ЛР 5. Интегрирование функций. Формулы трапеций, Симпсона.

① Задайте функцию $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$. Очевидно, определённый интеграл от функции $f(x)$ на этом отрезке равен $\frac{1}{4}$. Напишите программу, вычисляющую значение интеграла по формулам трапеций и Симпсона. Какую максимальную теоретическую ошибку мы при этом допускаем? Найдите реальное значение погрешности (абсолютное значение разности между теоретическим и аналитическим решением). Почему при вычислении интеграла по формуле Симпсона от данной функции ошибка равна нулю? Какие бы получились значения погрешностей для квадратичной и линейной функций (предположите и проведите численный эксперимент для $f_2(x) = x^2$, $f_1(x) = x/2$ на отрезке $[0, 1]$).

Функция вычисления интеграла методами трапеций и Симпсона:

```
function [I_trap, I_simp] = integrate(f, a, b, n)
h = (b-a)/n;
% вычисление интеграла методом трапеций
% составная формула трапеций
I_trap = (f(a) + f(b))/2;
for i = 1:n-1
    x_i = a + i*h;
    I_trap = I_trap + f(x_i);
end
I_trap = h*I_trap;

% вычисление интеграла методом Симпсона
I_simp = f(a) + f(b);
for i = 1:n-1
    x_i = a + i*h;
    if mod(i,2) == 0
        I_simp = I_simp + 2*f(x_i);
    else
        I_simp = I_simp + 4*f(x_i);
    end
end
I_simp = h*I_simp/3;
end
```

Максимальная теоретическая погрешность для формулы трапеций равна

$$|\psi| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} M_2$$

$$M_2 = max_{[0,1]}(6x) = 6$$

$$|\psi| \leq \frac{10^{-2}(1-0)}{12} \times 6 = \frac{1}{200} = 5 \times 10^{-3}$$

Максимальная теоретическая погрешность для формулы Симпсона равна 0 (так как четвертая производная данной функции равна 0)

$$|\psi| \le \frac{h^4(b-a)}{2880} M_4$$

Интеграл от функции $f(x) = x^3$ формулами трапеции и Симпсона с шагом $h = 10^{-1}$ соответственно:

```
I_trapez1 =

    0.2525


I_simpson1 =

    0.2500
```

Значение погрешности:

```
d =

    0.0025    0.0000
```

Погрешность формулы Симпсона равна 0, потому что она точна для многочленов 3-ей степени

Лемма. *Формула Симпсона точна для любого многочлена 3-ей степени, т.е. имеет место точное равенство* $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$, *если* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Для квадратичной и линейной функций погрешность по формуле Симпсона также должна быть равна 0.

Квадратичная функция $f(x) = x^2$ по формуле трапеций должна иметь погрешность

$$|\psi| \le \frac{h^2(b-a)}{12} M_2$$

$$|\psi| \le \frac{10^{-2}(1-0)}{12} \times 2 = \frac{1}{600} = 1{,}7 \times 10^{-3}$$

Линейная функция по формуле трапеций должна иметь погрешность 0, т. к. у линейной функции вторая производная равна 0 на всем промежутке.

```
d2 =

    0.0017         0
```

Для квадратичной функции все выполняется

```
d3 =

  1.0e-016 *

    0.5551         0
```

Для линейной функции присутствует погрешность округления порядка 10^{-16}

② Используя соотношение $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}(1)$ найдите значение числа π с точностью 10^{-6}. В данном задании в процессе вычислений нельзя использовать встроенную константу `pi` для определения величины шага. Из каких соображений выбирался шаг для получения указанной точности?

Для того чтобы получить точность 10^{-6} необходимо оценить остаточный член формулы трапеций и найти шаг h

$$|\psi| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} M_2$$

Для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ максимум второй производной на отрезке $[0,1]$ равен 2

$$f^{`}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{``}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$M_2 = max_{[0,1]}\left|\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\right| = 2$$

Тогда

$$h \leq \sqrt{\frac{10^{-6} \times 12}{2}}$$

$$h \leq 2{,}45 * 10^{-3}$$

Но так как мы с помощью интеграла мы находим значение равное $\frac{\pi}{4}$, то для вычисления значения π (в 4 раза больше) шаг необходимо уменьшить в 4 раза, чтобы сохранить точность 10^{-6}

$$h \leq 6{,}125 * 10^{-4}$$

Рассчитанное значение по формуле трапеций:

```
I_trapez =

   3.141592591090315
```

③ Реализовать предыдущее задание, определяя точность методом Рунге. При численном вычислении интегралов последовательно с шагами h и $h/2$ можно сократить число арифметических операций. Заметим, что приближённое значение интеграла $I_{h/2}$ есть сумма, часть слагаемых которой возможно уже участвовало при вычислении I_h. Поэтому можно получить $I_{h/2}$, используя числовое значение I_h. Это позволяет избежать повторного суммирования части слагаемых[5].

Функция для вычисления интеграла, с использованием метода Рунге для определения точности:

Снова так как мы вычисляем с помощью интеграла с точность 10^{-6} значение $\frac{\pi}{4}$, то итоговую точность для вычисления π нужно брать равной $\frac{10^{-6}}{4}$

```
function I = integrate_Runge(f, a, b, eps)
h = (b - a);
Ih = h/2 * (f(a) + f(b)); % начальное значение интеграла
p = 2; % порядок метода
% для формулы трапеций порядок равен 2
delta = 100; % начальное значение погрешности

while delta > eps
    h = h/2;
    xi = a + h:h:b-h;
    Ih2 = h/2 * (f(a) + f(b) + 2*sum(f(xi)));
    delta = abs((Ih2 - Ih)/(2^p - 1)); % оценка погрешности
    Ih = Ih2;
end
I = Ih;
end
```

Будем вычислять интеграл по формуле трапеций

$$I_h = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right),$$

$$I_{h/2} = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{2}f_0 + f_{1/2} + f_1 + f_{3/2} + \ldots + f_{n-1} + f_{n-1/2} + \frac{1}{2}f_n\right).$$

Очевидно, что $I_{h/2} = \frac{I_h}{2} + \frac{h}{2}\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n-3/2} + f_{n-1/2}\right)$.

Точность определяется методом Рунге

$$\left|I - S(h/2)\right| \approx \frac{\left|S(h) - S(h/2)\right|}{2^p - 1} \leq \varepsilon$$

Для формулы трапеций выражение будем рассчитывать погрешность как:

$$\varepsilon \approx \frac{\left|S(h) - S(h/2)\right|}{3}$$

Получаем значение:

```
pi_pr =

   3.141592017806921
```