

# 第一章 内积空间

## 1.1 内积空间的定义

### 1.1.1 内积空间的定义

#### 定义 1.1.1: 共轭

设  $F$  是一个域, 自同构  $\sigma : F \rightarrow F$  如果满足:

$$\forall a \in F, \sigma^2(a) = a \quad (1.1)$$

那么我们称  $\sigma$  是一个共轭映射,  $\sigma(a)$  称为  $a$  的共轭, 也记作  $\bar{a}$ 。

#### 定义 1.1.2: 内积空间

设  $F$  是一个定义了共轭和偏序的域,  $V$  是一个  $F$  上的线性空间, 映射  $f : V \times V \rightarrow F$  如果满足:

- $f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$  (共轭对称性)
- $f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma)$  (对第一个变量可加)
- $f(k\alpha, \beta) = kf(\alpha, \beta)$  (对第一个变量线性)
- $f(\alpha, \alpha) \geq 0, f(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$  (正定性)

那么我们称  $f$  是  $V$  上的一个内积, 此时称  $(F, V, +, \cdot, f)$  是一个内积空间 (我们也简称  $V$  是一个内积空间)

习惯上, 我们也常常将  $f(\alpha, \beta)$  记作  $\langle \alpha, \beta \rangle_W$ 。如果我们仅在一个线性空间中讨论, 我们也常常简写为  $\langle \alpha, \beta \rangle$ 。

基于抽象内积空间, 我们可以提出一些相关的概念:

**定义 1.1.3: 正交**

设  $V$  是一个内积空间,  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ,

那么我们称  $\alpha$  与  $\beta$  是正交的, 记作  $\alpha \perp \beta$

如果一个基是相互正交的, 那么它被称为正交基:

**定义 1.1.4: 正交基**

设  $V$  是一个内积空间,  $V$  的一个基  $B$  如果满足:

$\forall \alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta, \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ,

那么我们称  $B$  是  $V$  的一个正交基。

我们特别考虑一种特殊的”补空间“, 称为正交补:

**定义 1.1.5: 正交补**

设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间,  $S \subseteq V$ 。我们定义:

$$S^\perp = \{\alpha \in V \mid \forall \beta \in S, \alpha \perp \beta\} \quad (1.2)$$

称为  $S$  的正交补。

值得注意的是, 上述定义中, 我们并不要求  $S$  是一个子空间; 我们也将看到, 就算  $S$  是子空间, 正交补和  $S$  的直和也不一定是整个空间。

接下来我们讨论两类重要的内积空间

**1.1.2 实内积空间、复内积空间****定义 1.1.6: 实内积空间**

考虑  $\mathbb{R}$  及其上的平凡自同构  $\sigma(x) = x$

此时, 实数域  $\mathbb{R}$  上的内积空间, 称为实内积空间。

特别地, 如果此时内积空间还是有限维的, 我们称之为 Euclidean 空间

由定义可知, 实内积空间拥有以下独特的特性: 不仅是对单变量线性, 而是对双变量线性, 而且完全对称。也就是说, 它是一个对称双线性映射; 特别地, 由于实数域是全序集, 因此任意向量的内积都是可比的。

**定义 1.1.7: 复内积空间**

考虑  $\mathbb{C}$  及其上的共轭映射  $\sigma(a + bi) = a - bi$

复数域  $\mathbb{C}$  上的内积空间，称为复内积空间（或酉空间）

实内积空间和复内积空间的独特特点是：可以定义范数，并导出度量，进而产生拓扑

**定义 1.1.8: 内积空间中的范数**

设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间， $F = \mathbb{R}$  或者  $F = \mathbb{C}$ ， $V$  上的自然范数  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  定义为：

