抽象代数笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 2 月 24 日

前言标题

前言内容

2025 年 2 月 24 日

目录

第一章　域

1.1　域的定义

1.1.1　域和子域

定义 1.1.1: 域

设 F 是一个集合，如果存在两个运算 $+: F\times F\to F$ 和 $\cdot: F\times F\to F$，分别称为加法和乘法，并且满足：

①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_F\in F$，称为零元，$\forall x\in F, x+0_F=0_F+x=x$

②（加法逆存在）$\forall x\in F, \exists(-x)\in F, \text{s.t.} x+(-x)=(-x)+x=0_F$，$(-x)$ 称为 x 的加法逆元

③（加法交换律）$\forall x,y\in F, x+y=y+x$

④（加法结合律）$\forall x,y,z\in F, (x+y)+z=x+(y+z)$

⑤（乘法单位元存在）存在一个元素 $1_F\in F, 1_F\neq 0_F$，称为一元，$\forall x\in F, x\cdot 1_F=1_F\cdot x=x$

⑥（乘法逆存在）$\forall x\in F-0_F, \exists x^-1\in F, \text{s.t. } x\cdot x^-1=x^-1\cdot x=1$，$x^-1$ 称为 x 的乘法逆元

⑦（乘法交换律）$\forall x,y\in F, x\cdot y=y\cdot x$

⑧（乘法结合律）$\forall x,y,z\in F, (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

⑨（乘法分配律）$\forall x,y,z\in F, x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

我们再定义子域

定义 1.1.2: 子域

设 E, F 是两个域，$E \subseteq F$

如果 $0_F, 1_F \in E$，并且 F 中的加法和乘法对 E 形成一个域，

那么我们称 E 是 F 的一个子域，并称 F 是 E 的一个域扩张，

记作 $F \backslash E$

从以上定义容易看出，F 也可以视为 E 上的一个线性空间。

定义 1.1.3: 域的 n 次扩张

如果 $F \backslash E$，那么我们记 $[F:E] := dim_E F$，并称 F 是 E 由 $[F:E]$ 次扩张得到的。

1.2 域的同态

定义 1.2.1: 域的同态

F_1, F_2 是两个域，如果存在一个映射 $\varphi : F_1 \to F_2$，满足：

① $\varphi(0_{F_1}) = 0_{F_2}$

② $\varphi(1_{F_1}) = 1_{F_2}$

③ $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

④ $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

值得注意的是，与我们之前了解到的线性空间同构不同，域的同态完全没有对映射的满射性、单射性作任何限制。但是，

以下定理证明，两个域如果同态，那么同态映射是一个单射

定理 1.2.1: 域同态的单射性

若 $\varphi : F_1 \to F_2$ 是 F_1 到 F_2 的同态，那么 φ 是单射

证明： 不妨假设命题不成立。于是，$\exists x_1 \neq x_2 \text{s.t. } \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

那么有：$\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = 0_{F_2}$

因为我们已经假设了 $x_1 \neq x_2$，于是 $(x_1 - x_2)^{-}1$ 存在。将上式乘以 $\varphi\left((x_1 - x_2)^{-}1\right)$ 得：

$1_{F_2} = \varphi(1_{F_1})\varphi\left((x_1 - x_2)^{-}1(x_1 - x_2)\right) = \varphi\left((x_1 - x_2)^{-}1\right)\varphi\left((x_1 - x_2)\right) = 0_{F_1}$

与 $0_{F_2} \neq 1_{F_2}$ 矛盾，于是命题得证。 $\square$

在证明这一点后，我们可以类似地引入域的同构：

定义 1.2.2: 域的同构

设 $\varphi : F_1 \to F_2$ 是 F_1 到 F_2 的同态

如果 φ 还是个满射，那么我们称 φ 是一个同构；

特别地，如果有 $F_1 = F_2$，我们称 φ 是一个自同构。

并且引入自同构的不动域的概念：

定义 1.2.3: 自同构域的不动域

设 $\sigma : F \to F$ 是 F 的自同构，那么我们称集合

$\{x \in F | \sigma(x) = x\}$ 为 F 的不动域

“不动域”这一名称是合理的，因为利用域同构的定义容易证明不动域是一个域，而且是 F 的一个子域。

第二章　一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

2.1　逐点收敛性和一致收敛性

2.1.1　逐点收敛性

定义 2.1.1: 逐点收敛性

考虑函数列 $f_n : X \to \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$，$\{f_n(x), n \in\}$ 收敛，则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 称为极限函数，同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

