

第一章 环、模

1.1 环的定义

1.1.1 环的定义

定义 1.1.1

R 是一个集合，如果存在两个运算 $+: R \times R \rightarrow R$ 和 $\cdot: R \times R \rightarrow R$ 分别称为加法和乘法，满足下列条件：

- ①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_R \in R$ ，称为加法单位元，使得对于任意 $x \in R$ ，有 $x + 0_R = 0_R + x = x$ 。
 - ②（加法交换律） $\forall x, y \in R, x + y = y + x$
 - ③（加法结合律） $\forall x, y, z \in R, (x + y) + z = x + (y + z)$
 - ④（加法逆存在） $\forall x \in R, \exists -x \in R$ ，称为加法逆，使得 $x + (-x) = 0_R$
 - ⑤（乘法结合律） $\forall x, y, z \in R, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
 - ⑥（左分配律） $\forall x, y, z \in R, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
（右分配律） $\forall x, y, z \in R, (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$
- 那么我们称 $(R, +, \cdot)$ 是一个环，简称为环 R 。

相比域的定义，环的定义仅涉及 6 条性质，去除了单位元存在、可交换、可逆三条性质。在研究环时，我们有时也会考虑存在单位元和可交换的环，因此有以下定义：

定义 1.1.2: 交换环、幺环

如果环 R 满足： $\forall x, y \in R, x \cdot y = y \cdot x$ ，那么我们称 R 是一个交换环；

如果环 R 满足： $\exists 1_R \in R, \forall x \in R, 1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ ，称为乘法单位元，

1.1.2 环的性质

1.1.3 整环

定义 1.1.3: 零因子

设 R 是一个环, 如果 $\exists x, y \in R, x, y \neq 0_R$, 使得 $x \cdot y = 0_R$, 那么我们称 x, y 是 R 的零因子。

定义 1.1.4: 整环

如果环 R 是一个交换幺环, 并且不包含零因子, 那么我们称 R 是一个整环。

定理 1.1.1: 循环的整环必有素零因子

设 R 是一个整环,

我们定义: $N: \mathbb{Z} \ni n \mapsto n_R \in R$, 满足 $(n+1)_F = n_F + 1_F$

如果 $\exists a \in R, a \neq 0, \exists n \in \mathbb{N}_+, n_F a = 0_R$

那么存在素数 p , $\forall b \in R, p_R b = 0_R$

证明: 取 $\forall b \in R$,

$$0_R = 0_R \cdot b = (n_R a) b = a(n_R b)$$

因为 $a \neq 0$, 而 R 是整环, 所以一定有 $n_R b = 0$, 因此, $\{k \in \mathbb{N}_+ | k_R b = 0\}$ 不是空集。

取 p 为使 $p_R b = 0$ 的最小正整数。如果 p 是素数, 命题成立;

如果 p 不是素数, 那么只需要对 p 作唯一分解, 那么有 $\left(\prod_{i=1}^q p_{i_R}\right) b = 0$

那么, 一定存在一个 $p_{i_R} b = 0$, 此时命题也是成立的。□

1.1.4 子环

我们也类似地提出后续我们会提及的子环的概念。

定义 1.1.5: 子环

设 R 是一个环, 集合 $S \subseteq R$,

如果 S 对 R 上的加法和乘法也构成一个环, 那么我们称 S 是 R 的子环。

1.2 环的同态

我们类似于域的同态，定义出环的同态。

1.2.1 定义

定义 1.2.1: 环同态

设 R, S 是两个环，如果映射 $\varphi : R \rightarrow S$ 满足：

$$\forall a, b \in R, \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

并且如果 R, S 均是幺环， $\varphi(1_R) = 1_S$

那么我们称 φ 是一个 R 到 S 的环同态。

显然，同态一定将零元映射到零元

命题 1.2.1. 设 $\varphi : R \rightarrow S$ 是一个环同态，那么 $\varphi(0_R) = 0_S$

证明: $\varphi(0_R) = \varphi(0_R + 0_R) = \varphi(0_R) + \varphi(0_R)$

$$\Rightarrow -\varphi(0_R) + \varphi(0_R) = -\varphi(0_R) + \varphi(0_R) + \varphi(0_R)$$

