacar la longitud de un arreglo: $O(1)$
- Hacer un ciclo definido que itera por todo el arreglo: $O(n * f(n))$ siendo $f(n)$ lo que hay dentro del ciclo.
- Hallar el índice de un elemento: $O(n)$

Este ordenamiento itera siempre por el arreglo sin importar su disposición inicial. Por lo tanto, su caso promedio es igual al tiempo analizado:

T Promedio Seleccción(n) $\in \mathcal{O}(n^2 + 6n + n) \in \mathcal{O}(n^2)$

1.1.2. Inserción

Inicialmente se tiene un sólo elemento y se lo considera un conjunto ordenado. En cada iteración, se compara al siguiente elemento del conjunto ordenado con su predecesor y se intercambia en caso de ser menor a este. Se itera de esta forma hasta que la condición anterior no se cumpla. Al igual que el de selección, el algoritmo tiene dos ciclos anidados que recorren el arreglo entero, por lo tanto, el tiempo esperado será cuadrático.

Este ordenamiento usa las mismas herramientas del ordenamiento de selección. Por lo tanto, con las consideraciones anteriores tomadas, queda:

T Inserción(n) $\in \mathcal{O}(2 + 1 + n * (2 + 1 + 2 + 2 + 1 + n * (1 + 3))) = \mathcal{O}(4n^2 + 8n + 3) \in \mathcal{O}(n^2)$

Como es claro que encontrar en un arreglo un intervalo ordenado (suficientemente grande) es mucho menos probable que no hacerlo (es decir, para un arreglo de n elementos, de las $n!$ posibles distribuciones, sólo una estará ordenada, por lo que esa posibilidad se desprecia para el caso promedio). Luego, en el caso promedio se tiene que el algoritmo también tiene orden cuadrático.

T Promedio Inserción(n) $\in \mathcal{O}(4n^2 + 8n + 3) \in \mathcal{O}(n^2)$

1.1.3. Mergesort

El algoritmo de mergesort es un ordenamiento que utiliza la técnica de División y Conquista, y por lo tanto, para calcular su complejidad teórica va a ser utilizado el Teorema Maestro. Si el arreglo sólo tiene un elemento o ninguno se considera ordenado. En otro caso, el arreglo se subdivide por la mitad creando dos nuevos arreglos. Cada uno de estos arreglos se vuelve a subdividir de forma recursiva hasta que queda un elemento o dos en cada subarreglo. A partir de aquí, cada

[1] Las complejidades de los métodos nativos de las listas de Python 3 fueron sacadas de: https://wiki.python.org/moin/TimeComplexity

mitad creada se une de forma ordenada en un nuevo arreglo hasta que queda un único arreglo ordenado.

En cuanto a código se introducen nuevos métodos:

- `Append` y `pop`[2]: $\mathcal{O}(1)$
- `Extend`: $\mathcal{O}(k)$ siendo k la cantidad de elementos agregados

También es de notar que este es el primer algoritmo donde usamos llamadas recursivas, por su naturaleza de división y conquista.

Aplicando el Teorema Maestro: T Mergesort(n) $= a *$ T mergesort$(\frac{n}{b}) + f(n^c)$
La cantidad de llamadas recursivas (a) son dos. Cada llamada recursiva divide la entrada inicial a la mitad (b=2). Por último, el tiempo de las llamadas no recursivas es
$\mathcal{O}(2+4+1+2+(n-1)*3+1+1+1) = \mathcal{O}(3n+9) \in \mathcal{O}(n)$

Asumiendo un n lo suficientemente grande como para que se requieran intercalar aproximadamente n elementos la mayoría de las veces, c=1. Se tiene entonces:
T Mergesort(n): $2 *$ T Mergesort$(\frac{n}{2}) + f(n)$
Como $(a = b^c)$, se tiene que: T Mergesort(n) $\in \mathcal{O}(n \log n)$

Para el caso promedio, se puede considerar que no es lo más probable una distribución de los elementos en cada mitad de modo tal que las mismas pierdan elementos uniformemente (agregándose al sub arreglo ordenado), sino que es más probable que uno de los arreglos termine el ciclo con muchos más elementos que el otro[3] (que termina sin ninguno). Podríamos decir que para las comparaciones, uno de los arreglos resulta con varios elementos mayores a la propia mayoría del otro, y por ende, este último terminará con una longitud considerable al terminar el ciclo, que en promedio se podría decir de $\frac{n}{2}$. El tiempo de las llamadas no recursivas es $\mathcal{O}(2+4+1+2+\frac{n}{2})*3+1+\frac{n}{2}+1) = \mathcal{O}(2n+11)) \in \mathcal{O}(n)$, nuevamente dejando: T Promedio Mergesort(n) $\in \mathcal{O}(n \log n)$

1.1.4. Quicksort

Al igual que mergesort, quicksort utiliza la técnica de División y Conquista. Se elige un elemento del arreglo como pivote (en nuestra implementación se elige al primero) y a partir del pivote se arman dos arreglos: el de todos los elementos menores al pivote y el de todos los elementos mayores o iguales al pivote. Con esto se obtiene un orden relativo al pivote. El mecanismo antes descripto se repite recursivamente para cada parte. El arreglo final se obtiene concatenando los subarreglos ordenados. Al igual que en Mergesort, siendo División y Conquista la técnica utlilizada, se usa el Teorema Maestro para calcular su complejidad.

Considerando las complejidades analizadas hasta ahora (en código no hay nada nuevo) y aplicando el Teorema Maestro se tiene:
T Quicksort(n) $= a *$ T Quicksort$(\frac{n}{b}) + f(n^c)$
La cantidad de llamadas recursivas (a) son 2. El tiempo de las llamadas no recursivas es $\mathcal{O}(1+3+1+n(1+1)+1+n) = \mathcal{O}(4n+5) \in \mathcal{O}(n)$, por lo que c=1.

