

第一章 环、模

1.1 环的定义

1.1.1 环的定义

定义 1.1.1

R 是一个集合，如果存在两个运算 $+: R \times R \rightarrow R$ 和 $\cdot: R \times R \rightarrow R$ 分别称为加法和乘法，满足下列条件：

- ①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_R \in R$ ，称为加法单位元，使得对于任意 $x \in R$ ，有 $x + 0_R = 0_R + x = x$ 。
 - ②（加法交换律） $\forall x, y \in R, x + y = y + x$
 - ③（加法结合律） $\forall x, y, z \in R, (x + y) + z = x + (y + z)$
 - ④（加法逆存在） $\forall x \in R, \exists -x \in R$ ，称为加法逆，使得 $x + (-x) = 0_R$
 - ⑤（乘法结合律） $\forall x, y, z \in R, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
 - ⑥（左分配律） $\forall x, y, z \in R, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
（右分配律） $\forall x, y, z \in R, (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$
- 那么我们称 $(R, +, \cdot)$ 是一个环，简称为环 R 。

相比域的定义，环的定义仅涉及 6 条性质，去除了单位元存在、可交换、可逆三条性质。在研究环时，我们有时也会考虑存在单位元和可交换的环，因此有以下定义：

定义 1.1.2: 交换环、幺环

如果环 R 满足： $\forall x, y \in R, x \cdot y = y \cdot x$ ，那么我们称 R 是一个交换环；

如果环 R 满足： $\exists 1_R \in R, \forall x \in R, 1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ ，称为乘法单位元，

1.1.2 环的性质

1.1.3 子环

我们也类似地提出后续我们会提及的子环的概念。

定义 1.1.3: 子环

设 R 是一个环, 集合 $S \subseteq R$,

如果 S 对 R 上的加法和乘法也构成一个环, 那么我们称 S 是 R 的子环。

1.2 环的同态

我们类似于域的同态, 定义出环的同态。

1.2.1 定义

定义 1.2.1: 环同态

设 R, S 是两个环, 如果映射 $\varphi: R \rightarrow S$ 满足:

$$\forall a, b \in R, \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

并且如果 R, S 均是幺环, $\varphi(1_R) = 1_S$

那么我们称 φ 是一个 R 到 S 的环同态。

定义 1.2.2: 单同态、满同态、同构

假设有环同态 $\psi: R \rightarrow S$

如果 ψ 是单射, 那么称它是一个单同态;

如果 ψ 是满射, 那么称它是一个满同态;

如果 ψ 是双射, 称它是一个同构;

同构是最严格的同态, 表示两个环在结构上是完全相同的, 有以下显而易见的事实:

命题 1.2.1. 如果 $\psi: R \rightarrow S$ 是一个环同构, 那么 $\psi^{-1}: S \rightarrow R$ 也是一个环同构

证明: $\psi(\psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b)) = \psi(\psi(a)) + \psi(\psi(b)) = a + b$

因为 ψ 是双射, 所以有 $\psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b) = \psi^{-1}(a + b)$

同理, $\psi(\psi^{-1}(a)\psi^{-1}(b)) = \psi(\psi(a))\psi(\psi(b)) = ab$

$\Rightarrow \psi^{-1}(a)\psi^{-1}(b) = \psi^{-1}(ab)$, 于是命题得证 \square

1.2.2 同态的核、像

定义 1.2.3: 环同态的核、像

设 $\psi: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 我们定义:

$\ker \psi = \{a \in R | \psi(a) = 0_S\}$, 称为 ψ 的核

$\text{Im } \psi = \{\psi(a) | a \in R\}$, 称为 ψ 的像

与域的同态不同, 环的同态的核并不是平凡的, 因为域同态未必是单射。因此, 我们需要研究环同态的核与像。

但是, 受限于目前的知识, 我们暂时无法证明核与像的一些进阶性质, 我们仅仅证明一些简单的性质。

命题 1.2.2. 设 $\psi: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 那么 $\ker \psi$ 是一个 R 的子环

证明:

\square

1.3 环的理想

定义 1.3.1: 理想

设 R 是一个环, R 的子环 I 如果满足:

