БДЗ №2

9. Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция $y(x)$ (данные в таблице могут содержать погрешность не более δ). Определить оптимальное значение шага $h_{\text{опт}}$, когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования ещё себя не проявляет.

ф-ла $y_0'' = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$; функ. $y(x) = \cos x$ на отрезке $[\pi/4, \pi]$; погр. $\delta = 10^{-8}$.

Заданная формулы численного дифференцирования:

$$y_0^{``} = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$$

Из-за погрешности δ (погрешность входных данных) значения функции отличаются от точных значений:

$$y_0^{``} \approx \frac{1}{h^2}(2\widetilde{y_0} - 5\widetilde{y_1} + 4\widetilde{y_2} - \widetilde{y_3}), \text{где } \widetilde{y_i} = y_i \pm \delta$$

Погрешность формулы

$$\Delta = \left| y_0^{``} - \frac{1}{h^2}(2\widetilde{y_0} - 5\widetilde{y_1} + 4\widetilde{y_2} - \widetilde{y_3}) \right|$$

$$= \left| y_0^{``} - \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) - \frac{1}{h^2}(2\delta_0 - 5\delta_1 + 4\delta_2 - \delta_3) \right|$$

Разложим y_i в ряд Тейлора в окрестностях точки x_0

$$y_0 = y_0$$

$$y_1 = y_0 + hy_0^{`} + h^2\frac{y_0^{``}}{2} + h^3\frac{y_0^{```}}{6} + h^4\frac{y_0^{````}}{24}$$

$$y_2 = y_0 + 2hy_0^{`} + 4h^2\frac{y_0^{``}}{2} + 8h^3\frac{y_0^{```}}{6} + 16h^4\frac{y_0^{````}}{24}$$

$$y_3 = y_0 + 3hy_0^{`} + 9h^2\frac{y_0^{``}}{2} + 27h^3\frac{y_0^{```}}{6} + 81h^4\frac{y_0^{````}}{24}$$

Подставим полученные значения в формулу погрешности:

$$\Delta = \left| y_0^{``} - \frac{1}{h^2}\left(2y_0 - 5\left(y_0 + hy_0^{`} + h^2\frac{y_0^{``}}{2} + h^3\frac{y_0^{```}}{6} + h^4\frac{y_0^{````}}{24}\right) + 4\left(y_0 + 2hy_0^{`} + 4h^2\frac{y_0^{``}}{2} + 8h^3\frac{y_0^{```}}{6} + 16h^4\frac{y_0^{````}}{24}\right) - \left(y_0 + 3hy_0^{`} + 9h^2\frac{y_0^{``}}{2} + 27h^3\frac{y_0^{```}}{6} + 81h^4\frac{y_0^{````}}{24}\right)\right) - \frac{1}{h^2}(2\delta_0 - 5\delta_1 + 4\delta_2 - \delta_3)\right|$$

$$\Delta \le \left| y_0^{``} - \frac{1}{h^2}\left(h^2 y_0^{``} - h^4\frac{22y_0^{````}}{24}\right)\right| + \left|\frac{1}{h^2}(2\delta_0 - 5\delta_1 + 4\delta_2 - \delta_3)\right|$$

$$= h^2\frac{\left|22y_0^{````}\right|}{24} + \frac{12\delta}{h^2} \le \frac{11M_4}{12}h^2 + \frac{12\delta}{h^2} = \Phi(h)$$

Максимум функции $y(x) = \cos(x)$ на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \pi]$

$$y^{````} = \sin(x)$$

$$M_4 = max_{[\frac{\pi}{4};\pi]}(\sin(x)) = 1$$

Минимизируем ошибку $\Phi(h)$

$$\Phi^{`}(h) = \frac{11M_4}{6}h - \frac{24\delta}{h^3} = 0$$

$$h_{opt} = \sqrt[4]{\frac{144\delta}{11M_4}} = \sqrt[4]{\frac{144 \times 10^{-8}}{11 \times 1}} = 0.019$$

10. Получить (письменно) приближённое значение интеграла I по квадратурной формуле $S(h)$ сначала с шагом h_1, а затем с шагом h_2. Используя метод Рунге, указать насколько значение $S(h_2)$ отличается от истинного значения интеграла I.

$$I = \int_1^3 \sin x \,\mathrm{sh}\, x \, dx; \quad S(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \text{ (ф-ла правых прямоуг.)}; \quad h_1 = 2/6,\ h_2 = 2/10.$$