第三章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

3.1　原函数初等性的判定方法

3.1.1　切比雪夫定理

定理 3.1.1: 切比雪夫定理

设 $m,n,p\in\mathbb{Q}-\{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

初等的充要条件是：$p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$ 中至少有一个为整数

3.1.2　刘维尔定理

在介绍刘维尔定理前，需要先介绍一些微分代数的概念：

首先我们扩展微分的概念。我们将满足类似乘法、除法微分性质的泛函也称为微分。

先引入微分域及其常数域

1. 微分域

定义 3.1.1: 微分域

一个由函数组成的域 F 及其上的一个算子 $\delta : F \to F$，如果 $\forall f, g \in F$ 有：

$\neg\delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g)$

$\delta(fg) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g)$

那么称 (F, δ) 是一个微分域

容易验证 δ 是线性算子，于是我们有时简记 $\delta(f)$ 为 δf

定义 3.1.2: 微分域的常数域

微分域 (F, δ) 的常数域定义为：

$Con(F, \delta) = \{f \in F | \delta f = 0\}$

同时定义域的扩张：

定义 3.1.3: 域的扩张

设 F, K 是两个域，并且 K 是满足 $F \subseteq K$ 且包含 $h \subseteq K$ 的最小域（即 K 是任何满足上述条件的域的子域），记作 $K = F(h)$

作为接下来内容的预备，我们先验证那些显然的微分性质：

命题 3.1.1. $\delta C = 0$，*其中 C 为常数*

证明: 只需要验证 $\delta 1 = 0$

那么有：$\delta(1 \cdot 1) = \delta 1 \cdot 1 + 1 \cdot \delta 1 = 2\delta 1$

于是有 $\delta 1 = 0$，利用微分的线性即得证。 □

命题 3.1.2. $\delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\delta f \cdot g - f\delta g}{g^2}$

证明: 首先推导 $\delta\left(\frac{1}{g}\right)$

$\because \delta 1 = \delta\left(g \cdot \frac{1}{g}\right) = 0$

$\Rightarrow \delta g \frac{1}{g} + g\delta\left(\frac{1}{g}\right) = 0$

$\Rightarrow \delta\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{\delta g}{g^2}$

于是 $\delta\left(\frac{f}{g}\right) = \delta\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)$

$= \delta f \frac{1}{g} - f\frac{\delta g}{g^2} = \frac{\delta f \cdot g - f\delta g}{g^2}$ □

2. 微分域的初等扩张 接下来讨论什么是“初等”的函数。

定义 3.1.4: 微分域的初等扩张

设 $(F,\delta),(K,\delta)$ 是两个微分域，$h \in K$ 并且 $K = F(h)$，那么：

¬ 如果存在 F 中的一个多项式 $p(x) \in F[x]$，有 $p(h) = 0$，那么称 h 是 F 的一个代数元素，$K = F(h)$ 是 F 的单代数扩张

如果存在 F 中的一个函数 f，使得 $\delta h = \frac{\delta f}{f}$，那么称 $K = F(h)$ 是 F 的单对数扩张

如果存在 F 中的一个函数 f，使得 $\frac{\delta h}{h} = \delta f$，那么称 $K = F(h)$ 是 F 的单指数扩张。

单对数扩张和单指数扩张统称为单超越扩张，其对应的 h 称为 F 的超越元素；以上三种扩张统称为单初等扩张

有限次初等扩张的复合称为初等扩张

我们也可以在此以另外的方式定义出初等函数：

定义 3.1.5: 初等函数

如果函数 f 处于微分域 $(C(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ 的某个初等扩张中，那么称 f 是一个初等函数

接下来就可以给出刘维尔定理了。

3. 刘维尔定理

定理 3.1.2: 刘维尔定理

$(F,\delta),(K,\delta)$ 是两个微分域，K 是 F 的初等扩张，并且 $Con(F,\delta) = Con(K,\delta)$，且 $\forall f \in F, \exists g \in K, s.t. \delta g = f$

那么一定 $\exists c_1, \cdots, c_n \in Con(F,\delta), u_1, \cdots, u_n, v \in F$，使得

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln(u_i) + v \tag{3.2}$$

3.2　一些超越积分的特殊解法

3.2.1　Direchlet 积分