# Декомпозиция линейных автоматов над кольцом вычетов в сдвиговые регистры *

Арнольд Шойинг (Arnold Scheuing)

*Институт информатики и прикладной математики, Бернский университет, CH-3012 Берн, Швейцария*

**Аннотация**

Линейный автомат $\mathfrak{A}$ над факторкольцом $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$, в общем случае неразложим на параллельно соединённые сдвиговые регистры. Мы смогли сформулировать необходимые и достаточные условия для такого разложения, используя торию об артиновых локальных кольцах $R$ и $R[x]$-модульной структуре $\mathfrak{A}$.

# 1 Введение

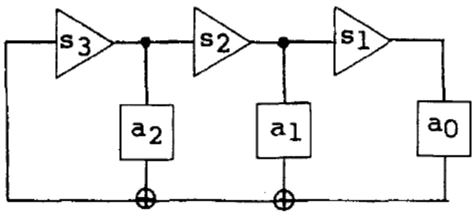
Структура конечного, детерминированного линейного автомата (далее КА) интересна не только с точки зрения информатики, но и с точки зрения теории систем. Сфера применений КА, называемых также линейными последовательными схемами (LCS) включает в себя обнаружение и исправление ошибок, генераторы случайных чисел, криптологию (мотивация автора), а также конечномерные линейные системы с постоянными коэффициентами и дискретным или непрерывным временем. До тех пор пока коэффициенты такого автомата или системы являются элементами поля $F$, структура хорошо известна и тщательно изучалась последние двадцать лет [4] с помощью линейной алгебры: пространство состояний $E$ автомата $\mathfrak{A}$ — это конечномерное векторное пространство $E$ над $F$, а функция перехода может быть рассмотрена как эндоморфизм в $E$ или как матрица $A$ над $F$, если базис в $E$ зафиксирован.

Для нахождения более "простого"эквивалентного $\mathfrak{A}$ КА можно использовать взаимооднозначное соответствие между КА, эквивалентными $\mathfrak{A}$, и матрицами, подобными $A$. Есть существенные причины для выбора рациональной канонической формы $A$ как наиболее "простой потому что она соответствует разложению $A$ на параллельные сдвиговые регистры.

На рисунке 1 мы показываем три представления КА относительно данного базиса $B$ в $E$. Рисунок 1(а) соответствует сдвиговому регистру (его технической реализации) с 3-мерным пространством состояний, каждое из которых обладает компонентами $(s_1, s_2, s_3)$. В теории систем $s_i$ и $a_i$ называются, соответственно, элементами задержки и умножения. Каждый такт элемент из $s_3$ переходит в $s_2$, из $s_2$ — в $s_1$ и сумма $a_0 s_1 + a_1 s_2 + a_2 s_3$ (в поле $F$) попадает в $s_3$. На рисунке 1(б) изображено представление линейной функции $f$ в форме матрицы $3 \times 3$. Эта специальная форма называется сопровождающей матрицей. Если полином $x^3 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$ является несократимым в $F[x]$, тогда КА нельзя разложить. Рисунок 1(в) указывает $F[x]$-модуль ранга 3, например, базис $B$ имеет три элемента: $e$, $f(e)$, $f^2(e)$, и

$$f^3(e) = a_0 e + a_1 f(e) + a_2 f^2(e).$$

*Результаты приведённые в данной работе являются частью докторской диссертации автора, которой руководил профессор Урс Вюрглер (Urs Würgler) из Бернского университета.




**(а)**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad F[x]/(x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0)$$

**(б)** **(в)**

Рис. 1: Соответствующие представления ($a_0, a_1, a_2 \in F$). (а) Сдвиговый регистр. (б) Сопровождающая матрица. (в) Циклический F[x]-модуль ранга 3.

Взаимооднозначное соответствие между этими структурами используется на всём протяжении данной работы: диаграммы КА и сдвиговые регистры для визуализации технической реализации, матрицы для расчётов в примерах, а модули для развития теории.

Известно, что КА с коэффициентами над полем может быть всегда реализован с помощью параллельного соединения сдвиговых регистров [9]. Но в применениях, указанных выше, нас также интересуют системы над кольцами $\mathbb{Z} \mod 2^r (r \in \mathbb{N})$. Например, в криптологии процесс автоматизированного шифрования и расшифрования связан с диапазоном значений $2^r$ регистра с $r$ бинарными разрядами.

Хорошее исследование расширения теории линейных систем от полей до колец за последние десять лет можно найти в работе [12]. Принцип двойственности для линейных систем над факторкольцами рассматривалась в работах [2, 8]. Представление матричных дробей для линейных систем над коммутативными кольцами также было изучено в работе [5].

В разделе 5 мы приводим пример КА над $\mathbb{Z}_4$, который и не является, и не разложим на сдвиговые регистры. Следовательно, возникает вопрос, при каких условиях КА над $\mathbb{Z}_n$ может быть реализован как параллельное соединение сдвиговых регистров. Похожая проблема изучалась в работах [6, 7], путём использования биекции $\beta : \mathbb{Z}_{p^r} \approx \prod_1^r \mathbb{Z}_p$ для декомпозиции КА $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{Z}_{p^r}$ в каскад из $r$ автоматов $\mathfrak{A}_i$ над $\mathbb{Z}_p$. Но поскольку $\beta$ не является гомоморфизмом колец, $\mathfrak{A}_i$ соединены с помощью нелинейной логикой без задержек, которая ограничивает дальнейший анализ посредством коммутативной алгебры.

Данная работа состоит из следующих разделов: в разделе 2 мы покажем, что $\mathbb{Z}_n$-свободные $\mathbb{Z}_n[x]$-модули являются подходящими математическими объектами для изучения структуры КА над полем $\mathbb{Z}_n$ (рисунок 1). В разделе 3 мы докажем что проблема может быть сведена к КА над $\mathbb{Z}_p$ без потери общности; с другой стороны, рекурсивный критерий в последнем разделе предлагает не ограничивать наше внимание на конечных и локальных кольцах $\mathbb{Z}_{p^r}$, а рассматривать более общие (коммутативные) артиновы локальные кольца $R$ (с 1). Следовательно, в разделе 3 мы соберём все необходимые утверждения относительно артиновых локальных колец и модулей над ними. В разделе 4 мы покажем, что наш $R[x]$-модуль всегда имеет примарное разложение. Основные результаты находятся в разделах 5 и 6, где мы приводим необходимые и достаточные условия для циклического разложения пространства состояний; другими словами, условия для того, чтобы КА был эквивалентен прямой сумме сдвиговых регистров. Общий случай мы рассматриваем в разделе 5, а специальный с кольцом главных идеалов — в разделе 6.

## 2 Модульная структура конечного автомата

Начнём с более точного описания конечного автомата (КА).

**Определение 2.1** Конечный детерминированный линейный автомат (без входных или выходных функций) над кольцом $R$ — это пара $(E, f)$, где пространство состояний $E$ является свободным $R$-модулем конечной размерности (скажем $n$), а функция перехода $f$ — это линейное отображение из $E$ в $E$. Каждое $e \in E$ является состоянием КА, функция перехода отображает состояние $e$ в новое $f(e)$. Мы можем использовать простую нотацию без начального состояния, потому что нас интересует структура КА в целом.