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (1.3)$$

我们这里特意要求基域只能是实数或复数域是因为：在一般域上，不能保证向量与自身的内积可以定义良好的平方根。

在实内积空间和酉空间中，如果正交基的每一个向量的范数都是 1，我们也称之为标准正交基：

**定义 1.1.9: 标准正交基**

设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间， $F = \mathbb{R}$  或者  $F = \mathbb{C}$ ， $V$  的一个正交基  $B$  如果满足：

$$\forall \alpha \in B, \|\alpha\| = 1$$

那么我们称  $B$  是  $V$  的一个标准正交基。

此时，内积空间转变为一个线性赋范空间；进而，我们可以用范数定义度量：

**定义 1.1.10: 内积空间中的度量**

设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间， $F = \mathbb{R}$  或者  $F = \mathbb{C}$ ， $V$  上的自然度量  $d : V \times V \rightarrow F$  定义为：

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| \quad (1.4)$$

进而，我们可以定义极限和连续：

**定义 1.1.11: 内积空间中向量列的极限**

设  $V$  是一个实内积空间或酉空间,  $\{\alpha_i\}$  是  $V$  中的一个向量列, 如果存在一个向量  $\alpha \in V$ , 使得:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, d(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon \quad (1.5)$$

我们称向量列  $\{\alpha_i\}$  收敛于  $\alpha$ , 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$

**定义 1.1.12: 连续线性泛函**

设  $V, W$  分别是一个实内积空间或酉空间,  $f \in \text{hom}(V, W)$ , 如果有:

$$\forall \{\alpha_i\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) \quad (1.6)$$

那么我们称  $f$  是一个连续线性泛函

进而可以定义完备性:

**定义 1.1.13: Hilbert 空间**

设  $V$  是一个实内积空间或酉空间, 如果  $V$  中符合下面条件的任意向量列  $\{\alpha_i\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall m, n \geq N, d(\alpha_m, \alpha_n) < \varepsilon \quad (1.7)$$

收敛。

那么, 我们称  $V$  是完备的, 并称它是一个 Hilbert 空间。

我们也可以定义开集和闭集

**定义 1.1.14: 开集和闭集**

设  $V$  是一个实内积空间或酉空间,  $S \subseteq V$ , 如果对于任意  $\alpha \in S$ , 存在  $r > 0$ , 使得:

$$B(\alpha, r) = \{\beta \in V | d(\alpha, \beta) < r\} \subseteq S \quad (1.8)$$

那么我们称  $S$  是一个开集。

如果  $V - S$  是一个开集, 那么我们称  $S$  是一个闭集。

### 1.1.3 内积空间的性质

我们讨论一些性质。

1. 首先，我们讨论内积的线性性质。

$$\text{命题 1.1.1. } \langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$$

$$\langle \alpha, k\gamma \rangle = \bar{k}\langle \alpha, \gamma \rangle$$

$$\text{证明: } \langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \overline{\langle \beta + \gamma, \alpha \rangle} = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle} + \overline{\langle \gamma, \alpha \rangle} = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$$

$$\langle \alpha, k\gamma \rangle = \overline{\langle k\gamma, \alpha \rangle} = \bar{k}\overline{\langle \gamma, \alpha \rangle} = \bar{k}\langle \alpha, \gamma \rangle$$

□

接下来我们考察一种特别的内积，它只定义在实内积空间或酉空间，被称为标准内积：

2.

**命题 1.1.2.** 设  $V$  是  $\mathbb{R}$  上的一个  $n$  维线性空间， $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $V$  的一个基，

$\forall \alpha, \beta \in V$ ，如果  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$ ，那么我们说：

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (1.9)$$

是  $V$  上的一个内积

**证明:** 设  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i, \gamma = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ ，那么：

$$f(\alpha, \beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n b_i a_i = f\left(\sum_{i=1}^n b_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = f(\beta, \alpha)$$

$$f(\alpha, \beta + \gamma) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i (b_i + c_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i c_i = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) +$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i\right) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$$

$$f(\alpha, k\beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, k \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n kb_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i (kb_i) = k \sum_{i=1}^n a_i b_i =$$

$$kf\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = kf(\alpha, \beta)$$

$$\forall \alpha \neq \mathbf{0}, f(\alpha, \alpha) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$$

于是命题得证。□

酉空间情形类似如下：

3.

