БДЗ №1

1. (a) Представить слагаемые и результат в виде *нормализованного* числа с плавающей точкой двойной точности: $(-1)^s \cdot 2^{e-1023} \cdot 1.f$, где $1.f$ записано в двоичном виде. (б) Если результат неточный (не умещается целиком в мантиссе), то указать относительную погрешность ошибки. Исходные данные в десятичной системе счисления.

$$-683,6640625 \cdot 2^{120} + 1177,0703125 \cdot 2^{173}$$

Решение.

Перевод целой и дробной части первого числа −683,6640625

Деление	Целое частное	Остаток
683 / 2	341	**1**
341 / 2	170	**1**
170 / 2	85	**0**
85 / 2	42	**1**
42 / 2	21	**0**
21 / 2	10	**1**
10 / 2	5	**0**
5 / 2	2	**1**
2 / 2	1	**0**
1 / 2	0	**1**

Умножение	Результат	Целая часть	Остаток
0.6640625 × 2	1.328125	**1**	0.328125
0.328125 × 2	0.65625	**0**	0.65625
0.65625 × 2	1.3125	**1**	0.3125
0.3125 × 2	0.625	**0**	0.625
0.625 × 2	1.25	**1**	0.25
0.25 × 2	0.5	**0**	0.5
0.5 × 2	1	**1**	

Перевод целой и дробной части второго числа 1177,0703125

Деление	Целое частное	Остаток
1177 / 2	588	**1**
588 / 2	294	**0**
294 / 2	147	**0**
147 / 2	73	**1**
73 / 2	36	**1**
36 / 2	18	**0**
18 / 2	9	**0**
9 / 2	4	**1**
4 / 2	2	**0**
2 / 2	1	**0**
1 / 2	0	**1**

Умножение	Результат	Целая часть	Остаток
0.0703125 × 2	0.140625	**0**	0.140625
0.140625 × 2	0.28125	**0**	0.28125
0.28125 × 2	0.5625	**0**	0.5625
0.5625 × 2	1.125	**1**	0.125
0.125 × 2	0.25	**0**	0.25
0.25 × 2	0.5	**0**	0.5
0.5 × 2	1	**1**	

Переведем слагаемые в двоичную систему и преобразуем их затем к нормализованному виду $(-1)^s \times 2^{e-1023} \times 1.f$:

$$-683{,}6640625 \times 2^{120} + 1177{,}0703125 \times 2^{173} =$$

$$= -1010101011{,}1010101 \times 2^{120} + 10010011001{,}0001001 \times 2^{173} =$$

$$= -1{,}0101010111010101 \times 2^{129} + 1{,}00100110010001001 \times 2^{183} =$$

$(-1)^1 \times 2^{1152-1023} \times 1.0101010111010101$ $\sim 2^{129} \sim 10^{37}$

$+(-1)^0 \times 2^{1206-1023} \times 1.00100110010001001$ $\sim 2^{183} \sim 10^{55}$

$= (-1)^0 \times 2^{1206-1023} \times 1.00100110010001001$ $\sim 2^{183} \sim 10^{55}$

$\delta_{\text{абс}} =$ разряды какого порядка не уместились в 52 бита мантиссы $= \sim 2^{129} \sim 10^{37}$

$$\delta_{\text{отн}} = \frac{\delta_{\text{абс}}}{2^{183}} = \frac{2^{129}}{2^{183}} \sim 2^{-54} \sim 10^{-16}$$

2. Написать последовательность инструкций Matlab, формирующих указанную матрицу. Около каждой инструкции указать промежуточный результат в виде матрицы. Разрешается использовать матричные функции (`eye`, `repmat`, `flipud` и др.). Использовать циклы нельзя.