Множество функций переходов над $E$ — это кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_R(E) = \{f : E \to E \mid f \text{ линейна}\}$. $\mathrm{End}_R(E)$ также является $R$-модулем. Этот факт может быть выражен с помощью гомоморфизма колец на следующей коммутативной диаграмме.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & \mathrm{End}_R(E) \\
R[x] \arrow[ur, "\hat{\psi}"] &
\end{tikzcd}$$

Для $r \in R$, $\psi(r)$ — это скалярное произведение для $r$ из $E$. Так как $f$ линейна над $E$, мы можем расширить $\psi$ на $R[x]$ как гомоморфизм колец с помощью задания $\hat{\psi}(x) := f$. Теперь $E$ становится $R[x]$-модулем.

Путём параллельного соединения различных КА над одним и тем же кольцом мы можем построить более крупный автомат. Но ещё больший интерес представляет возможность разложения данного (сложного) автомата на мельчайшие, несократимые части — сдвиговые регистры.

**Определение 2.2** КА $(E, f)$ над кольцом $R$ называется *сдвиговым регистром*, если $E$ цикличное, как $R[x]$-модуль. Другими словами, если существует такое начальное состояние $e \in E$, что его орбита:

$$e, f(e), f^2(e), ..., f^{n-1}(e)$$

охватывает $E$.

Под «параллельным соединением КА $(E_i, f_i)$» мы подразумеваем техническую реализацию (см. рисунок 2(б)), но оно попросту означает прямую сумму КА $(\bigoplus E_i, \bigoplus f_i)$. Высказывание «КА реализован как параллельное соединение сдвиговых регистров» является интуитивным способом выразить то, что $E$ — это прямая сумма $R[x]$-цикличных $R$-свободных подмодулей.

Для формулировки первой теоремы необходима следующая нотация:

- $M_n(R)$ — множество всех $n \times n$-матриц над $R$,
- $GL_n(R)$ — подмножество всех регулярных матриц из $M_n(R)$,

- $M_n(R)/GL_n(R)$ — множество всех классов подобия матриц ($A \in M_n(R)$ подобна $T^{-1}AT$ для всех $T \in GL_n(R)$),
- $Mod_n(Rp[x])$ — класс всех $R$-свободных $R[x]$-модулей $E$ ранга $n$ (т.е. $dim_R(E) = n$),
- $Iso(Mod_n(R[x]))$ — множество классов изоморфизма таких модулей.

**Теорема 2.3** *Существует биекция:*

$$\chi : M_n(R)/GL_n(R) \to Iso(Mod_n(R[x]))$$

**Доказательство.** Определение $\chi$: Пусть $[A] \in M_n(R)/GL_n(R)$ и $A \in M_n(R)$ — представители (Definition of $\chi$: Let ... be a representant.). Далее, пусть $E$ — свободный $R$-модуль ранга $n$. Выберем базис в $E$ и определим $x \cdot e := A \cdot e$ ($\forall e \in E$). Таким образом $E$ становится $R[x]$-модулем $E_A$. Определим $\chi[A] := [E_A]$ — класс изоморфизма $E_A$. $\chi$ определено корректно, потому что для подобных матриц $A \sim A'$, модули изоморфны: $E_A \cong E_{A'}$, следовательно, $[E_A] = [E_{A'}]$.

Определение $\chi'$: Пусть $[F] \in Iso(Mod_n(R[x]))$ и $F \in Mod_n(R[x])$ — представители (Definition of $\chi$: Let ... be a representant.). Выберем $R$-базис в $F$, тогда (линейное) преобразование $x$ может быть выражено с помощью матрицы $A$. Если мы зададим $\chi'[F] := [A]$, то оно также корректно определено и очевидно является обратной функцией к $\chi$. $\square$

# 3 Артиновы локальные кольца и конечнопорождённые модули

В первой части этого раздела мы применим китайскую теорему об остатках для упрощения задачи с КА над $\mathbb{Z}_n$ до КА над $\mathbb{Z}_{p^r}$ ($p$ — простое, $r \in \mathbb{N}$). Мы помним, что кольцо $\mathbb{Z}_n$ изоморфно произведению колец $\prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$, так как $n$ единственным образом разлагается на простые множители $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m}$. Из этого изоморфизма вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.1** *Пусть $R_1, R_2, ..., R_m$ — (коммутативные) кольца (с единицей), $R := \prod_{i=1}^m R_i$, $E$ — $R$-модуль и определим $E_i := E \otimes R_i$. Тогда кольцо $End_R(E)$ изоморфно $\bigoplus_{i=1}^m End_{R_i}(E_i)$.*

**Доказательство.** Пусть $f_i := f \otimes 1_{E_i} \in \mathrm{End}_{R_i}(E_i)$. Мы можем определить гомоморфизм колец $\phi : \mathrm{End}_R(E) \to \bigoplus_{i=1}^m \mathrm{End}_{R_i}(E_i)$ как $\phi(f) := (f_1, f_2, ..., f_m)$.

Если $\phi$ — мономорфизм: для $f \in ker(\phi) \Rightarrow f_i = f \otimes 1_{E_i} = 0 (\forall i) \Rightarrow f(E) \cong \prod_i (f(E) \otimes R_i) = 0 \Rightarrow f =$ (ОПЕЧАТКА: в оригинальной статье формула обрывается).

Если $\phi$ — эпиморфизм: мы выбираем произвольное $f_i \in \mathrm{End}_{R_i}(E_i)$. Принимая во внимание диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\prod_i f_i(1_E \otimes \pi_i)"] \arrow[d, "1_E \otimes \pi_i"'] & \prod_i E_i = \prod_i (E \otimes R_i) \cong E \otimes \prod_i R_i \cong E, \arrow[d, "\pi_i"] \\
E_i \arrow[r, "f_i"] & E_i
\end{tikzcd}$$

получаем, что $\phi(\prod_i f_i(1_E \otimes \pi_i)) = (f_1, f_2, ..., f_m)$. $\square$

**Следствие 3.2** КА над $\mathbb{Z}_n$ может быть всегда реализован с помощью параллельного соединения КА над $\mathbb{Z}_{p^r}$.

**Пример 3.3** КА над $\mathbb{Z}_6$, изображенный на рисунке 2(a), изоморфен автомату на рисунке 2(b). Соответствующий модуль выглядит следующим образом:

$$E \cong \mathbb{Z}_6[x]/(x^3 - 2x^2 - 3x - 4) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x) \oplus \mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 - 1).$$

Во второй части данного раздела мы хотим собрать воедино необходимые факты об артиновых локальных кольцах и о модулях над ними.