$$\Rightarrow \varphi(0_R) = 0_S$$

□

并且把逆元映射到逆元

命题 1.2.2. 设 $\varphi : R \rightarrow S$ 是一个环同态，那么 $\varphi(-a) = -\varphi(a)$

证明: 注意到， $0_S = \varphi(0_R) = \varphi(a + (-a)) = \varphi(a) + \varphi(-a) \Rightarrow \varphi(-a) = -\varphi(a)$

□

定义 1.2.2: 单同态、满同态、同构

假设有环同态 $\psi : R \rightarrow S$

如果 ψ 是单射，那么称它是一个单同态；

如果 ψ 是满射，那么称它是一个满同态；

如果 ψ 是双射，称它是一个同构，记作 $R \cong S$ ；

同构是最严格的同态，表示两个环在结构上是完全相同的，有以下显而易见的事实：

命题 1.2.3. 如果 $\psi : R \rightarrow S$ 是一个环同构，那么 $\psi^{-1} : S \rightarrow R$ 也是一个环同构

证明: $\psi(\psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b)) = \psi(\psi(a)) + \psi(\psi(b)) = a + b$

因为 ψ 是双射, 所以有 $\psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b) = \psi^{-1}(a+b)$

同理, $\psi(\psi^{-1}(a)\psi^{-1}(b)) = \psi(\psi(a))\psi(\psi(b)) = ab$

$\Rightarrow \psi^{-1}(a)\psi^{-1}(b) = \psi^{-1}(ab)$, 于是命题得证 \square

1.2.2 同态的核、像

定义 1.2.3: 环同态的核、像

设 $\psi: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 我们定义:

$\ker \psi = \{a \in R | \psi(a) = 0_S\}$, 称为 ψ 的核

$\text{Im } \psi = \{\psi(a) | a \in R\}$, 称为 ψ 的像

与域的同态不同, 环的同态的核并不是平凡的, 因为域同态未必是单射。因此, 我们需要研究环同态的核与像。

但是, 受限于目前的知识, 我们暂时无法证明核与像的一些进阶性质, 我们仅仅证明一些简单的性质。

命题 1.2.4. 设 $\psi: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 那么 $\ker \psi$ 是一个 R 的子环

证明: 取 $\forall a, b \in \ker \psi$, 那么有 $\psi(a) = \psi(b) = 0$

我们注意到: $\psi(0_R) = 0_S \Rightarrow 0_R \in \ker \psi, a + 0_R = a$

$\psi(a + (-a)) = 0_S \Rightarrow \psi(a) + \psi(-a) = 0_S \Rightarrow \psi(-a) = 0_S \Rightarrow -a \in \ker \psi, a + (-a) = 0_R$

加法的交换律、结合律, 乘法的结合律, 左、右分配律是显然成立的。 \square

命题 1.2.5. 设 $\psi: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 那么 $\text{Im } \psi$ 是一个 S 的子环

证明: 取 $\forall a, b \in \text{Im } \psi$, 那么有 $\exists x, y \in R, \psi(x) = a, \psi(y) = b$

我们注意到: $\psi(0_R) = 0_S \Rightarrow 0_S \in \text{Im } \psi, \psi(x) + \psi(0_R) = \psi(x)$

$\psi(x) + \psi(-x) = \psi(x + (-x)) = \psi(0_R) = 0_S \Rightarrow \psi(-x) = -\psi(x) = -a \in \text{Im } \psi, a + (-a) = 0_S$

加法的交换律、结合律, 乘法的结合律, 左、右分配律是显然成立的。 \square

1.3 环的理想

1.3.1 理想的定义

定义 1.3.1: 理想

设 R 是一个环, R 是 R 的一个子环。

如果 $\forall a \in S, b \in R, ab \in S$, 那么我们称 S 是 R 的一个左理想;

