

Rapport Mini projet 2

Variantes de l'algorithme de Karger

Comparaison de la version classique et de la récursive

Dans l'algorithme de Karger, plus l'exécution se poursuit, plus les chances de succès diminuent, car les chances de contracter une arête qui appartient à une coupe minimum augmentent. La version avec appels récursifs permet de définir une limite valant $n/\sqrt{2}$ à partir de laquelle les chances de contracter une arête de la coupe minimum est de $\frac{1}{2}$. Une fois cette limite atteinte, nous lançons 2 appels récursifs, ce qui permet d'augmenter les chances de succès car chaque appel récursif va, à son tour, lancer 2 appels récursifs jusqu'à ce qu'il ne reste que deux noeuds. L'algorithme prend alors la meilleure des deux coupes minimum renvoyées par les appels récursifs.

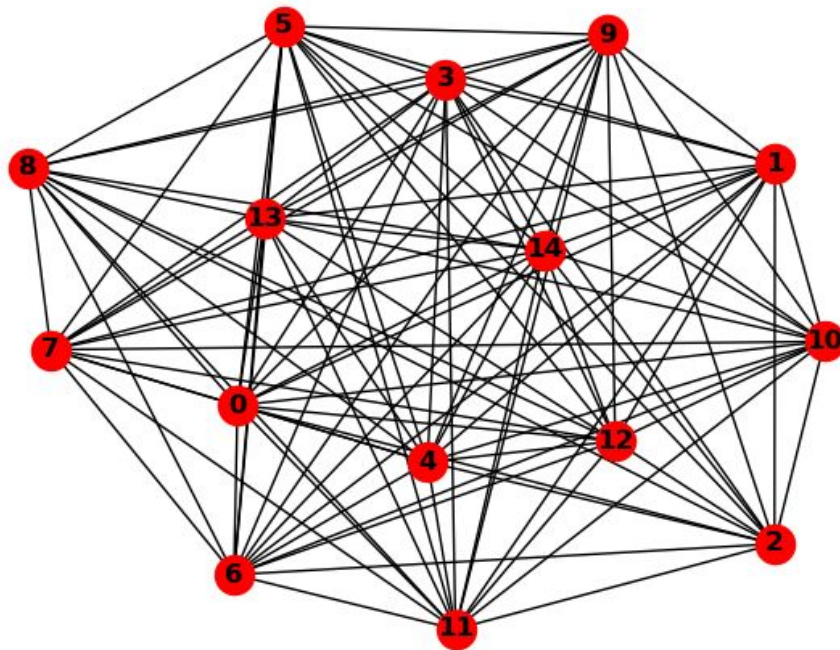


Figure n°1 : Représentation du graphe utilisé pour les statistiques

	Moyenne de la coupe obtenue	Fréquence d'apparition de la coupe minimale
Version classique	17.23	16.55 %
Version récursive	12.52	55.63 %

Figure n°2 : Statistiques sur 284 itérations de l'algorithme sur le graphe de la figure n°1

Comme nous pouvons le voir dans le tableau de la figure n°2 ci-dessus, en moyenne la coupe obtenue par l'algorithme récursif compte 5 arêtes de moins que celle obtenue avec l'algorithme classique.

De même, lorsque nous étudions la fréquence d'apparition de la coupe minimale, nous nous apercevons que l'algorithme récursif surpasse encore une fois la version classique. L'algorithme récursif donne la coupe minimale plus d'une fois sur 2, alors que la version classique fait apparaître la coupe minimale seulement une fois sur 6.

Pour l'analyse des coupes minimales, nous pouvons donc en conclure que la version récursive de l'algorithme de Karger surpasse la version classique tant au niveau des coupes obtenues en général qu'au niveau du nombre de coupes minimum obtenues.

Par contre le nombre de contractions est beaucoup plus élevé dans la version récursive. En effet, en moyenne, nous observons 13 contractions tandis que la version récursive en fait 39. Donc l'algorithme récursif est plus long et fait plus de contractions. En revanche, nous avons besoin de l'exécuter moins de fois pour avoir une probabilité de succès constante égale à celle de l'algorithme classique.