Формула правых прямоугольников

$$S(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Используем формулу правых прямоугольников для шага $h_1 = {}^2/_6$

$$S({}^2/_6) = \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{4}{3}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{4}{3}\right) + \sin\left(\frac{5}{3}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{5}{3}\right) + \sin(2)\operatorname{sh}(2) + \sin\left(\frac{7}{3}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{7}{3}\right) + \sin\left(\frac{8}{3}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{8}{3}\right) + \sin(3)\operatorname{sh}(3)\right) = 5.3120$$

Используем формулу правых прямоугольников для шага $h_2 = {}^2/_{10}$

$$S({}^2/_{10}) = \frac{1}{5}\left(\sin\left(\frac{6}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{6}{5}\right) + \sin\left(\frac{7}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{7}{5}\right) + \sin\left(\frac{8}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{8}{5}\right) + \sin\left(\frac{9}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{9}{5}\right) + \sin(2)\operatorname{sh}(2) + \sin\left(\frac{11}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{11}{5}\right) + \sin\left(\frac{12}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{12}{5}\right) + \sin\left(\frac{13}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{13}{5}\right) + \sin\left(\frac{14}{5}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{14}{5}\right) + \sin(3)\operatorname{sh}(3)\right) = 5.3452$$

Для оценки погрешности $S(h_2)$ воспользуемся методом Рунге

$$\int_a^b f(x)dx = S(h) + O(h^p) = S(h) + ch^p + O(h^{p+1})$$

где p − порядок погрешности формулы $S(h)$, а c − константа.

Проведем последовательно расчёт с шагом h, а затем $h/2$, тогда интеграл можно приближенно выразить двумя способами

$$\int_a^b f(x)\,dx \begin{array}{l} \approx S_{\text{тр}}(h) + ch^p \\ \approx S_{\text{тр}}(h/2) + c(h/2)^p \end{array}$$

Откуда получаем

$$c \approx \frac{S(2/6) - S(2/10)}{(2/10)^1 - (2/6)^1}$$

Для формулы правых прямоугольников $p = 1$ (для формулы центральных прямоугольников $p = 2$)

Проверим условие $|I - S(h/2)| \leq \varepsilon$, получаем

$$|I - S(h/2)| \approx |c(h/2)^p| \approx \left|\frac{S(2/6) - S(2/10)}{(2/10)^1 - (2/6)^1} \times (2/10)^1\right| = 0.0498$$

11. Предложить способ вычисления несобственного интеграла на компьютере. Указание: использовать один из методов, рассмотренных на лекции или семинаре.

$$\int_6^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x} dx$$

Интеграл является несобственным, так как верхний предел равен ∞.

Разобьем его на две части

$$\int_6^\infty \frac{arctg(x)}{e^x} dx = \int_6^A \frac{arctg(x)}{e^x} dx + \int_A^\infty \frac{arctg(x)}{e^x} dx = I_1 + I_2$$

Подберем число A таким, чтобы $|I_2| \le \frac{\varepsilon}{2}$, то есть таким, чтобы значением I_2 можно было пренебречь.

Функция $arctg(x)$ ограничена значением $\frac{\pi}{2}$, оценим $|I_2|$ заменяя $arctg(x)$ на $\frac{\pi}{2}$.

$$|I_2| = \left|\int_A^\infty \frac{arctg(x)}{e^x} dx\right| \le \int_A^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{e^x} dx = \left|-\frac{\pi}{2e^x}\Big|_A^\infty\right| = \frac{\pi}{2e^A}$$

$$\frac{\pi}{2e^A} \le \frac{\varepsilon}{2} \to A \ge \ln\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)$$

По заданному значению ε находим значение A.

Так как A должно быть больше 6, то значение ε должно удовлетворять неравенству $\ln\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right) \ge 6$, т. е. $\varepsilon \le \frac{\pi}{e^6} \approx 0.0078$

Далее, с помощью квадратурной формулы, например, составной формулы Симпсона вычисляем $I_1 = \int_6^A \frac{arctg(x)}{e^x} dx$ с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$.

Общая погрешность результата составит $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

12. Для заданной матрицы вычислить подчинённую норму матрицы для следующих векторных норм: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_i |x_i|$, $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & -4 \\ -5 & -5 & 3 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Найдем подчинённую норму матрицы для $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$, т. е. найдем $\|A\|_1$ и $\|A\|_2$

$$\|A\|_1 = max_j\left(\sum_i^n |a_{ij}|\right) = \max(10+5+9; 5+5+1; 4+3+7)$$
$$= \max(24; 11; 14) = 24$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{max_i(\lambda_i(A^TA))}$$

$$B = A^TA = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 9 \\ 5 & -5 & -1 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 5 & -4 \\ -5 & -5 & 3 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 & 66 & 8 \\ 66 & 51 & -42 \\ 8 & -42 & 74 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы B

