

第一章 域

1.1 域的定义

1.1.1 域

定义 1.1.1: 域

设 F 是一个集合，如果存在两个运算 $+: F \times F \rightarrow F$ 和 $\cdot: F \times F \rightarrow F$ ，分别称为加法和乘法，并且满足：

- ①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_F \in F$ ，称为零元， $\forall x \in F, x + 0_F = 0_F + x = x$
- ②（加法逆存在） $\forall x \in F, \exists (-x) \in F, \text{s.t. } x + (-x) = (-x) + x = 0_F$ ， $(-x)$ 称为 x 的加法逆元
- ③（加法交换律） $\forall x, y \in F, x + y = y + x$
- ④（加法结合律） $\forall x, y, z \in F, (x + y) + z = x + (y + z)$
- ⑤（乘法单位元存在）存在一个元素 $1_F \in F, 1_F \neq 0_F$ ，称为一元， $\forall x \in F, x \cdot 1_F = 1_F \cdot x = x$
- ⑥（乘法逆存在） $\forall x \in F - 0_F, \exists x^{-1} \in F, \text{s.t. } x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ， x^{-1} 称为 x 的乘法逆元
- ⑦（乘法交换律） $\forall x, y \in F, x \cdot y = y \cdot x$
- ⑧（乘法结合律） $\forall x, y, z \in F, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- ⑨（乘法分配律） $\forall x, y, z \in F, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

1.1.2 域的性质

1.

命题 1.1.1. 加法和乘法的单位元是唯一的。

证明: 先考虑加法的单位元。假设命题不成立, 那么我们不妨假设 $0_1, 0_2$ 都是 F 的零元, $0_1 \neq 0_2$

那么 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$, 于是有 $0_1 = 0_2$, 与假设矛盾。于是加法的单位元唯一。

同理可证, 乘法的单位元也是唯一的。□

2.

命题 1.1.2. $\forall a$, 加法的逆 $-a$ 是唯一的。

如果还有 $a \neq 0$, 那么乘法的逆 a^{-1} 也是唯一的。

证明: 先考虑加法逆, 不妨假设命题不成立, 那么 $\exists b, c, a + b = 0, a + c = 0, b \neq c$

于是, $b = b + 0 = b + (a + c) = (a + b) + c = 0 + c = c$, 这与假设矛盾。于是加法逆唯一。

同理可证, 乘法逆也是唯一的。□

3. **证明:** $a \cdot 0 = 0$ □

证明: $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot a) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$

$\Rightarrow 0 = a \cdot 0$ □

立即有以下推论:

推论 1.1.1

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

证明: 假设 $a \neq 0$, 那么 $b = a^{-1} \cdot 0 = 0$, 命题得证 □

4.

命题 1.1.3. $-a = (-1) \cdot a$

证明: $a + (-a) = 0 = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$

$\Rightarrow (-a) + a + (-a) = (-a) + a + (-1) \cdot a$

$\Rightarrow -a = (-1) \cdot a$ □

随后我们即可得出以下推论

推论 1.1.2

$$(-1) \cdot (-x) = x$$

证明: 我们只需证明: $(-1)(-1) = 1$

因为 $(-1)(-1) + (-1) \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow (-1)(-1) + (-1) = 0 \Rightarrow (-1)(-1) = 1$

那么, $(-1)(-x) = (-1)(-1) \cdot x = 1 \cdot x = x$ □

推论 1.1.3

$$(-x)(-x) = x \cdot x$$

证明: 运用前面的推论中的结果, $(-x)(-x) = x \cdot (-1)(-1) \cdot x = x \cdot 1 \cdot x = x \cdot x$ □

1.2 域的同态

定义 1.2.1: 域的同态

F_1, F_2 是两个域, 如果存在一个映射 $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$, 满足:

- ① $\varphi(0_{F_1}) = 0_{F_2}$
- ② $\varphi(1_{F_1}) = 1_{F_2}$
- ③ $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- ④ $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