En el caso promedio, b será aproximadamente 2, ya que en un arreglo arbitrariamente grande, con una distribución aleatoria de elementos, es mucho más probable tomar en cualquier posición a un elemento más alejado de las cotas superiores que de la media, por lo que la recursión dividirá el problema en "dos partes iguales" (probablemente nunca sean exactamente iguales, pero con un n arbitrariamente grande, las diferencias que puedan existir son despreciables en tanto el pivote

[2] El pop fue removido en la re-entrega. De todas formas, pop es $\mathcal{O}(1)$ solo cuando es respecto al último elemento
[3] Discutible. No disponemos de las herramientas para una justificación más sólida.

elegido no esté lo suficientemente próximo a una cota superior o inferior). Para este caso, como ($a = b^c$), se tiene que: T Promedio Quicksort(n) $\in \mathcal{O}(n \log n)$)

1.1.5. Heapsort

En el heapsort se utiliza la estructura de cola de prioridad (heap). Se construye un heap de mínimos con los elementos del arreglo. Al ser la raíz el menor elemento, se extrae la raíz y se la guarda en la primera posición del arreglo. De esta forma, se extrae en sucesivas iteraciones la raíz y el elemento es guardado en la siguiente posición hasta vaciar el heap.

Los tiempos del heap de mínimos implementado son:

- `Heapify`: $\mathcal{O}(n)$
- `Heappop`: $\mathcal{O}(\log n)$
- `Heapush`: $\mathcal{O}(\log n)$

Considerando todo esto queda:
T Promedio Heapsort(n) $\in \mathcal{O}(n+1+n+1+1+n(1+\log n)) = \mathcal{O}(3n+n\log n+3) \in \mathcal{O}(n \log n)$

1.2. Peores tiempos

1.2.1. Selección

Como se ve en el análisis, el comportamiento de este algoritmo no depende de las características del arreglo. En términos más específicos, el algoritmo de selección no es un algoritmo "adaptativo": su conducta no se ve afectada por ninguna característica del array, por lo cual realizará el mismo número de comparaciones e intercambios entre elementos tanto en el peor caso, en el caso promedio y en el mejor caso (considerando una longitud de arreglo arbitrariamente grande). Sin embargo, un arreglo considerado como el peor valor de entrada posible es un arreglo ordenado de forma descendente, debido a que nuestra implementación se busca el mínimo en cada iteración. Si bien asintóticamente no hay diferencia, diferirá en un valor constante el cual será mayor para un arreglo ordenado de esta forma.

T Peor Seleccción(n) $\in \mathcal{O}(n^2 + 6n + n) \in \mathcal{O}(n^2)$

1.2.2. Inserción

Este algoritmo sí presenta un peor caso: cuando el arreglo inicial se encuentra ordenado de forma descendente (y no al revés, según la implementación dada). El bucle interno del algoritmo deberá comparar cada elemento hasta llegar a la primera posición del conjunto, con lo cual realizará el máximo número de comparaciones posibles entre elementos y el ciclo se ejecutará sin cortes. Esto también está contemplado dentro de su comportamiento en promedio: se destaca el caso en que, si el arreglo estuviera ordenado al revés, el algoritmo terminaría en un orden de $\mathcal{O}(n)$ (siendo, para este caso trivial, mejor que cualquier ordenamiento).

T Peor Inserción(n) $\in \mathcal{O}(4n^2 + 8n + 3) \in \mathcal{O}(n^2)$

1.2.3. Mergesort

Si bien tiene un promedio de tiempo linearítmico, tiene casos en los que realiza una mayor cantidad de comparaciones. El algoritmo se comporta de manera recursiva, dividiendo el arreglo en mitades cada vez mas pequeñas y realizando comparaciones entre ellas una vez alcanzado sub-arreglos de tamaño 1. Estas comparaciones serán, como máximo, de cantidad $n - 1$ siendo n la cantidad de elementos involucrados en cada comparación, pues el último elemento no hay que compararlo contra nada. De todas formas, esto sólo cambia la variable c del teorema del maestro, manteniendo la misma cota asintótica.

T Peor Mergesort(n) $\in \mathcal{O}(n \log n)$.

1.2.4. Quicksort

Quicksort presenta un caso en que su comportamiento resulta cuadrático, generando uno de las mayores discrepancias entre tiempo promedio y peor tiempo de los algoritmos analizados. Esto es cuando el pivote elegido es una cota menor o mayor elemento del arreglo, dividiendo el arreglo en dos partes de 1 y $n-1$. En nuestra implementación, Quicksort elige siempre al primer elemento del arreglo como pivote, por lo tanto, usamos como peor caso un arreglo ordenado descendentemente y tomando de pivote el primer elemento del arreglo. Como en el caso promedio, para el peor caso se tiene que la primera iteración sin la llamada recursiva tiene un orden de $\mathcal{O}(4n+5)$ (considerando como lineal lo que ocurre dentro del ciclo for, y sabiendo que al terminar la llamada recursiva se devolverá un nuevo arreglo de n elementos).

