

Декомпозиция линейных автоматов над кольцом вычетов в сдвиговые регистры *

Арнольд Шойинг (Arnold Scheuing)

Институт информатики и прикладной математики, Бернский университет, CH-3012 Берн, Швейцария

Аннотация

Линейный автомат \mathfrak{A} над факторкольцом \mathbb{Z}_n , $n \in \mathbb{N}$, в общем случае неразложим на параллельно соединённые сдвиговые регистры. Мы смогли сформулировать необходимые и достаточные условия для такого разложения, используя теорию об артиновых локальных кольцах R и $R[x]$ -модульной структуре \mathfrak{A} .

1 Введение

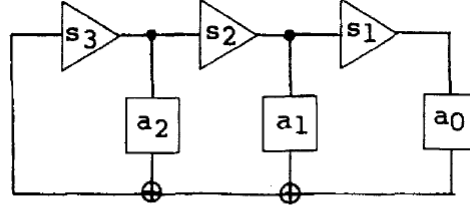
Структура конечного, детерминированного линейного автомата (далее КА) интересна не только с точки зрения информатики, но и с точки зрения теории систем. Сфера применений КА, называемых также линейными последовательными схемами (LCS) включает в себя обнаружение и исправление ошибок, генераторы случайных чисел, криптологию (мотивация автора), а также конечномерные линейные системы с постоянными коэффициентами и дискретным или непрерывным временем. До тех пор пока коэффициенты такого автомата или системы являются элементами поля F , структура хорошо известна и тщательно изучалась последние двадцать лет [4] с помощью линейной алгебры: пространство состояний E автомата \mathfrak{A} — это конечномерное векторное пространство E над F , а функция перехода может быть рассмотрена как эндоморфизм в E или как матрица A над F , если базис в E зафиксирован.

Для нахождения более "простого" эквивалентного \mathfrak{A} КА можно использовать взаимнооднозначное соответствие между КА, эквивалентными \mathfrak{A} , и матрицами, подобными A . Есть существенные причины для выбора рациональной канонической формы A как наиболее "простой" потому что она соответствует разложению A на параллельные сдвиговые регистры.

На рисунке 1 мы показываем три представления КА относительно данного базиса B в E . Рисунок 1(а) соответствует сдвиговому регистру (его технической реализации) с 3-мерным пространством состояний, каждое из которых обладает компонентами (s_1, s_2, s_3) . В теории систем s_i и a_i называются, соответственно, элементами задержки и умножения. Каждый такт элемент из s_3 переходит в s_2 , из s_2 — в s_1 и сумма $a_0s_1 + a_1s_2 + a_2s_3$ (в поле F) попадает в s_3 . На рисунке 1(б) изображено представление линейной функции f в форме матрицы 3×3 . Эта специальная форма называется сопровождающей матрицей. Если полином $x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$ является несократимым в $F[x]$, тогда КА нельзя разложить. Рисунок 1(в) указывает $F[x]$ -модуль ранга 3, например, базис B имеет три элемента: e , $f(e)$, $f^2(e)$, и

$$f^3(e) = a_0e + a_1f(e) + a_2f^2(e).$$

*Результаты приведённые в данной работе являются частью докторской диссертации автора, которой руководил профессор Урс Вюрглер (Urs Würgler) из Бернского университета.



(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

(б)

$$F[x]/(x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0)$$

(в)

Рис. 1: Соответствующие представления ($a_0, a_1, a_2 \in F$). (а) Сдвиговый регистр. (б) Сопровождающая матрица. (в) Циклический $F[x]$ -модуль ранга 3.

Взаимооднозначное соответствие между этими структурами используется на всём протяжении данной работы: диаграммы КА и сдвиговые регистры для визуализации технической реализации, матрицы для расчётов в примерах, а модули для развития теории.

Известно, что КА с коэффициентами над полем может быть всегда реализован с помощью параллельного соединения сдвиговых регистров [9]. Но в применениях, указанных выше, нас также интересуют системы над кольцами $\mathbb{Z} \bmod 2^r$ ($r \in \mathbb{N}$). Например, в криптологии процесс автоматизированного шифрования и расшифрования связан с диапазоном значений 2^r регистра с r бинарными разрядами.

Хорошее исследование расширения теории линейных систем от полей до колец за последние десять лет можно найти в работе [12]. Принцип двойственности для линейных систем над факторкольцами рассматривалась в работах [2, 8]. Представление матричных дробей для линейных систем над коммутативными кольцами также было изучено в работе [5].

В разделе 5 мы приводим пример КА над \mathbb{Z}_4 , который и не является, и не разложим на сдвиговые регистры. Следовательно, возникает вопрос, при каких условиях КА над \mathbb{Z}_n может быть реализован как параллельное соединение сдвиговых регистров. Похожая проблема изучалась в работах [6, 7], путём использования биекции $\beta : \mathbb{Z}_{p^r} \approx \prod_1^r \mathbb{Z}_p$ для декомпозиции КА \mathfrak{A} над \mathbb{Z}_{p^r} в каскад из r автоматов \mathfrak{A}_i над \mathbb{Z}_p . Но поскольку β не является гомоморфизмом колец, \mathfrak{A}_i соединены с помощью нелинейной логики без задержек, которая ограничивает дальнейший анализ посредством коммутативной алгебры.

Данная работа состоит из следующих разделов: в разделе 2 мы покажем, что \mathbb{Z}_n -свободные $\mathbb{Z}_n[x]$ -модули являются подходящими математическими объектами для изучения структуры КА над полем \mathbb{Z}_n (рисунок 1). В разделе 3 мы докажем что проблема может быть сведена к КА над \mathbb{Z}_p без потери общности; с другой стороны, рекурсивный критерий в последнем разделе предлагает не ограничивать наше внимание на конечных и локальных кольцах \mathbb{Z}_{p^r} , а рассматривать более общие (коммутативные) артиновы локальные кольца R (с 1). Следовательно, в разделе 3 мы соберём все необходимые утверждения относительно артиновых локальных колец и модулей над ними. В разделе 4 мы покажем, что наш $R[x]$ -модуль всегда имеет примарное разложение. Основные результаты находятся в разделах 5 и 6, где мы приводим необходимые и достаточные условия

для циклического разложения пространства состояний; другими словами, условия для того, чтобы КА был эквивалентен прямой сумме сдвиговых регистров. Общий случай мы рассматриваем в разделе 5, а специальный с кольцом главных идеалов — в разделе 6.