**命题 1.1.3.** 设  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的一个  $n$  维线性空间， $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $V$  的一个基，

$\forall \alpha, \beta \in V$ ，如果  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$ ，那么我们说：

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \quad (1.10)$$

是  $V$  上的一个内积

**证明:** 设  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i, \gamma = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ , 那么:

$$f(\alpha, \beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \bar{a}_i = \overline{\sum_{i=1}^n b_i a_i} = \overline{f(\beta, \alpha)}$$

$$f(\alpha, \beta + \gamma) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i + \bar{a}_i \bar{c}_i = \sum_{i=1}^n a_i (\bar{b}_i + \bar{c}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i +$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \bar{c}_i = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$$

$$f(\alpha, k\beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, k \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n (kb_i) \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{k} \bar{b}_i = \bar{k} \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i =$$

$$\bar{k} f(\alpha, \beta)$$

$$\forall \alpha \neq \mathbf{0}, f(\alpha, \alpha) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 > 0$$

于是命题得证。  $\square$

我们接下来探讨正交的性质。

4.

**命题 1.1.4.** 设  $V$  是一个内积空间,  $S \subseteq V$ , 那么  $S^\perp$  是  $V$  的一个子空间

**证明:** 取  $\forall \alpha, \beta \in S^\perp, k \in F$

依定义, 有  $\forall \eta \in S, \langle \alpha, \eta \rangle = 0, \langle \beta, \eta \rangle = 0$

注意到:  $\langle \alpha + \beta, \eta \rangle = \langle \alpha, \eta \rangle + \langle \beta, \eta \rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta \in S^\perp$

$\langle k\alpha, \eta \rangle = k \langle \alpha, \eta \rangle = 0 \Rightarrow k\alpha \in S^\perp$

于是命题得证。  $\square$

5.

**命题 1.1.5.** 设  $V$  是一个内积空间,  $V$  的有限子集  $S$  如果不存在零向量, 且向量两两正交, 那么它线性无关

**证明:** 设  $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \forall i \neq j, \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \alpha_i \neq \mathbf{0}$

考察线性组合  $\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i = \mathbf{0}$

对  $\forall i \leq l, k_i = 0$  作强归纳法。

首先,  $\mathbf{0} = \langle \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i, \alpha_1 \rangle = k_1 \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \Rightarrow k_1 = 0$ , 于是  $i = 1$  时成立;

现在假设  $i \leq l$  时成立, 考察  $l+1$  时:

$$\mathbf{0} = \left\langle \sum_{i=l+1}^n k_i \alpha_i, \alpha_{l+1} \right\rangle = k_{l+1} \langle \alpha_{l+1}, \alpha_{l+1} \rangle \Rightarrow k_{l+1} = 0, \text{ 于是 } i = l + 1 \text{ 时成立。}$$

由强归纳法原理,  $\forall i \leq n, k_i = 0$ , 于是命题得证。  $\square$

它的直接推论是, 正交基是一定存在的:

6.

**命题 1.1.6.** 任意有限维内积空间的正交基都是存在的。

**证明:** 取  $V$  的一个基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$$\text{考察以下一系列线性组合: } \eta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \alpha_i, \eta_j \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle} \eta_j$$

对归纳假设:  $\forall i, j \leq k, i \neq j, \langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0, \langle \eta_i, \eta_i \rangle \neq 0$  使用数学归纳法。

首先, 当  $k = 1$ ,  $\eta_1 = \alpha_1$ , 归纳假设显然成立;

我们现在假设  $k$  时成立, 考察  $k + 1$  时:

$$\forall j < k + 1$$

$$\begin{aligned} \langle \eta_{k+1}, \eta_j \rangle &= \langle \alpha_{k+1}, \eta_j \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \alpha_{k+1}, \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle} \langle \eta_i, \eta_j \rangle \\ &= \langle \alpha_{k+1}, \eta_j \rangle - \frac{\langle \alpha_{k+1}, \eta_j \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle} \cdot \langle \eta_j, \eta_j \rangle = \mathbf{0} \\ \langle \eta_j, \eta_{k+1} \rangle &= \overline{\langle \eta_{k+1}, \eta_j \rangle} = 0, \text{ 此时归纳假设成立。} \end{aligned}$$

于是  $\{\eta_i\}$  的确是相互正交的; 由有限正交向量组线性无关, 以及基的性质,  $\{\eta_i\}$  是  $V$  的一个正交基。  $\square$

7.

