ЛР 7. Метод Эйлера. Схемы Рунге-Кутта решения ОДУ.

① Найдите численное решение следующего ОДУ методом Эйлера (на равномерной сетке) и сравните его с аналитическим:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

```
h = 0.05;
x = 0:h:3;
y(1) = 1;
% Решение ОДУ методом Эйлера
for i = 1:length(x)-1
    y(i+1) = y(i) + h*x(i)^2;
end
y_analytic = 1 + (x.^3)/3;
dy = y_analytic-y;
max(dy)
```

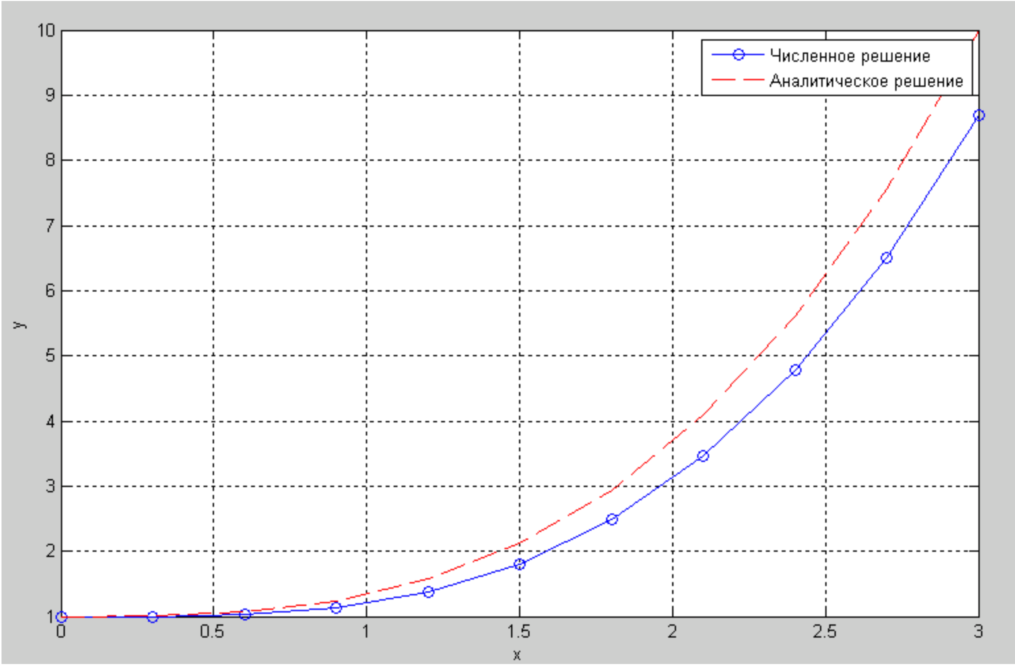
Для шага сетки 0.3 и значений от 0 до 3 (11 точек)

Численное решение, аналитическое и их разница(погрешность):

```
y =

    1.0000    1.0000    1.0270    1.1350    1.3780    1.8100    2.4850    3.4570    4.7800    6.5080    8.6950


y_analytic =

    1.0000    1.0090    1.0720    1.2430    1.5760    2.1250    2.9440    4.0870    5.6080    7.5610   10.0000


dy =

         0    0.0090    0.0450    0.1080    0.1980    0.3150    0.4590    0.6300    0.8280    1.0530    1.3050
```