2 Модульная структура конечного автомата

Начнём с более точного описания конечного автомата (КА).

Определение 2.1 Конечный детерминированный линейный автомат (без входных или выходных функций) над кольцом R — это пара (E, f) , где пространство состояний E является свободным R -модулем конечной размерности (скажем n), а функция перехода f — это линейное отображение из E в E . Каждое $e \in E$ является состоянием КА, функция перехода отображает состояние e в новое $f(e)$. Мы можем использовать простую нотацию без начального состояния, потому что нас интересует структура КА в целом.

Множество функций переходов над E — это кольцо эндоморфизмов $\text{End}_R(E) = \{f : E \rightarrow E \mid f \text{ линейна}\}$. $\text{End}_R(E)$ также является R -модулем. Этот факт может быть выражен с помощью гомоморфизма колец на следующей коммутативной диаграмме.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\psi} & \text{End}_R(E) \\ \downarrow & \searrow \hat{\psi} & \\ R[x] & & \end{array}$$

Для $r \in R$, $\psi(r)$ — это скалярное произведение для r из E . Так как f линейна над E , мы можем расширить ψ на $R[x]$ как гомоморфизм колец с помощью задания $\hat{\psi}(x) := f$. Теперь E становится $R[x]$ -модулем.

Путём параллельного соединения различных КА над одним и тем же кольцом мы можем построить более крупный автомат. Но ещё больший интерес представляет возможность разложения данного (сложного) автомата на мельчайшие, несократимые части — сдвиговые регистры.

Определение 2.2 КА (E, f) над кольцом R называется *сдвиговым регистром*, если E циклическое, как $R[x]$ -модуль. Другими словами, если существует такое начальное состояние $e \in E$, что его орбита:

$$e, f(e), f^2(e), \dots, f^{n-1}(e)$$

охватывает E .

Под «параллельным соединением КА (E_i, f_i) » мы подразумеваем техническую реализацию (см. рисунок 2(б)), но оно попросту означает прямую сумму КА $(\bigoplus E_i, \bigoplus f_i)$. Высказывание «КА реализован как параллельное соединение сдвиговых регистров» является интуитивным способом выразить то, что E — это прямая сумма $R[x]$ -циклических R -свободных подмодулей.

Для формулировки первой теоремы необходима следующая нотация:

- $M_n(R)$ — множество всех $n \times n$ -матриц над R ,
- $GL_n(R)$ — подмножество всех регулярных матриц из $M_n(R)$,

- $M_n(R)/GL_n(R)$ — множество всех классов подобия матриц ($A \in M_n(R)$ подобна $T^{-1}AT$ для всех $T \in GL_n(R)$),
- $Mod_n(Rp[x])$ — класс всех R -свободных $R[x]$ -модулей E ранга n (т.е. $\dim_R(E) = n$),
- $Iso(Mod_n(R[x]))$ — множество классов изоморфизма таких модулей.

Теорема 2.3 *Существует биекция:*

$$\chi : M_n(R)/GL_n(R) \rightarrow Iso(Mod_n(R[x]))$$

Доказательство. **Определение χ :** Пусть $[A] \in M_n(R)/GL_n(R)$ и $A \in M_n(R)$ — представители (Definition of χ : Let ... be a representant.). Далее, пусть E — свободный R -модуль ранга n . Выберем базис в E и определим $x \cdot e := A \cdot e$ ($\forall e \in E$). Таким образом E становится $R[x]$ -модулем E_A . Определим $\chi[A] := [E_A]$ — класс изоморфизма E_A . χ определено корректно, потому что для подобных матриц $A \sim A'$, модули изоморфны: $E_A \cong E_{A'}$, следовательно, $[E_A] = [E_{A'}]$.

Определение χ' : Пусть $[F] \in Iso(Mod_n(R[x]))$ и $F \in Mod_n(R[x])$ — представители (Definition of χ : Let ... be a representant.). Выберем R -базис в F , тогда (линейное) преобразование x может быть выражено с помощью матрицы A . Если мы зададим $\chi'[F] := [A]$, то оно также корректно определено и очевидно является обратной функцией к χ . \square

3 Артиновы локальные кольца и конечнопорождённые модули

В первой части этого раздела мы применим китайскую теорему об остатках для упрощения задачи с КА над \mathbb{Z}_n до КА над \mathbb{Z}_{p^r} (p — простое, $r \in \mathbb{N}$). Мы помним, что кольцо \mathbb{Z}_n изоморфно произведению колец $\prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$, так как n единственным образом разлагается на простые множители $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m}$. Из этого изоморфизма вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1 Пусть R_1, R_2, \dots, R_m — (коммутативные) кольца (с единицей), $R := \prod_{i=1}^m R_i$, E — R -модуль и определим $E_i := E \otimes R_i$. Тогда кольцо $End_R(E)$ изоморфно $\bigoplus_{i=1}^m End_{R_i}(E_i)$.

Доказательство. Пусть $f_i := f \otimes 1_{E_i} \in End_{R_i}(E_i)$. Мы можем определить гомоморфизм колец $\phi : End_R(E) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m End_{R_i}(E_i)$ как $\phi(f) := (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

Если ϕ — мономорфизм: для $f \in ker(\phi) \Rightarrow f_i = f \otimes 1_{E_i} = 0 (\forall i) \Rightarrow f(E) \cong \prod_i (f(E) \otimes R_i) = 0 \Rightarrow f =$ **(ОПЕЧАТКА: в оригинальной статье формула обрывается).**

Если ϕ — эпиморфизм: мы выбираем произвольное $f_i \in End_{R_i}(E_i)$. Принимая во внимание диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\prod_i f_i(1_E \otimes \pi_i)} & \prod_i E_i = \prod_i (E \otimes R_i) \cong E \otimes \prod_i R_i \cong E, \\ \downarrow 1_E \otimes \pi_i & & \downarrow \pi_i \\ E_i & \xrightarrow{f_i} & E_i \end{array}$$

получаем, что $\phi(\prod_i f_i(1_E \otimes \pi_i)) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. \square

Следствие 3.2 КА над \mathbb{Z}_n может быть всегда реализован с помощью параллельного соединения КА над \mathbb{Z}_{p^r} .