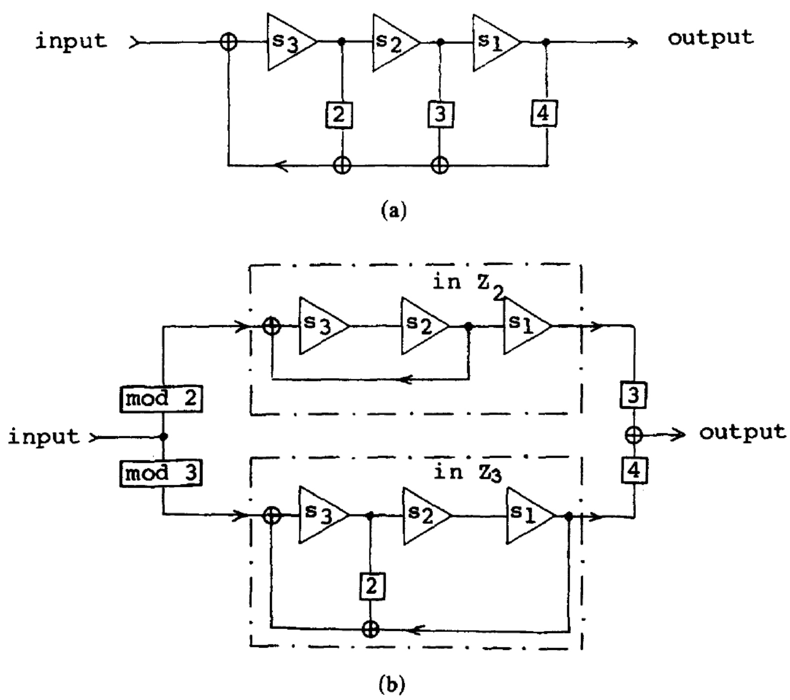



Рис. 2: Эквивалентные КА над $\mathbb{Z}_6$ (со входом и выходом)

**Определение 3.4** Кольцо $R$ является артиновым, если оно нётерово и имеет размерность 0 (любой простой идеал максимален, см. [1]).

Кольцо $R$ является локальным, если оно нётерово и имеет ровно один максимальный идеал $M$. Нотация: $(R, M)$.

**Пример 3.5** $(\mathbb{Z}_{p^r}, (p))$ и $(\mathbb{Z}_{p^r}[x]/(x^S), (p, x))$ — это артиновы локальные кольца.

**Лемма 3.6** *Артиновы локальные кольца* $(R, M)$*, обладают следующими свойствами:*

(а) M является единственным простым идеалом;

(б) нильрадикал $Rad(R)$ совпадает с $M$ и сам является нильпотентным; наименьшее $z \in \mathbb{N}$, при котором $M^z = (0)$, называется нильпотентностью $M$;

(в) каждый элемент $R$ либо обратим, либо нильпотентен.

Снэппер (Snapper) [11] называет такие кольца «совершенно простыми кольцами».

Учитывая важность канонического отображения $\pi : R \to R/Rad(R)$, мы будем использовать следующую нотацию на всём протяжении работы: $\overline{R} = R/Rad(R)$, поле вычетов, $\overline{r} = \pi(r)(\forall r \in R), \overline{M[x]} = \pi(M[x]) = 0$.

**Примечание 3.7** В данной работе мы будем рассматривать только конечнопорождённые модули, не повторяя этот факт каждый раз.

Причина, по которой мы не можем следовать такому же разложению, как для автомата над полем $F$ (т.е. как модули над областью главных идеалов $F[x]$), состоит в том, что подмодуль свободного модуля не обязательно является свободным. Но у нас есть следующая фундаментальная теорема.

**Теорема 3.8** *(а) В локальном кольце $(S, M)$ все конечнопорождённые модули свободны.*

*(б) Пусть $(S, M)$ — артиново локальное кольцо, $F \subset E$ — оба конечнопорождённые свободные $S$-модули. Тогда $E \cong F \oplus E/F$.*

*(в) Пусть $(S, M)$ артиново локальное кольцо, $F, G \subset E$ — три конечнопорождённых свободных $S$-модуля. Тогда $F \cap G$ и $F + G$ являются свободными.*

**Доказательство.** (а) См. [10].

(б) Пусть $\{e_1, ..., e_n\}$ и $\{f_1, ..., f_m\}$ — базисы в $E$ и $F$, соответственно. Поскольку $F \cap E \Rightarrow f_1 = \sum \phi_i e_i$ и поскольку $\{f_1, ..., f_m\}$ линейно независимы, как минимум один из $\phi_i$ должен быть обратим (см. лемму 3.6). Без потери общности, обратимый $\phi_i$ подразумевает $e_1 = (\phi_1^{-1})(f_1 - \sum_{i<1} \phi_i e_i)$. Поэтому $\{f_1, e_2, ..., e_n\}$ — это базис в $E$. По индукции получаем, что $\{f_1, f_2, ..., f_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$ является базисом в $E$, следовательно, $E \cong F \oplus L_R(e_{m+1}, ..., e_n)$.

(в) $G \to F \oplus E/F$ и оба слагаемых свободные (см. часть (б)). Пусть $\{g_1, ..., g_p\}$ — базис в $G$, а $\{f_1, f_2, ..., f_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$ — базис в $E = F \oplus E/F$. Поскольку $g_i \in E$, мы можем заключить аналогично части (б), что $\{g_1, ..., g_q, f_{q+1}, ..., f_m, g_{q+1}, ..., g_p, e_{n-m-p+q}, ..., e_n\}$ является базисом в $E$. Следовательно, $F \cap G = L_S(g_1, ..., g_q)$ и $F + G = L_S(g_1, ..., g_p, f_{q+1}, ..., f_m)$ свободны. □

Напомним, что для несократимого полинома $\alpha \in R[x]$, отображение (projection) $\overline{\alpha} \in \overline{R}[x]$ не обязательно будет несократимым. Если оно является таковым, то мы называем $\alpha$ фундаментально несократимым.

**Лемма 3.9** *Вот некоторые важные типы идеалов в $R[x]$ для артинова локального $(R, M)$:*

*(а) $M[x] := \{\sum_i r_i x^i \in R[x] | r_i \in M\} \subset R[x]$ является единственным нулевым (nil) простым идеалом в $R[x]$;*

*(б) Все ненулевые простые идеалы имеют вид $M[x] + (\alpha)$, где $\alpha \in R[x]$ приведённый и фундаментально несократимый. Поскольку $\overline{R}$ поле, эти идеалы также являются максимальными;*

*(в) Ненулевой идеал в $R[x]$ представим в виде $N + (\beta)$, где $\beta$ — приведённый многочлен и $N \subset M[x]$. Порождающие $N$ могут быть всегда выбраны так, что их степень будет меньше, чем $\beta$.*

Доказательство очевидно; подробности можно найти в работе [11].

# 4 Примарное разложение

Для начала подготовим факты и определения, связанные с идеалами. Пусть $J$ — идеал в кольце $S$. Радикал в $J$ — это $Rad(J) = \{s \in S | \exists n \in \mathbb{N} : s^n \in J\}$. Напомним, что $Rad(R) := Rad(0)$. $J$ называется примарным, если для $st \in J, t \notin J \Rightarrow s \in Rad(J)$.

Пусть $E$ — это $S$-модуль, тогда аннигиляторный идеал в $E$ определяется как $\mathrm{Ann}_S(E) := \{s \in S | se = 0 (\forall e \in E)\}$.

**Определение 4.1** $S$-модуль называется примарным, если $(0)$ — это примарный подмодуль $E$. То есть $se = 0$ (при $s \in S$, $0 \neq e \in E$) означает, что $s \in Rad(\mathrm{Ann}_S(E))$. (Если элемент $s$ уничтожает один элемент из $E$, то мощность $s$ уничтожает всё в $E$.) Идеалы $J$ и $I$ в $S$ называются взаимно простыми, если $I + J = S$.

