第一章　域

1.1　域的定义

1.1.1　域

定义 1.1.1: 域

设 F 是一个集合，如果存在两个运算 $+: F\times F\to F$ 和 $\cdot: F\times F\to F$，分别称为加法和乘法，并且满足：

①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_F\in F$，称为零元，$\forall x\in F, x+0_F=0_F+x=x$

②（加法逆存在）$\forall x\in F, \exists(-x)\in F, \text{s.t.} x+(-x)=(-x)+x=0_F$，$(-x)$ 称为 x 的加法逆元

③（加法交换律）$\forall x,y\in F, x+y=y+x$

④（加法结合律）$\forall x,y,z\in F, (x+y)+z=x+(y+z)$

⑤（乘法单位元存在）存在一个元素 $1_F\in F, 1_F\neq 0_F$，称为一元，$\forall x\in F, x\cdot 1_F=1_F\cdot x=x$

⑥（乘法逆存在）$\forall x\in F-0_F, \exists x^{-1}\in F, \text{s.t. } x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$，$x^{-1}$ 称为 x 的乘法逆元

⑦（乘法交换律）$\forall x,y\in F, x\cdot y=y\cdot x$

⑧（乘法结合律）$\forall x,y,z\in F, (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

⑨（乘法分配律）$\forall x,y,z\in F, x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

1.1.2　域的性质

1.

命题 1.1.1. 加法和乘法的单位元是唯一的。

证明： 先考虑加法的单位元。假设命题不成立，那么我们不妨假设 $0_1, 0_2$ 都是 F 的零元,$0_1 \neq 0_2$

那么 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$，于是有 $0_1 = 0_2$，与假设矛盾。于是加法的单位元唯一。

同理可证，乘法的单位元也是唯一的。 □

2.

命题 1.1.2. *$\forall a$，加法的逆 $-a$ 是唯一的。*

如果还有 $a \neq 0$，那么乘法的逆 a^{-1} 也是唯一的。

证明： 先考虑加法逆，不妨假设命题不成立，那么 $\exists b, c, a + b = 0, a + c = 0, b \neq c$

于是，$b = b + 0 = b + (a + c) = (a + b) + c = 0 + c = c$，这与假设矛盾。于是加法逆唯一。

同理可证，乘法逆也是唯一的。 □

3. **证明：** $a \cdot 0 = 0$ □

证明： $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot a) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$

$\Rightarrow 0 = a \cdot 0$ □

立即有以下推论：

推论 1.1.1

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

证明： 假设 $a \neq 0$，那么 $b = a^-1 \cdot 0 = 0$，命题得证 □

4.

命题 1.1.3. $-a = (-1) \cdot a$

证明： $a + (-a) = 0 = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$

$\Rightarrow (-a) + a + (-a) = (-a) + a + (-1) \cdot a$

$\Rightarrow -a = (-1) \cdot a$ □

随后我们即可得出以下推论

推论 1.1.2

$(-1) \cdot (-x) = x$

证明： 我们只需证明：$(-1)(-1)=1$

因为 $(-1)(-1)+(-1)\cdot 1=0$

$\Rightarrow (-1)(-1)+(-1)=0 \Rightarrow (-1)(-1)=1$

那么，$(-1)(-x)=(-1)(-1)\cdot x=1\cdot x=x$ □

推论 1.1.3

$(-x)(-x)=x\cdot x$

证明： 运用前面的推论中的结果，$(-x)(-x)=x\cdot(-1)(-1)\cdot x=x\cdot 1\cdot x=x\cdot x$ □

1.2 域的同态

定义 1.2.1: 域的同态

F_1, F_2 是两个域，如果存在一个映射 $\varphi : F_1 \to F_2$，满足：

① $\varphi(0_{F_1})=0_{F_2}$

② $\varphi(1_{F_1})=1_{F_2}$

③ $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$

④ $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

值得注意的是，与我们之前了解到的线性空间同构不同，域的同态完全没有对映射的满射性、单射性作任何限制。但是，

以下定理证明，两个域如果同态，那么同态映射是一个单射

定理 1.2.1: 域同态的单射性

若 $\varphi : F_1 \to F_2$ 是 F_1 到 F_2 的同态，那么 φ 是单射

证明： 不妨假设命题不成立。于是，$\exists x_1 \neq x_2 \text{s.t. } \varphi(x_1)=\varphi(x_2)$

那么有：$\varphi(x_1-x_2)=\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=0_{F_2}$