Пример 3.3 КА над \mathbb{Z}_6 , изображенный на рисунке 2(a), изоморфен автомату на рисунке 2(b). Соответствующий модуль выглядит следующим образом:

$$E \cong \mathbb{Z}_6[x]/(x^3 - 2x^2 - 3x - 4) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x) \oplus \mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 - 1).$$

Во второй части данного раздела мы хотим собрать воедино необходимые факты об артиновых локальных кольцах и о модулях над ними.

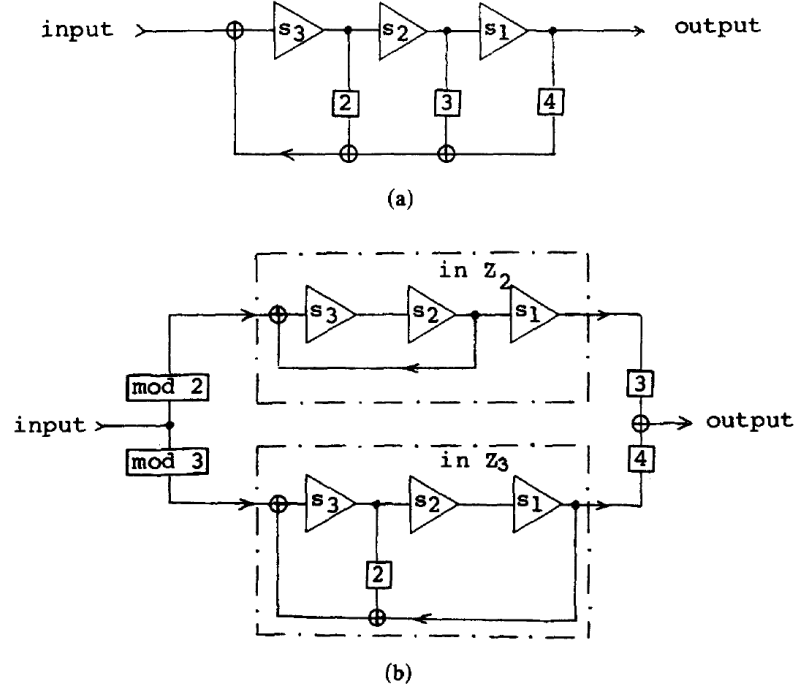


Рис. 2: Эквивалентные КА над \mathbb{Z}_6 (со входом и выходом)

Определение 3.4 Кольцо R является артиновым, если оно нётерово и имеет размерность 0 (любой простой идеал максимален, см. [1]).

Кольцо R является локальным, если оно нётерово и имеет ровно один максимальный идеал M . Нотация: (R, M) .

Пример 3.5 $(\mathbb{Z}_{p^r}, (p))$ и $(\mathbb{Z}_{p^r}[x]/(x^S), (p, x))$ — это артиновы локальные кольца.

Лемма 3.6 Артиновы локальные кольца (R, M) , обладают следующими свойствами:

- (a) M является единственным простым идеалом;
- (б) нильрадикал $Rad(R)$ совпадает с M и сам является нильпотентным; наименьшее $z \in \mathbb{N}$, при котором $M^z = (0)$, называется нильпотентностью M ;
- (в) каждый элемент R либо обратим, либо нильпотентен.

Снэппер (Snapper) [11] называет такие кольца «совершенно простыми кольцами».

Учитывая важность канонического отображения $\pi : R \rightarrow R/\text{Rad}(R)$, мы будем использовать следующую нотацию на всём протяжении работы: $\bar{R} = R/\text{Rad}(R)$, поле вычетов, $\bar{r} = \pi(r) (\forall r \in R)$, $\overline{M[x]} = \pi(M[x]) = 0$.

Примечание 3.7 В данной работе мы будем рассматривать только конечнопорождённые модули, не повторяя этот факт каждый раз.

Причина, по которой мы не можем следовать такому же разложению, как для автомата над полем F (т.е. как модули над областью главных идеалов $F[x]$), состоит в том, что подмодуль свободного модуля не обязательно является свободным. Но у нас есть следующая фундаментальная теорема.

Теорема 3.8 (а) В локальном кольце (S, M) все конечнопорождённые модули свободны.

(б) Пусть (S, M) — артиново локальное кольцо, $F \subset E$ — оба конечнопорождённые свободные S -модули. Тогда $E \cong F \oplus E/F$.

(в) Пусть (S, M) артиново локальное кольцо, $F, G \subset E$ — три конечнопорождённых свободных S -модуля. Тогда $F \cap G$ и $F + G$ являются свободными.

Доказательство. (а) См. [10].

(б) Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{f_1, \dots, f_m\}$ — базисы в E и F , соответственно. Поскольку $F \cap E \Rightarrow f_1 = \sum \phi_i e_i$ и поскольку $\{f_1, \dots, f_m\}$ линейно независимы, как минимум один из ϕ_i должен быть обратим (см. лемму 3.6). Без потери общности, обратимый ϕ_i подразумевает $e_1 = (\phi_1^{-1})(f_1 - \sum_{i < 1} \phi_i e_i)$. Поэтому $\{f_1, e_2, \dots, e_n\}$ — это базис в E . По индукции получаем, что $\{f_1, f_2, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ является базисом в E , следовательно, $E \cong F \oplus L_R(e_{m+1}, \dots, e_n)$.