Входные данные:	*Нужно получить:*
Целое $n \geqslant 20$	$\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{2n} & \sin\frac{3\pi}{2n} & \cdots & \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \\ \sin^2\frac{\pi}{2n} & \sin^2\frac{3\pi}{2n} & \cdots & \sin^2\frac{(2n-1)\pi}{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin^n\frac{\pi}{2n} & \sin^n\frac{3\pi}{2n} & \cdots & \sin^n\frac{(2n-1)\pi}{2n} \end{pmatrix}$

$n = 20;$

$A = 1{:}2{:}(2n-1)$

$A = repmat(A, n, 1)$

$A = \sin\left(A * \frac{\pi}{2n}\right)$

$B = repmat(1{:}n, n, 1)$

$B = B.'$

$B = A.\hat{}B$

$A = 1{:}2{:}(2n-1)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$
$A = repmat(A, n, 1)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 3 & & 2n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$
$A = \sin\left(A * \frac{\pi}{2n}\right)$	$A = \begin{pmatrix} sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) & sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right) & \dots & sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) & sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right) & & sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) & sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right) & \dots & sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \end{pmatrix}$
$B = repmat(1{:}n, n, 1)$ $B = B.'$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}$
$B = A.\hat{}B$	$B = \begin{pmatrix} sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) & sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right) & \dots & sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \\ sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) & sin^2\left(\frac{3\pi}{2n}\right) & & sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ sin^n\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) & sin^n\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) & \dots & sin^n\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \end{pmatrix}$

3. (а) Локализовать корни уравнения (для каждого корня z_i указать отрезок $[a_i, b_i]$, содержащий только один этот корень z_i). Для *каждого* корня (б) построить итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящийся к корню и (в) указать начальное значение x_0. Указание: локализацию проводить перебором интервалов $[a_i, b_i]$ или средствами математического анализа.

$$5x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$$

Решение.

Табличным способом выделим отрезки, на концах которых функция имеет разные знаки:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
sign f(x)	+	+	+	+	-	+	+	+

Таким образом, корни исходного уравнения лежат на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 1]$

Для каждого корня построим итерационный процесс.

Для корня $[0, 1]$ разделим уравнение на x^2:

$$5x^2 + x + 1 + \frac{2}{x} = \frac{2}{x^2}$$

И выразим x через $\frac{2}{x^2}$

$$x = \sqrt{\frac{2}{5x^2 + x + 1 + \frac{2}{x}}}$$

Тогда итерационный процесс

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{5x_n^2 + x_n + 1 + \frac{2}{x_n}}}$$

На заданном отрезке $[0, 1]$ везде кроме точки 0 (из-за деления на 0) выполняется неравенство

$$|\varphi`(x)| < 1$$

В качестве начального приближения можно взять $x_0 = 0{,}5$

Для корня из отрезка $[-1, 0]$ не удалось построить итерационный процесс, тогда воспользуемся методом Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{5x_n^4 + x_n^3 + x_n^2 + 2x_n - 2}{20x_n^3 + 3x_n^2 + 2x_n + 2}$$

В качестве начального приближения можно взять $x_0 = -1$

4. Известно, что интервалу $[a, b]$ принадлежит *только* корень x_* уравнения (другие корни интервалу не принадлежат). (а) Построить итерационный процесс Ньютона $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ и (б) обосновать какую из границ интервала $[a, b]$ можно принять за x_0. Указание: в пункте (б) выяснить знаки производных $f'(x)$ и $f''(x)$ и использовать соответствующую теорему.

$$\sin(\ln x) = 0, \quad x_* \in [22, 24]$$

Решение.

$$f(x) = \sin(\ln(x))$$

$$f`(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

Построим итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_n)} = x_n - \frac{\sin(\ln(x_n))}{\frac{\cos(\ln(x_n))}{x_n}} = x_n - x_n\frac{\sin(\ln(x_n))}{\cos(\ln(x_n))}$$

Определим знаки производных на отрезке $[22, 24]$:

$$f`(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x} \le -0.0454 < 0,\ f``(x) = -\frac{\cos(\ln(x))}{x^2} - \frac{\sin(\ln(x))}{x^2} \ge 0.0018 > 0$$

Так как $f`(x) \times f``(x) < 0$, то берем левую границу интервала $x_0 = 22$.

5. (а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$ по узлам x_i. (б) Оценить сверху погрешность $|R_n(x)|$ приближения функции многочленом.

$$7\ln x - x \qquad x_0 = 1/2,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

Решение.

