抽象代数笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 2 月 22 日

前言标题

前言内容

2025 年 2 月 22 日

目录

第一章　域

1.1　域的定义

定义 1.1.1: 域

设 F 是一个集合，如果存在两个运算 $+: F \times F \to F$ 和 $\cdot: F \times F \to F$，分别称为加法和乘法，并且满足：

①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_F \in F$，称为零元，$\forall x \in F, x + 0_F = 0_F + x = x$

②（加法逆存在）$\forall x \in F, \exists (-x) \in F, \text{s.t.} x + (-x) = (-x) + x = 0_F$，$(-x)$ 称为 x 的加法逆元

③（加法交换律）$\forall x, y \in F, x + y = y + x$

④（加法结合律）$\forall x, y, z \in F, (x + y) + z = x + (y + z)$

⑤（乘法单位元存在）存在一个元素 $1_F \in F, 1_F \neq 0_F$，称为一元，$\forall x \in F, x \cdot 1_F = 1_F \cdot x = x$

⑥（乘法逆存在）$\forall x \in F - 0_F, \exists x^-1 \in F, \text{s.t.} x \cdot x^-1 = x^-1 \cdot x = 1$，$x^-1$ 称为 x 的乘法逆元

⑦（乘法交换律）$\forall x, y \in F, x \cdot y = y \cdot x$

⑧（乘法结合律）$\forall x, y, z \in F, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

⑨（乘法分配律）$\forall x, y, z \in F, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

第二章　一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

2.1　逐点收敛性和一致收敛性

2.1.1　逐点收敛性

定义 2.1.1: 逐点收敛性

考虑函数列 $f_n : X \to \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$，$\{f_n(x), n \in\}$ 收敛，则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 称为极限函数，同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

第三章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

3.1　原函数初等性的判定方法

3.1.1　切比雪夫定理

定理 3.1.1: 切比雪夫定理

设 $m,n,p\in\mathbb{Q}-\{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

初等的充要条件是：$p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$ 中至少有一个为整数

3.1.2　刘维尔定理

在介绍刘维尔定理前，需要先介绍一些微分代数的概念：

首先我们扩展微分的概念。我们将满足类似乘法、除法微分性质的泛函也称为微分。

先引入微分域及其常数域

1. 微分域

定义 3.1.1: 微分域

一个由函数组成的域 F 及其上的一个算子 $\delta : F \to F$，如果 $\forall f, g \in F$ 有：

$\neg\delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g)$

$\delta(fg) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g)$

那么称 (F, δ) 是一个微分域

容易验证 δ 是线性算子，于是我们有时简记 $\delta(f)$ 为 δf

定义 3.1.2: 微分域的常数域

微分域 (F, δ) 的常数域定义为：

$Con(F, \delta) = \{f \in F | \delta f = 0\}$

同时定义域的扩张：

定义 3.1.3: 域的扩张

设 F, K 是两个域，并且 K 是满足 $F \subseteq K$ 且包含 $h \subseteq K$ 的最小域（即 K 是任何满足上述条件的域的子域），记作 $K = F(h)$

作为接下来内容的预备，我们先验证那些显然的微分性质：

命题 3.1.1. $\delta C = 0$，*其中 C 为常数*

证明: 只需要验证 $\delta 1 = 0$

那么有：$\delta(1 \cdot 1) = \delta 1 \cdot 1 + 1 \cdot \delta 1 = 2\delta 1$

于是有 $\delta 1 = 0$，利用微分的线性即得证。 □

命题 3.1.2. $\delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\delta f \cdot g - f\delta g}{g^2}$

证明: 首先推导 $\delta\left(\frac{1}{g}\right)$

$\because \delta 1 = \delta\left(g \cdot \frac{1}{g}\right) = 0$

$\Rightarrow \delta g \frac{1}{g} + g\delta\left(\frac{1}{g}\right) = 0$

$\Rightarrow \delta\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{\delta g}{g^2}$

于是 $\delta\left(\frac{f}{g}\right) = \delta\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)$

$= \delta f \frac{1}{g} - f\frac{\delta g}{g^2} = \frac{\delta f \cdot g - f\delta g}{g^2}$ □

2. 微分域的初等扩张 接下来讨论什么是“初等”的函数。

定义 3.1.4: 微分域的初等扩张

设 $(F, \delta), (K, \delta)$ 是两个微分域，$h \in K$ 并且 $K = F(h)$，那么：

$\neg$ 如果存在 F 中的一个多项式 $p(x) \in F[x]$，有 $p(h) = 0$，那么称 h 是 F 的一个代数元素，$K = F(h)$ 是 F 的单代数扩张

如果存在 F 中的一个函数 f，使得 $\delta h = \frac{\delta f}{f}$，那么称 $K = F(h)$ 是 F 的单对数扩张

如果存在 F 中的一个函数 f，使得 $\frac{\delta h}{h} = \delta f$，那么称 $K = F(h)$ 是 F 的单指数扩张。

单对数扩张和单指数扩张统称为单超越扩张，其对应的 h 称为 F 的超越元素；以上三种扩张统称为单初等扩张

有限次初等扩张的复合称为初等扩张

我们也可以在此以另外的方式定义出初等函数：

定义 3.1.5: 初等函数

如果函数 f 处于微分域 $(C(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ 的某个初等扩张中，那么称 f 是一个初等函数

接下来就可以给出刘维尔定理了。

3. 刘维尔定理

定理 3.1.2: 刘维尔定理

$(F, \delta), (K, \delta)$ 是两个微分域，K 是 F 的初等扩张，并且 $Con(F, \delta) = Con(K, \delta)$，且 $\forall f \in F, \exists g \in K, s.t. \delta g = f$

那么一定 $\exists c_1, \cdots, c_n \in Con(F, \delta), u_1, \cdots, u_n, v \in F$，使得

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln(u_i) + v \tag{3.2}$$

3.2 一些超越积分的特殊解法

3.2.1 Direchlet 积分