如果 $\forall a \in S, b \in R, ba \in S$, 那么我们称 S 是 R 的一个右理想;

如果 S 既是 R 的左理想, 又是 R 的右理想, 那么我们称 S 是 R 的一个双理想。

显然, $\{0_R\}, R$ 都是 R 的理想, 我们称之为平凡理想。

我们观察到: 一些环, 比如说 \mathbb{Z} , 他们有一种特殊的理想, 比如说 $\forall m \in \mathbb{Z}, m\mathbb{Z}$ 是 \mathbb{Z} 的一个理想。我们把这种直接由一个元素“生成”的理想叫主理想。

定义 1.3.2: 主理想

设 R 是一个环, 如果 R 的一个理想 S 满足:

$\exists a \in R, S = aR := \{ab | b \in R\}$, 那么我们称 S 是由 a 生成的主理想, 记作 (a)

1.3.2 理想的性质

1.

命题 1.3.1. 设 $\psi: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 那么 $\ker \psi$ 是 S 的一个理想

证明: 取 $\forall a \in \ker \psi$, 依核的定义, $\psi(a) = 0_S$

那么, $\forall b \in R, \psi(ab) = \psi(a)\psi(b) = 0_S, \psi(ba) = \psi(b)\psi(a) = 0_S$

因此, $ab, ba \in \ker \psi$, 于是命题得证。□

2.

命题 1.3.2. 设 R 是一个幺环, S 是 R 的一个双理想, 如果 $1_R \in S$, 那么 $S = R$

证明: 依理想的定义, $\forall b \in R, 1_R b = b 1_R = b \in S$, 所以 $R \subseteq S$, 所以必须有 $R = S$ □

我们可以立即得出, 最特殊的幺环——域, 也可以应用上述性质

推论 1.3.1: 域没有非平凡理想

域只有平凡理想

证明: 设 F 是一个域, S 是 F 的一个理想

因为域中任意元素都有逆元素, 所以 $\forall a \in S, a^{-1} \in F$

而按照理想的概念, $a \cdot a^{-1} = 1_F \in S$

而按照前面的命题, $1_F \in S$, 那么一定有 $S = F$, 它是一个平凡理想;

□

1.4 商环

1.4.1 商环的定义

我们首先定义等价类, 随后定义商环

定义 1.4.1: 关于环的理想的等价类

设 R 是一个环, S 是 R 的一个理想

我们定义 $R \times R$ 上的一个等价关系: $\sim_I: \{(x, y) | x - y \in I\} \subseteq R \times R$

并定义 $a \in R$ 关于 \sim_I 的等价类为: $a + I := \bar{a} := \{x \in R | x \sim_I a\}$

我们其实还需要验证以上关系的确是一个等价关系:

首先, $\forall a \in R, a \sim a$, 因为 $a - a = 0_R \in I$, 这说明自反性成立;

其次, 如果 $a \sim b$, 那么有 $a - b \in I$, 而 I 是一个理想, 所以一定有 $b - a \in I$, 所以 $b \sim a$, 这说明对称性成立;

最后, 如果 $a \sim b, b \sim c$, 那么有 $a - b \in I, b - c \in I$, 而 I 是一个理想, 所以一定有 $(a - b) + (b - c) = (a - c) \in I$, 所以 $a \sim c$, 这说明传递性成立;

定义 1.4.2: 商环

设 R 是一个环, I 是 R 的一个理想, 那么我们定义:

$R/I = \{a + I | a \in R\}$, 称为 R 关于 I 的商环

并定义其中的环加法和环乘法为:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$$

事实上, 由于 $a + I$ 是一个等价类, 我们还需要验证, 如果 $a_1 + I = a_2 + I$, 即同一等价类选取不同单位元下, 运算结果是一致的。

