# 抽象代数笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 2 月 26 日

# 前言标题

前言内容

2025 年 2 月 26 日

# 目录

# 第一章　域

## 1.1　域的定义

### 1.1.1　域和子域

**定义 1.1.1: 域**

设 $F$ 是一个集合，如果存在两个运算 $+: F\times F\to F$ 和 $\cdot: F\times F\to F$，分别称为加法和乘法，并且满足：

①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_F\in F$，称为零元，$\forall x\in F, x+0_F=0_F+x=x$

②（加法逆存在）$\forall x\in F, \exists(-x)\in F, \text{s.t.} x+(-x)=(-x)+x=0_F$，$(-x)$ 称为 $x$ 的加法逆元

③（加法交换律）$\forall x,y\in F, x+y=y+x$

④（加法结合律）$\forall x,y,z\in F,(x+y)+z=x+(y+z)$

⑤（乘法单位元存在）存在一个元素 $1_F\in F, 1_F\neq 0_F$，称为一元，$\forall x\in F, x\cdot 1_F=1_F\cdot x=x$

⑥（乘法逆存在）$\forall x\in F-0_F, \exists x^-1\in F, \text{s.t. } x\cdot x^-1=x^-1\cdot x=1$，$x^-1$ 称为 $x$ 的乘法逆元

⑦（乘法交换律）$\forall x,y\in F, x\cdot y=y\cdot x$

⑧（乘法结合律）$\forall x,y,z\in F,(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

⑨（乘法分配律）$\forall x,y,z\in F, x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

## 1.2 域的同态

**定义 1.2.1: 域的同态**

$F_1, F_2$ 是两个域，如果存在一个映射 $\varphi: F_1 \to F_2$，满足：

① $\varphi(0_{F_1}) = 0_{F_2}$

② $\varphi(1_{F_1}) = 1_{F_2}$

③ $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

④ $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

值得注意的是，与我们之前了解到的线性空间同构不同，域的同态完全没有对映射的满射性、单射性作任何限制。但是，

以下定理证明，两个域如果同态，那么同态映射是一个单射

**定理 1.2.1: 域同态的单射性**

若 $\varphi: F_1 \to F_2$ 是 $F_1$ 到 $F_2$ 的同态，那么 $\varphi$ 是单射

**证明:** 不妨假设命题不成立。于是，$\exists x_1 \neq x_2 \text{s.t. } \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

那么有：$\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = 0_{F_2}$

因为我们已经假设了 $x_1 \neq x_2$，于是 $(x_1 - x_2)^{-1}$ 存在。将上式乘以 $\varphi\left((x_1 - x_2)^{-1}\right)$ 得：

$1_{F_2} = \varphi(1_{F_1})\varphi\left((x_1 - x_2)^{-1}(x_1 - x_2)\right) = \varphi\left((x_1 - x_2)^{-1}\right)\varphi\left((x_1 - x_2)\right) = 0_{F_1}$

与 $0_{F_2} \neq 1_{F_2}$ 矛盾，于是命题得证。 □

在证明这一点后，我们可以类似地引入域的同构：

**定义 1.2.2: 域的同构**

设 $\varphi: F_1 \to F_2$ 是 $F_1$ 到 $F_2$ 的同态

如果 $\varphi$ 还是个满射，那么我们称 $\varphi$ 是一个同构；

特别地，如果有 $F_1 = F_2$，我们称 $\varphi$ 是一个自同构。

并且引入自同构的不动域的概念：

**定义 1.2.3: 自同构域的不动域**

设 $\sigma: F \to F$ 是 $F$ 的自同构，那么我们称集合

$\{x \in F | \sigma(x) = x\}$ 为 $F$ 的不动域

“不动域”这一名称是合理的，因为利用域同构的定义容易证明不动域是一个域，而且是 $F$ 的一个子域。

## 1.3　域的特征

**定义 1.3.1: 域的特征**

设 $F$ 是一个域，定义以下映射 $N : \mathbb{N} \ni n \mapsto n_F \in F$，满足：

$N(0) = 0_F, N(n+1) = n_F + 1_F$

那么，如果 $N$ 是一个单射，我们称 $F$ 的特征为 0，记作 $CharF = 0$；

否则，我们将满足 $N(p) = 0_F, p > 0$ 的最小正整数称为 $F$ 的特征，记作 $CharF = p$。

我们首先需要证明的是，任何一个域都是具有特征的，因为对于定义中的第二种情形，我们并不知道这样的 $p$ 是否一定存在。

**定理 1.3.1: 域特征的存在性**

我们只需要证明第二种情形。

## 1.4　域的扩张

**定义 1.4.1: 子域**

设 $E, F$ 是两个域，$E \subseteq F$

如果 $0_F, 1_F \in E$，并且 $F$ 中的加法和乘法对 $E$ 形成一个域，

那么我们称 $E$ 是 $F$ 的一个子域，并称 $F$ 是 $E$ 的一个域扩张，

记作 $F \backslash E$

从以上定义容易看出，$F$ 也可以视为 $E$ 上的一个线性空间。

**定义 1.4.2: 域的 $n$ 次扩张**

如果 $F \backslash E$，那么我们记 $[F : E] := dim_E F$，并称 $F$ 是 $E$ 由 $[F : E]$ 次扩张得到的。

# 第二章　一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

## 2.1　逐点收敛性和一致收敛性

### 2.1.1　逐点收敛性

**定义 2.1.1: 逐点收敛性**

考虑函数列 $f_n : X \to \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$，$\{f_n(x), n \in\}$ 收敛，则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 $x$ 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 称为极限函数，同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

# 第三章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。

## 3.1　一些典型的域

### 3.1.1　$F_p$

首先约定，这一部分的讨论中，都认为 $p$ 是一个素数。

我们首先讨论的是一个典型的有限域——模 $p$ 剩余类域。

首先给出定义。

**定义 3.1.1: $n_F$**

设 $F$ 是一个域，定义以下映射 $N : \mathbb{N} \ni n \mapsto n_F \in F$，满足：

$N(0) = 0_F, N(n+1) = n_F + 1_F$

如此定义的 $n_F$ 称为 $F$ 中的 $n$

**定义 3.1.2: $F_p$**

设 $F$ 是一个域，$CharF \geqslant p$ 且 $p$ 是一个素数，

我们定义 $F_p = \{0_F, \cdots, p_F\}$

并定义其中的加法和乘法为：

$a_F +_F b_F := (a_F + b_F) mod p_F$

$a_F \cdot_F b_F := (a_F \cdot b_F) mod p_F$

这里的模运算定义为 $a_F mod b_F = (a mod b)_F$。

**定理 3.1.1: $F_p$ 没有真子域**

设 $p$ 是一个素数，那么域 $F_p$ 不存在真子域，即 $F_p \backslash E \to E = F_p$

**证明:**

$\square$

### 3.1.2 $\mathbb{Q}$

**定理 3.1.2: $Q$ 没有真子域**

aa