值得注意的是, 与我们之前了解到的线性空间同构不同, 域的同态完全没有对映射的满射性、单射性作任何限制。但是,

以下定理证明, 两个域如果同态, 那么同态映射是一个单射

定理 1.2.1: 域同态的单射性

若 $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ 是 F_1 到 F_2 的同态, 那么 φ 是单射

证明: 不妨假设命题不成立。于是, $\exists x_1 \neq x_2$ s.t. $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

那么有: $\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = 0_{F_2}$

因为我们已经假设了 $x_1 \neq x_2$, 于是 $(x_1 - x_2)^{-1}$ 存在。将上式乘以 $\varphi((x_1 - x_2)^{-1})$ 得:

$$1_{F_2} = \varphi(1_{F_1})\varphi((x_1 - x_2)^{-1}(x_1 - x_2)) = \varphi((x_1 - x_2)^{-1})\varphi((x_1 - x_2)) = 0_{F_1}$$

与 $0_{F_2} \neq 1_{F_2}$ 矛盾, 于是命题得证。 □

在证明这一点后, 我们可以类似地引入域的同构:

定义 1.2.2: 域的同构

设 $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ 是 F_1 到 F_2 的同态

如果 φ 还是个满射, 那么我们称 φ 是一个同构;

特别地, 如果有 $F_1 = F_2$, 我们称 φ 是一个自同构。

并且引入自同构的不动域的概念:

定义 1.2.3: 自同构域的不动域

设 $\sigma: F \rightarrow F$ 是 F 的自同构, 那么我们称集合

$\{x \in F | \sigma(x) = x\}$ 为 F 的不动域

“不动域”这一名称是合理的, 因为利用域同构的定义容易证明不动域是一个域, 而且是 F 的一个子域。

1.3 域的特征

1.3.1 域的特征的定义

定义 1.3.1: 域的特征

设 F 是一个域, 定义以下映射 $N: \mathbb{N} \ni n \mapsto n_F \in F$, 满足:

$$N(0) = 0_F, N(n+1) = n_F + 1_F$$

那么, 如果 N 是一个单射, 我们称 F 的特征为 0, 记作 $\text{Char}F = 0$;

否则, 我们将满足 $N(p) = 0_F, p > 0$ 的最小正整数称为 F 的特征, 记作 $\text{Char}F = p$ 。

我们首先需要证明的是, 任何一个域都是具有特征的, 因为对于定义中的第二种情形, 我们并不知道这样的 p 是否一定存在。

定理 1.3.1: 域特征的存在性

任何域 F 的特征 $\text{Char}F$ 均存在

证明: 我们只需要证明第二种情形。

容易证明, $N(m+n) = N(m) + N(n)$ 。(仿照 Peano 公理下证明加法性质的方式即可)

于是, 因为 N 不是单射, 于是一定有 $a, b \in \mathbb{N}, a > b, N(a) = N(b)$

于是有 $N(a - b) = N(a) - N(b) = 0_F$ 。

那么 $\{m | N(m) = 0_F\} \neq \emptyset$ ，因此这样的最小整数 $\text{Char} F$ 存在

□

接下来考虑几个性质

1.3.2 域的特征的性质

命题 1.3.1. 设 F 是一个域，那么或者 $\text{Char} F = 0$ ，或者 $\text{Char} F = p$ 是素数

证明: 我们只需要证明当 $\text{Char} F = p > 0$ 时， p 是素数

不妨假设命题不成立，那么一定有 $1 < q < p, 1 < r < p, p = qr$

容易证明， $N(qr) = N(q)N(r)$ 。（仿照 Peano 公理下证明乘法性质的方式即可）

但是，因为 $N(qr) = 0$ ，于是 $N(q) = 0 \vee N(r) = 0$ ，这与定义中 p 是使 $N(x) = 0$ 成立的最小正整数矛盾。

