Лабораторная работа №3

ЛР 3. Интерполяция функций. Полиномы Лагранжа, Ньютона.

Вариант 8

$$8.\ f(t) = \cos\frac{\pi t}{3}, \qquad t_i = \frac{i+1}{5},\ i = 0, 1, 2, 3, 4;$$

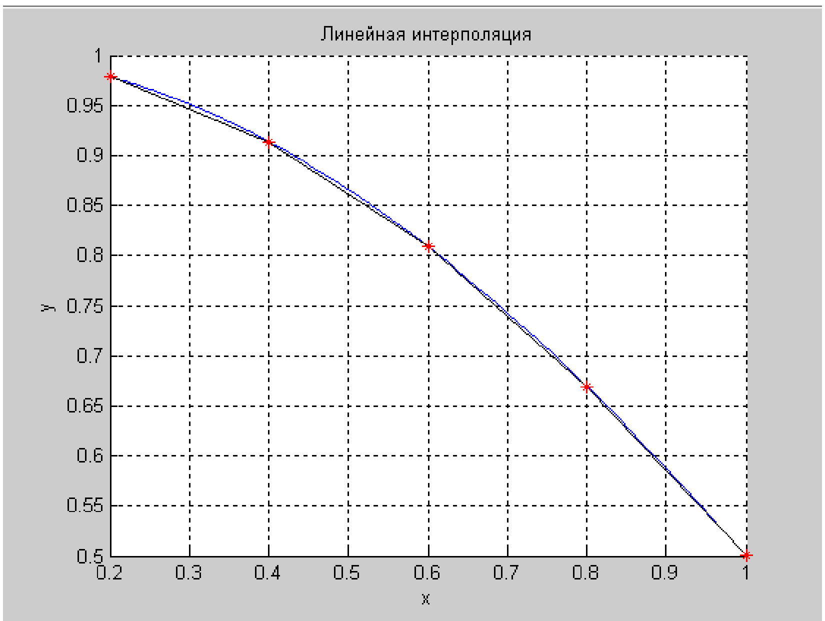
① Используя линейную интерполяцию, найдите значения функции в точках: t_i и сравните с реальным значением $f(t)$ в этих точках. Постройте графики $f(t)$ и ломаной, проходящей через пять заданных точек. Отметьте, насколько сильно они различаются в разных частях графика. Чем это обусловлено?

Расчёт линейной интерполяции по формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Полученные значения и их погрешность:

```
f0
    0.9781     0.8936     0.7913     0.6545     0.5000

df
         0     0.0200     0.0177     0.0146          0
```



Первая и последняя точка совпадают с узлами линейной интерполяции, поэтому их погрешность равна нулю. Остальные точки вычислены приближенно.

① Постройте по заданным пяти точкам интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и, используя его, найдите значения функции в точках t_i, Сравните результаты со значениями, полученными при линейной интерполяции, и значениями $f(t)$ в этих точках. Постройте графики $f(t)$ и интерполяционного многочлена. Какую максимальную ошибку мы допускаем при аппроксимации $f(t)$ данным полиномом? Сравните экспериментальную погрешность с теоретической.

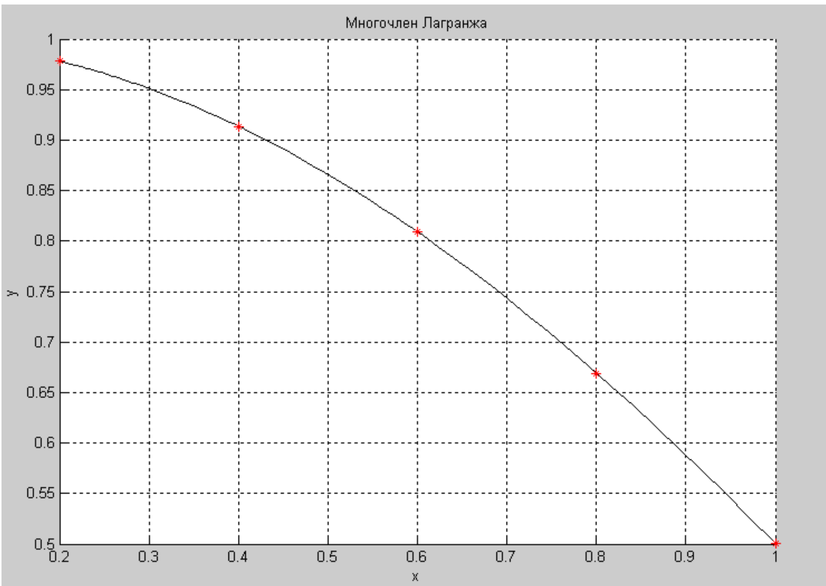
Нахождение интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{L_n^{(k)}(x)}{L_n^{(k)}(x_k)}$$