命题 1.4.1. 商环的加法和乘法是良定义的 设 R 是一个环, I 是 R 的一个理想, 那么如

果 $a_1 + I = a_2 + I, b_1 + I = b_2 + I$

那么 $(a_1 + I) + (b_1 + I) = (a_2 + I) + (b_2 + I), (a_1 + I) \cdot (b_1 + I) = (a_2 + I) \cdot (b_2 + I)$

证明: 对于第一条, 只需证明 $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \in I$ 。

因为 $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$, 而 $a_1 - a_2 \in I, b_1 - b_2 \in I$, 所以 $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \in I$

对于第二条, 只需证明 $(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2) \in I$ 。

因为 $(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2) = (a_1 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_2)$

$= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 - a_2)b_2 \in I$, 因为 I 是一个理想。 □

1.5 同态基本定理

1.5.1 同态基本定理

定理 1.5.1: 同态基本定理

设 R, S 是两个环, $\varphi: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 那么:

$$R/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi \quad (1.1)$$

并且同构映射 ψ 唯一, 即 $\psi: R/\ker \varphi \ni a + \ker \varphi \mapsto \varphi(a) \in \text{Im } \varphi$

证明: 我们考虑以下映射:

$$\psi: R/\ker \varphi \ni a + \ker \varphi \mapsto \varphi(a) \in \text{Im } \varphi$$

因为 $a + \ker \varphi = b + \ker \varphi \Rightarrow a - b \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = 0$, 所以它的确是映射。

首先, $\psi((a + \ker \varphi) + (b + \ker \varphi)) = \psi((a + b) + \ker \varphi) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \psi(a + \ker \varphi) + \psi(b + \ker \varphi)$

$\psi((a + \ker \varphi) \cdot (b + \ker \varphi)) = \psi(ab + \ker \varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a + \ker \varphi) \cdot \psi(b + \ker \varphi)$

这说明 ψ 是一个同态, 我们接下来证明双射性。

首先证明单射性, 如果 $\psi(a + \ker \varphi) = \psi(b + \ker \varphi)$, 即 $\varphi(a) = \varphi(b)$, 那么 $\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) = 0_R$, 所以 $a - b \in \ker \varphi$, 于是 $a + \ker \varphi = b + \ker \varphi$, 单射性成立。

满射性是显然的, 因为显然 $\forall b \in \text{Im } \varphi, \exists a \in R, \varphi(a) = b, \psi(a + \ker \varphi) = \varphi(a) = b$

我们最后证明同构映射唯一性

我们设 $\chi : R/\ker \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ 是一个同构映射。

那么，一定有 $\varphi = \chi \circ \pi_{\ker \varphi}$ ，其中 $\pi_{\ker \varphi} : R \ni a \mapsto a + \ker \varphi \in R/\ker \varphi$

我们注意到， $\psi(a + \ker \varphi) = \varphi(a) = \chi(\pi_{\ker \varphi}(a)) = \chi(a + \ker \varphi)$

所以一定有 $\psi = \chi$ ，于是命题得证。 \square

1.5.2 同构基本定理

定理 1.5.2: 同构第一基本定理

设 R, S 是两个环， $\varphi : R \rightarrow S$ 是一个满同态，那么：

$$R/\ker \varphi \cong S \quad (1.2)$$

并且同构映射唯一。

证明： 这个定理事实上是同态基本定理的一个特例，因为如果 φ 满，那么一定有 $\text{Im } \varphi = S$ \square

在考虑第二同构定理前，我们先讨论一个引理

引理 1.5.3

设 R, S 是两个环， $\varphi : R \rightarrow S$ 是一个满同态， $I = \ker \varphi$ 是一个理想，那么：

任意一个 R 的子环 $R' \subseteq R$ ，其在 φ 下的像 $S' = \varphi(R')$ 是 S 的一个子环；

同时，任意一个 S 的子环 S' ， $R' = \{r \in R | \varphi(r) \in S'\}$ 也是一个包含了 I 的 R 的子环

证明： 首先先证明第一条结论。

$$\forall a, b \in R' = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b) \in S'$$