**命题 1.1.7.** 设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间,  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  是  $V$  的一个标准正交基, 那么

对于  $\forall \alpha \in V$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \eta_i \rangle \eta_i$$

**证明:** 因为  $\{\eta_i\}$  的确是一个基, 因为一定能找到一系列系数  $k_i$ , 使得  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \eta_i$

$$\text{此时只需注意到: } \langle \alpha, \eta_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n k_j \eta_j, \eta_i \right\rangle = k_i \langle \eta_i, \eta_i \rangle = k_i$$

$$\Rightarrow \alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \eta_i \rangle \eta_i$$

$\square$

**定理 1.1.1: Cauchy-Buniakowski-Schwarz 不等式**

设  $V$  是一个实内积空间或酉空间,  $\alpha, \beta \in V$ , 那么:

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\| \quad (1.11)$$

等号成立的充分必要条件是  $\alpha$  与  $\beta$  线性相关

8.

**证明:** 当  $\alpha, \beta$  线性相关, 要不  $\alpha = \mathbf{0}$ , 要不  $\beta = k\alpha$ , 此时不等式显然成立

考察  $\alpha, \beta$  线性无关的情形

此时, 一定有:  $\forall k, \alpha - k\beta \neq \mathbf{0}$

此时,  $\langle \alpha - k\beta, \alpha - k\beta \rangle > 0$

$$\Rightarrow \|\alpha\|^2 - k\langle \alpha, \beta \rangle - \bar{k}\langle \beta, \alpha \rangle + |k|^2 \|\beta\|^2 > 0$$

代入  $k = -\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\beta\|^2}$ , 得:

$$\|\alpha\|^2 - \frac{\overline{\langle \alpha, \beta \rangle} \langle \alpha, \beta \rangle}{\|\beta\|^2} - \frac{\langle \alpha, \beta \rangle \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}}{\|\beta\|^2} + \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|^2}{\|\beta\|^2} > 0$$

$$\Rightarrow \|\alpha\|^2 - \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|^2}{\|\beta\|^2} > 0$$

$$\Rightarrow |\langle \alpha, \beta \rangle|^2 < \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$$

于是命题得证。  $\square$

上述定理适用于两类内积空间, 尽管实内积空间并不能简单视为复内积空间的一个子空间, 但是证明过程中利用的性质都是通用的, 我们统一地写出这个证明。

9. 最后, 我们讨论 Hilbert 空间上的性质

**命题 1.1.8.** 设  $V$  是一个  $F$  上的 Hilbert 空间,  $S \subseteq V$  是  $V$  的一个闭子空间, 那么有

$$S \oplus S^\perp = V$$

**证明:** 我们先证明  $S + S^\perp = V$

$\forall \alpha \in V$ , 考察函数  $f(\theta) = \|\alpha - \theta\|, \theta \in S$

由于  $S$  是闭集, 那么  $f$  的最小值一定存在, 取  $\beta$  使得  $f(\beta) = \min_\theta f(\theta)$ , 并记  $\gamma = \alpha - \beta$

我们来证明, 的确有  $\gamma \in S^\perp$

$\forall \eta \in S$ , 我们希望证明  $\langle \gamma, \eta \rangle = 0$

考察函数  $g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

由于  $t\eta + \beta \in S$ , 而  $\|\alpha - \theta\|$  在  $\theta = \beta$  时取得最小值, 因此,  $g(t)$  在  $t = 0$  时取得最小值。

显然,  $g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2 = \|\gamma - t\eta\|^2 = \|\gamma\|^2 - 2t \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle + t^2 \|\eta\|^2$  连续可导

于是，一定有  $g'(0) = (-2 \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle + 2t\|\eta\|^2)|_{t=0} = -2 \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle = 0$ 。