Pero ahora, por ser el peor caso de quicksort, la llamada recursiva se hará con $n-1$ elementos (todos menos el pivote), y luego con $n-2$, y así sucesivamente hasta llegar al caso base cuyo orden complejidad es O(2). Pero al no haber División y Conquista propiamente dicho, no se puede aplicar el teorema del maestro. El analisis pasa a ser linea por linea:

T Peor Quicksort - Llamada sobre n: $= \mathcal{O}(4n) + \mathcal{O}(5) + O(2) +$ Llamada sobre n-1
Llamada sobre n-1 $= \mathcal{O}(4n-1) + \mathcal{O}(5) +$ Llamada sobre n-2
Llamada sobre n-2 $= \mathcal{O}(4n-2) + \mathcal{O}(5) +$ Llamada sobre n-3

T Peor Quicksort: $\sum_{i=0}^{n-2} O(5) + \sum_{i=0}^{n-2} \mathcal{O}(4(n-i)) + \mathcal{O}(2)$
T Peor Quicksort(n) $\in \mathcal{O}(5(n-1)) + \mathcal{O}(4n(n-1)) - 4 * \sum_{i=0}^{n-2} \mathcal{O}(i) + \mathcal{O}(2)$
T Peor Quicksort(n) $\in \mathcal{O}(6(n-1)) + \mathcal{O}(4n(n-1)) - 4 * \mathcal{O}((n-1) * \frac{n}{2} + \mathcal{O}(2)$

T Peor Quicksort(n) $\in O(2n^2 + 3n - 4) \in \mathcal{O}(n^2)$

1.2.5. Heapsort

Para este algoritmo, el numero de comparaciones entre los elementos del arreglo puede variar en poca proporción dependiendo orden en que se presentan los mismos (según su ubicación en el heap).

T Peor Heapsort(n) $\in \mathcal{O}(3n + n\log n + 3) \in \mathcal{O}(n \log n)$

1.3. Comparación

1.3.1. Tiempos promedio

En orden ascendente de eficiencia:

T Promedio Inserción(n) $\in \mathcal{O}(4n^2 + 8n + 3) \in \mathcal{O}(n^2)$
T Promedio Seleccción(n) $\in \mathcal{O}(n^2 + 6n + n) \in \mathcal{O}(n^2)$
T Promedio Heapsort(n) $\in \mathcal{O}(3n + n\log n + 3) \in \mathcal{O}(n \log n)$
T Promedio Mergesort(n) $\in \mathcal{O}(n \log n)$
T Promedio Quicksort(n) $\in \mathcal{O}(n \log n)$

Para poder terminar de ubicar en la escala a quicksort y mergesort, se pone el foco en la complejidad de su parte no recursiva: por parte de quicksort es $\mathcal{O}(4n+5)$, y en el caso de mergesort es $\mathcal{O}(2n+11)$. Es decir, la diferencia fundamental entre estos dos algoritmos es que en el peor caso quicksort será menos eficiente.

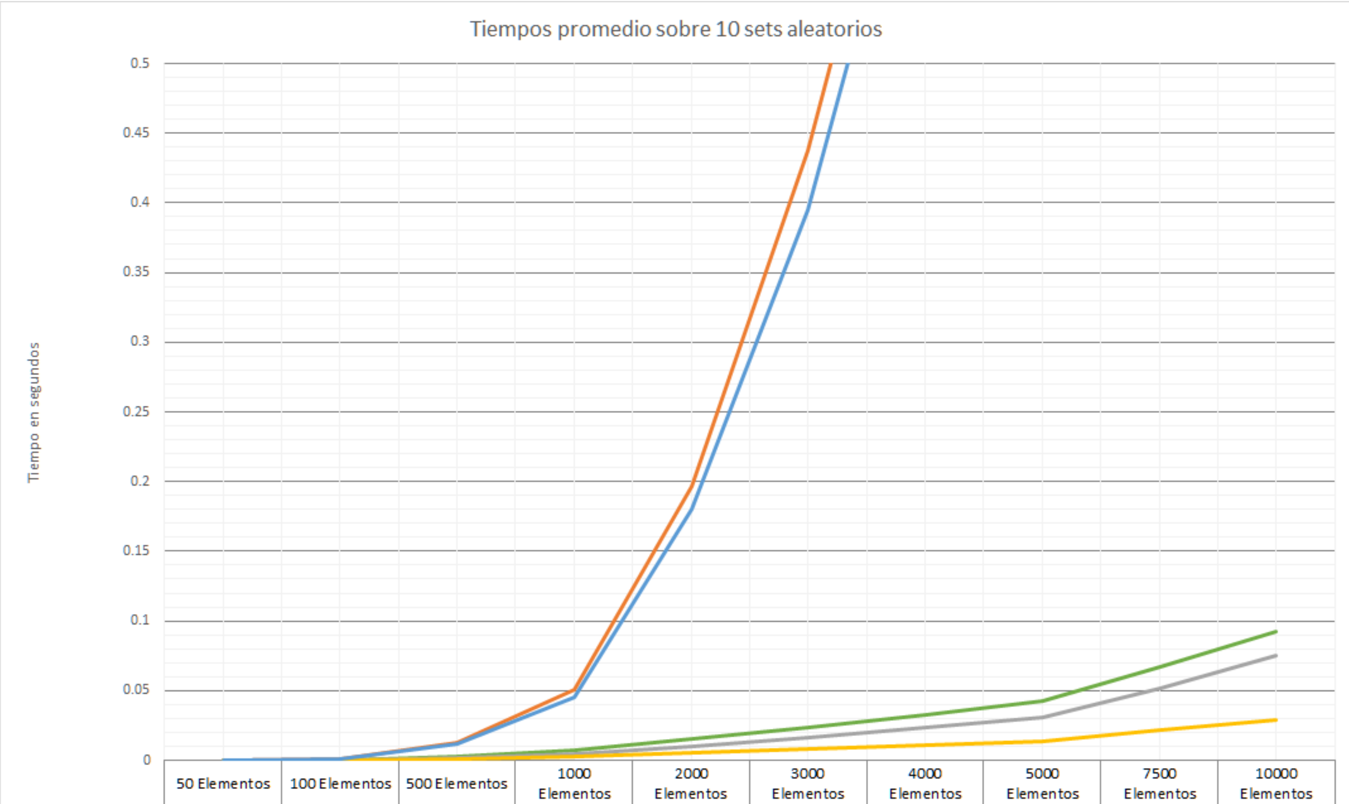
1.3.2. Peores tiempos

En orden ascendente de eficiencia:

T Peor Inserción(n) $\in \mathcal{O}(4n^2 + 8n + 3) \in \mathcal{O}(n^2)$

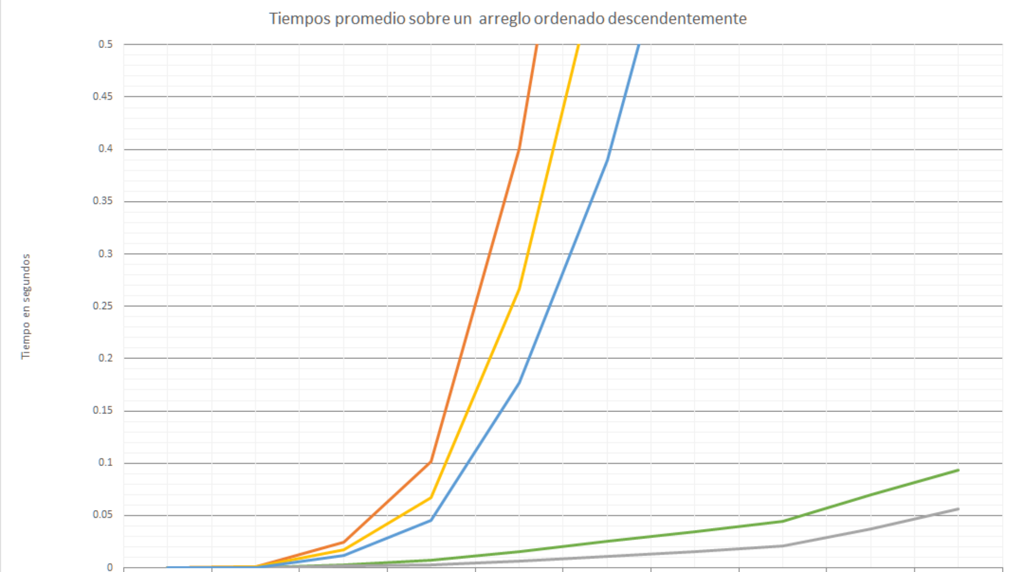
T Peor Quicksort(n) $\in O(2n^2 + 4n - 4) \in \mathcal{O}(n^2)$
T Peor Seleccción(n) $\in \mathcal{O}(n^2 + 6n + n) \in \mathcal{O}(n^2)$
T Peor Mergesort(n) $\in \mathcal{O}(n \log n)$
T Peor Heapsort(n) $\in \mathcal{O}(3n + n \log n + 3) \in \mathcal{O}(n \log n)$

1.4. Tiempos de ejecución



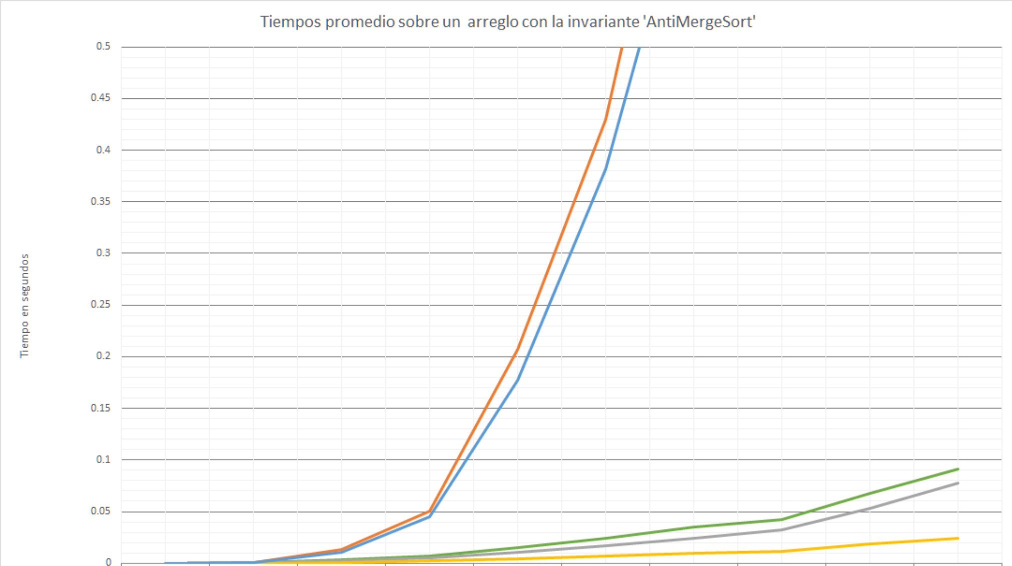
	50 Elementos	100 Elementos	500 Elementos	1000 Elementos	2000 Elementos	3000 Elementos	4000 Elementos	5000 Elementos	7500 Elementos	10000 Elementos
heapSort	0.00019123	0.00043290	0.00300544	0.00685765	0.01507061	0.02397402	0.03289837	0.04248456	0.06664308	0.09208299
insertionSort	0.00017072	0.00057020	0.01283132	0.05083963	0.19657372	0.43770809	0.75618687	1.19081717	2.61829276	4.67883854
mergeSort	0.00014888	0.00031959	0.00209416	0.00455924	0.01013128	0.01652157	0.02327204	0.03088994	0.05126127	0.07482700
quickSort	0.00008409	0.00017238	0.00109681	0.00235673	0.00513592	0.00784084	0.01079995	0.01373085	0.02153100	0.02944106
selectionSort	0.00015341	0.00051587	0.01179968	0.04574676	0.17997257	0.39475401	0.70358312	1.09285099	2.47238566	4.40584477

Se ve en la comparación que para pocos elementos el comportamiento de los ordenamientos es similar. Pasados los miles de elementos, empiezan a notarse las diferencias entre cada algoritmo. Para el caso con sets de valores aleatorios, se verifica en la práctica la diferencia entre los algoritmos de ordenamientos con órdenes cuadráticos (selectionSort e insertionSort) contra aquellos que eran de orden logarítmico. Las curvas de los ordenamientos cuadráticos en promedio crecen de forma mucho más abrupta que el resto a partir de los 500 elementos. Se puede ver, de acuerdo a lo analizado en los órdenes teóricos, como heapsort se comporta como el peor de los ordenamientos no cuadráticos.