где $L_n^{(k)}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$ – полиномы n-ой степени специального вида.

Сравнение полученных значений при линейной интерполяции, значений $f(t)$ и интерполяцией многочленом Лагранжа соответственно:

```
f0
    0.9781    0.8936    0.7913    0.6545    0.5000

P0
    0.9781    0.9135    0.8090    0.6691    0.5000

cosin
    0.9781    0.9135    0.8090    0.6691    0.5000
```



Вычислим теоретическую погрешность:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x^`)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$R_n(x) \le \frac{|M_n|}{(n+1)!}\left|(x-\frac{1}{5})(x-\frac{2}{5})(x-\frac{3}{5})(x-\frac{4}{5})(x-1)\right|$$

Погрешность при вычислении узловых точек будет равна 0, как и оказалось в эксперименте. При вычислении промежуточных точек максимальная погрешность равна:

$$M_5 = \max\left(\frac{\pi^5}{243}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right) = \left|-\frac{\pi^5}{243}\right| = \frac{\pi^5}{243}$$

$$R_4(x) \le \frac{\frac{\pi^5}{243}}{5!}\frac{9}{20000} = 4.722 * 10^{-6}$$

Экспериментальная погрешность промежуточных точек:

```
R =

  1.0e-005 *

    0.8750    0.3750    0.3750    0.8750
```

② В программе сделать возможность строить многочлен Лагранжа или Ньютона для произвольного набора точек $t = t_0, t_1, \ldots, t_n$.

③ При вычислении многочлена стараться заменить циклы матричными операциями (см. первое практическое занятие).

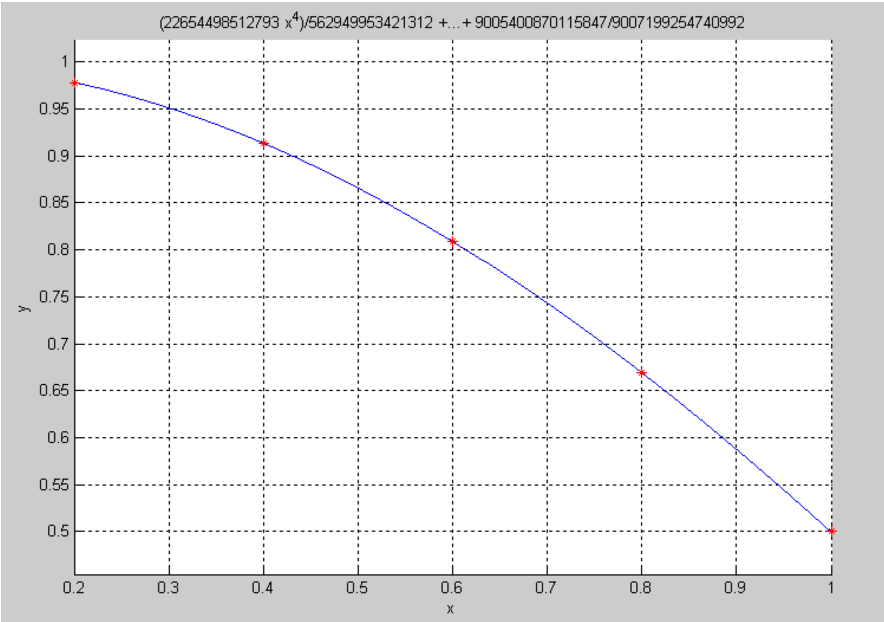
① Найдите значение интерполяционного полинома при $t = 2$. Почему оно так сильно отличается от значения $f(t)$ в этой точке?