**Лемма 4.2** *Пусть $(R, M)$ — артиново локальное кольцо и $I$, $J$ — примарные идеалы в $R[x]$. Тогда:*

*(а) $J, I$ взаимно простые $\Leftrightarrow$ $Rad(J)$, $Rad(I)$ взаимно простые;*

*(б) Пусть $J$ и $I$ ненулевые: $Rad(J) = Rad(I) \Rightarrow J$ и $I$ взаимно простые.*

**Доказательство** (а) ($\Leftarrow$): Очевидно, так как $Rad(J) \subset J$ и $Rad(I) \subset I$.

($\Rightarrow$): Выберем $p \in Rad(J), q \in Rad(I)$ такими, что $p + q = 1$. Теперь существуют такие $n, m \in \mathbb{N}$, для которых выполняется $p^m \in J$ и $q^n \in I$, что:

$$1 = 1^{m+n-1} = (p+q)^{m+n-1} = \sum_{k=1}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k \cdot q^{m+n-k-1} = p^m(...) + q^n(...) \ \in J + I,$$

что подразумевает $1 \in I + J$.

(б) Из леммы 3.9 мы знаем что $Rad(J) = M[x] + (\alpha), Rad(I) = M[x] + (\beta)$, где подходящие $\alpha, \beta \in R[x]$ нормированы, а $\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in \overline{R}[x]$ взаимно просты. Следовательно, $1 \in (\overline{\alpha}) + (\overline{\beta})$, и $1 + \nu \in (\alpha) + (\beta)$ для некоторого $\nu \in M[x]$. Таким образом, $Rad(J)$ и $Rad(I)$ взаимно простые и, учитывая часть (а), $J$ и $I$ взаимно простые. $\square$

**Лемма 4.3** *Пусть $R$ — нётерово кольцо, и $E$ — $R$-свободный $R[x]$-модуль. $E$ является примарным тогда и только тогда, когда $Ann_{R[x]}(E)$ является примарным.*

**Доказательство** Пусть $A := \mathrm{Ann}_{R[x]}(E)$.

($\Rightarrow$): Допустим $\alpha\beta \in A, \beta \notin A$, подразумевая, что существует $0 \neq e \in E$, для которого $\beta e \neq 0$. Но $(\alpha\beta)e = 0 = \alpha(\beta e)$ и $E$ примарный, следовательно, $\alpha \in Rad(A)$.

($\Leftarrow$) Пусть $0 \neq e \in E, \alpha e = 0$. Мы знаем, что

$$((\alpha) + A) \cdot ((\alpha) \cap A) \quad \subset \quad (\alpha) \cdot A \quad \subset \quad (\alpha) \cap A.$$

*Случай* 1: $(\alpha) \cdot A = (\alpha) \cap A$. Для нётеровых колец это означает, что $(\alpha) + A = R[x]$. Следовательно, существуют такие $\beta \in R[x]$ и $\gamma \in A$, что $\beta\alpha + \gamma = 1$. Возникает противоречие: $1 \cdot e = \beta(\alpha e) + \gamma e = \beta 0 + 0$.

*Случай* 2: $(\alpha) \cdot A \neq (\alpha) \cap A$. Существует $\beta \in (\alpha) \cap A, \beta \notin (\alpha) \cdot A$ такое, что $\beta = \alpha\gamma \in A, \gamma \notin A$, следовательно, $\alpha \in Rad(A)$. $\square$

Нас интересуют артиновы локальные кольца, а они по определению являются нётеровыми, поэтому мы можем применить следующую важную теорему.

**Теорема 4.4** *В нётеровом кольце $R$ каждый идеал имеет примарное разложение на примарные идеалы $Q_i$ (с точностью до порядка (unique up to order))*

$$J = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i, \qquad Q_i \not\subset \bigcap_{j\neq i} Q_j \quad (i = 1, ..., m)$$

*и все $Rad(Q_i)$ различны.*

*Если все $Q_i$ попарно взаимно просты, тогда*

$$J \cong \prod_{i=1}^{m} Q_i.$$

Доказательство первой части можно найти в работе [3]. Второй — в [13].

**Теорема 4.5** (Примарное разложение модулей). *Пусть $(R, M)$ — артиново локальное кольцо, $E \in Mod_n(R[x])$. Тогда существуют примарные $L_i \in Mod_{n_i}(R[x]), L_i \subset E$, и эндоморфизмы $f_i = f|L_i$ такие, что*

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^{m} L_i \qquad \text{и} \qquad Ann_{R[x]}(E) \cong \prod_{i=1}^{m} Ann_{R[x]}(L_i).$$

**Доказательство** Применяя теорему 4.4 мы получаем примарное разложение $\mathrm{Ann}_{R[x]}(E) = \bigcap_i Q_i$, где все $Q_i$ примарные. Поскольку $E$ имеет конечный ранг, все $Q_i$ не нулевые (nonnil). Лемма 4.2 гарантирует, что все $Q_i$ попарно взаимно просты, следовательно, $\mathrm{Ann}_{R[x]} \cong \prod_i Q_i$.

Пусть $L_i := \prod_{j\neq i} Q_j \cdot E, K_i := \prod_{j=1}^{i} Q_j \cdot E$. Мы хотим показать, что $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_i \oplus K_i$ для $i = 0, ..., m$ с помощью индукции. Естественно, $L_0 = \mathrm{Ann}(E)E = 0, K_0 = E$, и $K_m = 0$. Покажем, что $K_{i-1} = L_i \oplus K_i$:

$$L_i + K_i = \left(\prod_{j\neq i} Q_j + \prod_{j=1}^{i} Q_j\right) E = \prod_{j=1}^{i-1} Q_j \left(Q_i + \prod_{j=i+1}^{m} Q_j\right) E = \prod_{j=i}^{m}(Q_i + Q_j)K_{i-1} = K_{i-1},$$

поскольку все $Q_j$ взаимно простые. Аналогичным образом, $L_i \cap K_i = \prod_{j=1}^{m} Q_j E = \mathrm{Ann}(E)E = 0$.

Каждый $L_i$ $R$-свободен, потому что он является $R$-проективным (R-projective) (как прямое слагаемое $R$-свободного модуля), следовательно, $R$-свободным по теореме 3.8. По лемме 4.3 $L_i$ является примарным, так как $\mathrm{Ann}(L_i) = Q_i$. □

**Пример 4.6** Пусть $R = \mathbb{Z}_4, E = e_1 R \oplus e_2 R$. КА на рисунке 3(a) соответствует матрице переходов $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2 + A = 0$ подразумевает $\mathrm{Ann}(E) = (x^2 + x)$ с примарным разложением $(x)(x+1)$. Следовательно,

$$\begin{array}{ll} L_1 = (x)E = (3e_1 + 3e_2)\mathbb{Z}_4, & f_1 = f|L_1 = (3), \\ L_2 = (x+1)E = (e_2)\mathbb{Z}_4, & f_2 = f|L_2 = (0). \end{array}.$$

Относительно нового базиса $\{3e_1 + 3e_2, e_2\}$ мы имеем матрицу переходов $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и конечный автомат на рисунке 3(b).