于是命题得证。

□

定理 1.3.2: 同态域的特征相等

设 $\varphi: E \rightarrow F$ 是域 E 到域 F 的同态

那么有: $\text{Char} E = \text{Char} F$

证明: 我们不妨假设结论不成立。

首先我们证明，不可能 $\text{Char} E = 0, \text{Char} F = p, p$ 为素数。

此时， $\varphi(N_E(p)) = N_F(p) = 0_F$ ，此处 N_E, N_F 分别是 N 在对应 E, F 的情况下的映射

那么按照同态的定义，一定有 $N_E(p) = 0_E$ ，但是这与 $\text{Char} E = 0$ 矛盾。

那么只需要考虑当 $\text{Char} E = p, \text{Char} F = q, p, q$ 为素数, $p \neq q$

那么，有 $\varphi(N_E(q)) = N_F(q) = 0_F$

那么按照同态的定义，一定有 $N_E(q) = 0_E$ ，这说明 $p | q$ ，这与 q 是素数矛盾。

所以假设不成立，命题得证。

□

1.4 域的扩张

1.4.1 域的扩张的定义

定义 1.4.1: 子域

设 E, F 是两个域, $E \subseteq F$

如果 $0_F, 1_F \in E$, 并且 F 中的加法和乘法对 E 形成一个域,
那么我们称 E 是 F 的一个子域, 并称 F 是 E 的一个域扩张,
记作 $F \setminus E$

如果 $E \setminus F$, $F \cong G$, 那么我们也称: 在同构意义下 $E \setminus G$ 。

此后我们所说的子域, 默认指的是同构意义下的子域。

借助域的扩张的概念, 我们可以证明一些比较简单的结论

命题 1.4.1. 域 F 如果有 $\text{Char } F = 0$, 那么 \mathbb{Q} 是它的子域; 如果有 $\text{Char } F = p$, 那么 F_p 是它的子域

证明: 如果 $\text{Char } F = 0$, 那么 F 是无限集。因为 $0_F, 1_F \in F$, 那么一定也有 $n_F \in F, n \in \mathbb{N}$ 。