Погрешность при вычислении значения интерполяционного полинома в точках -2 и -10 соответственно:

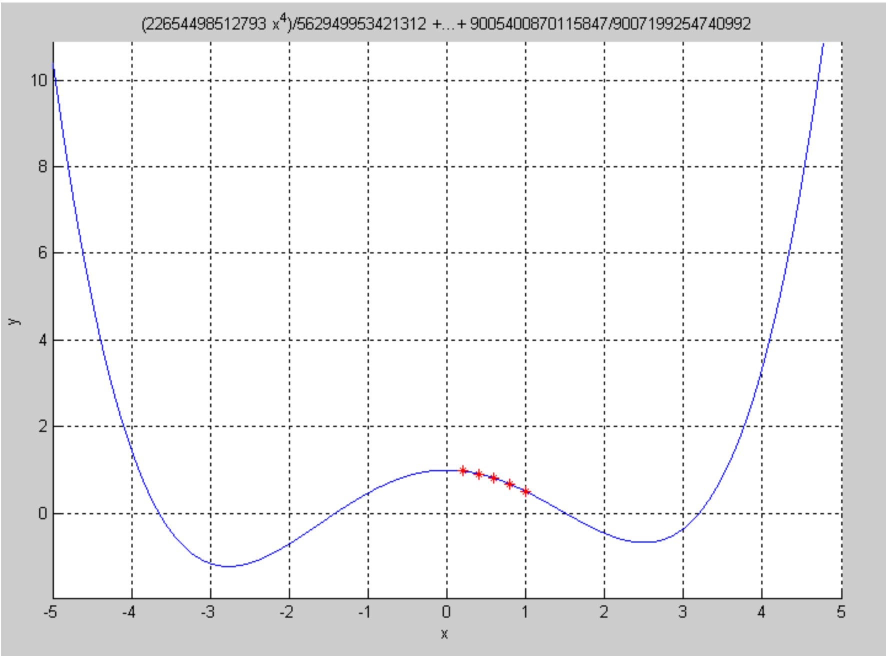
```
df =

   -0.0378


df =

 -333.5175
```

Точка -10 удалена от табличных узлов и поэтому полином не приближает её значение.

Многочлен в заданных точках:



Многочлен в удаленных точках:



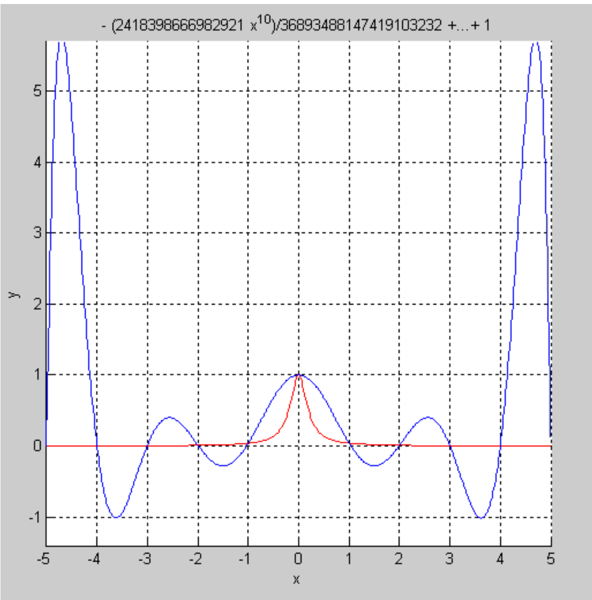
② Задайте функцию Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на отрезке $[-5, 5]$ в десяти равноотстоящих точках. Сравните значения функции и интерполяционного полинома при $x = 4,5$. Постройте графики функции и полинома на заданном отрезке и объясните поведение интерполяционного полинома. Посмотрите, что будет происходить при постепенном увеличении числа узлов интерполяции и подумайте, как можно избавиться от получившегося эффекта.