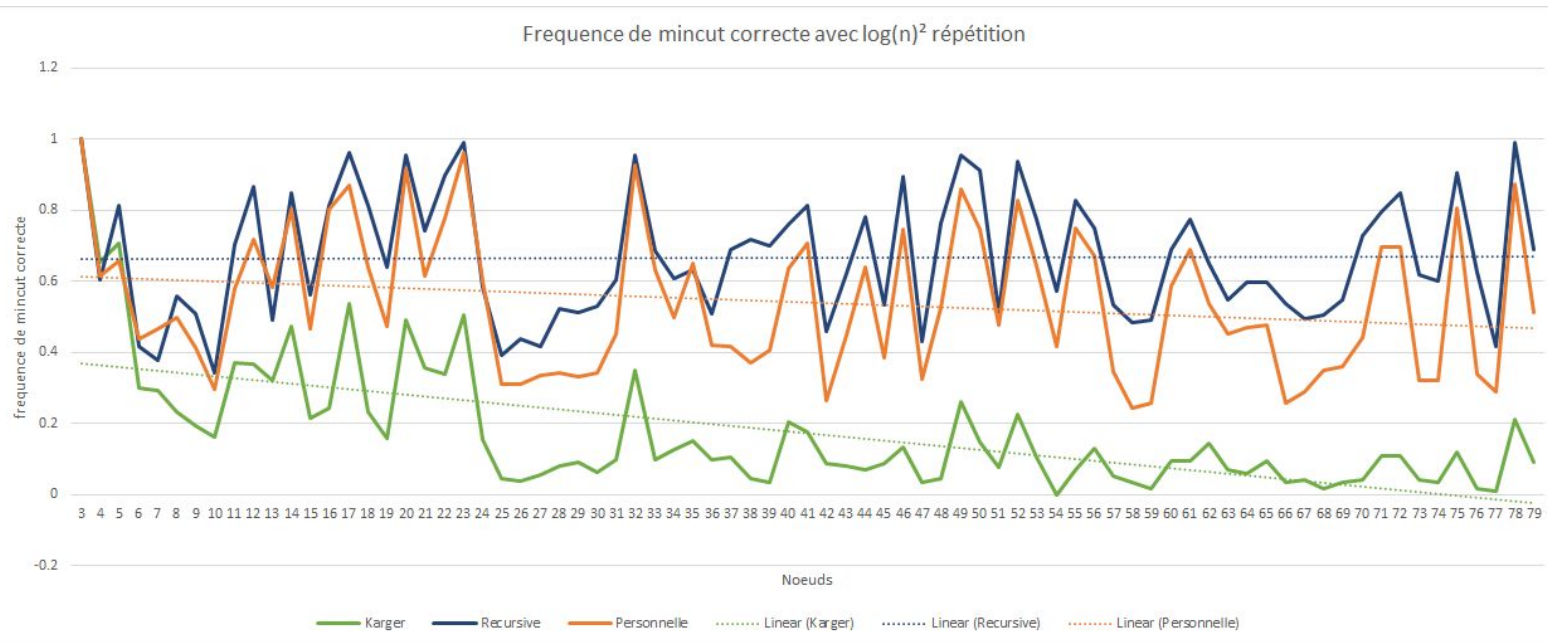


Figure n°3 : Graphique de la fréquence des coupes minimales en fonction du nombre de nœuds avec $\log(n)^2$ itérations de l'algorithme pour chaque graphe

En effet, en changeant le nombre d'itérations pour chaque graphe à $\log(n)^2$ nous observons que la fréquence de réussite de l'algorithme est approximativement identique, même avec des graphes ayant un nombre de nœuds élevé, tandis que la version classique de l'algorithme de Karger perd son efficacité, comme nous pouvons le voir sur la figure n°3 ci-dessus.

Choix de a et b pour la version personnelle

Pour la dernière version de l'algorithme, nous avons dû choisir deux valeurs a et b telles que l'algorithme descende de n sommets à n/a sommets et fait ensuite b appels récurifs.

Pour ces deux valeurs, nous avons choisi $a = 1/2$ et $b = 4$. Ces valeurs se basent sur celles utilisées précédemment dans la version récursive de l'algorithme. Dans cette version, nous avons $a = 1/\sqrt{2}$ et $b = 2$.

Nous avons décidé de mettre au carré la valeur du a précédent, ce qui nous permet d'arrêter la partie itérative lorsque nous avons environ une chance sur 4 de supprimer une arête qui appartient à la coupe minimale et donc de ne pas trouver ladite coupe minimale. Dans la version avec $a = 1/\sqrt{2}$, la partie itérative s'arrêtait lorsque la probabilité de supprimer une arête de la coupe minimale était de environ $1/2$. Il nous a donc semblé intéressant d'arrêter plus "tard" dans l'algorithme et d'analyser les impacts sur les résultats.