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) \in S'$$

$$\varphi(a) + \varphi(0_R) = \varphi(a) \in S', \varphi(a) + \varphi(-a) = \varphi(0_R) = 0_S$$

然后证明第二条结论

首先，因为 $\forall r \in \ker \varphi, \varphi(r) = 0$ ，所以一定有 $\ker \varphi \in R'$

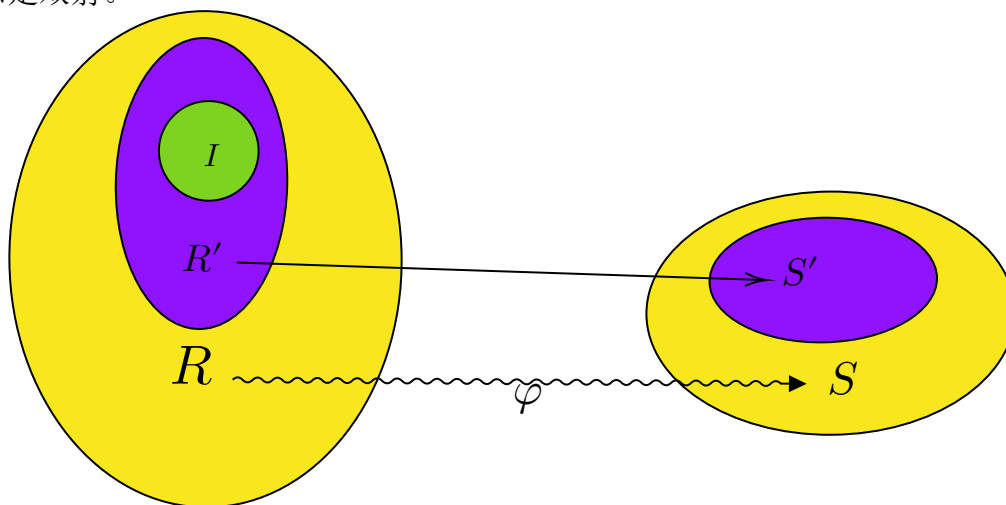
$$\forall a, b \in R', \text{ 一定有 } \varphi(a), \varphi(b) \in S', \text{ 所以 } \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \in S' \Rightarrow a + b \in R'$$

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) \in S' \Rightarrow ab \in R'$$

$$\varphi(a) + \varphi(0_R) = \varphi(a) \in S' \Rightarrow a + 0_R = a \in R', \varphi(a) + (-\varphi(a)) = 0_S \in S' \Rightarrow \varphi(-a) \in S' \Rightarrow -a \in R'$$

\square

值得注意的是，这个引理中，第一个结论中我们没有要求子环包含同态的核，但是我们随后又提出，从 S 反向映射回来后必须包含同态的核。这并不是矛盾的，因为我们没有限定同态是双射。



引理 1.5.4

设 R, S 是两个环， $\varphi: R \rightarrow S$ 是一个满同态， $I = \ker \varphi$ 是一个理想
 那么对于包含于 I 的任意一个 R 的理想 J ，存在唯一的环同态 $\chi: R/J \rightarrow S$ ，
 使得 $\varphi = \chi \circ \pi_J$ ，其中 $\pi_J: R \ni a \mapsto a + J \in R/I$
 并且此时 $\ker \chi = I/J$

证明： 我们考虑我们之前曾经构造的映射： $\chi: R/J \ni a + J \mapsto \varphi(a) \in S$

我们之前已经证明了它是一个同构映射，我们接下来证明 $\ker \chi = I/J$

因为 $\ker \chi = \{a + J | \chi(a + J) = 0_S\}$

而 $\chi(a + J) = \varphi(a)$ ，所以 $a + J \in \ker \chi \Rightarrow \varphi(a) = 0 \Rightarrow a \in I$