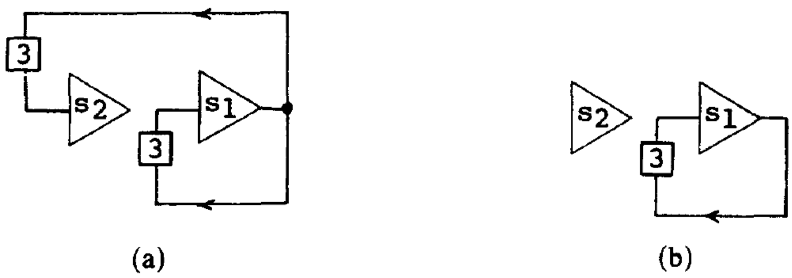



Рис. 3: Два эквивалентных КА: упрощение путём примарного разложения

# 5 Циклическое разложение

В силу теоремы 4.5 мы можем предположить без потери общности, что начнём с локального артинова кольца $(R, M)$ и примарного $E \in Mod_n(R[x])$. В общем случае разложение $E$ на циклические $R[x]$-модули не представляется возможным. Приведём следующий пример.

**Пример 5.1** Пусть $R = \mathbb{Z}_4, E = e_1 R \oplus e_2 R$. Два КА на рисунке 4 эквивалентны. Они соответствуют матрицам $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Перебирая все преобразования $GL_2(\mathbb{Z}_4)$, мы можем убедиться в том, что $\{A, A'\}$ — это класс подобия (similarity-class) $A$. И ни $A$, ни $A'$ не являются представлениями (representations) циклических модулей.


Рис. 4: Контрпример: КА над $\mathbb{Z}_4$, который неразложим на сдвиговые регистры

Поэтому мы определяем более слабое условие, чем прямая сумма. Пусть $L_i$ — это $R[x]$-подмодули $E$ $(i = 1, ..., k)$ такие, что $\sum_{i=1}^k L_i = E$.

**Определение 5.2** Сумма $E = \sum_{i=1}^k L_i$ называется прямой суммой по модулю $M$, если $\overline{E} \cong \bigoplus_{i=1}^k \overline{L_i}$, и обозначается как ${}_M\sum_{i=1}^k L_i$.

Легко заметить, что $E = {}_M\sum_i L_i$, если $(L_i + ME) \cap \sum_{j \neq i} L_j \subset ME$. Напомним, что $R[x]$-модуль $E$ называется циклическим, если $E$ может быть порождён одним элементом; тогда мы имеем $E \cong R[x]/\mathrm{Ann}(E)$.

**Лемма 5.3** *Для указанных выше $(R, M)$ и $E$ существуют нормированные и неприводимые $\alpha_i \in \overline{R}[x]$ и $s_i \in \mathbb{N}(i = 1, ..., k)$ такие, что $\overline{E} \cong \bigoplus_{i=1}^k L_i'$ и $L_i' \cong \overline{R}[x]/(\alpha_i^{s_j})$.*

**Доказательство** Поскольку $e$ является $R[x]$-модулем, мы можем применить структурную теорему для конечнопорождённых модулей над областью главных идеалов(principial ideal domain) $\overline{R[x]} = R[x]/M[x] = (R/M)[x]$ (пример в работе [3]). Из того, что $e$ примарный, получается что $\overline{E}$ и, следовательно, все подмодули $L'_i$ тоже примарны. Примарный идеал в $\overline{R[x]}$ — это мощность простого идеала $(\bar{\alpha}_i)^{s_i}$. □

Эти $\bar{R}[x]$-подмодули $L'_i \subset \bar{E}$ могут быть подняты до (can be lifted to) $R[x]$-подмодулей $L_i$ следующим образом. Пусть $e'_i \in L'_i$ порождает $L'_i$, а выбор $e_i \in \pi^{-1}(e'_i) \subset E$ произволен: тогда $L_i := R[x] \cdot e_i (i = 1, ..., k)$. Каждый $L_i$ циклический по определению, но в общем случае не $R$-свободный. Поскольку $\pi((L_i + ME) \cap \sum_{j \neq i} L_j) = L'_i \cap \sum_{j \neq i} L_j = 0$ мы доказали следующую теорему.

**Теорема 5.4** *Пусть $(R, M)$ — артиново локальное кольцо, и $E \in Mod_n(R[x])$ — примарный модуль. Тогда существуют циклические $R[x]$-модули $L_i \subset E (i = 1, ..., k)$ такие, что $E = {}_M\sum_{i=1}^{k} L_i$ (сумма по модулю $M$).*

**Теорема 5.5** *Для $(R, M)$ и $E$ указанных выше:*

$$\begin{aligned} E \cong \oplus_{i=1}^{k} L_i \Leftrightarrow L_i \quad &\textit{является } R\textit{-свободным} \quad (i = 1, ..., k) \\ \Leftrightarrow Ann_{R[x]}(L_i) \quad &\textit{является главным идеалом} \quad (i = 1, ..., k). \end{aligned}$$

**Доказательство** (а) ($\Rightarrow$): $E$ — $R$-свободный модуль, а $L_i$ — прямое слагаемое $E$, следовательно, $L_i$ является $R$-проективным (R-projective), и тогда можно использовать теорему 3.8.

($\Leftarrow$): Из теоремы 3.8 мы можем заключить, что $L_1 \cap \sum_{i>1} L_i$ является $R$-свободным, а из определения суммы по модулю $M$, мы знаем, что

$$(L_1 + ME) \cap \sum_{i>1} L_i \quad \subset \quad ME \qquad \Rightarrow \qquad L_1 \cap \sum_{i>1} L_i = 0.$$

Теперь продолжим для $\sum_{i>1} L_i$ по индукции.

(б) Пусть $i = 1, ..., k$ произвольно, $e$ порождающий в $L_i$ и $d := d_i$, тогда $B := e, xe, ..., x^{d-1}e$ — $R$-базис в $L_i$.

($\Rightarrow$): $x^d e = \sum_{j=0}^{d-1} a_j (x^j e) \in L$ подразумевает (в оригинале implying — причастие), что $\alpha := x^d - \sum_{j=0}^{d-1} a_j x^j \in \mathrm{Ann}(L)$ и $\alpha$ имеет степень $d$. Согласно лемме 3.9, $\mathrm{Ann}(L) = (\alpha) + N$ при $N \subset M[x]$. Если $N \neq 0$, тогда $\exists 0 \neq \beta \in N, \deg(\beta) < d$ (лемма 3.9), но это приводит к противоречию с тем, что базис $B$ линейно независим.

($\Leftarrow$): Без потери общности, $\mathrm{Ann}(L_i)$ порождён элементом $\alpha \in R[x]$ с ненулевым старшим коэффициентом. Очевидно, что $\deg(\alpha) = d$. Поскольку $\mathrm{Ann}(L_i)$ не содержит многочленов меньшей степени, в $B$ не существует зависимостей между элементами, следовательно, $B$ является базисом. □

**Пример 5.6** Пусть $R = \mathbb{Z}_4$, $E = \bigoplus_{i=1}^{4} e_i \cdot \mathbb{Z}_4$. Автомат на рисунке 5 соответствует матрице переходов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Ann}(E) = ((x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1), 4(x^2 - 1))$.