(в) $G \rightarrow F \oplus E/F$ и оба слагаемых свободны (см. часть (б)). Пусть $\{g_1, \dots, g_p\}$ — базис в G , а $\{f_1, f_2, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ — базис в $E = F \oplus E/F$. Поскольку $g_i \in E$, мы можем заключить аналогично части (б), что $\{g_1, \dots, g_q, f_{q+1}, \dots, f_m, g_{q+1}, \dots, g_p, e_{n-m-p+q}, \dots, e_n\}$ является базисом в E . Следовательно, $F \cap G = L_S(g_1, \dots, g_q)$ и $F + G = L_S(g_1, \dots, g_p, f_{q+1}, \dots, f_m)$ свободны. \square

Напомним, что для несократимого полинома $\alpha \in R[x]$, **отображение (projection)** $\bar{\alpha} \in \bar{R}[x]$ не обязательно будет несократимым. Если оно является таковым, то мы называем α фундаментально несократимым.

Лемма 3.9 Вот некоторые важные типы идеалов в $R[x]$ для артинова локального (R, M) :

(а) $M[x] := \{\sum_i r_i x^i \in R[x] | r_i \in M\} \subset R[x]$ является единственным **нулевым (nil)** простым идеалом в $R[x]$;

(б) Все ненулевые простые идеалы имеют вид $M[x] + (\alpha)$, где $\alpha \in R[x]$ приведённый и фундаментально несократимый. Поскольку \bar{R} поле, эти идеалы также являются максимальными;

(в) Ненулевой идеал в $R[x]$ представим в виде $N + (\beta)$, где β — приведённый многочлен и $N \subset M[x]$. Порождающие N могут быть всегда выбраны так, что их степень будет меньше, чем β .

Доказательство очевидно; подробности можно найти в работе [11].

4 Примарное разложение

Для начала подготовим факты и определения, связанные с идеалами. Пусть J — идеал в кольце S . Радикал в J — это $Rad(J) = \{s \in S \mid \exists n \in \mathbb{N} : s^n \in J\}$. Напомним, что $Rad(R) := Rad(0)$. J называется примарным, если для $st \in J, t \notin J \Rightarrow s \in Rad(J)$.

Пусть E — это S -модуль, тогда аннигиляторный идеал в E определяется как $Ann_S(E) := \{s \in S \mid se = 0 (\forall e \in E)\}$.

Определение 4.1 S -модуль называется примарным, если (0) — это примарный подмодуль E . То есть $se = 0$ (при $s \in S, 0 \neq e \in E$) означает, что $s \in Rad(Ann_S(E))$. (Если элемент s уничтожает один элемент из E , то мощность s уничтожает всё в E .) Идеалы J и I в S называются взаимно простыми, если $I + J = S$.

Лемма 4.2 Пусть (R, M) — артиново локальное кольцо и I, J — примарные идеалы в $R[x]$. Тогда:

- (а) J, I взаимно простые $\Leftrightarrow Rad(J), Rad(I)$ взаимно простые;
- (б) Пусть J и I ненулевые: $Rad(J) = Rad(I) \Rightarrow J$ и I взаимно простые.

Доказательство (а) (\Leftarrow): Очевидно, так как $Rad(J) \subset J$ и $Rad(I) \subset I$.

(\Rightarrow): Выберем $p \in Rad(J), q \in Rad(I)$ такими, что $p + q = 1$. Теперь существуют такие $n, m \in \mathbb{N}$, для которых выполняется $p^m \in J$ и $q^n \in I$, что:

$$1 = 1^{m+n-1} = (p + q)^{m+n-1} = \sum_{k=1}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k \cdot q^{m+n-k-1} = p^m(\dots) + q^n(\dots) \in J + I,$$

что подразумевает $1 \in I + J$.

(б) Из леммы 3.9 мы знаем что $Rad(J) = M[x] + (\alpha), Rad(I) = M[x] + (\beta)$, где подходящие $\alpha, \beta \in R[x]$ нормированы, а $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \overline{R}[x]$ взаимно просты. Следовательно, $1 \in (\overline{\alpha}) + (\overline{\beta})$, и $1 + \nu \in (\alpha) + (\beta)$ для некоторого $\nu \in M[x]$. Таким образом, $Rad(J)$ и $Rad(I)$ взаимно простые и, учитывая часть (а), J и I взаимно простые. \square

Лемма 4.3 Пусть R — нётерово кольцо, и E — R -свободный $R[x]$ -модуль. E является примарным тогда и только тогда, когда $Ann_{R[x]}(E)$ является примарным.

Доказательство Пусть $A := Ann_{R[x]}(E)$.

(\Rightarrow): Допустим $\alpha\beta \in A, \beta \notin A$, подразумевая, что существует $0 \neq e \in E$, для которого $\beta e \neq 0$. Но $(\alpha\beta)e = 0 = \alpha(\beta e)$ и E примарный, следовательно, $\alpha \in Rad(A)$.

(\Leftarrow) Пусть $0 \neq e \in E, \alpha e = 0$. Мы знаем, что

$$((\alpha) + A) \cdot ((\alpha) \cap A) \subset (\alpha) \cdot A \subset (\alpha) \cap A.$$

Случай 1: $(\alpha) \cdot A = (\alpha) \cap A$. Для нётеровых колец это означает, что $(\alpha) + A = R[x]$. Следовательно, существуют такие $\beta \in R[x]$ и $\gamma \in A$, что $\beta\alpha + \gamma = 1$. Возникает противоречие: $1 \cdot e = \beta(\alpha e) + \gamma e = \beta 0 + 0$.

Случай 2: $(\alpha) \cdot A \neq (\alpha) \cap A$. Существует $\beta \in (\alpha) \cap A, \beta \notin (\alpha) \cdot A$ такое, что $\beta = \alpha\gamma \in A, \gamma \notin A$, следовательно, $\alpha \in Rad(A)$. \square

Нас интересуют артиновы локальные кольца, а они по определению являются нётеровыми, поэтому мы можем применить следующую важную теорему.

Теорема 4.4 В нётеровом кольце R каждый идеал имеет примарное разложение на примарные идеалы Q_i (с точностью до порядка *(unique up to order)*)

$$J = \bigcap_{i=1}^m Q_i, \quad Q_i \not\subset \bigcap_{j \neq i} Q_j \quad (i = 1, \dots, m)$$

и все $\text{Rad}(Q_i)$ различны.

