ЛР 2. Методы дихотомии, Ньютона, простых итераций.

Вариант 8

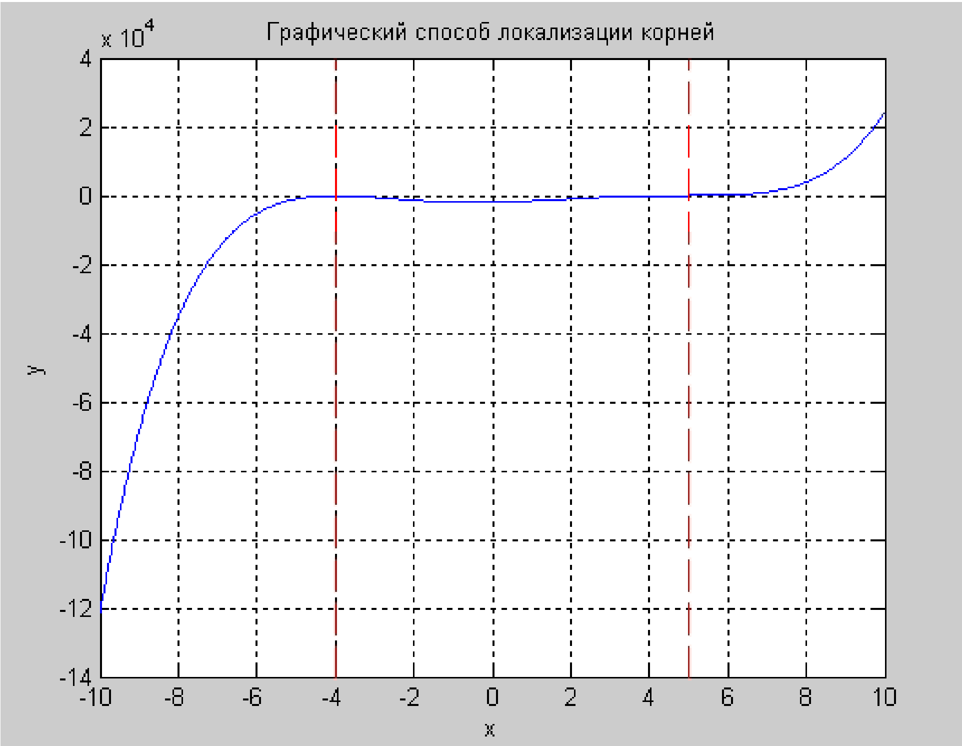
$$8.\ f(x) = x^5 - 7x^4 - 29x^3 + 235x^2 + 200x - 2000,$$

① Напишите файл-функцию `f.m` и постройте график функции на отрезке $[-10; 10]$, включив командой `grid on` отображение линий сетки. Выделите отрезки, содержащие нули функции (графический способ это один из методов локализации корней). Очевидно, функция имеет корни одинарной и двойной кратности. Запишите вектор `p`, содержащий коэффициенты полинома, и найдите его корни, выполнив команду `roots(p)`.

Найденные корни полинома:

```
ans =

  -4.0000 + 0.0000i
  -4.0000 - 0.0000i
   5.0000 + 0.0000i
   5.0000 - 0.0000i
   5.0000
```

График функции с указанием корней:



① Напишите программу, реализующую нахождение корня одинарной кратности методом деления отрезка пополам. Обратите внимание, что метод дихотомии предполагает, что значения функции на концах отрезка различаются по знаку. Выведите на экран число итераций.

```
function [x, iter] = dih(f, a, b, tol)
iter = 0;
while (b - a) / 2 > tol
    c = (a + b) / 2;
    iter = iter + 1;
    if f(c) == 0
        break
    elseif f(a) * f(c) < 0
        b = c;
    else
        a = c;
    end
end

x = (a + b) / 2;
end
```

Для входных данных:

```
a = 2;
b = 6;
tol = 1e-6;
```

Результат:

```
Корень: 5.000000
Число итераций: 2
```

① Напишите программу нахождения решений уравнения $f(x) = 0$ методом Ньютона и используйте её для поиска всех корней полинома. Выведите на экран число итераций.