Следуя выводу и нотации теоремы 5.4, мы получаем $\bar{R}[x] = \mathbb{Z}_2[x]$, $\bar{E} = \bigoplus_{i=1}^{4} \bar{e}_i \mathbb{Z}_2$ и $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_2[x]}(\bar{E}) = (x^2 + 1)$. $L'_1 = L_{\mathbb{Z}_2}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, аналогично, $L'_2 = L_{\mathbb{Z}_2}(\bar{e}_3, \bar{e}_4)$. Теперь выберем

$\hat{e}_1 := e_1 + 2e_3, \hat{e}_2 := 3e_3$ и найдём, что оба

$$L_1 = L_{\mathbb{Z}_8[x]}(\hat{e}_1) = L_{\mathbb{Z}_8}(\hat{e}_1, x\hat{e}_1, (4x+4)\hat{e}_2),$$

$$L_2 = L_{\mathbb{Z}_8}(\hat{e}_2, x\hat{e}_2, (4x+4)\hat{e}_1)$$

не являются $\mathbb{Z}_8$-свободными.

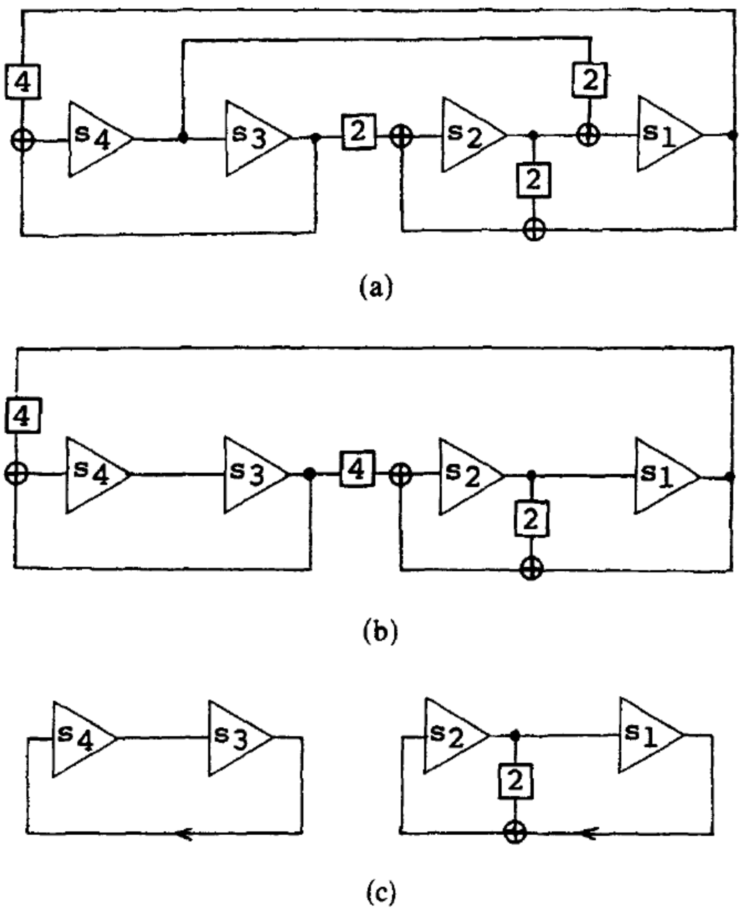



Рис. 5: Три эквивалентных КА: упрощение с помощью циклического разложения

Относительно нового базиса $\{\hat{e}_i\}$ мы получаем новую матрицу переходов $A^*$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{«твист-матрица»}}.$$

Поскольку $L_1$ и $L_2$ не являются $\mathbb{Z}_8$-свободными, два сдвиговых регистра соединены, но со следующими ограничениями:

(1) они соединены только элементами нильрадикала (составляющими «твист-матрицы»);

(2) они заканчиваются только в первых элементах задержки (с наивысшим индексом) каждого сдвигового регистра.

**Определение 5.7** Примарный $R$-свободный $R[x]$-модуль называется скрученным, если он не изоморфен прямой сумме циклических $R[x]$-модулей.

Теорема 5.4 даёт нам необходимые и достаточные условия для определения скручен ли модуль или нет. Но у нас существует неприятная ситуация, в которой подмодули $L_i$ зависят от выбора $e_i \in \pi^{-1}(e_i')$. Для одних $e_i$ $L_i$ будут циклическими, а для других нет. В приведённом ниже следствии мы следуем «алгоритмическому» подходу к проблеме отсутствующей независимости.

**Следствие 5.8** *Для $(R, M)$ и $E$ указанных выше, $E = {}_M\sum_{i=1}^m L_i$, пусть $\alpha_i \in R[x]$ — нормированный многочлен, для которого $(\overline{\alpha_i}) = Ann(L_i') \subset \bar{R}[x]$. Тогда $E$ не является скрученным, если существуют $\nu_i \in M[x](i = 1, ..., k)$ такие, что $(\alpha_i + \nu_i)L_i \subset (\alpha_i + \nu_i)ME$. Если $E$ не скрученный, тогда $Ann(E) = \bigcap_{i=1}^k (\alpha_i + \nu_i)$.*

**Доказательство** $(\Rightarrow)$: Очевидно по теореме 5.5: мы зададим $\nu_i := 0$.

$(\Leftarrow)$: Существует $m_i \in ME$ такой, что $(\alpha_i + \nu_i)e_i = (\alpha_i + \nu_i)m_i$ для $L_i$-порождающих $e_i$ подразумевает $(\alpha_i + \nu_i)(e_i - m_i) = 0$. Определим $L_i^0 := R[x](e_i - m_i)$; $L_i^0$ является $R$-свободным, и $\overline{L_i^0} = L_i'$ подразумевает $E = \sum_{i=1}^k L_i^0$, а теорема 5.4 завершает доказательство:

$$\mathrm{Ann}(E) = \mathrm{Ann}\left(\sum_i L_i\right) = \bigcap_i \mathrm{Ann}(L_i) = \bigcap_i (\alpha_i + \nu_i). \qquad \square$$

**Пример 5.6** *(Продолжение).* Зададим $\alpha_1 = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_8[x]$, $\nu_1 = nx + m$ $(n, m \in (2) \subset \mathbb{Z}_8)$. $(x^2 + nx + m + 1)\hat{e}_1 = \hat{e}_1((m + 2) + x(n + 2)) + 4\hat{e}_2$, и для $n = m = 6$ мы получаем $(x^2 - 2x - 1)\hat{e}_1 = (x^2 - 2x - 1)2x\hat{e}_2 = 4\hat{e}_2$. Следовательно, для нового выбора $\hat{e}_1^0 := \hat{e}_1 - 2x\hat{e}_2 = e_1 + 2e_3 + 2e_4$, $L_1^0$ является $\mathbb{Z}_8$-свободным, $\mathrm{Ann}(L_1^0) = (x^2 - 2x - 1)$. Аналогичным образом если мы выберем $\hat{e}_2^0 := \hat{e}_2 - 2x\hat{e}_1 = e_3 + 2e_2$, то $L_2^0$ тоже становится $\mathbb{Z}_8$-свободным, $\mathrm{Ann}(L_2^0) = (x^2 - 1)$. Матрица переходов $A^*$ принимает вид

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

соответствуя конечному автомату на рисунке 5(c).

$$\begin{aligned} E \text{ не скручен} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ann}(E) &= (x^2 - 2x - 1) \cap (x^2 - 1) \\ &= ((x^2 - 2x - 1)(x^2 - 1), 4(x^2 - 1)). \end{aligned}$$

# 6 Специальный случай с рекурсивным критерием

Мы продолжим рассматривать проблему предыдущего раздела, где $(R, M)$ — это локальное артиново кольцо, а $E \in Mod_n(R[x])$ — примарный модуль. Для формулировки специального случая, нам необходимо сначала дать определение. Напомним, что согласно теореме 5.4 $E = {}_M\sum_{i=1}^k L_i$, где циклические $R[x]$-модули $L_i \subset E(i = 1, ..., k)$.