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 206-\lambda & 66 & 8 \\ 66 & 51-\lambda & -42 \\ 8 & -42 & 74-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 331\lambda^2 - 23340\lambda + 44100$$

Решая уравнение, получаем корни $\lambda_1 = 1.943, \lambda_2 = 98.431, \lambda_3 = 230.627$

Тогда $\|A\|_2 = \sqrt{max_i(1.943;\ 98.431;\ 230.627)} = \sqrt{230.627} = 15.186$

13. Правая часть СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ содержит погрешность, норма которой равна $||\delta\mathbf{f}||_\infty$. Оценить относительную погрешность нормы решения $\frac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$. Указание: воспользоваться оценкой $\frac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty} \leqslant \mu(A)\frac{||\delta\mathbf{f}||_\infty}{||\mathbf{f}||_\infty}$.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 3 & -10 & -4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -9,2 \\ 4,7 \\ -3,6 \end{pmatrix}, \quad ||\delta\mathbf{f}||_\infty = 0.2$$

Используем $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \mu(A)\frac{\|\delta f\|_\infty}{\|f\|_\infty}$

Найдем $\|f\|_\infty = \max(9.2; 4.7; 3.6) = 9.2$

По условию $\|\delta f\|_\infty = 0.2$

$$\|A\|_\infty = \max(4+3+8; 3+10+4; 4+8+4) = \max(15; 17; 16) = 17$$

Найдем обратную матрицу для A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A_a^T$$

A_a^T – матрица алгебраических дополнений к транспонированной матрице A

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 3 & -10 & -4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 160 + 192 - 48 + 320 - 128 - 36 = 460$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ 3 & -10 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_a^T = \begin{pmatrix} -8 & 52 & 68 \\ -28 & -48 & 8 \\ 64 & 44 & 31 \end{pmatrix}$$

Тогда получим $A^{-1} = \frac{1}{460}\begin{pmatrix} -8 & 52 & 68 \\ -28 & -48 & 8 \\ 64 & 44 & 31 \end{pmatrix}$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{460}\max(8 + 52 + 68; 28 + 48 + 8; 64 + 44 + 31)$$
$$= \frac{1}{460}\max(128; 84; 139) = \frac{139}{460} = 0.3022$$

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\delta f\|_\infty}{\|f\|_\infty} \approx 17 \times 0.3022 \times \frac{0.2}{9.2} \approx 0.1117$$

14. Для задачи построить разностную схему с заданным порядком аппроксимации.

$$\begin{cases} 2y'' - 3y = 3, \\ y'(0) = 0, \; y'(2) + 2y(2) = 0, \end{cases} \qquad \text{желаемый порядок аппроксимации } p = 2.$$

Построим аппроксимацию второго порядка для заданной краевой задачи

Запишем данную систему следующим образом

$$\begin{cases} 2u``(x) - 3u(x) = 3, \\ u`(0) = 0, \\ u`(2) + 2u(2) = 0, \end{cases}$$

По граничным условиям $\begin{cases} y`(0) = 0 \\ y`(2) + 2y(2) = 0 \end{cases}$ можно определить, что решение ищется на отрезке $[0; 2]$. Разобьем этот отрезок на n равных частей. Длина каждого частичного отрезка равна $h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Введем в рассмотрение сетку $\omega = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, где $x_0 = 0$, $x_1 = 0 + h$, $x_n = 2 - h$. Рассмотрим также сеточную функцию $y_i = y(x_i)$, определенную только в узловых точках x_i, $i = 0,1, \dots, n$

Требуется построить систему линейных уравнений с неизвестными y_i, где $y_i \approx u(x_i)$. Совокупность таких y_i будет численным решением краевой задачи.

Погрешность аппроксимации должна по условию иметь порядок 2. Т. е. уменьшение шага h в два раза должно уменьшать погрешность решения $|y_i - u(x_i)|$ в четыре раза.