	50 Elementos	100 Elementos	500 Elementos	1000 Elementos	2000 Elementos	3000 Elementos	4000 Elementos	5000 Elementos	7500 Elementos	10000 Elementos
heapSort	0.00019639	0.00045656	0.00314215	0.00700476	0.01590648	0.02542199	0.03465382	0.04454269	0.07023154	0.09332258
insertionSort	0.00025928	0.00103772	0.02486666	0.10172295	0.40062390	0.89720549	1.61456817	2.51006811	5.61531854	8.90286811
mergeSort	0.00012936	0.00025770	0.00150784	0.00318392	0.00687276	0.01135866	0.01551590	0.02123960	0.03684131	0.05593248
quickSort	0.00021609	0.00122071	0.01701240	0.06670774	0.26670357	0.61337249	1.05857313	1.67519015	3.83673572	5.78526304
selectionSort	0.00017830	0.00051576	0.01146357	0.04537355	0.17722821	0.38940469	0.69593576	1.08650996	2.40440954	4.20178312

Este es el peor caso analizado para los ordenamientos de inserción y de quicksort: el primero denota la peor eficiencia, mientras que el segundo toma un orden cuadrático que acelera mucho su crecimiento con respecto a heapsort y a mergesort. Estos últimos mantienen su tendencia, mostrando que no les afecta la distribución descendente y que mergesort nuevamente resulta más eficiente.



	50 Elementos	100 Elementos	500 Elementos	1000 Elementos	2000 Elementos	3000 Elementos	4000 Elementos	5000 Elementos	7500 Elementos	10000 Elementos
heapSort	0.00019591	0.00044259	0.00305248	0.00681840	0.01521888	0.02450462	0.03468144	0.04267399	0.06806638	0.09097488
insertionSort	0.00017495	0.00059984	0.01330533	0.05063511	0.20731328	0.42969440	0.80864784	1.23260760	2.78372849	4.92954869
mergeSort	0.00016123	0.00034205	0.00219066	0.00474329	0.01042529	0.01716967	0.02410504	0.03262972	0.05324423	0.07747910
quickSort	0.00007588	0.00015803	0.00098198	0.00210982	0.00457816	0.00691992	0.00943377	0.01154715	0.01850192	0.02463167
selectionSort	0.00014877	0.00052916	0.01073899	0.04498098	0.17759822	0.38187676	0.68986472	1.09569943	2.44082323	4.48006365

Este es el peor caso analizado para mergesort. El impacto práctico es virtualmente despreciable, mostrando que mergesort, incluso en su peor caso teórico, sigue siendo de los más eficientes. Esto se da porque este "peor caso" para mergesort, en realidad no está modificando su tiempo de ejecución a nivel asintótinco, por lo que en la práctica (ejecutado sobre el mismo ambiente) no se registran mayores diferencias. El resto de los algoritmos tienen un comportamiento similar al verificado con los sets aleatorios.

1.5. Comparación con valores teóricos

De acuerdo a las complejidades analizadas para el peor caso, se predice que los algoritmos de selección inserción y quicksort tardarán mucho más en ordenar arreglos que heapsort o mergesort. Esto se cumple, con la salvedad que en el análisis teórico para el peor caso se preveía que el ordenamiento por selección tendría peor desempeño que quicksort, lo cual no ocurrió, por ser el set especialmente diseñado para que quicksort se comporte de forma poco eficiente.

Con respecto al caso promedio, los tiempos se cumplieron de forma exactamente coherente con el orden de eficiencia predicho (en orden ascendente) en el análisis teórico: inserción, selección, heapsort, mergesort y quicksort. En síntesis, excepto por el peor caso de quicksort que no fue considerado de forma explícita, el análisis teórico se condice con los valores visualizados en la práctica.

2. Algoritmo Gale-Shapley

2.1. Demostraciones

2.1.1. Tiempo polinómico

En el algoritmo implementado, primero se crea el archivo, con una complejidad $\mathcal{O}(E*J)$ (siendo J la cantidad de jugadores y E la cantidad de equipos), ya que por cada equipo se debe crear un archivo de longitud igual a la cantidad de jugadores, y lo análogo ocurre a la recíproca. La carga de archivos naturalmente también es de orden $\mathcal{O}(J * E)$ ya que por cada jugador que se quiera crear, se debe recorrer un archivo cuya longitud es igual a la cantidad de equipos, y viceversa.

Luego, en la asignación se genera el matching estable. La condición de corte es que no haya más vacantes en los equipos. En el algoritmo se itera por cada equipo y se verifica para cada uno si todos tiene vacantes, por lo que esto no agrega un orden diferente. Esto implica que cada equipo deberá completar todos sus lugares libres, y como hay igual cantidad de jugadores que de vacantes, el peor caso se considera cuando cada equipo debe preguntarle a todos los jugadores si desean ocupar una vacante: esto es $\mathcal{O}(J)$. Como hay E equipos, el orden de la asignación también es $\mathcal{O}(J * E)$. Este orden está garantizado porque todas las operaciones dentro del ciclo son de orden constante.[4]

Finalmente, se almacena en un archivo las asignaciones. Por cada equipo se guarda su número seguido de los sus jugadores, dejandolo en un orden lineal de $\mathcal{O}(J + E)$.