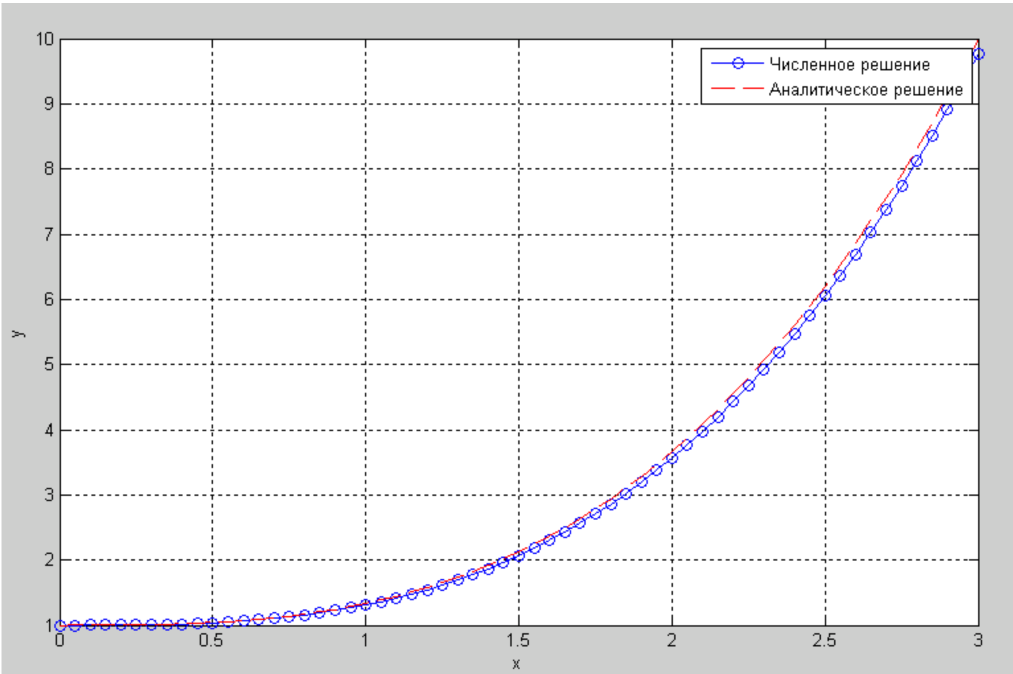
Видно, что максимальная погрешность равна

```
ans =

    1.3050
```



Для шага сетки 0.05 (61 точка) максимальная погрешность равна

```
ans =

    0.2238
```



Погрешности в точке $x = 3$ при разном шаге сетки 0.3 и 0.05 различается в $\frac{1.3050}{0.2238} = 5.8311$.

Так как в первом уравнении $\frac{dy}{dx} = x^2$, первую производную заменяли по формуле правой разности с порядком погрешности $O(h)$, т. е. порядок аппроксимации равен 1.

Шаги сетки различаются в $\frac{0.3}{0.05} = 6$ раз, то можно утверждать, что погрешности различаются в соответствии с порядком аппроксимации.

② MATLAB имеет множество функций для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Солверы `ode23` и `ode45` основаны на формулах Рунге-Кутты 2,3 и 4,5 порядков соответственно. Разберем пример их использования на примере задачи о колебаниях под воздействием внешней силы:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = \sin t, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Сводим к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -2y_2 - 10y_1 + \sin t, \\ y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

② Постройте графики координаты $y_1(t)$ и скорости $y_2(t)$. Воспользовавшись знаниями теории обыкновенных дифференциальный уравнений можно получить аналитическое решение:

$$y = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + \frac{1}{85}(9 \sin t - 2 \cos t),$$

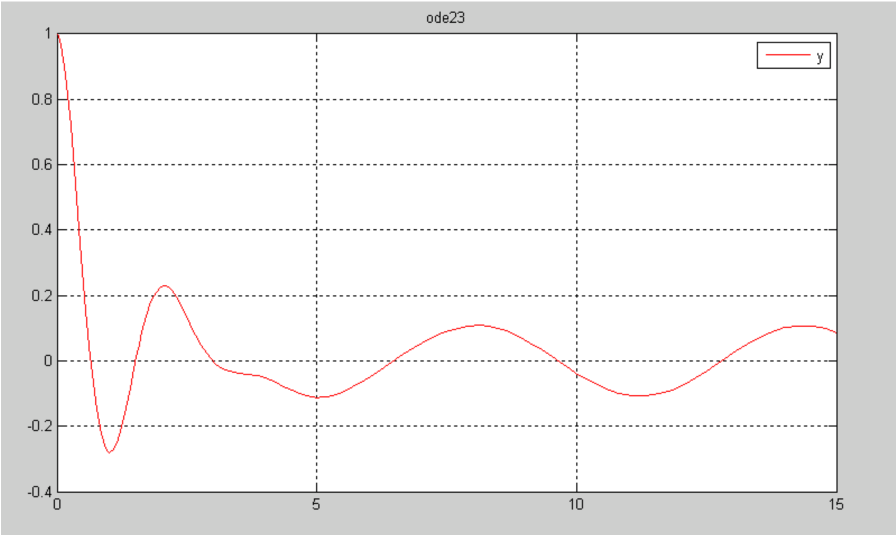
где для данной задачи Коши $C_1 = \frac{87}{85}$, $C_2 = \frac{26}{85}$. Постройте график аналитического решения и сравните с численным, полученным при помощи `ode23` и `ode45`.