**Определение 6.1** Примарный модуль $E = {}_M\sum_{i=1}^{k} L_i \in Mod_n(R[x])$ называется полным степени $d$ (full of degree), если все $L_i$ имеют $d$ линейно независимых порождающих.

Другими словами, $\dim_{\bar{R}}(\overline{L_i}) = d \quad (i = 1, ..., k)$. Конечный автомат, соответствующий полному модулю степени $d$ (full module of degree) $d$, характеризуется постоянным числом $d$ элементов задержки в каждом сдвиговом регистре.

Пусть $A := R[x]/\mathrm{Ann}(E)$. Конечно, $E$ — это $A$-модуль.

Эта часть имеет следующую мотивацию. Конечный автомат, соответствующий полному модулю (full module), состоит из сдвиговых регистров $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, ..., k)$, а соединения между ними описываются «твист-матрицей». Мы хотим рассматривать сдвиговый регистр как «векторный элемент задержки», как элемент задержки $\mathcal{J}_i$ над $A$, а мультипликаторы в соединениях между $\mathcal{J}_i$ как элементы $A$ (см. рисунок 6).

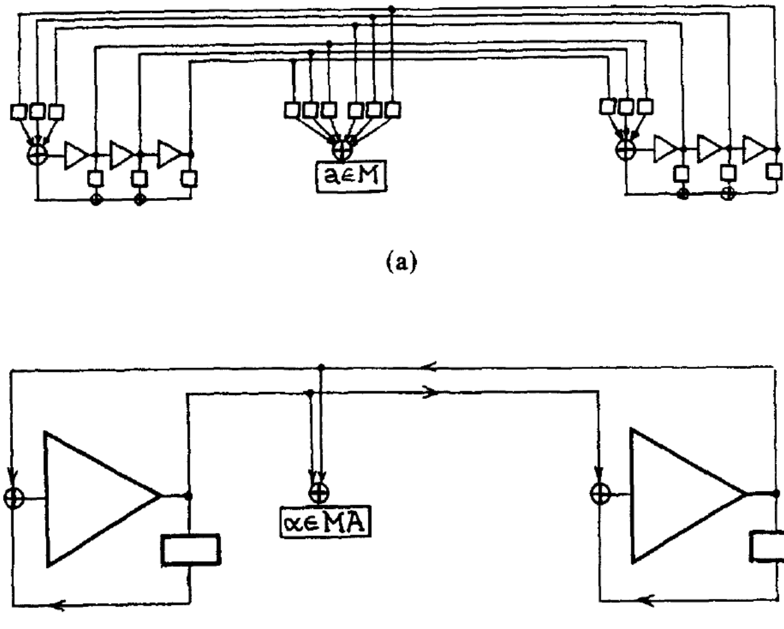



Рис. 6: (a) Диаграмма КА над $(R, M)$, соответствующего полному модулю степени (full module of degree) 3. (b) Диаграмма эквивалентного КА над $A = R[x]/\mathrm{Ann}(E)$.

Выберем минимальный набор (minimal set) $A$-порождающих $\{e_1, ..., e_k\}$ из $E$. Поскольку каждый модуль является образом свободного модуля, мы имеем отображение $\rho : F \to E$ для свободного $A$-модуля $F$ с базисом $\{b_1, ..., b_k\}$, $\rho(b_i) = e_i (i = 1, ..., k)$. Мы получаем короткую, чёткую последовательность

$$0 \to \ker(\rho) \to F \xrightarrow{\rho} E \to 0.$$

**Лемма 6.2** *Пусть $E = {}_M\sum_{i=1}^{k} L_i$ полный $A$-модуль степени (full $A$-module of degree) $d$. Тогда существует нормированный $\alpha \in A$ степени $d$ такой, что $im(\alpha) \subset ME$. $\alpha$ уникален с точностью до многочленов степени $d-1$ из $MA$.*

**Доказательство** Для полного модуля мы всегда можем выбрать нормированный $\alpha \in A$, для которого $(\bar{\alpha}) = \mathrm{Ann}(\overline{L_i})$ $(i = 1, ..., k)$. $deg(\alpha) = deg(\bar{\alpha}) = dim_{\overline{R}}(\overline{L_i}) = d$. Для всех $e \in E, \pi(\alpha e) = \bar{\alpha}\bar{e} = 0$, следовательно, $e \in ME$. $\square$

Порождающие $\ker(\rho)$ определяются с помощью отношений (relations) в $E$. Они имеют вид $ab_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} b_j$ $(i = 1, ..., k)$, $\alpha \in A$ нормирован, $\beta_{ij} \in MA$. Мы выбираем $\alpha$ в соответствии с леммой 6.2. Затем мы определим $h \in \mathrm{End}(F)$ как $h(b_i) := ab_i - \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} b_j$ $(i = 1, ..., k)$ и, таким образом, найдём точную последовательность

$$F \xrightarrow{h} F \xrightarrow{\rho} E \to 0.$$

Заметим, что $E \cong \mathrm{coker}(h)$. Теперь определим $f_\alpha := \alpha - h$.

**Теорема 6.3** *Пусть $E \in Mod_n(A)$ полный степени $d$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

*(а) $E$ не является скрученным с циклическими подмодулями ранга $d$ $(i = 1, ..., k)$;*

*(б) $h$ диагонализируемый (diagonalisable) с нормированными eigenvalue-polynomials of degree d (i = 1, ... k);*

*(в) $f_\alpha \in Hom(F, MF)$ диагонализируемый (diagonalisable)with eigenvalue-polynomials in MA of de- gree < d ( i = 1 , . . . , k ).*

**Доказательство** (1) $\Rightarrow$ (2): В лемме 3.9 и в доказательстве теоремы 5.5 мы использовали факт того, что $x^d \cdot \hat{e}_i = \beta_i e_i$, $\deg(\beta_i) < d \Rightarrow h(b_i) = (x^d - \beta_i)b_i)$, следовательно, $h$ является диагональным по отношению к базису $\{b_i\}$ и $\deg(x^d - \beta_i) = d$.

(2) $\Leftarrow$ (1): Пусть $h$ диагонализируемый (diagonalisable). Тогда существует преобразование базиса $t \in \mathrm{Aut}(F)$ такое, что $t^{-1} \cdot h \cdot t$ является диагональным.

$$\begin{array}{ccccccc}
F & \xrightarrow{h} & F & \xrightarrow{\rho} & E & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{t}} & & \\
F & \xrightarrow{tht^{-1}} & F & \xrightarrow{\rho} & E & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

В общем случае невозможно расширить $t$ на $E$ (extend t to E) как $A$-гомоморфизм, потому что $t(\ker(\rho)) \not\subset \ker(\rho)$. Но достаточно рассматривать как (свободный) $R$-модуль. Тогда существует $\hat{t} \in \mathrm{Aut}_R(E)$, где $\rho t = \hat{t}\rho$. Начиная с $h(b_i) = \alpha b_i - \sum_j \beta_{ij} \cdot b_j$, мы получаем $(tht^{-1})(tb_i) = \alpha(tb_i) - \sum_j \beta_{ij} \cdot (tb_j) = \gamma_i \cdot (tb_i)$, поскольку $h$ диагонализируемый (diagonalisable). $\deg(\gamma_i) < d$. С учётом $\hat{e}_i^0 := \rho(tb_i)$, мы получаем $\gamma_i(e_i^0) = \gamma_i \rho(tb_i) = \rho\gamma_i(tb_i) = \rho(tht^{-1})(tb_i) = \hat{t}(\rho h)t^-1(tb_i) = 0$, так как $\rho h = 0$.