那么, $-n_F \in F$; 进一步地, 一定有 $a \cdot b^{-1} \in F, a, b \in \{\pm n_F\}$ 。

那么, 一定有 $F \setminus \mathbb{Q}$ 。

如果 $\text{Char } F = p$, p 是素数。那么, $\{0_F, \dots, (p-1)_F\}$ 由映射 N 的性质一定是一个域。

那么, 一定有 $F \setminus F_p$ □

1.4.2 有限扩张

从域的定义容易看出, F 也可以视为 E 上的一个线性空间。

定义 1.4.2: 域的扩张次数

如果 $F \setminus E$, 那么我们记 $[F : E] := \dim_E F$, 并称 F 是 E 由 $[F : E]$ 次扩张得到的。

如果 $[F : E]$ 有限, 我们称 F 是 E 的有限扩张, 反之称它是无限扩张。

有限扩张的概念可以让我们立即得出以下结论

定理 1.4.1: 域的元素个数仅可能无限或者是 p^k

一个域的元素个数，或者是无限，或者是 p^k ，其中 p 是一个素数， k 是正整数

证明: 事实上，我们只需要证明有限域 F 的个数只可能是 p^k

设 $\text{Char } F = p$ ，那么一定有 $F \setminus F_p$

因为 F 是有限域，所以一定有 $[F : F_p] = d$ 有限，那么此时 $|F| = p^d$ 。因为 p 一定为素数，因此命题得证。 \square

1.4.3 有限生成扩张

定义 1.4.3: 域的生成扩张

设 E, F 是两个域， $E \setminus F$ ，集合 $S \subseteq E$

那么我们定义包含 F, S 中全部元素的最小域，即

$$F(S) := \bigcap_{(F \cup S) \subseteq K, E \setminus K} K$$

称为在 F 上由 S 生成的 E 的子域

定义 1.4.4: 有限生成与无限生成

设 E, F 是两个域， $E \setminus F$

如果存在一个集合 $S \subseteq E, F(S) = E$ ，那么我们称 E 是 F 的有限生成扩张；

如果对于任意的有限集 $S \subseteq E, F(S) \neq E$ ，那么我们称 E 是 F 的无限生成扩张

显然有以下性质

命题 1.4.2. 有限扩张都是有限生成扩张

证明: 设 $E \setminus F, [E : F] = n < +\infty$ 。

那么 E 是 F 上的一个线性空间，我们取它的一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

于是 $E = \text{span}_F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 。由线性生成的性质，那么有

$E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 。于是命题得证。 \square

值得注意的是，这个命题如果反过来则不成立，比如说：

例 1.4.1. $\mathbb{Q}(e)$ 是 \mathbb{Q} 的有限生成扩张，但是不是 \mathbb{Q} 的有限扩张

证明: 不妨假设命题不成立，那么有 $[\mathbb{Q}(e) : \mathbb{Q}] = n < +\infty$

那么, 因为线性空间中, 数量多于维数的一组向量一定线性相关, 那么 $1, e, \dots, e^n$ 线性相关

$$\Rightarrow \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, a_0 + a_1 e + \dots + a_n e^n = 0$$

但是, 这与 e 是超越数矛盾。于是命题得证 \square

1.4.4 代数扩张

我们首先提出代数元的概念

定义 1.4.5: 代数元

设 $E \setminus F$ 是一个域扩张, $u \in E$ 如果满足:

$\exists p(x) \in F[x], p(u) = 0$, 那么我们称 u 是 F 上的代数元

我们如下定义代数扩张

定义 1.4.6: 代数扩张和超越扩张

设 $E \setminus F$ 是一个域扩张

如果 $\forall u \in E$, u 是 F 的代数元, 那么我们称 E 是 F 的代数扩张;

反之, 如果 $\exists u \in E$, u 不是 F 的代数元, 那么我们称 E 是 F 的超越扩张。

接下来我们考虑代数、有限、有限生成三种扩张之间的联系

1. 有限扩张都是代数扩张

定理 1.4.2: 有限扩张都是代数扩张

任何有限扩张都是代数扩张

证明: 设 E, F 是两个域, $[E : F] = n < +\infty$

取 $\forall \alpha \in E$, 考虑集合 $\{1, \alpha, \dots, \alpha^n\}$

因为这个集合有 $n + 1 > [E : F]$ 个元素, 因此它一定线性相关; 这代表着

$$\exists a_0, \dots, a_n \text{ 不全为 } 0, a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n = 0$$

因此 α 是多项式 $\sum_{k=0}^n a_k x^k \in F[x]$ 的一个根

所以 α 是 F 的代数元, 于是命题得证。 \square

2. 有限扩张的组合和拆分也是有限的

命题 1.4.3. 设 E, K, F 是三个域, $E \setminus K, K \setminus F$, 并且 $E \setminus F$ 是有限扩张。

那么, $E \setminus K, K \setminus F$ 是有限扩张, 并且有 $[E : F] = [E : K] \cdot [K : F]$

证明: 我们首先证明 $E \setminus K, K \setminus F$ 是有限扩张。

显然, $K \setminus F$ 一定是有限扩张, 因为 K 是 E 在 F 上的线性子空间, 而 $[E : F]$ 有限。

我们不妨假设 $E \setminus K$ 不是有限的, 那么一定可以取一组无限基 $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$

考虑 F 上的线性组合 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\alpha_i}, \alpha_i \in A$

我们可以断言: 这个线性组合在 $\exists a_i \neq 0$ 时不为零, 因为 $F \subseteq K$, 所以这个线性组合也可以视为 K 上的,

而线性无关向量组的子向量组也是线性无关的;