因为我们已经假设了 $x_1 \neq x_2$，于是 $(x_1-x_2)^{-1}$ 存在。将上式乘以 $\varphi\left((x_1-x_2)^{-1}\right)$ 得：

$1_{F_2}=\varphi(1_{F_1})\varphi\left((x_1-x_2)^{-1}(x_1-x_2)\right)=\varphi\left((x_1-x_2)^{-1}\right)\varphi\left((x_1-x_2)\right)=0_{F_1}$

与 $0_{F_2}\neq 1_{F_2}$ 矛盾，于是命题得证。 □

在证明这一点后，我们可以类似地引入域的同构：

定义 1.2.2: 域的同构

设 $\varphi : F_1 \to F_2$ 是 F_1 到 F_2 的同态

如果 φ 还是个满射，那么我们称 φ 是一个同构；

特别地，如果有 $F_1 = F_2$，我们称 φ 是一个自同构。

并且引入自同构的不动域的概念：

定义 1.2.3: 自同构域的不动域

设 $\sigma : F \to F$ 是 F 的自同构，那么我们称集合

$\{x \in F | \sigma(x) = x\}$ 为 F 的不动域

“不动域”这一名称是合理的，因为利用域同构的定义容易证明不动域是一个域，而且是 F 的一个子域。

1.3 域的特征

1.3.1 域的特征的定义

定义 1.3.1: 域的特征

设 F 是一个域，定义以下映射 $N : \mathbb{N} \ni n \mapsto n_F \in F$，满足：

$N(0) = 0_F, N(n+1) = n_F + 1_F$

那么，如果 N 是一个单射，我们称 F 的特征为 0，记作 $\mathrm{Char}F = 0$；

否则，我们将满足 $N(p) = 0_F, p > 0$ 的最小正整数称为 F 的特征，记作 $\mathrm{Char}F = p$。

我们首先需要证明的是，任何一个域都是具有特征的，因为对于定义中的第二种情形，我们并不知道这样的 p 是否一定存在。

定理 1.3.1: 域特征的存在性

任何域 F 的特征 $\mathrm{Char}F$ 均存在

证明： 我们只需要证明第二种情形。

容易证明，$N(m+n) = N(m) + N(n)$。（仿照 Peano 公理下证明加法性质的方式即可）

于是，因为 N 不是单射，于是一定有 $a, b \in \mathbb{N}, a > b, N(a) = N(b)$

于是有 $N(a-b)=N(a)-N(b)=0_F$。

那么 $\{m|N(m)=0_F\}\neq\emptyset$，因此这样的最小整数 Char$F$ 存在 □

接下来考虑几个性质

1.3.2 域的特征的性质

命题 1.3.1. *设 F 是一个域，那么或者 $Char\ F=0$，或者 $Char\ F=p$ 是素数*

证明： 我们只需要证明当 $\text{Char}\ F=p>0$ 时，p 是素数

不妨假设命题不成立，那么一定有 $1<q<p,1<r<p,p=qr$

容易证明，$N(qr)=N(q)N(r)$。（仿照 Peano 公理下证明乘法性质的方式即可）

但是，因为 $N(qr)=0$，于是 $N(q)=0\vee N(r)=0$，这与定义中 p 是使 $N(x)=0$ 成立的最小正整数矛盾。

于是命题得证。 □

定理 1.3.2: 同态域的特征相等

设 $\varphi:E\to F$ 是域 E 到域 F 的同态

那么有：$\text{Char}\ E=\text{Char}\ F$

证明： 我们不妨假设结论不成立。

首先我们证明，不可能 $\text{Char}\ E=0,\text{Char}\ F=p,p$ 为素数。

此时，$\varphi\left(N_E(p)\right)=N_F(p)=0_F$，此处 N_E,N_F 分别是 N 在对应 E,F 的情况下的映射

那么按照同态的定义，一定有 $N_E(p)=0_E$，但是这与 Char E $=0$ 矛盾。

那么只需要考虑当 $\text{Char}\ E=p,\text{Char}\ F=q,p,q$ 为素数,$p\neq q$

那么，有 $\varphi\left(N_E(q)\right)=N_F(q)=0_F$

那么按照同态的定义，一定有 $N_E(q)=0_E$，这说明 $p\mid q$，这与 q 是素数矛盾。

所以假设不成立，命题得证。 □

1.4 域的扩张

1.4.1 域的扩张的定义

定义 1.4.1: 子域

设 E, F 是两个域，$E \subseteq F$

如果 $0_F, 1_F \in E$，并且 F 中的加法和乘法对 E 形成一个域，

那么我们称 E 是 F 的一个子域，并称 F 是 E 的一个域扩张，

记作 $F \backslash E$

如果 $E \backslash F$，$F \cong G$，那么我们也称：在同构意义下 $E \backslash G$。

此后我们所说的子域，默认指的是同构意义下的子域。

借助域的扩张的概念，我们可以证明一些比较简单的结论

命题 1.4.1. 域 F 如果有 $Char\ F = 0$，那么 $\mathbb{Q}$ 是它的子域；如果有 $Char\ F = p$，那么 F_p 是它的子域