(2)$\Leftrightarrow$(3): Этот факт непосредственно следует из эквивалентности (1) и (2) и из определения $f_\alpha$. $\square$

**Нотация** $E' := F/M^{z-1}F, R' := R[x]/(Ann(E) + M^{z-1})$.

**Теорема 6.4** Пусть $(R, M)$ — локальное артиново кольцо главных идеалов, $M = (m)$, $z$ — нильпотентность (nilpotency) $M$ и $E \in Mod_n(R[x])$. Тогда существуют изоморфизмы

(а) $\phi : \mathrm{Hom}_R(F, MF) \to \mathrm{End}_{R'}(E')$;

(б) $\psi : \mathrm{Aut}_R(F)/(1 + \mathrm{Hom}(F, M^{z-1}F)) \to \mathrm{Aut}_{R'}(R')$;

(в) $\phi$ и $\psi$ коммутируют (commute) с действием группы автоморфизмов на кольце эндоморфизмов, особенно,

$$\bar{\phi} : \mathrm{Hom}_R(E, ME)/\mathrm{Aut}_R(E) \cong \mathrm{End}_{R'}(E')/\mathrm{Aut}_{R'}(E').$$

**Доказательство** Для данного доказательства пусть $H := \mathrm{Hom}(F, M^{z-1}F)$

(а) Пусть $m := F \to (m)E$ (умножение на $m$). Тогда $\ker(m) = M^{z-1}$ и $\bar{m} : E' \cong (m)E$. Аналогично мы можем связать $f : E \to (m)E$ с $\bar{f} : E' \to (m)E$ и, таким образом, определить $f' := \phi(f) := \bar{m}^{-1} \cdot \bar{f} \in \mathrm{End}(E')$, где $f'\pi = \pi f$.

$\phi$ — мономорфизм, потому что $\ker(\phi) = \{f \in \mathrm{Hom}(E, ME) | \bar{f} = 0\} = 0$.

$\phi$ — эпиморфизм: Пусть $f' \in \mathrm{End}(E')$ будет произвольным:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "mf"] \arrow[d, "\pi"'] & (m)E \\ E' \arrow[r, "f'"] & E' \arrow[u, "\cong"', "\bar{m}"] \end{tikzcd}$$

Поскольку $E$ является свободным, $f'$ может быть поднят по $\pi$ (be lifted along $\pi$) для получения $mf \in \mathrm{End}(E)$. $\phi^{-1}(f') := mf$ подразумевает $\phi(mf) = \bar{m}^{-1} \cdot (mf) = \pi\bar{f} = f'$.

(б) Определим $\psi' : \mathrm{Aut}(E) \to \mathrm{Aut}(E')$ с помощью $\psi(g) := g'$, где $\pi g = g'\pi$ для $g \in \mathrm{Aut}(E)$. $\psi'$ корректно определено и является эпиморфизмом (как в асти (а)). Прим.: в начале абзаца вероятно опечатка во второй формуле.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ E' \arrow[r, "g'"] & E' \end{tikzcd}$$

$\psi'(g) = 1_E \Leftrightarrow \pi = \pi g \Leftrightarrow 1_E - g \in \ker(\pi) \Leftrightarrow 1_E - g \in H$. Следовательно, $\ker(\psi') = 1 + H$ и $\psi$ является мономорфизмом.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}(E) \arrow[d] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \mathrm{Aut}(E)/(1+H) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"', "\cong"] & \mathrm{End}(\mathrm{Hom}(E, ME)) \arrow[d, "\phi^*"', "\cong"] \\ \mathrm{Aut}(E') \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{End}(\mathrm{End}(E')) \end{tikzcd}$$

(в) $\alpha$ — это действие $g \in \mathrm{Aut}(E)$ на $f \in \mathrm{End}(E)$, $\alpha(g)f := g^{-1}fg \in \mathrm{End}(E)$. Пусть $\bar{g} \in \mathrm{Aut}(E)/(1+H)$ и $mf \in \mathrm{Hom}(E, ME)$. Тогда $\phi^*\alpha(\bar{g})(mf) = \phi^*(\bar{g}^{-1}mf\bar{g}) = (\bar{g}^{-1}f\bar{g})'$ и $\alpha\psi(\bar{g})(f') = (\bar{g}')^{-1}f'\bar{g}'$. Из-за линейности $f, g$ и $\pi$ получаем $(\bar{g}^{-1}f\bar{g})' = (\bar{g}')^{-1}f'\bar{g}'$. $\square$

**Теорема 6.5** *Пусть $(R, M)$ — артиново локальное кольцо главных идеалов, а $E \in Mod_n(R[x])$ является полным степени $d$ (full of degree $d$). $E$ не скручен тогда и только тогда, когда $f' := \phi(f) \in End_{R'}(E')$ диагонализируемый (diagonalisable).*

**Доказательство** Согласно теореме 6.3, нам необходимо показать, что $\phi : \mathrm{Hom}(F, MF) \to \mathrm{End}(E')$ «сохраняет диагональность». Пусть $B := \{b_1, ..., b_k\}$ — базис в $F$, $\pi : F \to E' = F/M^{z-1}F$ — канониеское отображение (canonical projection) и $\pi(B)$ — базис в $E'$.

# Список литературы


[1] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969).

[2] W.S. Ching and B.F. Wyman, Duality and the regulation problem for linear systems over commutative rings, J. Comput. System Sci. 14 (1977) 360-368.

[3] T. Hungefford, Algebra (Holt, Rinehart & Winston, New York, 1974).

[4] R.E. Kalman, P.L. Falb and M.A. Arbib, Topics in Mathematical System Theory (McGraw-Hill, New York, 1969).

[5] P. Khargonekar, On Matrix Fraction Representation for Linear Systems over Commutative Rings (Center of Math. System Theory, Univ. of Florida, 1980).

[6] M. Magidin and A. Gill, Decomposition of linear sequential circuits over residue rings, J. Franklin Inst. 294 (1972) 167-180.

[7] M. Magidin and A. Gill, Singular shift registers over residue class rings, Math. Systems Theory 9(4) (1976) 345-358.

[8] G. Nandi and C. Nolte, Duality for systems over rings, Inform. Control 50. (1981) 128-132.

[9] B. Reusch, Lineare Automaten (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969).

[10] J.R. Silvester, Introduction to Algebraic K-theory (Chapman & Hall, London, 1981).

[11] E. Snapper, Completely primary rings, Ann. of Math. 52 (1950) 666-693.

[12] E.D. Sontag, Linear systems over commutative rings, Ricerche Automat. 7(1) (1976) 1-34.

[13] B.L. van der Waerden, Algebra 2 (Springer, Berlin, 1967).