El orden cuadrático polinomial del algoritmo es evidente, ya que es el peor caso de complejidad a lo largo de las funciones del algoritmo.

2.1.2. Matching estable

Mientras haya un equipo con vacantes, el equipo actual ofrece una vacante a su jugador favorito actual. Si el jugador esta libre, acepta la vacante, si no esta libre, pero prefiere más al equipo actual, acepta la vacante y el otro equipo pierde a ese jugador.

Como hay igual cantidad de jugadores que de vacantes totales, se ve que todos los equipos podrán cubrir todos su puestos. Esto se demuestra por el absurdo, suponemos un equipo e que ha

[4] Esto fue logrado en la re-entrega, al cambiar una **lista** de jugadores por un **diccionario** de jugadores, entre otros.

ofrecido una vacante a todos los jugadores de acuerdo con sus preferencias y ninguno la ha aceptado, lo cual implica que todos los jugadores ya han aceptado una vacante en un equipo previamente. Pero esto es una contradicción, porque existe la misma cantidad de jugadores que de vacantes totales, y por hipótesis hay una (al menos) vacante que e no puede cubrir. La contradicción viene de suponer que un equipo no ha podido satisfacer una de sus vacantes ofreciéndolas a todos los jugadores. Con esto se ve además que la máxima cantidad de proposiciones que un equipo puede hacer es igual a la cantidad de vacantes disponibles en total, es decir, la cantidad de jugadores.

A continuación se demostrará que una vez que cada equipo haya cubierto sus vacantes no habrá parejas conflictivas (inestabilidades). Suponiendo jugadores $j1$ y $j2$, y equipos $e1$, $e2$, asumimos un conflicto entre $(j1, e1)$ y $(j2, e2)$, con $j1$ queriendo estar en $e2$ y $j2$ queriendo estar en $e1$, $e1$ prefiriendo a $j2$ sobre $j1$ y $e2$ prefiriendo a $j1$ sobre $j2$.

Suponiendo que $e1$ es el primero en elegir, si $j1$ aceptó la vacante es porque estaba libre o porque prefería estar en $e1$ antes que en otro equipo $e3$ (donde no necesariamente $e3 = e2$).

- Si estaba sólo: luego $e2$ prefiere más a $j2$ que a $j1$, porque le ofreció su vacante antes. Si esto no fuera así, $e2$ le hubiera ofrecido antes su vacante a $e1$, y el mismo se hubiera cambiado de equipo, pero esto no sucedió. En este caso se llega a un absurdo, porque por hipótesis $e2$ prefiere más a $j1$ (en otro caso la pareja no es conflictiva y no hay inestabilidad).

- Si acepto estando en otro equipo: luego, se llega al mismo absurdo anterior, porque al fin y al cabo $e2$ termina con $j2$.

Por ende, debe ser que $e2$ eligió primero. Si $j2$ aceptó la vacante en $e2$, es porque $j2$ estaba libre o porque prefería estar en $e2$ que en otro equipo $e4$ (no necesariamente $e4 = e3$). En cualquiera de los dos casos se llega a un absurdo similar al anterior.

Todas los caminos a los que conduce la hipótesis donde hay una inestabilidad en la asignación final hacen llegar a una contradicción, por lo que queda probado que la asignación es estable.

A. Ejecución y compilación

Todo el trabajo fue codificado en Python 3.6.1.

A.1. Ordenamientos: Ejecución general

El programa principal es ejecutado desde el archivo main del directorio 'Ordenamientos', especificando por línea de comando el caso a ejecutar, entre 'Random' y 'Peor', refiriéndose a los sets por donde se ejecutarán los ordenamientos. La ejecución consiste de iterar sobre los sets generados previamente y en cada uno ejecutar cada ordenamiento estudiado sobre distintas cantidades del mismo elemento. Este archivo genera un 'SalidaRandom.csv' con las estadísticas necesarias para analizar.

```
>>> python main.py Random
>>> python main.py Peor
```

A.2. Medición de tiempos

Los tiempos de ejecución fueron calculados con el modulo `time` de Python, en particular su función `process_time` [5].

A.3. Generación de sets aleatorios

El script generarSets.py permite generar los sets aleatorios de n números (en este caso, n=10000) en un rango determinado. Este archivo también contiene la creación de los sets de peores casos.

```
>>> python generarSets.py
```

A.4. Pruebas de ordenamientos

Para verificar que los ordenamientos anden correctamente se realizaron varias pruebas unitarias que verifiquen distintos comportamientos desde los casos triviales hasta los casos borde y demás. Todas las pruebas son iguales, e incluyen asserts con ordenamientos aleatorios.

```
>>> python heapTest.py -v
```

A.5. Stable matching

Para generar un matching estable que cumpla con la consigna se utiliza el archivo main del directorio 'Gale Shapley'. Este importa el archivo matchinGS.py y ejecuta el algoritmo. Los parámetros recibidos por el algoritmo son la cantidad de jugadores, la cantidad de equipos, las vacantes por equipo, el nombre del archivo de salida y si es necesario crear el archivo. Luego, ejecuta un test sobre el algoritmo para verificar la estabilidad. De faltar el directorio de la liga, se puede generar con un script.

```
>>> python generardorLigas.py
>>> python main.py
```