所以 $\ker \chi = I/J$ ，我们接下来证明 χ 是唯一的，并且 $\varphi = \chi \circ \pi_J$

我们设 $\psi: R/J \rightarrow S$ 是一个同构映射。他显然也满足 $\varphi = \psi \circ \pi_J$

我们注意到， $\chi(a + J) = \varphi(a) = \psi(\pi_J(a)) = \psi(a + J)$

所以一定有 $\psi = \chi$ ，于是命题得证。

□

定理 1.5.5: 同构第二基本定理

设 R 是一个环, I, J 是 R 的两个理想, 并且 $I \subseteq J$ 。

那么 J/I 是 R/I 的理想, 并且

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J \quad (1.3)$$

证明: 我们考虑满同态 $\varphi: R \ni a \mapsto a + J \in R/J$

注意到: $\ker \varphi = \{a | a + J = 0_{R/J}\} = \{a | a + J = J\} = \{a | a - 0_R \in J\} = J$

运用前面的引理, 那么一定有一个同态 $\chi: R/I \rightarrow R/J$, 并且 $\ker \chi = J/I$

接下来运用同构第一基本定理, 于是有 $(R/I)/(J/I) \cong R/J$, 命题得证。 \square

1.6 模

本节我们研究一种“环上的线性空间”, 也就是模

1.6.1 模的定义

定义 1.6.1: 左模

设 R 是一个环, M 是一个集合, 如果存在两个运算 $+: M \times M \rightarrow M, \cdot_R: R \times M \rightarrow M$ 分别称为称为加法和纯量乘法, 满足下列条件:

- ① $\exists 0_M \in M$, 称为加法单位元, $\forall \alpha \in M, 0_M + \alpha = \alpha + 0_M = \alpha$
- ② $\forall \alpha, \beta \in M, \alpha + \beta = \beta + \alpha$
- ③ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in M, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- ④ $\forall \alpha \in M, \exists -\alpha \in M$, 称为加法逆, 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0_M$
- ⑤ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, a(b\alpha) = (ab)\alpha$
- ⑥ $\forall a \in R, \alpha, \beta \in M, a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$
- ⑦ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, (a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

那么我们称 M 是一个左 R -模

类似地, 我们也有右模的定义:

定义 1.6.2: 右模

设 R 是一个环, M 是一个集合, 如果存在两个运算 $+: M \times M \rightarrow M, \cdot_R: M \times R \rightarrow M$ 分别称为称为加法和纯量乘法, 满足下列条件:

- ① $\exists 0_M \in M$, 称为加法单位元, $\forall \alpha \in M, 0_M + \alpha = \alpha + 0_M = \alpha$
- ② $\forall \alpha, \beta \in M, \alpha + \beta = \beta + \alpha$
- ③ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in M, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- ④ $\forall \alpha \in M, \exists -\alpha \in M$, 称为加法逆, 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0_M$
- ⑤ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, (\alpha a)b = \alpha(ab)$
- ⑥ $\forall a \in R, \alpha, \beta \in M, (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$
- ⑦ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

那么我们称 M 是一个右 R -模

如果 M 兼具左模和右模的特征, 我们称 M 是一个双模:

定义 1.6.3: 双模

如果 M 既是左 R -模, 又是右 S -模, 并且满足:

$$(a\alpha)b = a(\alpha b)$$

那么我们称 M 是一个 (R, S) -双模

我们也知道, 环不一定有乘法单位元, 因此有以下定义:

定义 1.6.4: 幺模

设 R 是幺环, M 是一个 R -模

如果 $\forall \alpha \in M, 1_R \cdot \alpha = \alpha$, 那么我们称 M 是一个幺模。

在后续中, 除非特别做区分, 我们都假定我们说的模指的是左模。

1.6.2 模的同态

定义 1.6.5: 模同态

设 M, N 是两个 R -模, 如果映射 $\psi: M \rightarrow N$ 满足:

$$\forall \alpha, \beta \in M, \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$$

$$\forall a \in R, \alpha \in M, \psi(a\alpha) = a\psi(\alpha)$$

那么称 ψ 是一个从 M 到 N 的模同态。

1.6.3 商模

定义 1.6.6: 商模

设 M 是一个模, N 是 M 的一个子模