Построим многочлен Лагранжа по таблице:

x	1/2	1	2
y	$-7\ln(2) - 0.5$	-1	$7\ln(2) - 2$

Вычислим приближенные значения:

x	1/2	1	2
y	$-5,35203$	-1	$2,85203$

$$P_2(x) = -5{,}35203\frac{(x-1)(x-2)}{(0.5-1)(0.5-2)} - 1\frac{(x-0.5)(x-2)}{(1-0.5)(1-2)} + 2{,}85203\frac{(x-0.5)(x-1)}{(2-0.5)(2-1)}$$

$$P_2(x) = -7{,}13604(x-1)(x-2) + 2(x-0.5)(x-2) + 1{,}90135(x-0.5)(x-1)$$

$$P_2(x) = -3{,}23469x^2 + 13{,}556095x - 11{,}321405$$

$$P_2(x) = -3{,}2347x^2 + 13{,}5561x - 11{,}3214$$

Найдем погрешность по формуле $R_2(x) = \frac{M_3}{3!}\omega_3(x)$

$f(x) = 7\ln(x) - x,\ f^{`}(x) = \frac{7}{x} - 1,\ f^{``}(x) = -\frac{7}{x^2},\ f^{```}(x) = \frac{14}{x^3}$

$$M_3 = max_{[0.5,2]}f^{```}(x) = max_{[0.5,2]}\frac{14}{x^3} = 112$$

Для нахождения максимального значения $\omega_3(x) = (x-0.5)(x-1)(x-2) = x^3 - 3{,}5x^2 + 3{,}5x - 1$ необходимо найти корни производной $\omega_3(x)$

$$\omega_3^{`}(x) = 3x^2 - 7x + 3{,}5$$

$$3x^2 - 7x + 3{,}5 = 0$$

$$x_1 = 0{,}7257,\ x_2 = 1{,}6076$$

$$|\omega_3(0{,}7257)| = 0{,}0789\ ,\ |\omega_3(1{,}6076)| = 0{,}2641$$

Рассчитаем погрешность:

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!} \times |\omega_3(x)| = \frac{112}{6} \times 0{,}2641 = 4{,}9293$$

6. Заданную функцию будут интерполировать на отрезке $[a,b]$ по чебышёвским узлам с заданной точностью $|R_n(x)| < \varepsilon$. Требуется (а) определить требуемое для заданной точности ε количество узлов (т.е. степень интерполяционного многочлена плюс 1) и (б) вычислить значения всех узлов и отметить их на действительной оси Ox (если узлов окажется много, ограничиться вычислением значений наименьших 10 узлов).

$$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{x} \quad \text{на отрезке } [1, \pi/2] \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-3}$$

Решение.

Оценим погрешность многочлена Лагранжа для Чебышевских узлов

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \times 2^{1-2(n+1)}$$

Найдем производные заданной функции:

$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{x}$

$f^{`}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f^{``}(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$

$f^{```}(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$

$f^{````}(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{15}{16x^{\frac{7}{2}}}$

n – количество Чебышевских узлов

Для $n = 2$ $|R_1(x)| \leq \frac{M_2}{2!}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 \times 2^{-3} \approx 0.025$

Для $n = 3$ $|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^3 \times 2^{-5} \approx 0.000402$

получили требуемую погрешность порядка 10^{-3}

$$\boxed{\text{Для } n = 4\ |R_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^4 \times 2^{-7} \approx 6{,}69 \times 10^{-5}}$$