若  $F = \mathbb{R}$ ，那么  $\langle \gamma, \eta \rangle = 0$ ，论证完成；

对于  $F = \mathbb{C}$  的情形，考虑  $g(t) = \|\alpha - (tin\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

同理可得  $\operatorname{Re}\langle \gamma, in\eta \rangle = 0$ 。

$\Rightarrow \operatorname{Re}(-i\langle \gamma, \eta \rangle) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\operatorname{Im}\langle \gamma, \eta \rangle - i\operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\langle \gamma, \eta \rangle = 0$ 。

于是此时有  $\langle \gamma, \eta \rangle = 0$ ，论证完成。

最后我们证明  $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$

设  $\alpha \in S \cap S^\perp$ ，那么  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$

于是命题得证。  $\square$

利用这个结论可以证明以下重要事实：

### 定理 1.1.2: Riesz 表示定理

设  $V$  是一个  $F$  上的 Hilbert 空间，如果  $f \in \hom(V, F)$  是一个连续泛函，那么存在唯一的  $\phi \in V$ ，使得：

$$f(\alpha) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad (1.12)$$

**证明：** 我们首先证明： $\ker f$  是一个闭集。

注意到：任意收敛序列  $\{\alpha_n\} \subseteq \ker f$ ，因为  $f$  是连续的，因此有

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in \ker f$$

即  $\ker f$  对任意序列的极限封闭。

接下来考察集合  $\overline{\ker f} := \{\lambda | \forall \lambda \in O, O \text{ 是开集}, O \cap \ker f \neq \emptyset\}$

注意到，一定有  $\ker f \subseteq \overline{\ker f}$ ，因为  $\ker f$  中的任意一点，包含其的开集与  $\ker f$  的交集至少包含这个点本身。

考察  $\alpha \in \overline{\ker f}$

取  $\alpha_i \in B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap \ker f$ ，其中  $B(\alpha, s) := \{\beta | d(\alpha, \beta) < s\}$ ，由  $\overline{\ker f}$  的定义可知序列是的确可以取得的。

那么，此时一定有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ ，因为  $0 < d(\alpha, \alpha_k) < \frac{1}{k}$ 。

但是，我们已经指出： $\ker f$  对任意收敛序列的极限封闭，因此  $\alpha \in \ker f$ 。那么， $\ker f = \overline{\ker f}$

那么，我们说， $\ker f$  是闭集。因为： $\ker f$  已经包含了所有与开集有非空交集的点，那么对于  $\forall \beta \in V - \ker f$ ，一定存在包含  $\beta$  的一个开集  $O$ ，使得  $O \in V - \ker f$ ，而这正

是  $\ker f$  闭的定义。

于是依照之前证明的结论，一定有  $\ker f \oplus (\ker f)^\perp = V$

于是  $\text{Im } f \cong V / \ker f$   $\text{Im } f \cong (\ker f)^\perp$

但是， $\text{Im } f \subseteq F \Rightarrow \dim \text{Im } f = 1$ ，因此  $\dim(\ker f)^\perp = 1$

取  $(\ker f)^\perp$  的一个标准正交基  $\{\eta\}$ ，那么此时有：

$$f(\alpha) = \langle \alpha, \eta \rangle f(\eta) = \langle \alpha, \overline{f(\eta)} \eta \rangle$$

记  $\phi = \overline{f(\eta)} \eta$ ，那么此时有  $f(\alpha) = \langle \alpha, \phi \rangle$ 。

于是命题得证。  $\square$

利用子空间和正交补直和，可以导出以下显然的事实：

**命题 1.1.9.** 设  $V$  是一个 *Hilbert* 空间，如果  $S$  是  $V$  的一个子空间，那么有  $(S^\perp)^\perp = S$

**证明：** 我们先证明  $S \subseteq (S^\perp)^\perp$

$\forall \alpha \in S$ ，有  $\forall \beta \in S^\perp, \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ （因为这就是正交补的定义）

反过来看，其实就是  $\forall \beta \in S^\perp, \langle \beta, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha \in (S^\perp)^\perp$