证明: 如果 Char $F = 0$，那么 F 是无限集。因为 $0_F, 1_F \in F$，那么一定也有 $n_F \in F, n \in \mathbb{N}$。

那么，$-n_F \in F$；进一步地，一定有 $a \cdot b^{-1} \in F, a, b \in \{\pm n_F\}$。

那么，一定有 $F \backslash \mathbb{Q}$。

如果 Char $F = p$，p 是素数。那么，$\{0_F, \cdots, (p-1)_F\}$ 由映射 N 的性质一定是一个域。

那么，一定有 $F \backslash F_p$ □

1.4.2 有限扩张

从域的定义容易看出，F 也可以视为 E 上的一个线性空间。

定义 1.4.2: 域的扩张次数

如果 $F \backslash E$，那么我们记 $[F : E] := dim_E F$，并称 F 是 E 由 $[F : E]$ 次扩张得到的。

如果 $[F : E]$ 有限，我们称 F 是 E 的有限扩张，反之称它是无限扩张。

有限扩张的概念可以让我们立即得出以下结论

定理 1.4.1: 域的元素个数仅可能无限或者是 p^k

一个域的元素个数，或者是无限，或者是 p^k，其中 p 是一个素数，k 是正整数

证明： 事实上，我们只需要证明有限域 F 的个数只可能是 p^k

设 $\mathrm{Char}\ F = p$，那么一定有 $F\backslash F_p$

因为 F 是有限域，所以一定有 $[F : F_p] = d$ 有限，那么此时 $|F| = p^d$。因为 p 一定为素数，因此命题得证。 □

1.4.3 有限生成扩张

定义 1.4.3: 域的生成扩张

设 E, F 是两个域，$E\backslash F$，集合 $S \subseteq E$

那么我们定义包含 F, S 中全部元素的最小域，即

$$F(S) := \bigcap_{(F\cup S)\subseteq K, E\backslash K} K$$

称为在 F 上由 S 生成的 E 的子域

定义 1.4.4: 有限生成与无限生成

设 E, F 是两个域，$E\backslash F$

如果存在一个集合 $S \subseteq E, F(S) = E$，那么我们称 E 是 F 的有限生成扩张；

如果对于任意的有限集 $S \subseteq E, F(S) \neq E$，那么我们称 E 是 F 的无限生成扩张

显然有以下性质

命题 1.4.2. 有限扩张都是有限生成扩张

证明： 设 $E\backslash F, [E : F] = n < +\infty$。

那么 E 是 F 上的一个线性空间，我们取它的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

于是 $E = \mathrm{span}_F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$。由线性生成的性质，那么有

$E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$。于是命题得证。 □

值得注意的是，这个命题如果反过来则不成立，比如说：

例 1.4.1. $\mathbb{Q}(e)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的有限生成扩张，但是不是 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张

证明： 不妨假设命题不成立，那么有 $[\mathbb{Q}(e) : \mathbb{Q}] = n < +\infty$

那么，因为线性空间中，数量多于维数的一组向量一定线性相关，那么 $1, e, \cdots, e^n$ 线性相关

$\Rightarrow \exists a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}, a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$

但是，这与 e 是超越数矛盾。于是命题得证 $\square$

1.4.4 代数扩张

我们首先提出代数元的概念

定义 1.4.5: 代数元

设 $E\backslash F$ 是一个域扩张，$u \in E$ 如果满足：

$\exists p(x) \in F[x], p(u) = 0$，那么我们称 u 是 F 上的代数元

我们如下定义代数扩张

定义 1.4.6: 代数扩张和超越扩张

设 $E\backslash F$ 是一个域扩张

如果 $\forall u \in E$，u 是 F 的代数元，那么我们称 E 是 F 的代数扩张；

反之，如果 $\exists u \in E$，u 不是 F 的代数元，那么我们称 E 是 F 的超越扩张。

接下来我们考虑代数、有限、有限生成三种扩张之间的联系

1. 有限扩张都是代数扩张

定理 1.4.2: 有限扩张都是代数扩张

任何有限扩张都是代数扩张

证明： 设 E, F 是两个域，$[E:F] = n < +\infty$

取 $\forall \alpha \in E$，考虑集合 $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^n\}$