[5] https://docs.python.org/3/library/time.html#process_time

B. Tablas de ejecución

Cuadro 1: Tiempos de ejecución sobre 10 sets aleatorios

50 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.00019300	0.00018855	0.00019178	0.00020529	0.00018293	0.00018698	0.00019424	0.00019802	0.00018284	0.00018867
insertionSort	0.00019945	0.00015891	0.00012839	0.00018014	0.00016239	0.00016163	0.00018052	0.00017342	0.00016791	0.00019444
mergeSort	0.00016291	0.00014654	0.00014624	0.00015401	0.00014920	0.00014525	0.00014689	0.00014798	0.00014500	0.00014480
quickSort	0.00008861	0.00007581	0.00008263	0.00008232	0.00008747	0.00008240	0.00008242	0.00009243	0.00008440	0.00008239
selectionSort	0.00015473	0.00015757	0.00014861	0.00015807	0.00015818	0.00014677	0.00015120	0.00015299	0.00015108	0.00015492
100 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.00043570	0.00045246	0.00044005	0.00042592	0.00042845	0.00043440	0.00041988	0.00041455	0.00044249	0.00043516
insertionSort	0.00058790	0.00064046	0.00054841	0.00053005	0.00067365	0.00052636	0.00048715	0.00049590	0.00057678	0.00063538
mergeSort	0.00034085	0.00030815	0.00032360	0.00032457	0.00031131	0.00031344	0.00031926	0.00032349	0.00032025	0.00031099
quickSort	0.00017878	0.00016309	0.00017036	0.00016766	0.00015238	0.00017618	0.00017809	0.00019167	0.00016401	0.00018156
selectionSort	0.00053624	0.00044922	0.00051516	0.00052856	0.00052489	0.00051390	0.00051862	0.00052146	0.00051781	0.00053284
500 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.00297829	0.00302412	0.00294132	0.00303563	0.00305413	0.00306853	0.00292844	0.00296854	0.00307565	0.00297974
insertionSort	0.01235648	0.01359664	0.01212989	0.01256291	0.01334884	0.01287573	0.01298992	0.01232904	0.01256445	0.01355928
mergeSort	0.00211735	0.00207506	0.00200294	0.00210409	0.00210602	0.00207392	0.00207665	0.00209064	0.00224680	0.00204810
quickSort	0.00105629	0.00103137	0.00113191	0.00104716	0.00097052	0.00114077	0.00130709	0.00114264	0.00105451	0.00108588
selectionSort	0.01152360	0.01153958	0.01241996	0.01133049	0.01146322	0.01228531	0.01155788	0.01251674	0.01120192	0.01215812
1000 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.00739671	0.00694720	0.00662311	0.00683279	0.00688662	0.00678391	0.00675784	0.00681219	0.00681572	0.00672041
insertionSort	0.05100241	0.05244503	0.04842442	0.05063798	0.05230036	0.05133143	0.04899568	0.05267124	0.05200502	0.04858271
mergeSort	0.00456525	0.00470494	0.00455071	0.00461912	0.00467384	0.00457552	0.00441806	0.00447197	0.00453215	0.00448089
quickSort	0.00234790	0.00223786	0.00238862	0.00225757	0.00217189	0.00256744	0.00237706	0.00256044	0.00233367	0.00232482
selectionSort	0.04496951	0.04662944	0.04389748	0.04555453	0.04726154	0.04648492	0.04423733	0.04462990	0.04494551	0.04885741
2000 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.01523260	0.01514745	0.01499430	0.01506648	0.01513730	0.01514470	0.01494349	0.01490355	0.01500769	0.01512852
insertionSort	0.19201088	0.20843868	0.19088637	0.20495201	0.18710003	0.19607610	0.19952160	0.19383391	0.19547072	0.19744693
mergeSort	0.01019977	0.01023930	0.01023052	0.01000460	0.00995667	0.01017505	0.01017236	0.01010934	0.01008799	0.01013720
quickSort	0.00521293	0.00494697	0.00516645	0.00492783	0.00488734	0.00544569	0.00523995	0.00549807	0.00492884	0.00510515
selectionSort	0.18609935	0.18948616	0.17618832	0.18041831	0.18240617	0.17892075	0.17892672	0.17642920	0.17546178	0.17538898
3000 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.02425120	0.02387434	0.02414011	0.02377146	0.02410929	0.02380476	0.02375325	0.02389451	0.02424637	0.02389495
insertionSort	0.41653200	0.43707999	0.46344494	0.42481478	0.42187480	0.43046910	0.44544637	0.43564340	0.43663127	0.46514423
mergeSort	0.01658727	0.01641316	0.01661186	0.01664745	0.01655258	0.01660167	0.01633104	0.01628040	0.01666285	0.01652746
quickSort	0.00768843	0.00768781	0.00794279	0.00745642	0.00730129	0.00819662	0.00793997	0.00869121	0.00756967	0.00793418
selectionSort	0.39494834	0.39463882	0.39689663	0.39429853	0.39780394	0.39295478	0.39391488	0.39499579	0.39344403	0.39364438
4000 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.03284454	0.03317121	0.03303558	0.03275882	0.03270194	0.03312007	0.03281572	0.03249362	0.03293303	0.03310914
insertionSort	0.73809955	0.78122650	0.76783974	0.73013473	0.75447225	0.76763770	0.77887734	0.76187592	0.71228048	0.76942447
mergeSort	0.02300822	0.02343306	0.02342124	0.02328943	0.02313355	0.02297004	0.02354313	0.02337101	0.02330195	0.02324881
quickSort	0.01065544	0.01044370	0.01096001	0.01008401	0.00996224	0.01140329	0.01128360	0.01181481	0.01050973	0.01088262
selectionSort	0.70282919	0.69928560	0.70064164	0.69431765	0.70229424	0.71497047	0.69866235	0.69994268	0.70156687	0.72132049
5000 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.04218705	0.04252301	0.04292750	0.04175632	0.04291162	0.04227332	0.04209742	0.04247767	0.04263719	0.04305448
insertionSort	1.18204778	1.18909509	1.23801325	1.20648208	1.17101943	1.19625304	1.15185332	1.17470414	1.16457618	1.23412736
mergeSort	0.03085920	0.03151913	0.03105532	0.03084717	0.03090164	0.03082855	0.03068934	0.03070248	0.03090970	0.03058693
quickSort	0.01348742	0.01339856	0.01387731	0.01308612	0.01279298	0.01425968	0.01398410	0.01520034	0.01339186	0.01383017
selectionSort	1.09344189	1.09182913	1.08739355	1.09608341	1.09816645	1.09037545	1.09863278	1.08801684	1.08548364	1.09908680
7500 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.06720685	0.06698542	0.06631842	0.06606606	0.06628988	0.06588071	0.06770505	0.06685129	0.06663839	0.06648876
insertionSort	2.57472254	2.59746984	2.65947080	2.67775495	2.56712238	2.59690785	2.61323801	2.65732562	2.64076297	2.59815267
mergeSort	0.05152882	0.05065012	0.05108126	0.05083490	0.05160936	0.05160909	0.05094111	0.05134133	0.05152861	0.05148814
quickSort	0.02149095	0.02084428	0.02167369	0.02034912	0.02018938	0.02239834	0.02201772	0.02336442	0.02102273	0.02195938
selectionSort	2.47117228	2.46195340	2.45594133	2.49144226	2.55074881	2.45745252	2.45648722	2.46622304	2.45988945	2.45254629
10000 Elementos	SetRandom01	SetRandom02	SetRandom03	SetRandom04	SetRandom05	SetRandom06	SetRandom07	SetRandom08	SetRandom09	SetRandom10
heapSort	0.09234720	0.09180443	0.09170632	0.09235643	0.09237836	0.09184556	0.09126658	0.09187549	0.09198058	0.09326896
insertionSort	4.72838785	4.82092053	4.71846541	4.64045077	4.54181549	4.66178385	4.71195490	4.69176563	4.71393896	4.55890200
mergeSort	0.07408563	0.07491511	0.07442679	0.07556444	0.07424022	0.07440036	0.07488256	0.07554801	0.07454557	0.07566138
quickSort	0.02859854	0.02852403	0.02988460	0.02795936	0.02736539	0.03078863	0.03012384	0.03184481	0.02881059	0.03051086
selectionSort	4.39602486	4.53192356	4.42551569	4.38844704	4.39688216	4.38836099	4.37352012	4.36608303	4.38014397	4.41154632