$\forall a \in R, b \in I, ab \in I$, 那么我们称 I 是 R 的一个理想

我们观察到: 一些环, 比如说 \mathbb{Z} , 他们有一种特殊的理想, 比如说 $\forall m \in \mathbb{Z}, m\mathbb{Z}$ 是 \mathbb{Z} 的一个理想。我们把这种直接由一个元素“生成”的理想叫主理想。

定义 1.3.2: 主理想

设 R 是一个环, 如果 R 的一个理想 I 满足:

$\exists a \in R, I = aR := \{ab | b \in R\}$, 那么我们称 I 是由 a 生成的主理想, 记作 (a)

1.4 模

本节我们研究一种“环上的线性空间”，也就是模

1.4.1 模的定义

定义 1.4.1: 左模

设 R 是一个环, M 是一个集合, 如果存在两个运算 $+: M \times M \rightarrow M, \cdot_R: R \times M \rightarrow M$ 分别称为称为加法和纯量乘法, 满足下列条件:

- ① $\exists 0_M \in M$, 称为加法单位元, $\forall \alpha \in M, 0_M + \alpha = \alpha + 0_M = \alpha$
- ② $\forall \alpha, \beta \in M, \alpha + \beta = \beta + \alpha$
- ③ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in M, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- ④ $\forall \alpha \in M, \exists -\alpha \in M$, 称为加法逆, 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0_M$
- ⑤ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, a(b\alpha) = (ab)\alpha$
- ⑥ $\forall a \in R, \alpha, \beta \in M, a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$
- ⑦ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, (a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

那么我们称 M 是一个左 R -模

类似地, 我们也有右模的定义:

定义 1.4.2: 右模

设 R 是一个环, M 是一个集合, 如果存在两个运算 $+: M \times M \rightarrow M, \cdot_R: M \times R \rightarrow M$ 分别称为称为加法和纯量乘法, 满足下列条件:

- ① $\exists 0_M \in M$, 称为加法单位元, $\forall \alpha \in M, 0_M + \alpha = \alpha + 0_M = \alpha$
- ② $\forall \alpha, \beta \in M, \alpha + \beta = \beta + \alpha$
- ③ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in M, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- ④ $\forall \alpha \in M, \exists -\alpha \in M$, 称为加法逆, 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0_M$
- ⑤ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, (\alpha a)b = \alpha(ab)$
- ⑥ $\forall a \in R, \alpha, \beta \in M, (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- ⑦ $\forall a, b \in R, \alpha \in M, \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

那么我们称 M 是一个右 R -模

如果 M 兼具左模和右模的特征, 我们称 M 是一个双模:

定义 1.4.3: 双模

如果 M 既是左 R -模，又是右 S -模，并且满足：

$$(a\alpha)b = a(\alpha b)$$

那么我们称 M 是一个 (R, S) -双模

我们也知道，环不一定有乘法单位元，因此有以下定义：

定义 1.4.4: 么模

设 R 是么环， M 是一个 R -模

如果 $\forall \alpha \in M, 1_R \cdot \alpha = \alpha$ ，那么我们称 M 是一个么模。

我们之所以刻意区分左右模，并且还提出双模的概念，是因为环不一定交换，因此 $a\alpha$ 和 αa 并不等价。

以下命题指出了一个小事实：只有在环是交换么环时，左右么模才在交换乘法次序的关系下等价。

命题 1.4.1. 设 R 是一个交换环， M 既是左 R -模，又是右 R -模，那么

$$E = \{(a\alpha, \alpha a) | a \in R, \alpha \in M\} \subseteq M \times M \text{ 是一个等价关系}$$

证明:

□

在后续中，除非特别做区分，我们都假定我们说的模指的是左模。

1.4.2 模的同态**定义 1.4.5: 模同态**

设 M, N 是两个 R -模，如果映射 $\psi: M \rightarrow N$ 满足：

$$\forall \alpha, \beta \in M, \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$$

$$\forall a \in R, \alpha \in M, \psi(a\alpha) = a\psi(\alpha)$$

那么称 ψ 是一个从 M 到 N 的模同态。