② Для кратного корня использовать модифицированный метод Ньютона. Выведите на экран число итераций.

```
function [root, iter] = newton(f, df, x0, tol, n)
x = x0;
iter = 0;
while abs(f(x)) > tol
    x = x - n*f(x)/df(x);
    iter = iter + 1;
end
root = x;
end
```

Начальные приближения:

```
x0 = [-10, -5, 0, 4.5, 8];
tol = 1e-6;
```

Корни, найденные обычным методом Ньютона:

```
Найденные корни:
   -4.0000   -4.0000    5.0023    4.9984    5.0018

Число итераций:
    20    16    21    14    19
```

Корни, найденные модифицированным методом Ньютона:

```
Найденные корни:
   -4.0000   -4.0000    5.0000    5.0000    5.0000

Число итераций:
     5     3     6     2     3
```

① Найдем методом простых итераций корни уравнения $x^2 - a = 0$ (квадратный корень из числа a). Приведем уравнение к виду, удобному для использования метода: $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + x\right)$. Можно убедиться, что правая часть уравнения удовлетворяет условию сходимости метода (в отличие от таких представлений как: $x = x^2 + x - a$, $x = \frac{a}{x}$). Напишите программу вычисления квадратного корня с машинной точностью.

```
function [x, iter] = sqrt_new(a)
x0 = a/2;
eps = 1e-6;
iter = 0;
while abs(x0^2 - a) > eps
    x0 = 1/2*(a/x0 + x0);
    iter = iter + 1;
end
x = x0;
end
```

Вычислим корень из 2:

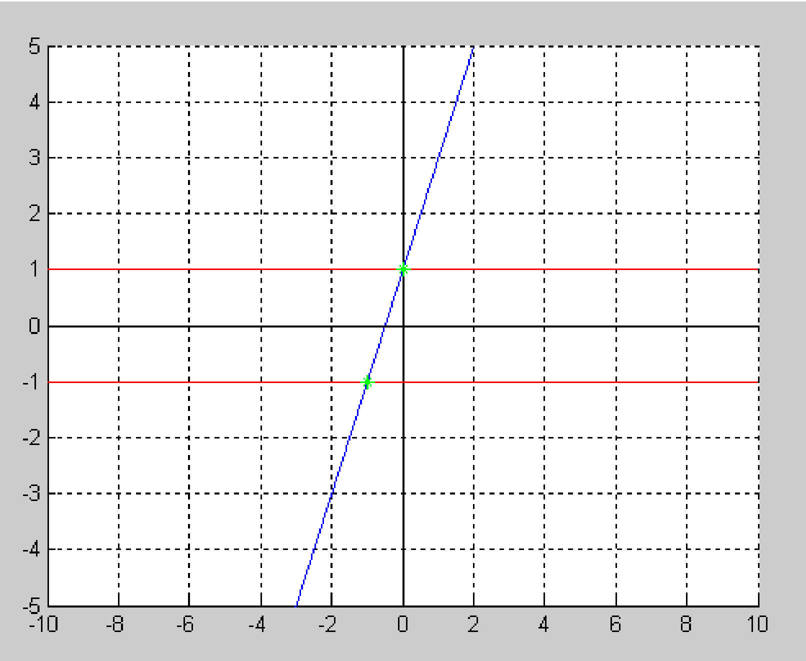
```
x =

    1.4142


iter =

     4
```

② Исследовать область сходимости представления $x = x^2 + x - a$. Произвести расчёт в найденной области и за её пределами.

$$x = x^2 + x - a,\ \varphi(x) = x^2 + x - a, \varphi^{`}(x) = 2x + 1$$

$$|\varphi^{`}(x)| < 1, |2x + 1| < 1, \left|x + \frac{1}{2}\right| < 1$$

Только для $x \in\ (-1, 0)$ корень будет найден методом простых итераций.