Pour la valeur de b , nous avons souhaité la doubler par rapport à celle de la version récursive, de façon à pouvoir analyser si cela avait un impact à la fois sur le temps de calcul et sur les statistiques obtenues sur la figure n°2 ci-dessus. De plus, étant donné que nous avons "affaibli" l'algorithme en réduisant la valeur de a , nous souhaitons étudier l'impact d'un ajout de récursions du côté de b .

Comparaison entre le récursif et la version personnelle

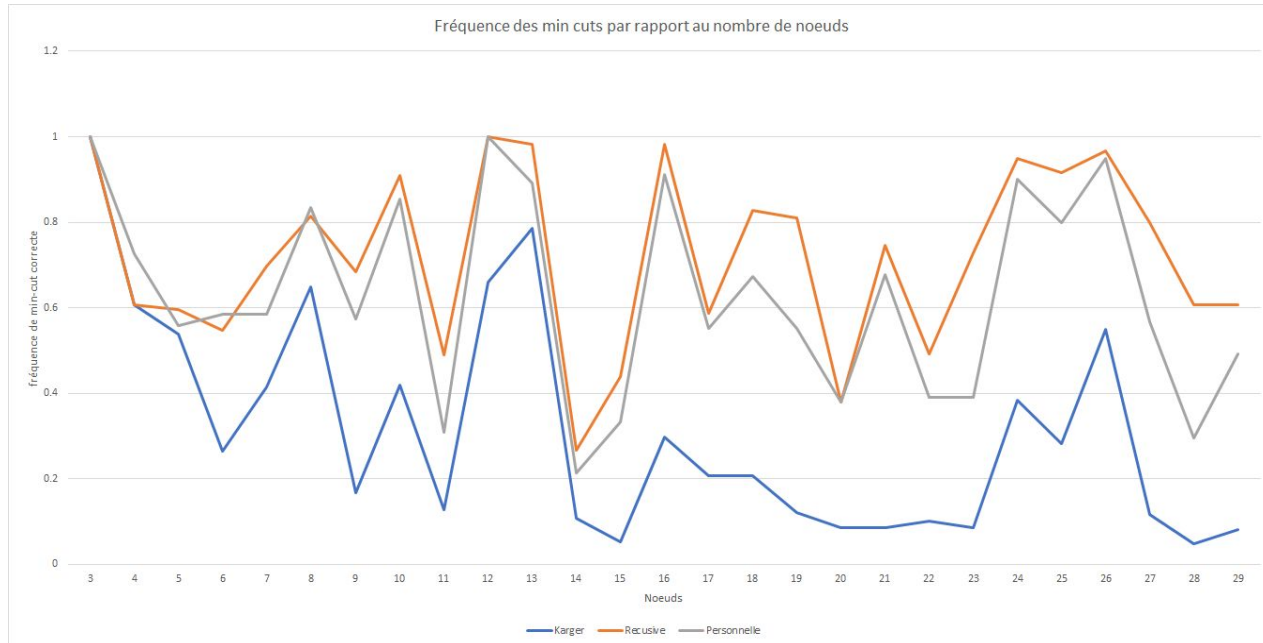


Figure n°4 : Graphique de la fréquence des coupes minimales en fonction du nombre de noeuds