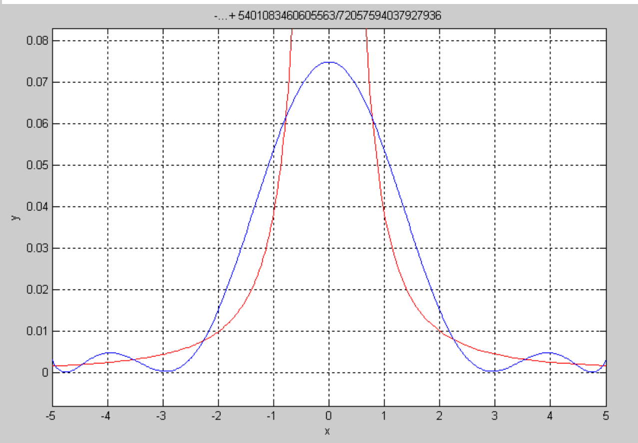
③ Для приближения функции Рунге используйте Чебышёвские узлы. Постройте графики функции и многочлена.

Погрешность в точке x=4,5 при приближении полиномом и чебышёвскими узлами соответственно:

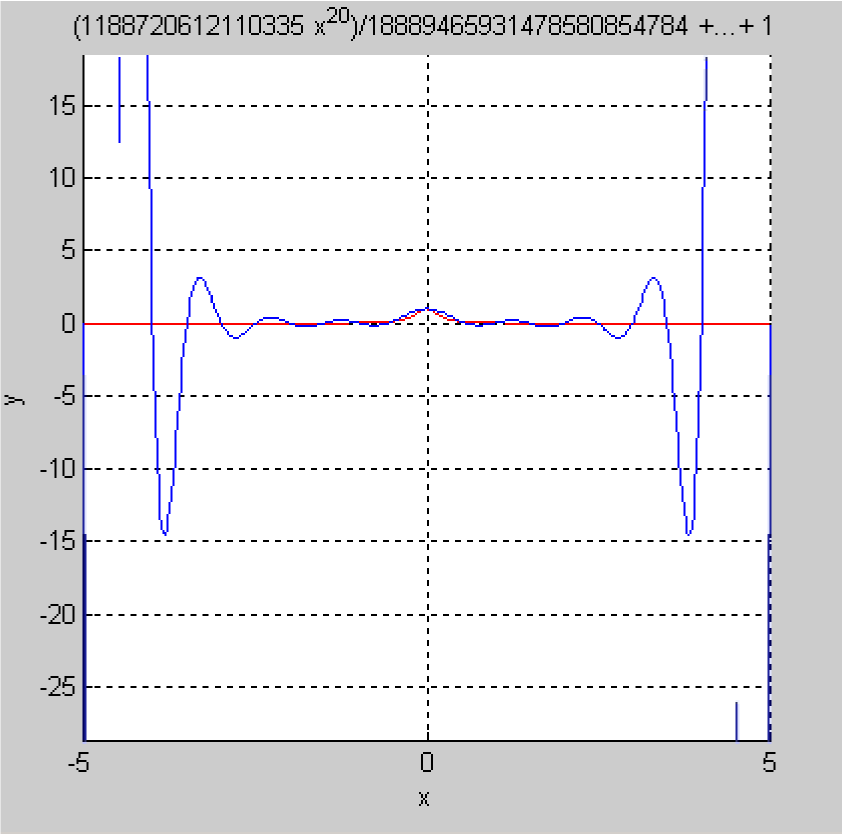
```
df =

   -4.6477


df =

  3.6609e-004
```

Полином и чебышёвские узлы при 10 узлах:





Полином при 20 узлах:



При большом количестве узлов при приближении интерполяции может не быть сходимости, так как ошибка интерполяции с ростом n бесконечно возрастает. Также при больших n интерполяция неустойчива.

При приближении чебышёвскими узлами этих проблем нет.