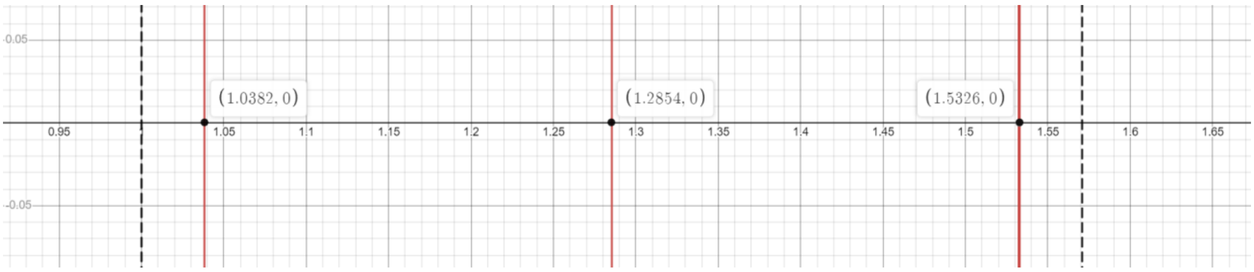
Выпишем Чебышевские узлы:

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

$$x_1 = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}-1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5326$$

$$x_2 = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}-1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 1.2854$$

$$x_3 = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}-1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1.0382$$



7. Данные некоторого физического эксперимента представлены в таблице. Характер зависимости $y(x)$ заранее точно неизвестен. Есть предположения, что зависимость может быть линейной, квадратичной или кубической. (а) Методом среднеквадратического приближения построить три типа приближения $y(x)$ (т.е. аппроксимирующие многочлены первой, второй и третьей степеней). (б) Для каждого аппроксимирующего многочлена вычислить среднеквадратическое отклонение $\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(y(x_i)-y_i)^2}$. (в) Выбрать минимальное с.к.о.

и указать соответствующий ему тип зависимости (линейная, квадратичная или кубическая), т.е. наиболее вероятный в проведённом эксперименте.

x	3	4	5	6	7
y	148.8	341.2	657.7	1126.5	1776.5

Решение.

Сначала найдем линейную зависимость: $x(t) = ax + b$

Введем функцию $\Phi(a,b) = \sum_{k=1}^{5}(ax_k + b - y_k)^2$

$$\Phi(a,b) = (3a + b - 148{,}8)^2 + (4a + b - 341{,}2)^2 + (5a + b - 657{,}7)^2 + (6a + b - 1126{,}5)^2 + (7a + b - 1776{,}5)^2$$

$$\frac{d\Phi}{da} = 18a + 6b - 892{,}8 + 32a + 8b - 2729{,}6 + 50a + 10b - 6577 + 72a + 12b - 13518 + 98a + 14b - 24871 = 270a + 50b - 48588{,}4$$

$$\frac{d\Phi}{db} = 6a + 2b - 297{,}6 + 8a + 2b - 682{,}4 + 10a + 2b - 1315{,}4 + 12a + 2b - 2253 + 14a + 2b - 3553 = 50a + 10b - 8101{,}4$$

Из полученных уравнений найдем значения a и b:

$$\begin{cases} 270a + 50b - 48588{,}4 = 0 \\ 50a + 10b - 8101{,}4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 404{,}07 \\ b = -1210{,}21 \end{cases}$$

Полученная линейная зависимость $P_0(x) = 404{,}07x - 1210{,}21$

Найдем среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} (148{,}8 - 404{,}07 \times 3 + 1210{,}21)^2 + (341{,}2 - 404{,}07 \times 4 + 1210{,}21)^2 \\ +(657{,}7 - 404{,}07 \times 5 + 1210{,}21)^2 + (1126{,}5 - 404{,}07 \times 6 + 1210{,}21)^2 \\ +(1776{,}5 - 404{,}07 \times 7 + 1210{,}21)^2 \end{bmatrix}} = 127{,}8459$$

Найдем квадратичную зависимость $x(t) = ax^2 + bx + c$

$$\Phi(a,b,c) = \sum_{k=1}^{5}(ax_k^2 + bx_k + c - y_k)^2$$

$$\begin{aligned}\Phi(a,b,c) = (9a + 3b + c - 148{,}8)^2 + (16a + 4b + c - 341{,}2)^2 \\ + (25a + 5b + c - 657{,}7)^2 + (36a + 6b + c - 1126{,}5)^2 \\ + (49a + 7b + c - 1776{,}5)^2\end{aligned}$$