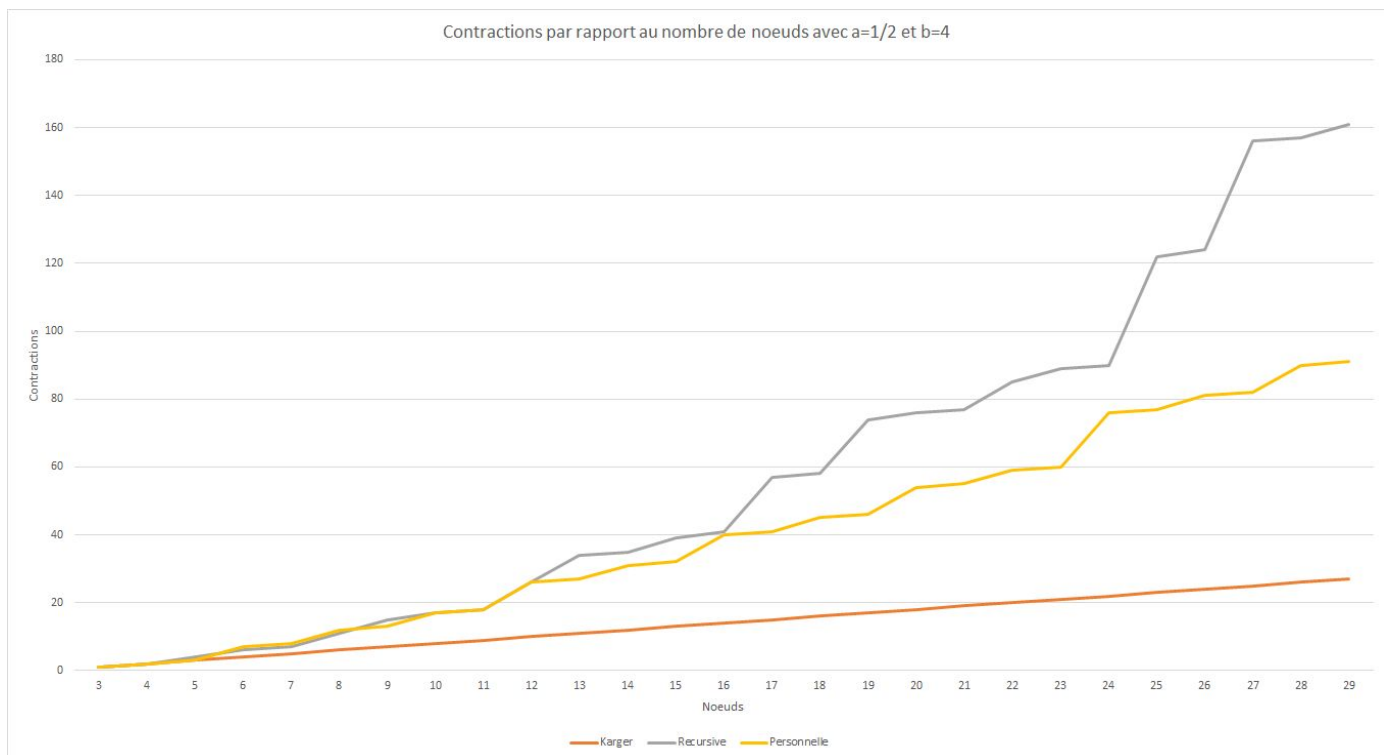


Figure n°5 : Graphique du nombre de contractions en fonction du nombre de noeuds

Comme nous pouvons le voir sur les graphiques des figures 4 et 5 ci-contre, la version que nous avons choisi trouve un peu moins souvent la coupe minimale que la version récursive de base. Il faut donc faire plus d'exécutions pour avoir une probabilité constante de réussite égale à la première version de la récursive. Mais notre version personnelle fait moins de contractions, ce qui fait que l'exécution unitaire de cette fonction est plus rapide.

La conclusion est mitigée sur cette comparaison. La version récursive de base reste très efficace avec peu d'exécutions nécessaires pour atteindre une bonne probabilité de réussite. Cependant, à titre unitaire, notre version de l'algorithme récursif exécute moins de contractions que la première version récursive, à nombre de noeuds égal (cf figure n°5).

Notre version a besoin de plus d'exécutions pour avoir une probabilité constante de réussite. Comme le montre la figure n°3, nous pouvons voir qu'avec $\log(n)^2$ exécutions (n étant le nombre de noeuds), la fréquence de coupe minimum correcte baisse avec l'augmentation du nombre de noeuds.

Conclusion

Pour conclure, la version de l'algorithme de Karger qui possède les meilleurs atouts est l'algorithme récursif. Il allie un nombre de contractions intéressant à une probabilité de trouver la coupe minimale plus élevée face à ses concurrents.

Cependant, chaque version de l'algorithme de Karger possède ses atouts personnels. La version classique de Karger est plus rapide car elle exécute moins de contractions face à la version récursive. De même, la version personnelle que nous avons proposé voit son intérêt lors d'une exécution unitaire de l'algorithme. Le nombre de contractions étant ici aussi inférieur à la version récursive, la version personnelle de l'algorithme est plus rapide.

Mais ces deux versions ont des défauts trop importants pour surpasser la version récursive. La version classique a de grosses lacunes sur la fréquences d'apparition de la coupe minimale et notre version personnelle nécessite un nombre d'exécutions important pour avoir une probabilité de réussite constante qui reste, malgré tout, inférieure à celle de l'algorithme récursif.