ЛР 4. Дифференцирование функции, заданной таблично.

Вариант 8

$$8.\ f(t) = \cos 3x, \qquad \xi = 0{,}8;$$

① Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке ξ (используя любую формулу численного дифференцирования) с точностью 10^{-3}, 10^{-6}. Пользоваться точным значением производной в качестве эталона запрещено[3]. Выберите функцию $f(t)$ и точку ξ, номер которых совпадает с номером вашего компьютера:

Функция вычисления производной, через две формулы (правая разность и центральная разность):

```
function [ dy0_1, dy0_2 ] = proiz( y, x0, epsilon )
h_1=epsilon;
dy0_1=(y(x0+h_1)-y(x0))/h_1;
dy0_2=(y(x0+h_1)-y(x0-h_1))/(2*h_1);
end
```

Вычислим значение функции в заданной точке по двум, заданным погрешностям:

```
y=@(x) cos(3*x);
h1=6*10^(-4)
h2=6.67*10^(-7)
x0=0.8;
dy1_h1=proiz(y,x0,h1)
dy1_h2=proiz(y,x0,h2)
```

Значение производной в точке 0.8 с точностями 10^{-3} и 10^{-6} соответственно

Для формулы центральной разности

$$\varepsilon \leq \frac{M_3}{3} h^2$$

$$h \leq \sqrt{\frac{3\varepsilon}{M_3}} = \sqrt{\frac{3 * 10^{-3}}{9}} = 0.018 = 1.8 * 10^{-2}$$

$$h \leq \sqrt{\frac{3\varepsilon}{M_3}} = \sqrt{\frac{3 * 10^{-6}}{9}} = 0.00058 = 5.8 * 10^{-4}$$

Для формулы правой разницы

$$\varepsilon \le \frac{M_2}{2} h$$

$$h \le \frac{2\varepsilon}{M_2} = \frac{2 * 10^{-3}}{3} = 0.0006 = 6 * 10^{-4}$$

$$h \le \frac{2\varepsilon}{M_2} = \frac{2 * 10^{-6}}{3} = 6.67 * 10^{-7}$$

```
dy1_h1 =

 -2.024397484908606


dy1_h2 =

 -2.026387328133884
```

② Выберите функцию $f(x)$ и точку ξ, как указано выше. Сравните погрешности у формул с разными порядками погрешностей (например, $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ и $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$) для последовательности убывающих шагов (например, $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$). С какими скоростями убывают погрешности для каждой формулы? Дайте теоретическую оценку и подтвердите ответ экспериментом[4].

Сравним погрешности у формулы правой разности и у формулы центральной разности:

```
i=[1:1:60];
h=2.^(-i);
etalon=proiz(y,x0,10^(-10))
for j=1:1:length(h)
[dy1(j),dy2(j)]=proiz(y,x0,h(j));
delta1(j)=abs(dy1(j)-etalon);
delta2(j)=abs(dy2(j)-etalon);
end
```

Значения производных для первых 10 уменьшений шага:

```
dy1 =

   0.022922822682212   -1.050283771720385   -1.569282916520799   -1.807751918765909   -1.919802437490525


 -1.973809034495638   -2.000281214118147   -2.013381311027672   -2.019896965668636   -2.023146145472424
```

```
dy2 =

  -1.347542272470804  -1.841687539329216  -1.979228859559804  -2.014537019140205  -2.023422501773426

 -2.025647537163401  -2.026204025245434  -2.026343161596060  -2.026377946579373  -2.026386642881221
```

Их погрешность:

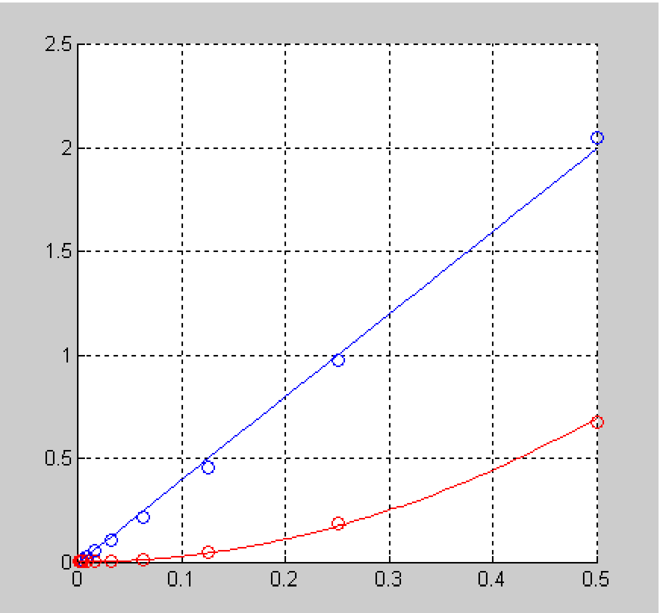
```
delta1 =

   2.049311879235269   0.976105284832673   0.457106140032258   0.218637137787148   0.106586619062533

  0.052580022057420   0.026107842434911   0.013007745525385   0.006492090884421   0.003242911080633
```

```
delta2 =

   0.678846784082253   0.184701517223842   0.047160196993253   0.011852037412853   0.002966554779631

 0.000741519389656   0.000185031307623   0.000045894956997   0.000011109973684   0.000002413671837
```

Скорость убывания погрешности у первой формулы должна быть линейной, а у второй формулы квадратичной.

У первой формулы значение погрешности уменьшается примерно в 2 раза при уменьшении шага в 2 раза.

У второй формулы значение погрешности уменьшается примерно в 4 раза при уменьшении шага в 2 раза.



Эксперимент подтверждает скорость убывания погрешности.

③ Неустойчивость численного дифференцирования. Выберите функцию $f(x)$ и точку ξ, как указано выше. Попробуйте применить формулу $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ для стремящейся к нулю последовательности $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$). Будет ли погрешность $\varepsilon = \left| f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right|$ монотонно убывать при уменьшении h? Сравните практический и теоретический результаты.

Теоретически погрешность должна монотонно убывать.

```
Columns 12 through 22

 0.000809820968357   0.000404622654173   0.000202057455795   0.000100783347193   0.000050148415653

0.000024831488304   0.000012173170148   0.000005844018347   0.000002679500653   0.000001097300014   0.000000306141487

Columns 23 through 33

 0.000000089670607   0.000000287110993   0.000000385831186   0.000000430534669   0.000000452886411
```

Эксперимент показывает, что она убывает до 23 шага, и потом начинает медленно возрастать до 52 шага, а когда значащие цифры выходят за пределы мантиссы приращение округляется до 0 и производная становится равна 0.

Из-за влияния неустранимой погрешности входных данных в какой-то момент общая погрешность начинает расти.