Заменим в уравнении вторую производную разделенной разностью $y^{``} \approx \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}$. Исходное дифференциальное уравнение перейдет в разностное

$$2y^{``} - 3y = 3 \ \to 2 \times \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 3y_i = 3$$

Убедимся, что получен второй порядок аппроксимации. В разностное уравнение вместо сеточной функции подставим точное решение, т. е. заменим y_i на $u_i = u(x_i)$. Также разложим $u_{i\pm1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_i

$$u_{i\pm1} = u_i \pm hu_i^{`} + \frac{h^2}{2}u_i^{``} \pm \frac{h^3}{6}u_i^{```} + \frac{h^4}{24}u^{````}(\xi^{\pm}), \xi^- \in [x_{i-1}; x_i], \xi^+ \in [x_i; x_{i+1}]$$

После подстановки и сокращения имеем

$$2u_i^{``} + \frac{h^2}{6}\left[u^{````}(\xi^-) + u^{````}(\xi^+)\right] - 3u_i = 3$$

Вычитая из данного равенства исходное дифференциальное уравнение, получаем невязку $\psi_n^{(1)} = \frac{h^2}{6}\left[u^{````}(\xi^-) + u^{````}(\xi^+)\right] = \frac{h^2}{3}u^{````}(\eta) = O(h^2)$, где $\eta \in [\xi^-; \xi^+]$. Получен второй порядок аппроксимации.

В замене граничных условий $u^{`}(0)$ и $u^{`}(2)$ нельзя заменить правой и левой разделенными разностями соответственно, так как они имеют первые порядки погрешности и аппроксимации. Также не можем использовать формулу центральной разности, так как -1 и $n+1$ узлов не существует.

Для левого граничного условия воспользуемся формулой правой разделенной разности.

В формуле $u^{`}(0) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$ выделим в $O(h)$ главный член. Из формулы Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ имеем

$$u(0+h) = u(0) + hu^{`}(0) + \frac{h^2}{2}u^{``}(0) + O(h^3)$$

откуда

$$u^{`}(0) = \frac{u(0+h) - u(0)}{h} + \frac{h}{2}u^{``}(0) + O(h^2)$$

Из исходного уравнения следует, что $2u^{``}(0) - 3u(0) = 3$. Таким образом,

$$\frac{u(0+h) - u(0)}{h} + \frac{h}{2}\left[\frac{3 + 3u(0)}{2}\right] + O(h^2) = 0$$

Для правого граничного условия воспользуемся формулой левой разделенной разности.

В формуле $u`(2) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)$ выделим в $O(h)$ главный член. Из формулы Тейлора в окрестности точки $x_n = 2$ имеем

$$u(2-h) = u(2) - hu`(2) + \frac{h^2}{2}u``(2) + O(h^3)$$

откуда

$$u`(2) = \frac{u(2) - u(2-h)}{h} + \frac{h}{2}u``(2) + O(h^2)$$

Из исходного уравнения следует, что $2u``(2) - 3u(2) = 3$. Таким образом,

$$\frac{u(2) - u(2-h)}{h} + \frac{h}{2}\left[\frac{3 + 3u(2)}{2}\right] + O(h^2) + 2u(2) = 0$$

Невязки для граничных условий равны $O(h^2)$, что даёт второй порядок аппроксимации.

Окончательный ответ

$$\begin{cases} 2 \times \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 3y_i = 3 \\ \dfrac{y_1 - y_0}{h} + \dfrac{h}{2}\left[\dfrac{3 + 3y_0}{2}\right] = 0 \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} + \dfrac{h}{2}\left[\dfrac{3 + 3y_n}{2}\right] + 2y_n = 0 \end{cases}$$

15. Для решения (начальной или краевой) задачи, где $x \in [0, 2]$, предложена разностная схема. Определить, аппроксимирует ли разностная схема задачу. Если аппроксимация имеет место, найти её порядок. Указание: использовать разложение в ряд Тейлора.

$$\begin{cases} y'' - yx = 1 \\ y(0) = 1, \ y'(2) = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - y_i \cdot ih = 1 \\ y_0 = 1, \ \dfrac{y_n - y_{n-2}}{2h} = 4 \ (\text{где } x_n = 2) \end{cases}$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - y_i \times ih = 1$$

В разностное уравнение вместо сеточной функции подставим точное решение, т. е. заменим y_i на $u_i = u(x_i)$.

Разложим $u_{i\pm1}$ в окрестности точки x_i

$$u_{i\pm1} = u_i \pm hu_i^{`} + \frac{h^2}{2}u_i^{``} \pm \frac{h^3}{6}u_i^{```} + \frac{h^4}{24}u^{````}(\xi^{\pm}), \xi^- \in [x_{i-1}; x_i], \xi^+ \in [x_i; x_{i+1}]$$

После подстановки и сокращения имеем

$$u_i^{``} - \frac{h^2}{12}\left[u^{````}(\xi^-) + u^{````}(\xi^+)\right] - x_i u_i = 1$$

Вычитая из данного равенства исходное дифференциальное уравнение, получаем невязку $\psi_1^{(1)} = -\frac{h^2}{12}\left[u^{````}(\xi^-) + u^{````}(\xi^+)\right] = -\frac{h^2}{6}u^{````}(\eta) = O(h^2)$, где $\eta \in [\xi^-; \xi^+]$. Получен второй порядок аппроксимации.