$$\frac{d\Phi}{da} = 9318a + 1550b + 270c - 301686{,}8$$

$$\frac{d\Phi}{db} = 1550a + 270b + 50c - 48588{,}4$$

$$\frac{d\Phi}{dc} = 270a + 50b + 10c - 8101{,}4$$

$$\begin{cases} a = 76{,}2500 \\ b = 358{,}4300 \\ c = 543{,}5400 \end{cases}$$

Полученная квадратичная зависимость $P_1(x) = 76{,}25x^2 + 358{,}43x + 543{,}54$

Найдем среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} (148{,}8 - 76{,}25 \times 9 - 358{,}43 \times 3 - 543{,}54)^2 + \\ +(341{,}2 - 76{,}25 \times 16 - 358{,}43 \times 4 - 543{,}54)^2 + \\ +(657{,}7 - 76{,}25 \times 25 - 358{,}43 \times 5 - 543{,}54)^2 + \\ +(1126{,}5 - 76{,}25 \times 36 - 358{,}43 \times 6 - 543{,}54)^2 + \\ +(1776{,}5 - 76{,}25 \times 49 - 358{,}43 \times 7 - 543{,}54)^2 \end{bmatrix}} = 8{,}0752$$

Найдем кубическую зависимость $x(t) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\Phi(a,b,c,d) = \sum_{k=1}^{5}(ax_k^3 + bx_k^2 + cx_k + d - y_k)^2$$

$$\Phi(a,b,c,d) = (27a + 9b + 3c + d - 148{,}8)^2 \\ + (64a + 16b + 4c + d - 341{,}2)^2 \\ + (125a + 25b + 5c + d - 657{,}7)^2 \\ + (216a + 36b + 6c + d - 1126{,}5)^2 \\ + (343a + 49b + 7c + d - 1776{,}5)^2$$

$$\frac{d\Phi}{da} = 369510a + 57950b + 9318c + 1550d - 1921460{,}8$$

$$\frac{d\Phi}{db} = 57950a + 9318b + 1550c + 270d - 301686{,}8$$

$$\frac{d\Phi}{dc} = 9318a + 1550b + 270c + 50d - 48588{,}4$$

$$\frac{d\Phi}{dd} = 1550a + 270b + 50c + 10d - 8101{,}4$$

$$\begin{cases} a = 4{,}7583 \\ b = 4{,}8750 \\ c = -17{,}7333 \\ d = 29{,}6400 \end{cases}$$

Полученная кубическая зависимость

$$P_2(x) = 4{,}7583x^3 + 4{,}875x^2 - 17{,}7333x + 29{,}64$$

Найдем среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} (148{,}8 - 4{,}7583 \times 27 - 4{,}875 \times 9 + 17{,}7333 \times 3 - 29{,}64)^2 + \\ +(341{,}2 - 4{,}7583 \times 64 - 4{,}875 \times 16 + 17{,}7333 \times 4 - 29{,}64)^2 + \\ +(657{,}7 - 4{,}7583 \times 125 - 4{,}875 \times 25 + 17{,}7333 \times 5 - 29{,}64)^2 + \\ +(1126{,}5 - 4{,}7583 \times 216 - 4{,}875 \times 36 + 17{,}7333 \times 6 - 29{,}64)^2 + \\ +(1776{,}5 - 4{,}7583 \times 343 - 4{,}875 \times 49 + 17{,}7333 \times 7 - 29{,}64)^2 \end{bmatrix}} \\ = 0{,}0374$$

Полученные среднеквадратичные отклонения:

$$\sigma_1 = 127{,}8459$$

$$\sigma_2 = 8{,}0752$$

$$\sigma_3 = 0{,}0374$$

Так как среднеквадратичное отклонение кубического приближения наименьшее, следовательно, зависимость – кубическая.

8. (а) Методом неопределённых коэффициентов составить формулу для вычисления указанной производной по значениям функции в указанных узлах. (б) Раскладывая $y(x_i)$ в ряд Тейлора, определить порядок p погрешности $O(h^p)$ полученной формулы.

$$y''(x_1) = c_0 y(x_0) + c_1 y(x_1) + c_2 y(x_2) + c_3 y(x_3) + O(h^p).$$

$$x_0 \underbrace{\qquad\qquad}_{2h} x_1 \underbrace{\qquad\qquad}_{h} x_2 \underbrace{\qquad\qquad}_{h} x_3$$

Решение.