Для начального приближения:

```
a = 0.9;
x0 = -0.5;
```

Получаем:

```
x =

   -0.9492


iter =

    56
```

Если ввести начальное приближение не из промежутка (-1, 0) то решение будет расходиться:

```
x0 =

   Inf


x0 =

   Inf


x0 =

   Inf
```

① В MATLAB для решения уравнений вида $f(x) = 0$ есть функция **fzero**, в качестве параметров которой передаётся имя файл-функции и начальное приближение корня (или отрезок его содержащий). Обратите внимание, что **fzero** так же как и метод дихотомии требует, чтобы при переходе через корень функция меняла знак (например, с её помощью не удастся найти нули функции, $f(x) = \sin x + 1$, корни полинома двойной кратности и т.д.)

```
x0 = fzero(@(x) f(x), [2, 6])
```

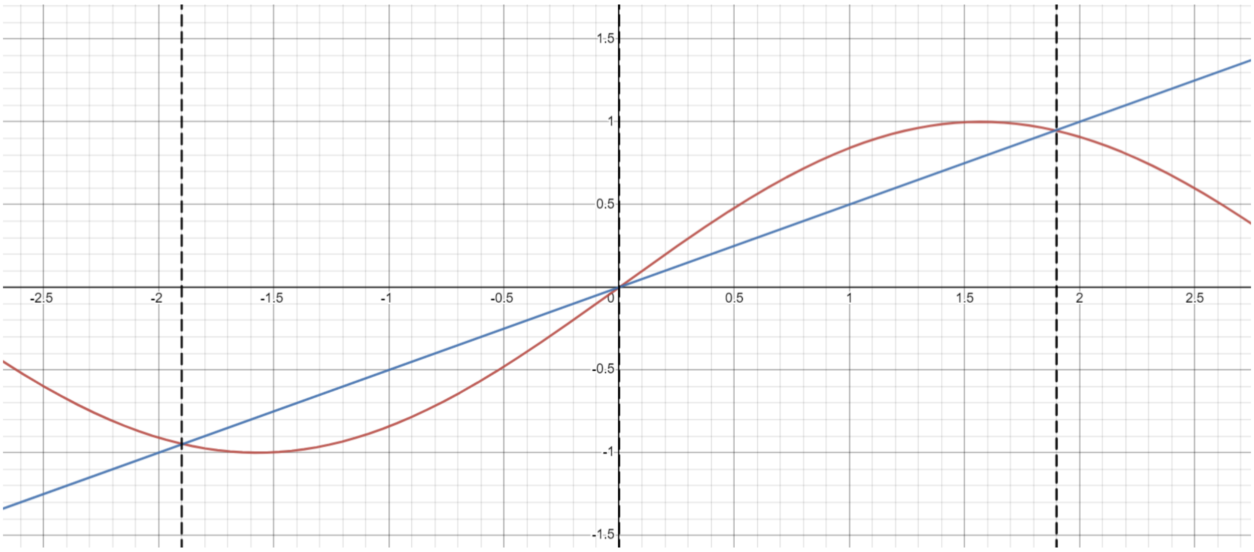
```
x0 =

   5.0000
```

③ Сделайте предположения о том, где находятся корни уравнения $\sin x = x/2$ и найдите их, используя все изученные методы.

Предположительно корни уравнения $\sin(x) = \frac{x}{2}$ лежат на отрезке $[-\pi; \pi]$

Так как функция $\sin(x)$ ограничена сверху значением $y = 1$ и снизу значением $y = -1$, а функция $\frac{x}{2}$ монотонно возрастает и при $x = \pi$ её значение уже превышает $y = 1$, а при $x < -\pi$ её значение всегда меньше $y = -1$

Графический способ локализации корней:



С помощью метода дихотомии найдем корни:

```
f = @(x) sin(x)-x./2;
a = -3;
b = 0;
tol = 1e-6;
[x, iter] = dih(f, a, b, tol);
fprintf('Корень: %f\nЧисло итераций: %d\n', x, iter);
```

Полученные значения корней:

```
Корень: -1.895494
Число итераций: 21
Корень: 1.895494
Число итераций: 21
```

```
Корень: -0.000000
Число итераций: 20
Корень: 0.000000
Число итераций: 1
```

(если задать симметричный интервал, то находит за 1 итерацию)

Найдем корни с помощью метода Ньютона:

Зададим начальные приближения $x_0 = [-3; 0.1; 3]$

```
Найденные корни:
   -1.8955    0.0000    1.8955

Число итераций:
     4     2     4
```

Найдем корни с помощью функции $fzero()$:

```
roots = zeros(1,3);
roots(1)  = fzero(@(x) f(x), [-3, -1]);
roots(2)  = fzero(@(x) f(x), [-1, 1]);
roots(3)  = fzero(@(x) f(x), [1, 3]);
disp(roots);
```

```
roots =

   -1.8955         0    1.8955
```