Cuadro 2: Tiempos de ejecución sobre sets de peores casos

50 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.00019076	0.00019639	0.00019591
insertionSort	0.00008863	0.00025928	0.00017495
mergeSort	0.00013198	0.00012936	0.00016123
quickSort	0.00010511	0.00021609	0.00007588
selectionSort	0.00015379	0.00017830	0.00014877
100 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.00044040	0.00045656	0.00044259
insertionSort	0.00015114	0.00103772	0.00059984
mergeSort	0.00027315	0.00025770	0.00034205
quickSort	0.00023045	0.00122071	0.00015803
selectionSort	0.00050055	0.00051576	0.00052916
500 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.00301888	0.00314215	0.00305248
insertionSort	0.00754665	0.02486666	0.01330533
mergeSort	0.00178736	0.00150784	0.00219066
quickSort	0.00144711	0.01701240	0.00098198
selectionSort	0.01397305	0.01146357	0.01073899
1000 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.00641547	0.00700476	0.00681840
insertionSort	0.01028943	0.10172295	0.05063511
mergeSort	0.00343820	0.00318392	0.00474329
quickSort	0.00325053	0.06670774	0.00210982
selectionSort	0.04148693	0.04537355	0.04498098
2000 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.01498572	0.01590648	0.01521888
insertionSort	0.20658237	0.40062390	0.20731328
mergeSort	0.00718856	0.00687276	0.01042529
quickSort	0.00666559	0.26670357	0.00457816
selectionSort	0.16384546	0.17722821	0.17759822
3000 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.02359586	0.02542199	0.02450462
insertionSort	0.36514390	0.89720549	0.42969440
mergeSort	0.01193742	0.01135866	0.01716967
quickSort	0.01067033	0.61337249	0.00691992
selectionSort	0.36580858	0.38940469	0.38187676
4000 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.03246327	0.03465382	0.03468144
insertionSort	0.53935292	1.61456817	0.80864784
mergeSort	0.01669425	0.01551590	0.02410504
quickSort	0.01437967	1.05857313	0.00943377
selectionSort	0.64824312	0.69593576	0.68986472
5000 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.04232100	0.04454269	0.04267399
insertionSort	0.63864610	2.51006811	1.23260760
mergeSort	0.02256834	0.02123960	0.03262972
quickSort	0.01851022	1.67519015	0.01154715
selectionSort	1.02462675	1.08650996	1.09569943
7500 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.06385494	0.07023154	0.06806638
insertionSort	0.82478965	5.61531854	2.78372849
mergeSort	0.03786933	0.03684131	0.05324423
quickSort	0.02843785	3.83673572	0.01850192
selectionSort	2.28155172	2.40440954	2.44082323
10000 Elementos	SetPeorCasoAscendente	SetPeorCasoDescendente	SetPeorCasoMergesort
heapSort	0.08850804	0.09332258	0.09097488
insertionSort	0.93969506	8.90286811	4.92954869
mergeSort	0.05498279	0.05593248	0.07747910
quickSort	0.03932556	5.78526304	0.02463167
selectionSort	4.08425468	4.20178312	4.48006365