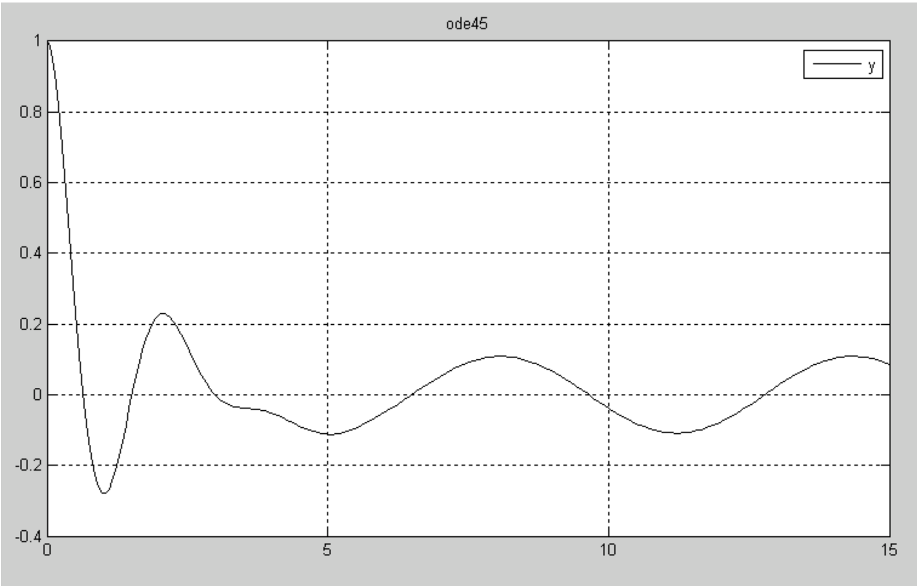
```
function [ F ] = oscil( t,y )
F=[y(2) ; -2*y(2)-10*y(1)+ sin(t) ] ;
end
```

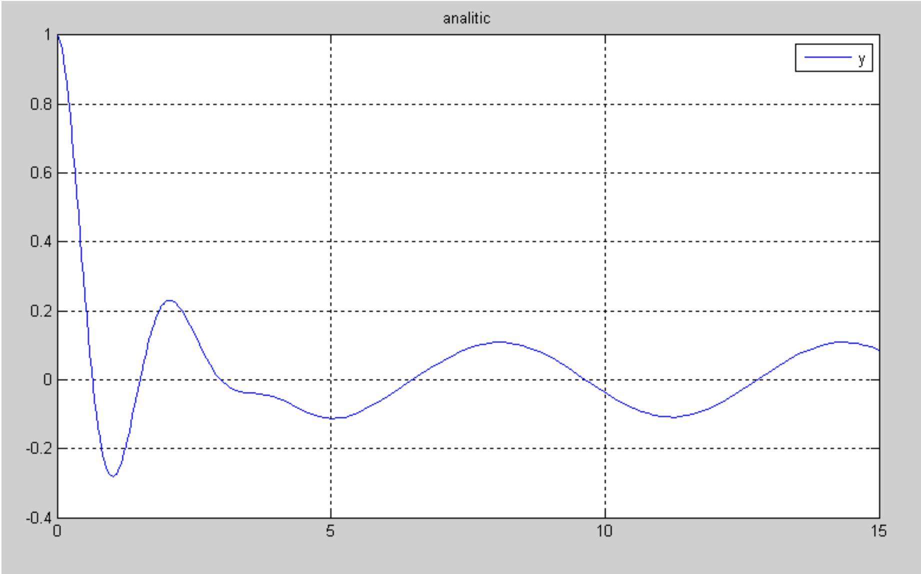
```
Y0 = [ 1 ; 0 ] ; % вектор начальных условий
[T1 Y1] = ode23( 'oscil' , [ 0 15 ] ,Y0 );
[T2 Y2] = ode45( 'oscil' , [ 0 15 ] ,Y0 );
```

Вектор $Y(:,1)$ содержит решение исходного уравнения, Вектор $Y(:,2)$ содержит производную решения уравнения