Если все Q_i попарно взаимно просты, тогда

$$J \cong \prod_{i=1}^m Q_i.$$

Доказательство первой части можно найти в работе [3]. Второй — в [13].

Теорема 4.5 (Примарное разложение модулей). Пусть (R, M) — артиново локальное кольцо, $E \in \text{Mod}_n(R[x])$. Тогда существуют примарные $L_i \in \text{Mod}_{n_i}(R[x])$, $L_i \subset E$, и эндоморфизмы $f_i = f|_{L_i}$ такие, что

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^m L_i \quad \text{и} \quad \text{Ann}_{R[x]}(E) \cong \prod_{i=1}^m \text{Ann}_{R[x]}(L_i).$$

Доказательство Применяя теорему 4.4 мы получаем примарное разложение $\text{Ann}_{R[x]}(E) = \bigcap_i Q_i$, где все Q_i примарные. Поскольку E имеет конечный ранг, все Q_i *не нулевые (nonnil)*. Лемма 4.2 гарантирует, что все Q_i попарно взаимно просты, следовательно, $\text{Ann}_{R[x]}(E) \cong \prod_i Q_i$.

Пусть $L_i := \prod_{j \neq i} Q_j \cdot E$, $K_i := \prod_{j=1}^i Q_j \cdot E$. Мы хотим показать, что $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m \oplus K_m$ для $i = 0, \dots, m$ с помощью индукции. Естественно, $L_0 = \text{Ann}(E)E = 0$, $K_0 = E$, и $K_m = 0$. Покажем, что $K_{i-1} = L_i \oplus K_i$:

$$L_i + K_i = \left(\prod_{j \neq i} Q_j + \prod_{j=1}^i Q_j \right) E = \prod_{j=1}^{i-1} Q_j \left(Q_i + \prod_{j=i+1}^m Q_j \right) E = \prod_{j=i}^m (Q_i + Q_j) K_{i-1} = K_{i-1},$$

поскольку все Q_j взаимно простые. Аналогичным образом, $L_i \cap K_i = \prod_{j=1}^m Q_j E = \text{Ann}(E)E = 0$.

Каждый L_i R -свободен, потому что он является *R -проективным (R-projective)* (как прямое слагаемое R -свободного модуля), следовательно, R -свободным по теореме 3.8. По лемме 4.3 L_i является примарным, так как $\text{Ann}(L_i) = Q_i$. \square

Пример 4.6 Пусть $R = \mathbb{Z}_4$, $E = e_1 R \oplus e_2 R$. КА на рисунке 3(a) соответствует матрице переходов $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2 + A = 0$ подразумевает $\text{Ann}(E) = (x^2 + x)$ с примарным разложением $(x)(x+1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} L_1 &= (x)E = (3e_1 + 3e_2)\mathbb{Z}_4, & f_1 &= f|_{L_1} = (3), \\ L_2 &= (x+1)E = (e_2)\mathbb{Z}_4, & f_2 &= f|_{L_2} = (0). \end{aligned}$$

Относительно нового базиса $\{3e_1 + 3e_2, e_2\}$ мы имеем матрицу переходов $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и конечный автомат на рисунке 3(b).

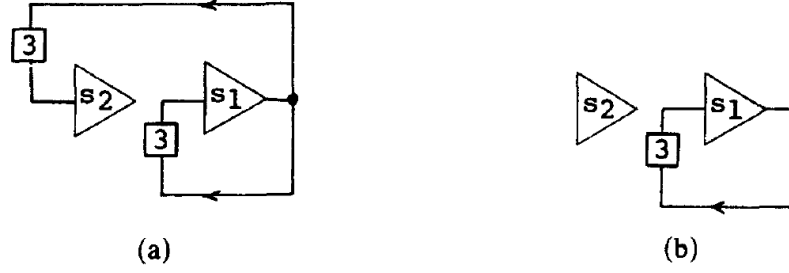


Рис. 3: Два эквивалентных КА: упрощение путём примарного разложения

5 Циклическое разложение

В силу теоремы 4.5 мы можем предположить без потери общности, что начнём с локального артинова кольца (R, M) и примарного $E \in \text{Mod}_n(R[x])$. В общем случае разложение E на циклические $R[x]$ -модули не представляется возможным. Приведём следующий пример.

Пример 5.1 Пусть $R = \mathbb{Z}_4$, $E = e_1 R \oplus e_2 R$. Два КА на рисунке 4 эквивалентны. Они соответствуют матрицам $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Перебирая все преобразования $GL_2(\mathbb{Z}_4)$, мы можем убедиться в том, что $\{A, A'\}$ — это **класс подобия (similarity-class)** A . И ни A , ни A' не являются **представлениями (representations)** циклических модулей.



Рис. 4: Контрпример: КА над \mathbb{Z}_4 , который неразложим на сдвиговые регистры

Поэтому мы определяем более слабое условие, чем прямая сумма. Пусть L_i — это $R[x]$ -подмодули E ($i = 1, \dots, k$) такие, что $\sum_{i=1}^k L_i = E$.

Определение 5.2 Сумма $E = \sum_{i=1}^k L_i$ называется прямой суммой по модулю M , если $\overline{E} \cong \bigoplus_{i=1}^k \overline{L}_i$, и обозначается как ${}_M \sum_{i=1}^k L_i$.

Легко заметить, что $E = {}_M \sum_{i=1}^k L_i$, если $(L_i + ME) \cap \sum_{j \neq i} L_j \subset ME$. Напомним, что $R[x]$ -модуль E называется циклическим, если E может быть порождён одним элементом; тогда мы имеем $E \cong R[x]/\text{Ann}(E)$.

Лемма 5.3 Для указанных выше (R, M) и E существуют нормированные и неприводимые $\alpha_i \in \overline{R}[x]$ и $s_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, k$) такие, что $\overline{E} \cong \bigoplus_{i=1}^k L'_i$ и $L'_i \cong \overline{R}[x]/(\alpha_i^{s_i})$.