接下来证明  $(S^\perp)^\perp \subseteq S$

取  $\forall \alpha \in (S^\perp)^\perp$

因为  $(S^\perp)^\perp \subseteq V$ ，因此依照之前的命题，一定存在分解  $\alpha = \beta + \gamma, \beta \in S, \gamma \in S^\perp$

此时注意到： $\gamma = \alpha - \beta, \beta \in S \Rightarrow \beta \in (S^\perp)^\perp \Rightarrow \gamma \in (S^\perp)^\perp$

因此有  $\gamma \in S^\perp \cap (S^\perp)^\perp \Rightarrow \langle \gamma, \gamma \rangle = 0 \Rightarrow \gamma = \mathbf{0}$

于是有  $\alpha = \beta \in S$ ，那么一定有  $(S^\perp)^\perp \subseteq S$ ，于是命题得证。  $\square$

## 1.2 正规算子和自伴算子

本节中，如无特别说明，我们假定所有线性空间都定义了内积。

### 1.2.1 伴随算子

我们先定义伴随算子，它是我们后续讨论的基础。

**定义 1.2.1: 共轭算子**

设  $V, W$  是  $F$  上的两个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, W)$ , 我们定义满足以下条件的算子  $A^* : W \rightarrow V$

$$\langle A(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V \quad (1.13)$$

我们先研究伴随算子的一些性质。

1.

**命题 1.2.1.** 设  $A \in \text{hom}(V, W)$ , 那么  $A^*$  是唯一的。

**证明:** 不妨假设命题不成立, 那么存在  $B, C : W \rightarrow V, B \neq C$ , 此时有:

$$\forall \alpha \in V, \beta \in W, \langle A\alpha, \beta \rangle_W = \langle \alpha, B\beta \rangle_V = \langle \alpha, C\beta \rangle_V$$

显然, 一定  $\exists \gamma, B(\gamma) \neq C(\gamma)$

此时注意到:  $\langle B(\gamma) - C(\gamma), B(\gamma) - C(\gamma) \rangle_V = \langle B(\gamma), B(\gamma) \rangle_V - \langle B(\gamma), C(\gamma) \rangle_V = \mathbf{0} \Rightarrow B(\gamma) = C(\gamma)$ , 与假设矛盾。

于是命题得证。  $\square$

2.

**命题 1.2.2.**  $\forall A \in \text{hom}(V, W), A^* \in \text{hom}(W, V)$

**证明:**  $\forall \alpha \in V, \beta \in W, k \in F$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, (A^* + B^*)(\beta) \rangle_V &= \langle A(\alpha), \beta \rangle_W + \langle B(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V + \langle \alpha, B^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, A^*(\beta) + \\ &\quad B^*(\beta) \rangle_V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A^* + B^*)(\beta) = A^*(\beta) + B^*(\beta)$$

$$\langle \alpha, (kA^*)(\beta) \rangle_V = k \langle A(\alpha), \beta \rangle_W = k \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, kA^*(\beta) \rangle_V$$

$$\Rightarrow (kA^*)(\beta) = kA^*(\beta)$$

于是命题得证。  $\square$

3.

**命题 1.2.3.**  $\forall A, B \in \text{hom}(V, W), (A + B)^* = A^* + B^*$

**证明:**  $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, (A + B)^*(\beta) \rangle_V &= \langle (A + B)(\alpha), \beta \rangle_W = \langle A(\alpha), \beta \rangle_W + \langle B(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V + \\ &\quad \langle \alpha, B^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, A^*(\beta) + B^*(\beta) \rangle_V \end{aligned}$$

由于  $\alpha, \beta$  是任意选取的, 命题得证。  $\square$

4.

**命题 1.2.4.**  $(kA)^* = \bar{k}A^*$

**证明:**  $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$$\langle \alpha, (kA)^*(\beta) \rangle_V = \langle (kA)(\alpha), \beta \rangle_W = k \langle A(\alpha), \beta \rangle_W = k \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, \bar{k}A^*(\beta) \rangle_V$$

由于  $\alpha, \beta$  是任意选取的, 命题得证。  $\square$

5.