Требуется найти следующее приближение

$$y^{``}(x_1) = c_0 y(x_0) + c_1 y(x_1) + c_2 y(x_2) + c_3 y(x_3) + O(h^p)$$

Перепишем в сокращенном виде:

$$y_1^{``} = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + O(h^p)$$

Используем следующие многочлены:

$$y = 1, y = x - x_0, y = (x - x_0)^2, y = (x - x_0)^3$$

Вычислим их производные:

y(x)	$(x-x_0)^0 = 1$	$(x-x_0)^1$	$(x-x_0)^2$	$(x-x_0)^3$
y`(x)	0	1	$2(x-x_0)$	$3(x-x_0)^2$
y``(x)	0	0	2	$6(x-x_0)$

Подставляя полученные вторые производные в требуемое приближение, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_0(x_0 - x_0) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0) + c_3(x_3 - x_0) = 0 \\ c_0(x_0 - x_0)^2 + c_1(x_1 - x_0)^2 + c_2(x_2 - x_0)^2 + c_3(x_3 - x_0)^2 = 2 \\ c_0(x_0 - x_0)^3 + c_1(x_1 - x_0)^3 + c_2(x_2 - x_0)^3 + c_3(x_3 - x_0)^3 = 6(x_1 - x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2hc_1 + 3hc_2 + 4hc_3 = 0 \\ 4h^2c_1 + 9h^2c_2 + 16h^2c_3 = 2 \\ 8h^3c_1 + 27h^3c_2 + 64h^3c_3 = 12h \end{cases}$$

Решая полученную систему, получаем:

$$c_0 = \frac{1}{4h^2}, c_1 = -\frac{1}{2h^2}, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{4h^2}$$

Подставляя эти значения получаем:

$$y_1'' = \frac{1}{4h^2}y_0 - \frac{1}{2h^2}y_1 + 0y_2 + \frac{1}{4h^2}y_3 + O(h^p)$$

$$y_1'' = \frac{1}{4h^2}(y_0 - 2y_1 + 0y_2 + y_3) + O(h^p)$$

Остается определить порядок погрешности $O(h^p)$

Для этого разложим y_i в ряд Тейлора в окрестности точки x_1 до h^4 (предположительно)

$$y_0 = y_1 - 2hy_1' + 2h^2y_1'' - \frac{8h^3}{6}y_1''' + \frac{16h^4}{24}y_1''''$$

$$y_1 = y_1$$

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2}y_1'' + \frac{h^3}{6}y_1''' + \frac{h^4}{24}y_1''''$$

$$y_3 = y_1 + 2hy_1' + 2h^2y_1'' + \frac{8h^3}{6}y_1''' + \frac{16h^4}{24}y_1''''$$

Подставим полученные значения в найденную формулу для второй производной:

$$y_1'' - \frac{1}{4h^2}(y_0 - 2y_1 + 0y_2 + y_3) =$$

$$y_1'' - \frac{1}{4h^2}(y_1 - 2y_1 + y_1) - \frac{1}{4h^2}\left(-2hy_1' + 2hy_1'\right) - \frac{1}{4h^2}\left(2h^2y_1'' + 2h^2y_1''\right) - \frac{1}{4h^2}\left(-\frac{8h^3}{6}y_1''' + \frac{8h^3}{6}y_1'''\right) - \frac{1}{4h^2}\left(\frac{16h^4}{24}y_1'''' + \frac{16h^4}{24}y_1''''\right) =$$

$$y_1'' - \frac{4h^2}{4h^2}y_1'' - \frac{\frac{32h^4}{24}}{4h^2}y_1'''' = -\frac{h^2}{3}y_1''''$$

Полученный порядок погрешности равен 2

Итоговая формула

$$y_1'' = \frac{1}{4h^2}(y_0 - 2y_1 + 0y_2 + y_3) + O(h^2)$$