但是, 这是不可能的: 因为我们知道 $[K : F]$ 有限, 一个无限集不可能线性无关。所以 $[E : K]$ 一定有限。

接下来证明 $[E : F] = [E : K] \cdot [K : F]$

假设 $[E : K] = m, [K : F] = n$, 取 E 在 K 上的一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, K 在 F 上的一组基 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$

$\forall \eta \in E, \exists a_1, \dots, a_m, \eta = a_1 \alpha_1 + \dots + a_m \alpha_m$

对系数作展开, 有:

$$\begin{aligned} \exists b_{ij}, \eta &= (b_{11}\beta_1 + \dots + b_{1n}\beta_n)\alpha_1 + \dots + (b_{m1}\beta_1 + \dots + b_{mn}\beta_n)\alpha_m \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{i=m, j=n} b_{ij} \alpha_i \beta_j \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} \beta_j \right) \alpha_i \end{aligned}$$

令 $\eta = 0$, 因为 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 线性无关, 一定有 $\sum_{j=1}^n b_{ij} \beta_j = 0$

但是, $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 线性无关, 所以一定有 $b_{ij} = 0$ 。所以 $\{\alpha_i \beta_j\}$ 是 E 在 F 上的一组基

所以 $[E : F] = mn = [E : K] \cdot [K : F]$, 命题得证 \square

利用这个命题可以得出以下推论

推论 1.4.3: 素数次扩张不存在平凡子域

若 $E \setminus F$ 是一个有限扩张, $[E : F] = p$ 为素数

那么 E, F 没有非平凡的中间域, 即 $E \setminus K \setminus F \Leftrightarrow E = K \vee F = K$

证明: 这是显然的, 因为素数的因子仅有 1 和自身; 而 $[K : F] = 1$ 当且仅当 K, F 在同构意义下相等。 \square

推论 1.4.4: 单代数扩张一定是有限扩张

设 E, F 是两个域, $E = F(u)$, u 是 F 的代数元

那么 $E = F(u)$ 是一个有限扩张, 并且 $[E : F] = \deg f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 u 的极小多项式

证明: 取 u 的极小多项式 $f(x) \in F[x]$, 设 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_n = 1$

因为 $f(u) = 0$, 所以有 $x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

于是, 任意的 α^k 均可以由 $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ 线性表出, 这表示

$$E = F(u) = \{a_0 + \dots + a_{n-1} u^{n-1}\}$$

于是 E 中任意一个元素可由 $\{1, \dots, u^{n-1}\}$ 线性表出。但是 u 的极小多项式的次数为 n , 所以这个集合一定线性无关, 也就是它是 E 的基

所以 $[E : F] = n < +\infty$ □

3. 有限生成的代数扩张是有限扩张

定理 1.4.5: 有限生成的代数扩张是有限扩张

E/F 是有限扩张 $\Leftrightarrow E = F(u_1, \dots, u_n)$ 其中 u_1, \dots, u_n 是 F 的代数元

证明: 首先证明充分性。

取 E 在 F 上的一组基 $\{u_1, \dots, u_n\}$

我们说, 一定有 $E = F(u_1, \dots, u_n)$, 因为:

$$E = \text{span}_F(u_1, \dots, u_n) \subseteq F(u_1, \dots, u_n)$$

但是, 同时也有 $F(u_1, \dots, u_n) \subseteq E$, 因为 E 是一个域, 而 $u_1, \dots, u_n \in E$

所以只需要证明 u_1, \dots, u_n 是 F 的代数元。但是, 有限扩张都是代数扩张, 按照代数扩张的定义可知这是成立的。

接下来证明必要性。这是更加显然的, 因为我们已经证明了单代数扩张有限, 那么有

$$[F(u_1, \dots, u_n) : F] = [F(u_1, \dots, u_n) : F(u_1, \dots, u_{n-1})] \cdots [F(u_1) : F] < +\infty$$

