第一章 环、模

1.1 环的定义

定义 1.1.1

R 是一个集合，如果存在两个运算 $+: R\times R\to R$ 和 $\cdot: R\times R\to R$

分别称为加法和乘法，满足下列条件：

①（加法单位元存在）存在一个元素 $0_R\in R$，称为加法单位元，使得对于任意 $x\in R$，有 $x+0_R=0_R+x=x$。

②（加法交换律）$\forall x,y\in R, x+y=y+x$

③（加法结合律）$\forall x,y,z\in R,(x+y)+z=x+(y+z)$

④（加法逆存在）$\forall x\in R,\exists -x\in R$，称为加法逆，使得 $x+(-x)=0_R$

⑤（乘法结合律）$\forall x,y,z\in R,(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

⑥（左分配律）$\forall x,y,z\in R, x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

（右分配律）$\forall x,y,z\in R,(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$

那么我们称 $(R,+,\cdot)$ 是一个环，简称为环 R。

定义 1.1.2: 交换环、幺环

如果环 R 满足：$\forall x,y\in R, x\cdot y=y\cdot x$，那么我们称 R 是一个交换环；

如果环 R 满足：$\exists 1_R\in R,\forall x\in R, 1_R\cdot x=x\cdot 1_R=x$，称为乘法单位元，