Доказательство Поскольку e является $R[x]$ -модулем, мы можем применить структурную теорему для конечнопорождённых модулей над **областью главных идеалов (principal ideal domain)**.

ideal domain) $\overline{R[x]} = R[x]/M[x] = (R/M)[x]$ (пример в работе [3]). Из того, что e примарный, получается что \bar{E} и, следовательно, все подмодули L'_i тоже примарны. Примарный идеал в $\overline{R[x]}$ — это мощность простого идеала $(\bar{\alpha}_i)^{s_i}$. \square

Эти $\bar{R}[x]$ -подмодули $L'_i \subset \bar{E}$ могут быть **подняты до (can be lifted to)** $R[x]$ -подмодулей L_i следующим образом. Пусть $e'_i \in L'_i$ порождает L'_i , а выбор $e_i \in \pi^{-1}(e'_i) \subset E$ произволен: тогда $L_i := R[x] \cdot e_i (i = 1, \dots, k)$. Каждый L_i циклический по определению, но в общем случае не R -свободный. Поскольку $\pi((L_i + ME) \cap \sum_{j \neq i} L_j) = L'_i \cap \sum_{j \neq i} L'_j = 0$ мы доказали следующую теорему.

Теорема 5.4 Пусть (R, M) — артиново локальное кольцо, и $E \in \text{Mod}_n(R[x])$ — примарный модуль. Тогда существуют циклические $R[x]$ -модули $L_i \subset E (i = 1, \dots, k)$ такие, что $E = {}_M \sum_{i=1}^k L_i$ (сумма по модулю M).

Теорема 5.5 Для (R, M) и E указанных выше:

$$\begin{aligned} E \cong \bigoplus_{i=1}^k L_i &\Leftrightarrow L_i \text{ является } R\text{-свободным } (i = 1, \dots, k) \\ &\Leftrightarrow \text{Ann}_{R[x]}(L_i) \text{ является главным идеалом } (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Доказательство (а) (\Rightarrow) : E — R -свободный модуль, а L_i — прямое слагаемое E , следовательно, L_i является **R -проективным (R-projective)**, и тогда можно использовать теорему 3.8.

(\Leftarrow): Из теоремы 3.8 мы можем заключить, что $L_1 \cap \sum_{i>1} L_i$ является R -свободным, а из определения суммы по модулю M , мы знаем, что

$$(L_1 + ME) \cap \sum_{i>1} L_i \subset ME \Rightarrow L_1 \cap \sum_{i>1} L_i = 0.$$

Теперь продолжим для $\sum_{i>1} L_i$ по индукции.

(б) Пусть $i = 1, \dots, k$ произвольно, e порождающий в L_i и $d := d_i$, тогда $B := e, xe, \dots, x^{d-1}e$ — R -базис в L_i .

(\Rightarrow): $x^d e = \sum_{j=0}^{d-1} a_j(x^j e) \in L$ **подразумевает (в оригинале implying — причастие)**, что $\alpha := x^d - \sum_{j=0}^{d-1} a_j x^j \in \text{Ann}(L)$ и α имеет степень d . Согласно лемме 3.9, $\text{Ann}(L) = (\alpha) + N$ при $N \subset M[x]$. Если $N \neq 0$, тогда $\exists 0 \neq \beta \in N, \deg(\beta) < d$ (лемма 3.9), но это приводит к противоречию с тем, что базис B линейно независим.

(\Leftarrow): Без потери общности, $\text{Ann}(L_i)$ порождён элементом $\alpha \in R[x]$ с ненулевым старшим коэффициентом. Очевидно, что $\deg(\alpha) = d$. Поскольку $\text{Ann}(L_i)$ не содержит многочленов меньшей степени, в B не существует зависимостей между элементами, следовательно, B является базисом. \square

Пример 5.6 Пусть $R = \mathbb{Z}_4$, $E = \bigoplus_{i=1}^4 e_i \cdot \mathbb{Z}_4$. Автомат на рисунке 5 соответствует матрице переходов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ann}(E) = ((x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1), 4(x^2 - 1)).$$

Следуя выводу и нотации теоремы 5.4, мы получаем $\bar{R}[x] = \mathbb{Z}_2[x]$, $\bar{E} = \bigoplus_{i=1}^4 \bar{e}_i \mathbb{Z}_2$ и $\text{Ann}_{\mathbb{Z}_2[x]}(\bar{E}) = (x^2 + 1)$. $L'_1 = L_{\mathbb{Z}_2}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, аналогично, $L'_2 = L_{\mathbb{Z}_2}(\bar{e}_3, \bar{e}_4)$. Теперь выберем $\hat{e}_1 := e_1 + 2e_3, \hat{e}_2 := 3e_3$ и найдём, что оба

$$L_1 = L_{\mathbb{Z}_8[x]}(\hat{e}_1) = L_{\mathbb{Z}_8}(\hat{e}_1, x\hat{e}_1, (4x + 4)\hat{e}_2),$$

$$L_2 = L_{\mathbb{Z}_8}(\hat{e}_2, x\hat{e}_2, (4x+4)\hat{e}_1)$$

не являются \mathbb{Z}_8 -свободными.