□

4. 代数扩张的复合也是代数扩张

定理 1.4.6: 代数扩张的复合也是代数扩张

设 $E \setminus K \setminus F$,

如果 $E \setminus K, K \setminus F$ 都是代数扩张, 那么 $E \setminus F$ 也是代数扩张

证明: 取 $\forall \alpha \in E$

因为 $E \setminus K$ 是代数扩张, 所以 $\exists f(x) \in K[x], f(\alpha) = 0$

设 $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, 取 $R = F(a_0, \cdots, a_n)$

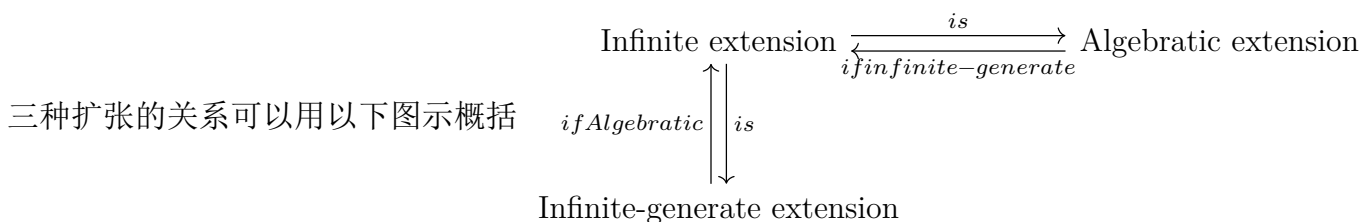
因为 $a_0, \cdots, a_n \in K$, 而 $K \setminus F$ 是代数扩张, 所以 a_0, \cdots, a_n 是 F 的代数元

那么, 按照前面的定理, 一定有 $[R : F] < +\infty$

接下来考虑 $R(\alpha)$, 因为 $a_0, \cdots, a_n \in R$, 所以 α 是 R 的代数元, 那么就有 $[R(\alpha) : R] < \infty$

所以 $[R(\alpha) : F] = [R(\alpha) : R] \cdot [R : F] < +\infty$

但是, $R \setminus F$, 所以一定也有 $[F(\alpha) : F] < +\infty$, 又因为有限扩张都是代数扩张, 所以 α 是 F 的代数元, 于是命题得证。 \square



1.5 代数闭包

定义 1.5.1: 相对代数闭包

设 $E \setminus F$ 是一个域扩张, 那么我们称

$K = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ 是 } F \text{ 上的代数元}\}$ 是 F 在 E 上的相对代数闭包

定义 1.5.2: 代数闭域

如果域 K 没有真代数扩张, 即 K 的任意一个代数扩张 $K' \setminus K$ 都有 $K' = K$

那么我们称 K 是一个代数闭域

定义 1.5.3: 绝对代数闭包

如果 $\bar{F} \setminus F$ 是一个代数扩张, 且 \bar{F} 是一个代数闭域

那么我们称 \bar{F} 是 F 的绝对代数闭包, 记作 \bar{F}

我们早就发现，似乎代数扩张并不能无限的扩张，而是会有一个终点，这个终点其实就是代数闭包，以下命题指出了这个事实。

命题 1.5.1. 如果 K 是 F 在 E 上的代数闭包，

那么如果 $E \setminus K' \setminus K$ 且 $K' \setminus K$ 是代数扩张，那么 $K' = K$

证明： 因为 $K \setminus F, K' \setminus K$ 都是代数扩张，所以 $K' \setminus F$ 也是代数扩张

因为代数闭包即是全部可以通过代数扩张得到的元素的集合，所以必定有 $K' = K$ \square

显然绝对代数闭包的定义和以下等价

命题 1.5.2. 如果 K 是 F 在 E 上的相对代数闭包，且 E 是一个代数闭域，那么 K 是 F 的绝对代数闭包

证明： 只需证明 K 是一个代数闭域

没法证，得用商环……………

\square

定理 1.5.1: 绝对代数闭包的存在性

任意一个域 F 的绝对代数闭包 \overline{F} 都存在，并且在同构意义下唯一

证明： 要用 Zorn 引理……………

\square