**命题 1.2.5.**  $\forall A \in \text{hom}(V, W), (A^*)^* = A$

**证明:**  $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$$\langle \alpha, (A^*)^*(\beta) \rangle_V = \langle (A^*)(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A(\beta) \rangle_V$$

由于  $\alpha, \beta$  是任意选取的, 命题得证。  $\square$

6.

**命题 1.2.6.**  $\forall A \in \text{hom}(V, W), B \in \text{hom}(U, V), (AB)^* = B^*A^*$

**证明:**  $\forall \alpha \in U, \beta \in W$

$$\langle \alpha, (AB)^*(\beta) \rangle_U = \langle (AB)(\alpha), \beta \rangle_W = \langle B(\alpha), A^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, (B^*A^*)(\beta) \rangle_U$$

由于  $\alpha, \beta$  是任意选取的, 命题得证。  $\square$

7.

**命题 1.2.7.** 如果  $A \in \text{hom}(V, W)$  可逆, 那么此时  $A^* \in \text{hom}(W, V)$  也可逆, 并且有

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

**证明:** 只需证明  $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = I$

$\forall \alpha, \beta \in V$

$$\langle \alpha, (A^*(A^{-1})^*)(\beta) \rangle_V = \langle A(\alpha), (A^{-1})^*(\beta) \rangle_W = \langle (A^{-1}A)(\alpha), \beta \rangle_V = \langle \alpha, \beta \rangle_V$$

$$\langle \alpha, ((A^{-1})^*A^*)(\beta) \rangle_V = \langle (A^{-1})(\alpha), A^*(\beta) \rangle_W = \langle (AA^{-1})(\alpha), \beta \rangle_V = \langle \alpha, \beta \rangle_V$$

由于  $\alpha, \beta$  是任意选取的, 命题得证。  $\square$

8.

**命题 1.2.8.** 设  $A \in \text{hom}(V, W)$ , 其中  $V, W$  是 *Hilbert* 空间, 有以下结论:

$$(a) \ker A = (\text{Im } A^*)^\perp$$

$$(b) \text{Im } A = (\ker A^*)^\perp$$

$$(c) \ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$$

$$(d) \text{Im } A^* = (\ker A)^\perp$$

证明:  $\ker A = \{\alpha \in V | A(\alpha) = \mathbf{0}\}$   
 $= \{\alpha \in V | \forall \beta \in W, \langle A(\alpha), \beta \rangle_W = 0\}$   
 $= \{\alpha \in V | \forall \beta \in W, \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V = 0\}$   
 $= \{A^*(\beta) \in V | \beta \in W\}^\perp = (\text{Im } A^*)^\perp$

于是第一条性质得证。

我们取  $A^*$  代入上式, 得:  $\ker A^* = (\text{Im}(A^*))^\perp = (\text{Im } A)^\perp$ , 于是第三条性质得证。

对第一条性质左右取正交补, 得:  $(\ker A)^\perp = \text{Im } A^*$ , 于是第四条性质得证。

对第二条性质左右取正交补, 得:  $(\text{Im } A)^\perp = \ker A^*$ , 于是第二条性质得证。  $\square$

9.

**命题 1.2.9.** 设  $A \in \text{hom}(V, W)$ ,  $V, W$  的一个标准正交基分别为:  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  那么  $A$  在  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  下的矩阵  $\mathbf{A}$ , 和  $A^*$  在  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  下的矩阵  $\mathbf{A}^*$  满足:

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}^T} \quad (1.14)$$

其中矩阵的共轭定义为:  $\overline{\mathbf{T}} := (\overline{\mathbf{T}(i; j)})_{m \times n}$

证明:  $A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}(i; k) \beta_i \Rightarrow \langle A(\alpha_k), \beta_l \rangle = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}(i; k) \langle \beta_i, \beta_l \rangle = \mathbf{A}(l; k)$

$$A^*(\beta_l) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}(j; l) \alpha_j \Rightarrow \langle \alpha_k, A^*(\beta_l) \rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{A}(j; l)} \langle \alpha_k, \alpha_j \rangle = \overline{\mathbf{A}(k; l)}$$