因为这个集合有 $n+1 > [E:F]$ 个元素，因此它一定线性相关；这代表着

$\exists a_0, \cdots, a_n$ 不全为 $0, a_0 + a_1\alpha + \cdots a_n\alpha^n = 0$

因此 α 是多项式 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in F[x]$ 的一个根

所以 α 是 F 的代数元，于是命题得证。 $\square$

2. 有限扩张的组合和拆分也是有限的

命题 1.4.3. 设 E, K, F 是三个域，$E\backslash K, K\backslash F$，并且 $E\backslash F$ 是有限扩张。

那么，$E\backslash K, K\backslash F$ 是有限扩张，并且有 $[E:F] = [E:K]\cdot[K:F]$

证明： 我们首先证明 $E\backslash K, K\backslash F$ 是有限扩张。

显然，$K\backslash F$ 一定是有限扩张，因为 K 是 E 在 F 上的线性子空间，而 $[E:F]$ 有限。

我们不妨假设 $E\backslash K$ 不是有限的，那么一定可以取一组无限基 $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$

考虑 F 上的线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e_{\alpha_i}, \alpha_i \in A$

我们可以断言：这个线性组合在 $\exists a_i \neq 0$ 时不为零，因为 $F \subseteq K$，所以这个线性组合也可以视为 K 上的，

而线性无关向量组的子向量组也是线性无关的；

但是，这是不可能的：因为我们知道 $[K:F]$ 有限，一个无限集不可能线性无关。所以 $[E:K]$ 一定有限。

接下来证明 $[E:F] = [E:K]\cdot[K:F]$

假设 $[E:K] = m, [K:F] = n$，取 E 在 K 上的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，$K$ 在 F 上的一组基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$

$\forall \eta \in E, \exists a_1, \cdots, a_m, \eta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m$

对系数作展开，有：

$\exists b_{ij}, \eta = (b_{11}\beta_1 + \cdots + b_{1n}\beta_n)\alpha_1 + \cdots + (b_{m1}\beta_1 + \cdots + b_{mn}\beta_n)\alpha_m$

$= \sum\limits_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} b_{ij}\alpha_i\beta_j$

$= \sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\right)\alpha_i$

令 $\eta = 0$，因为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 线性无关，一定有 $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j = 0$

但是，$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 线性无关，所以一定有 $b_{ij} = 0$。所以 $\{\alpha_i\beta_j\}$ 是 E 在 F 上的一组基

所以 $[E:F] = mn = [E:K]\cdot[K:F]$，命题得证 □

利用这个命题可以得出以下推论

推论 1.4.3: 素数次扩张不存在平凡子域

若 $E\backslash F$ 是一个有限扩张，$[E:F] = p$ 为素数

那么 E, F 没有非平凡的中间域，即 $E\backslash K\backslash F \Leftrightarrow E = K \vee F = K$

证明： 这是显然的，因为素数的因子仅有 1 和自身；而 $[K:F] = 1$ 当且仅当 K, F 在同构意义下相等。 □

推论 1.4.4: 单代数扩张一定是有限扩张

设 E, F 是两个域，$E = F(u), u$ 是 F 的代数元

那么 $E = F(u)$ 是一个有限扩张，并且 $[E : F] = \deg f(x)$，其中 $f(x)$ 是 u 的极小多项

证明: 取 u 的极小多项式 $f(x) \in F[x]$，设 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k, a_n = 1$

因为 $f(u) = 0$，所以有 $x^n = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_k x^k$

于是，任意的 α^k 均可以由 $1, \alpha, \cdot, \alpha^{n-1}$ 线性表出，这表示

$E = F(u) = \{a_0 + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}\}$

于是 E 中任意一个元素可由 $\{1, \cdots, u^{n-1}\}$ 线性表出。但是 u 的极小多项式的次数为 n，所以这个集合一定线性无关，也就是它是 E 的基

所以 $[E : F] = n < +\infty$ □

3. 有限生成的代数扩张是有限扩张

定理 1.4.5: 有限生成的代数扩张是有限扩张

$E \backslash F$ 是有限扩张 $\Leftrightarrow E = F(u_1, \cdots, u_n)$ 其中 $u_1, \cdots, u_n$ 是 F 的代数元