Рассмотрим первое краевое условие в разностном виде

$$y_0 = 1$$

В этом случае невязка $\psi_2 = 0 = O(h^{\infty})$

Рассмотрим второе краевое условие в разностном виде

$$\frac{y_n - y_{n-2}}{2h} = 4$$

Разложим $u(2 - 2h)$ в окрестности $u(2)$.

$$u(2 - 2h) = u(2) - 2hu^{`}(2) + O(h^2)$$

И подставим во второе условие

$$\frac{u(2) - u(2) + 2hu^{`}(2) + O(h^2)}{2h} = 4$$

$$u^{`}(2) + O(h) = 4$$

Вычтем исходное краевое условие и получим невязку $\psi_3 = O(h)$

Так как $\lim\limits_{h\to0} \max(|\psi_1|, |\psi_2|, |\psi_3|) = 0$, то разностная схема аппроксимирует данную задачу.

Порядок аппроксимации равен $\min(2; \infty; 1) = 1$

16. Проверить выполнимость достаточных условий применимости метода прогонки для решения СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$. Если эти условия выполняются, решить систему методом прогонки (вычислять можно на компьютере, но в решении указать значения всех прогоночных коэффициентов α_i, β_i).

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -13 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -14 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Преобразуем СЛАУ, чтобы она приобрела вид:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \varkappa_1 & & & & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & -c_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & -c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & \varkappa_2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \vdots \\ -f_{n-1} \\ -\mu_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

Получим

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -0.44 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -13 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -0.43 & -1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} -0.17 \\ 9 \\ -6 \\ 7 \\ 0.43 \end{pmatrix}$$

Проверим условия применимости метода прогонки:

Теорема 10.1 (достаточное условие применимости прогонки). *Пусть*

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0,$$

$$|c_j| \geqslant |a_j| + |b_j|, \; j = 1, 2, \ldots, n-1 \; \textit{(диагональное преобладание)}, \quad (10.6)$$

$$|\varkappa_1| \leqslant 1, \; |\varkappa_2| < 1, \quad (10.7)$$

тогда метод прогонки применим.

Все элементы a_j и b_j отличны от нуля.

Проверим диагональное преобладание:

$$|-13| > |8| + |-4|; \; 13 > 12$$

$$|-10| > |4| + |-4|;\ 10 > 8$$

$$|14| > |4| + |6|;\ 14 > 10$$

Проверим выполнение условий для $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$

$$|-0.4444| \leq 1$$

$$|-0.4286| < 1$$

Следовательно, метод прогонки применим.

Воспользуемся формулами

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \qquad \beta_1 = \mu_1$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \qquad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}$$

$$y_n = \frac{\varkappa_2 \beta_n + \mu_1}{1 - \varkappa_2 \alpha_n}$$

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}$$

Посчитаем значения коэффициентов α_j:

$$\alpha_1 = -0.4444$$

$$\alpha_2 = \frac{-4}{13 + 0.4444 \times 8} = -0.2416$$

$$\alpha_3 = \frac{-4}{10 + 0.2416 \times 4} = -0.3647$$

$$\alpha_4 = \frac{6}{-14 + 0.3647 \times 4} = -0.4784$$

Посчитаем значения коэффициентов β_j:

$$\beta_1 = 0.1667$$

$$\beta_2 = \frac{8 \times 0.1667 - 9}{13 + 0.4444 \times 8} = -0.4631$$

$$\beta_3 = \frac{-4 \times 0.4631 + 6}{10 + 0.2416 \times 4} = 0.3782$$

$$\beta_4 = \frac{4 \times 0.3782 - 7}{-14 + 0.3647 \times 4} = 0.4375$$

И посчитаем решение системы:

$$y_5 = \frac{-0.4286 \times 0.4375 - 0.4286}{1 - 0.4286 \times 0.4784} = -0.7750$$

$$y_4 = 0.7750 \times 0.4784 + 0.4375 = 0.8083$$

$$y_3 = -0.8083 \times 0.3647 + 0.3782 = 0.0834$$

$$y_2 = -0.0834 \times 0.2416 - 0.4631 = -0.4832$$

$$y_1 = 0.4832 \times 0.4444 + 0.1667 = 0.3814$$

Итоговое решение системы

$$X = \begin{pmatrix} 0.3814 \\ -0.4832 \\ 0.0834 \\ 0.8083 \\ -0.7750 \end{pmatrix}$$