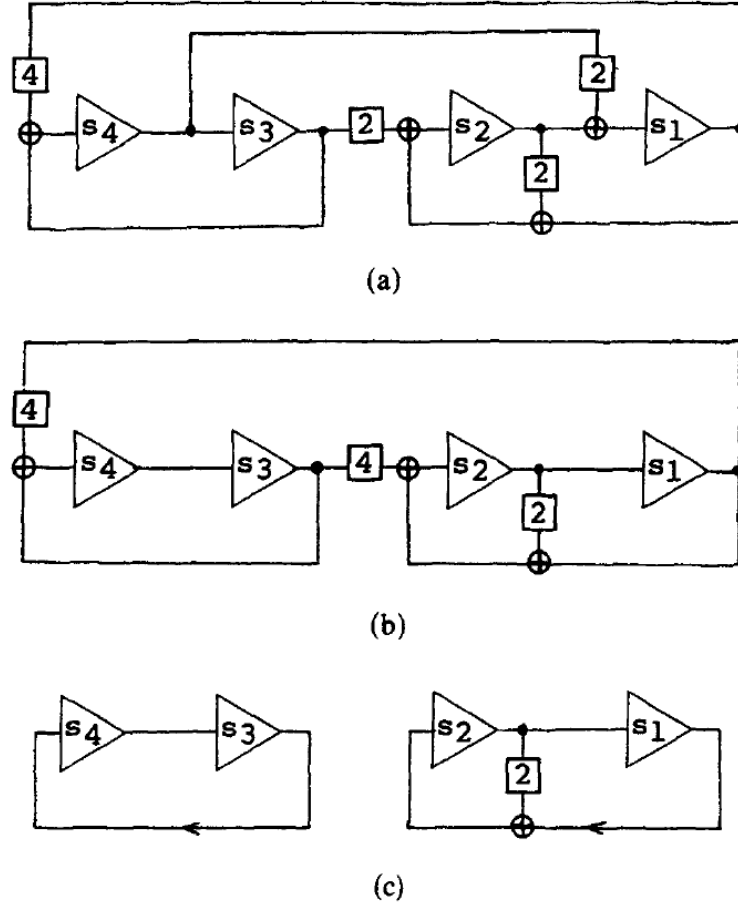


Рис. 5: Три эквивалентных КА: упрощение с помощью циклического разложения

Относительно нового базиса $\{\hat{e}_i\}$ мы получаем новую матрицу переходов A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

«твист-матрица»

Поскольку L_1 и L_2 не являются \mathbb{Z}_8 -свободными, два сдвиговых регистра соединены, но со следующими ограничениями:

- (1) они соединены только элементами нильрадикала (составляющими «твист-матрицы»);
- (2) они заканчиваются только в первых элементах задержки (с наивысшим индексом) каждого сдвигового регистра.

Определение 5.7 Примарный R -свободный $R[x]$ -модуль называется скрученным, если он не изоморфен прямой сумме циклических $R[x]$ -модулей.

Теорема 5.4 даёт нам необходимые и достаточные условия для определения скручен ли модуль или нет. Но у нас существует неприятная ситуация, в которой подмодули

L_i зависят от выбора $e_i \in \pi^{-1}(e'_i)$. Для одних e_i L_i будут циклическими, а для других нет. В приведённом ниже следствии мы следуем «алгоритмическому» подходу к проблеме отсутствующей независимости.

Следствие 5.8 Для (R, M) и E указанных выше, $E = \sum_{i=1}^m L_i$, пусть $\alpha_i \in R[x]$ — нормированный многочлен, для которого $(\overline{\alpha_i}) = \text{Ann}(L'_i) \subset R[x]$. Тогда E не является скрученным, если существуют $\nu_i \in M[x] (i = 1, \dots, k)$ такие, что $(\alpha_i + \nu_i)L_i \subset (\alpha_i + \nu_i)ME$. Если E не скрученный, тогда $\text{Ann}(E) = \bigcap_{i=1}^k (\alpha_i + \nu_i)$.

Доказательство (\Rightarrow): Очевидно по теореме 5.5: мы зададим $\nu_i := 0$.

(\Leftarrow): Существует $m_i \in ME$ такой, что $(\alpha_i + \nu_i)e_i = (\alpha_i + \nu_i)m_i$ для L_i -порождающих e_i подразумевает $(\alpha_i + \nu_i)(e_i - m_i) = 0$. Определим $L_i^0 := R[x](e_i - m_i)$; L_i^0 является R -свободным, и $\overline{L_i^0} = L'_i$ подразумевает $E = \sum_{i=1}^k L_i^0$, а теорема 5.4 завершает доказательство:

$$\text{Ann}(E) = \text{Ann}\left(\sum_i L_i\right) = \bigcap_i \text{Ann}(L_i) = \bigcap_i (\alpha_i + \nu_i). \quad \square$$

Пример 5.6 (Продолжение). Зададим $\alpha_1 = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_8[x]$, $\nu_1 = nx + m$ ($n, m \in (2) \subset \mathbb{Z}_8$). $(x^2 + nx + m + 1)\hat{e}_1 = \hat{e}_1((m + 2) + x(n + 2)) + 4\hat{e}_2$, и для $n = m = 6$ мы получаем $(x^2 - 2x - 1)\hat{e}_1 = (x^2 - 2x - 1)2x\hat{e}_2 = 4\hat{e}_2$. Следовательно, для нового выбора $\hat{e}_1^0 := \hat{e}_1 - 2x\hat{e}_2 = e_1 + 2e_3 + 2e_4$, L_1^0 является \mathbb{Z}_8 -свободным, $\text{Ann}(L_1^0) = (x^2 - 2x - 1)$. Аналогичным образом если мы выберем $\hat{e}_2^0 := \hat{e}_2 - 2x\hat{e}_1 = e_3 + 2e_2$, то L_2^0 тоже становится \mathbb{Z}_8 -свободным, $\text{Ann}(L_2^0) = (x^2 - 1)$. Матрица переходов A^* принимает вид

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

соответствуя конечному автомату на рисунке 5(с).

$$\begin{aligned} E \text{ не скручен} &\Rightarrow \text{Ann}(E) = (x^2 - 2x - 1) \cap (x^2 - 1) \\ &= ((x^2 - 2x - 1)(x^2 - 1), 4(x^2 - 1)). \end{aligned}$$

6 Специальный случай с рекурсивным критерием

Мы продолжим рассматривать проблему предыдущего раздела, где (R, M) — это локальное артиново кольцо, а $E \in \text{Mod}_n(R[x])$ — примарный модуль. Для формулировки специального случая, нам необходимо сначала дать определение. Напомним, что согласно теореме 5.4 $E = \sum_{i=1}^k L_i$, где циклические $R[x]$ -модули $L_i \subset E (i = 1, \dots, k)$.

Определение 6.1 Примарный модуль $E = \sum_{i=1}^k L_i \in \text{Mod}_n(R[x])$ называется **полным степени d (full of degree)**, если все L_i имеют d линейно независимых порождающих.

Другими словами, $\dim_{\overline{R}}(\overline{L_i}) = d$ ($i = 1, \dots, k$). Конечный автомат, соответствующий **полному модулю степени d (full module of degree)** d , характеризуется постоянным числом d элементов задержки в каждом сдвиговом регистре.