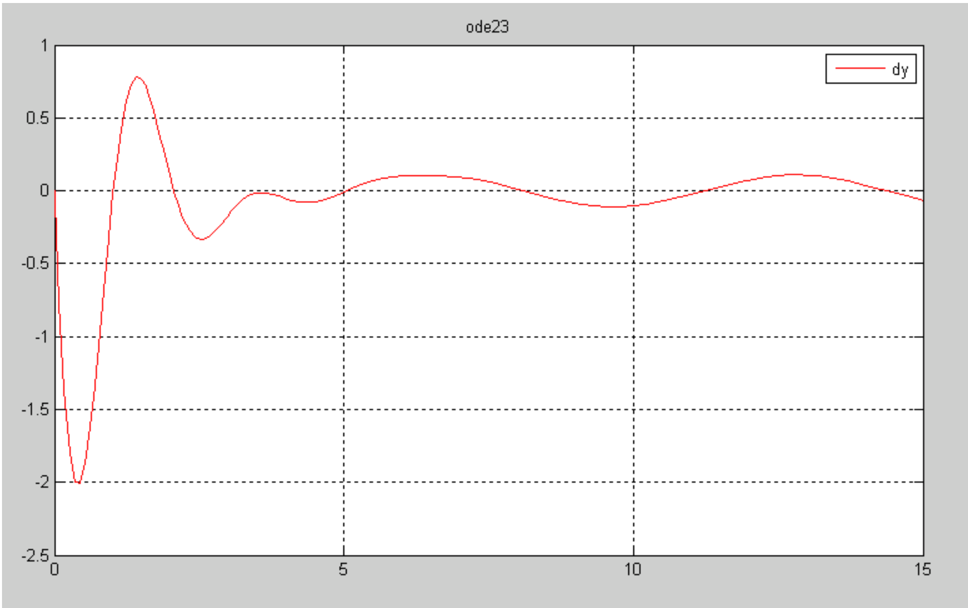
Построим графики функции:

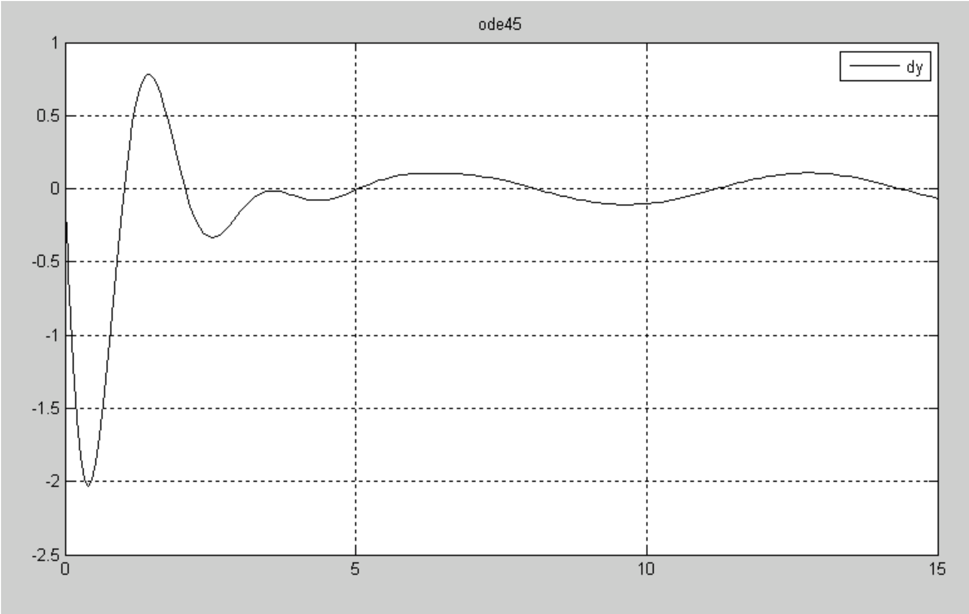


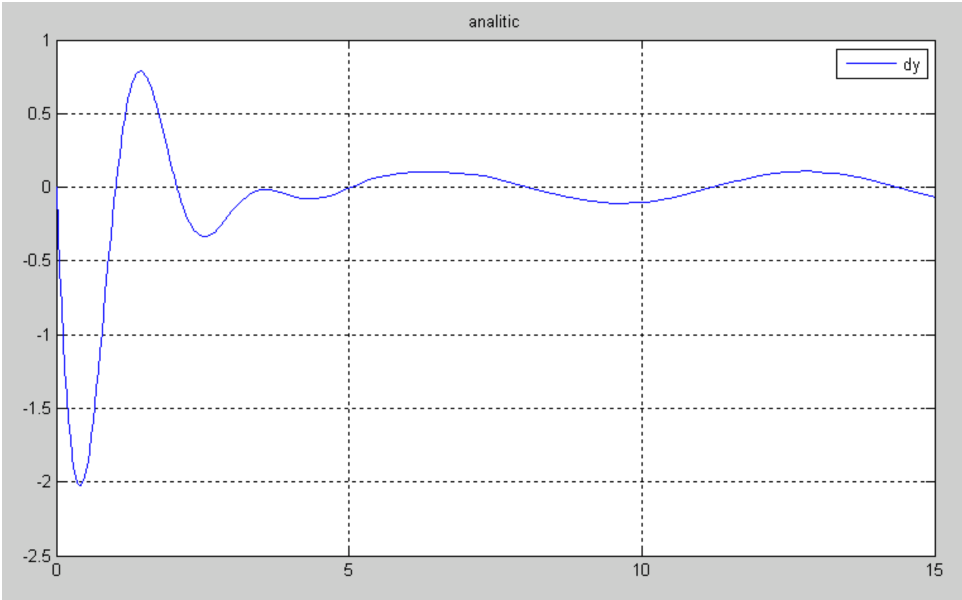




Построим графики производной функции:







Вычисленные численные решения с большой точностью совпадают с аналитическим.