证明: 首先证明充分性。

取 E 在 F 上的一组基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$

我们说，一定有 $E = F(u_1, \cdots, u_n)$，因为:

$E = \mathrm{span}_F(u_1, \cdots, u_n) \subseteq F(u_1, \cdots, u_n)$

但是，同时也有 $F(u_1, \cdots, u_n) \subseteq E$，因为 E 是一个域，而 $u_1, \cdots, u_n \in E$

所以只需要证明 $u_1, \cdots, u_n$ 是 F 的代数元。但是，有限扩张都是代数扩张，按照代数扩张的定义可知这是成立的。

接下来证明必要性。这是更加显然的，因为我们已经证明了单代数扩张有限，那么有

$[F(u_1, \cdots, u_n) : F] = [F(u_1, \cdots, u_n) : F(u_1, \cdots, u_{n-1})] \cdots [F(u_1) : F] < +\infty$ □

4. 代数扩张的复合也是代数扩张

定理 1.4.6: 代数扩张的复合也是代数扩张

设 $E\backslash K\backslash F$，

如果 $E\backslash K, K\backslash F$ 都是代数扩张，那么 $E\backslash F$ 也是代数扩张

证明： 取 $\forall\alpha \in E$

因为 $E\backslash K$ 是代数扩张，所以 $\exists f(x) \in K[x], f(\alpha) = 0$

设 $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$，取 $R = F(a_0, \cdots, a_n)$

因为 $a_0, \cdots, a_n \in K$，而 $K\backslash F$ 是代数扩张，所以 $a_0, \cdots, a_n$ 是 F 的代数元

那么，按照前面的定理，一定有 $[R : F] < +\infty$

接下来考虑 $R(\alpha)$，因为 $a_0, \cdots, a_n \in R$，所以 α 是 R 的代数元，那么就有 $[R(\alpha) : R] < \infty$

所以 $[R(\alpha) : F] = [R(\alpha) : R] \cdot [R : F] < +\infty$

但是，$R\backslash F$，所以一定也有 $[F(\alpha) : F] < +\infty$，又因为有限扩张都是代数扩张，所以 α 是 F 的代数元，于是命题得证。 □

三种扩张的关系可以用以下图示概括

$$\begin{tikzcd}
\text{Infinite extension} \arrow[r, shift left, "is"] \arrow[d, shift left, "is"] & \text{Algebratic extension} \arrow[l, shift left, "ifinfinite-generate"] \\
\text{Infinite-generate extension} \arrow[u, shift left, "ifAlgebratic"] &
\end{tikzcd}$$

1.5 代数闭包

定义 1.5.1: 相对代数闭包

设 $E\backslash F$ 是一个域扩张，那么我们称

$K = \{\alpha \in E | \alpha 是F上的代数元\}$ 是 F 在 E 上的相对代数闭包

定义 1.5.2: 代数闭域

如果域 K 没有真代数扩张，即 K 的任意一个代数扩张 $K'\backslash K$ 都有 $K' = K$

那么我们称 K 是一个代数闭域

定义 1.5.3: 绝对代数闭包

如果 $\overline{F}\backslash F$ 是一个代数扩张，且 $\overline{F}$ 是一个代数闭域

那么我们称 $\overline{F}$ 是 F 的绝对代数闭包，记作 $\overline{F}$

我们早就发现，似乎代数扩张并不能无限的扩张，而是会有一个终点，这个终点其实就是代数闭包，以下命题指出了这个事实。

命题 1.5.1. *如果 K 是 F 在 E 上的代数闭包，*
那么如果 $E\backslash K'\backslash K$ 且 $K'\backslash K$ 是代数扩张，那么 $K' = K$

证明： 因为 $K\backslash F, K'\backslash K$ 都是代数扩张，所以 $K'\backslash F$ 也是代数扩张
因为代数闭包即是全部可以通过代数扩张得到的元素的集合，所以必定有 $K' = K$ □
显然绝对代数闭包的定义和以下等价

命题 1.5.2. *如果 K 是 F 在 E 上的相对代数闭包，且 E 是一个代数闭域，那么 K 是 F 的绝对代数闭包*

证明： 他妈 Galois 理论和分裂域咋来了!!! □

定理 1.5.1: 绝对代数闭包的存在性

任意一个域 F 的绝对代数闭包 $\overline{F}$ 都存在，并且在同构意义下唯一

证明： 记 □