Пусть $A := R[x]/\text{Ann}(E)$. Конечно, E — это A -модуль.

Эта часть имеет следующую мотивацию. Конечный автомат, соответствующий **полному модулю (full module)**, состоит из сдвиговых регистров \mathcal{A}_i ($i = 1, \dots, k$), а соединения между ними описываются «твист-матрицей». Мы хотим рассматривать сдвиговый регистр как «векторный элемент задержки», как элемент задержки \mathcal{J}_i над A , а мультипликаторы в соединениях между \mathcal{J}_i как элементы A (см. рисунок 6).

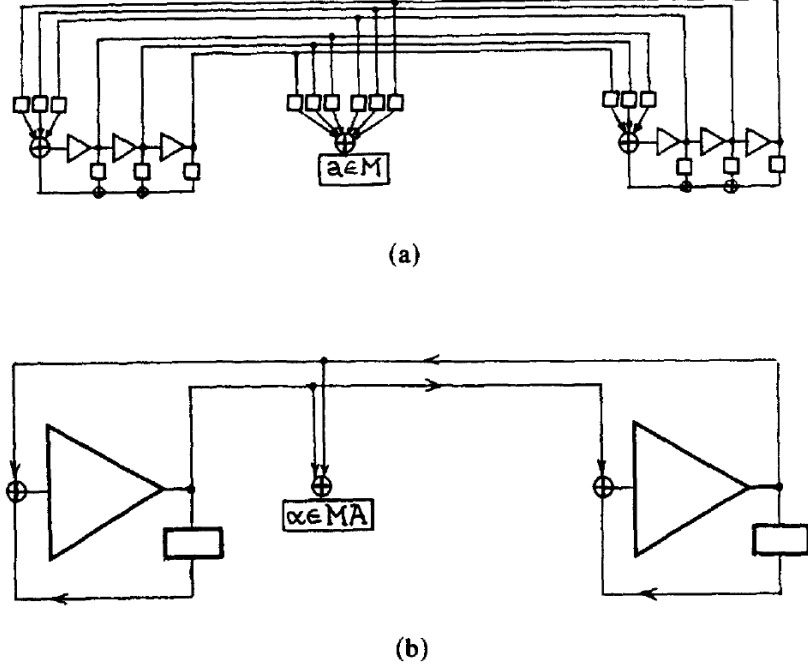


Рис. 6: (a) Диаграмма КА над (R, M) , соответствующего **полному модулю степени (full module of degree)** 3. (b) Диаграмма эквивалентного КА над $A = R[x]/\text{Ann}(E)$.

Выберем **минимальный набор (minimal set)** A -порождающих $\{e_1, \dots, e_k\}$ из E . Поскольку каждый модуль является образом свободного модуля, мы имеем отображение $\rho : F \rightarrow E$ для свободного A -модуля F с базисом $\{b_1, \dots, b_k\}$, $\rho(b_i) = e_i$ ($i = 1, \dots, k$). Мы получаем короткую, чёткую последовательность

$$0 \rightarrow \ker(\rho) \rightarrow F \xrightarrow{\rho} E \rightarrow 0.$$

Лемма 6.2 Пусть $E = \sum_{i=1}^k L_i$ **полный A -модуль степени (full A -module of degree)** d . Тогда существует нормированный $\alpha \in A$ степени d такой, что $\text{im}(\alpha) \subset ME$. α уникален с точностью до многочленов степени $d - 1$ из MA .

Доказательство Для полного модуля мы всегда можем выбрать нормированный $\alpha \in A$, для которого $(\bar{\alpha}) = \text{Ann}(\bar{L}_i)$ ($i = 1, \dots, k$). $\deg(\alpha) = \deg(\bar{\alpha}) = \dim_{\bar{R}}(\bar{L}_i) = d$. Для всех $e \in E$, $\pi(\alpha e) = \bar{\alpha} \bar{e} = 0$, следовательно, $e \in ME$. \square

Порождающие $\ker(\rho)$ определяются с помощью **отношений (relations)** в E . Они имеют вид $ab_i = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} b_j$ ($i = 1, \dots, k$), $\alpha \in A$ нормирован, $\beta_{ij} \in MA$. Мы выбираем α в соответствии с леммой 6.2. Затем мы определим $h \in \text{End}(F)$ как $h(b_i) := ab_i - \sum_{j=1}^k \beta_{ij} b_j$ ($i = 1, \dots, k$) и, таким образом, найдём точную последовательность

$$F \xrightarrow{h} F \xrightarrow{\rho} E \rightarrow 0.$$

Заметим, что $E \cong \text{coker}(h)$. Теперь определим $f_\alpha := \alpha - h$.

Список литературы

- [1] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969).
- [2] W.S. Ching and B.F. Wyman, Duality and the regulation problem for linear systems over commutative rings, J. Comput. System Sci. 14 (1977) 360-368.
- [3] T. Hungerford, Algebra (Holt, Rinehart & Winston, New York, 1974).
- [4] R.E. Kalman, P.L. Falb and M.A. Arbib, Topics in Mathematical System Theory (McGraw-Hill, New York, 1969).
- [5] P. Khargonekar, On Matrix Fraction Representation for Linear Systems over Commutative Rings (Center of Math. System Theory, Univ. of Florida, 1980).
- [6] M. Magidin and A. Gill, Decomposition of linear sequential circuits over residue rings, J. Franklin Inst. 294 (1972) 167-180.
- [7] M. Magidin and A. Gill, Singular shift registers over residue class rings, Math. Systems Theory 9(4) (1976) 345-358.
- [8] G. Nandi and C. Nolte, Duality for systems over rings, Inform. Control 50. (1981) 128-132.
- [9] B. Reusch, Lineare Automaten (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969).
- [10] J.R. Silvester, Introduction to Algebraic K-theory (Chapman & Hall, London, 1981).
- [11] E. Snapper, Completely primary rings, Ann. of Math. 52 (1950) 666-693.
- [12] E.D. Sontag, Linear systems over commutative rings, Ricerche Automat. 7(1) (1976) 1-34.
- [13] B.L. van der Waerden, Algebra 2 (Springer, Berlin, 1967).