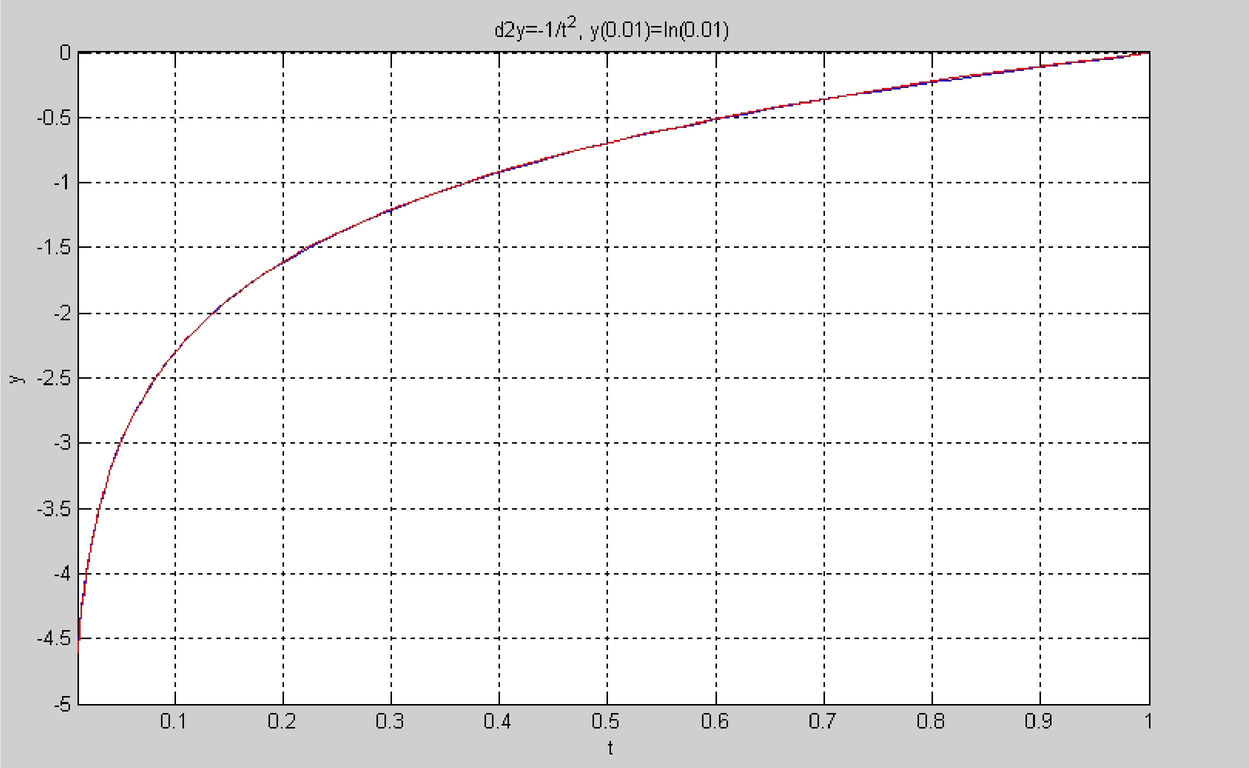
③ Решите следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} y'' = -\frac{1}{t^2}, \\ y(t_0) = \ln t_0, \quad \text{при } t_0 = 0,01 \end{cases}$$

и сверьте численное решение с аналитическим $y = \ln t$.

```
Y0 = [ log(0.01) ; 1/0.01 ] ;
[t y] = ode45( 'oscil2', [0.01 1] ,Y0 );
plot(t,y(:,1))
hold on; grid on;
xlabel('t'); ylabel('y')
fplot(@(t) log(t),[0.01 1],'r')
title('d2y=-1/t^2, y(0.01)=ln(0.01)')
```

Решая численно и аналитически, получаем:



Графики почти сливаются, значит погрешность невелика.