ПИН-21, Казаков Максим Сергеевич, 22.04.2023 13:26

БИЛЕТ КОЛЛОКВИУМА № 61 ПО КУРСУ «Численные методы», 2023 г.

1. (*3 балла*) Получить его двоичное представление в памями компьютера числа 3242,625.
2. (*3 балла*) Была измерена погрешность ε_i в методе простых итераций при нескольких последовательных итерациях. Получены результаты

ε_i	ε_{i+1}	ε_{i+2}
0,3	0,04	0,0015

. Сделать предположение о скорости убывания погрешности (линейная или квадратичная). Ответ обосновать.

3. (*3 балла*) Найти с помощью кусочно-линейной интерполяции приближённое значение функции для $x = 2{,}3$, указанного в таблице

x	0	2	5
y	-2	2	3

.

4. (*3 балла*) Построить многочлен многочлен $T_6(x)$.
5. (*3 балла*) Определить порядок погрешности формулы $y''(x) \approx \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}$.

Билет №61

① Получить двоичное представление в памяти компьютера числа 3242,625

$$3242{,}625_{10} = 110010101010{,}101_2$$

$$\begin{array}{l} 3242 \mid 2 \\ 3242 \quad 1621 \mid 2 \\ \quad 0 \quad 1620 \quad 810 \mid 2 \\ \quad\quad 1 \quad 810 \quad 405 \mid 2 \\ \quad\quad\quad 0 \quad 404 \quad 202 \mid 2 \\ \quad\quad\quad\quad 1 \quad 202 \quad 101 \mid 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 100 \quad 50 \mid 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \quad 50 \quad 25 \mid 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 24 \quad 12 \mid 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \quad 12 \quad 6 \mid 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 6 \quad 3 \mid 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \end{array}$$

$0{,}625 \cdot 2 = 1{,}25$

$0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$

$0{,}5 \cdot 2 = 1$

$$(-1)^s(2^{e-1023})(1{,}f) = (-1)^0 \cdot (2^{1034-1023})(1{,}100101010101101) =$$

$$= 2^{11} \cdot 1{,}100101010101101$$

②

ε_i	ε_{i+1}	ε_{i+2}
0,3	0,04	0,0015

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1}} = \frac{0{,}3}{0{,}04} = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_{i+2}} = \frac{0{,}04}{0{,}0015} = \frac{400}{15} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$$

$27 \approx \frac{(7{,}5)^2}{2}$

$27 \approx 28$

Сначала погрешность уменьшилась в 7,5 раз, а при следующей итерации уменьшилась в ≈ 27 раз, можно сделать вывод что погрешность убывает <u>квадратично</u>.

③

x	0	2	5
y	-2	2	3

$$f(x) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h}(x - x_i), \text{ где } h = x_{i+1} - x_i$$

Так как точка $x = 2{,}3$ заключена между табличными значениями $x = 2$ и $x = 5$, возьмем их в качестве узлов интерполяции:

$$f(2{,}3) \approx f(2) + \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2}(2{,}3 - 2)$$

$$f(2{,}3) \approx 2 + \frac{3-2}{3} \cdot 0{,}3$$

$$f(2{,}3) \approx 2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}3; \quad f(2{,}3) \approx 2 + 0{,}1 \approx 2{,}1$$

$$\underline{f(2{,}3) \approx 2{,}1}$$

④ Построить многочлен $T_6(x)$

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 =$

$= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

(5) $$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

Получим разложение в ряд Тейлора:

$$y(x-h) = y(x) - h\cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) - \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x)$$

$$y(x) = y(x) + 0 \ldots$$

$$y(x+h) = y(x) + h\cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x)$$

Определим порядок погрешности:

$$y''(x) - \frac{1}{h^2}\left(\cancel{y(x) - 2y(x) + y(x)}\right) - \frac{1}{h^2}\left(\cancel{h\cdot y'(x) - h\cdot y'(x)}\right) - \frac{1}{h^2}\left(\frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^2}{2} y''(x)\right)$$

$$- \frac{1}{h^2}\left(\cancel{\frac{h^3}{6} y'''(x) - \frac{h^3}{6} y'''(x)}\right) - \frac{1}{h^2}\left(\frac{h^4}{24} y^{IV}(x) + \frac{h^4}{24} y^{IV}\right) =$$

$$= y''(x) - \frac{1}{h^2}\cdot h^2 \cdot y''(x) - \frac{1}{h^2}\cdot \frac{h^4}{12} y^{IV}(x) = y''(x) - y''(x) - \frac{h^2}{12} y^{IV}(x)$$

$$|\varepsilon| \le \frac{1}{h^2}\left(\frac{h^4}{24} M_4 + \frac{h^4}{24} M_4\right)$$

$$|\varepsilon| \le \frac{h^2}{12} M_4 = O(h^2)$$

Получим второй порядок погрешности