由伴随算子的定义, 有  $\langle A(\alpha_k), \beta_l \rangle = \langle \alpha_k, A^*(\beta_l) \rangle$ , 于是一定有  $\mathbf{A}(l; k) = \overline{\mathbf{A}(k; l)}$

命题得证。  $\square$

## 1.2.2 正规算子

先给出定义。

### 定义 1.2.2: 正规算子

设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$ , 如果  $AA^* = A^*A$ , 那么我们称  $A$  是一个正规算子

我们讨论正规算子的性质

1. 先给出两个引理:

### 引理 1.2.1

$V$  是  $\mathbb{C}$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$

如果  $\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0$ , 那么  $A = \mathbf{0}$

证明: 注意到:

$$\forall \alpha, \beta \in V$$

$$\begin{aligned} & \frac{\langle A(\alpha+\beta), \alpha+\beta \rangle - \langle A(\alpha-\beta), \alpha-\beta \rangle}{4} + \frac{\langle A(\alpha+i\beta), \alpha+i\beta \rangle - \langle A(\alpha-i\beta), \alpha-i\beta \rangle}{4}i \\ &= \frac{2\langle A(\beta), \alpha \rangle + 2\langle A(\alpha), \beta \rangle}{4} + \frac{-2i\langle A(\alpha), \beta \rangle + 2i\langle A(\beta), \alpha \rangle}{4}i \\ &= \langle A(\alpha), \beta \rangle \end{aligned}$$

但是, 注意到原式的每一项都具备  $\langle A(\gamma), \gamma \rangle$  的形式。那么, 一定有  $\langle A(\alpha), \beta \rangle = 0$ , 从而  $A = 0$ 。

命题得证。  $\square$

### 引理 1.2.2

$V$  是  $F$  上的一个内积空间,  $F = \mathbb{R}$  或  $F = \mathbb{C}$ 。如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  满足  $A = A^*$ , 那么:

$$\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

证明:  $\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha + \beta), \alpha + \beta \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle + \langle A(\beta), \beta \rangle + \langle A(\alpha), \beta \rangle + \langle A(\beta), \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha), \beta \rangle + \langle A(\beta), \alpha \rangle = 0$$

此时, 如果  $F = \mathbb{R}$ , 那么立即得到  $\langle A(\alpha), \beta \rangle = 0 \Rightarrow A = 0$ ;

而如果  $F = \mathbb{C}$ , 前面的引理已经指出了  $A = 0$ 。于是命题得证。  $\square$

事实上, 符合以上所述的的算子我们一般称为自伴算子, 它显然是一种特殊的正规算子。但是, 因为正规算子是更一般的情形, 我们暂时不先介绍它。

**命题 1.2.10.**  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = \langle A^*(\alpha), A^*(\alpha) \rangle$

证明:  $A$  是正规算子  $\Leftrightarrow AA^* - A^*A = 0$

注意到,  $(AA^* - A^*A)^* = AA^* - A^*A$

于是  $A$  是自伴算子  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in V, \langle (AA^* - A^*A)(\alpha), \alpha \rangle = 0$   
 $\Leftrightarrow \langle AA^*(\alpha), \alpha \rangle = \langle A^*A(\alpha), \alpha \rangle$   
 $\Leftrightarrow \langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = \langle A^*(\alpha), A^*(\alpha) \rangle$

于是命题得证。  $\square$

2.

**命题 1.2.11.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子，那么有  $\ker A = \ker A^*$

**证明:** 依照之前的命题，一定有：

$$\begin{aligned} \ker A &= \{\alpha \in V | A(\alpha) = \mathbf{0}\} = \{\alpha \in V | \langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = 0\} = \{\alpha \in V | \langle A^*(\alpha), A^*(\alpha) \rangle = 0\} \\ &= \{\alpha \in V | A^*(\alpha) = \mathbf{0}\} = \ker A^* \end{aligned}$$

于是命题得证。  $\square$

3.

**命题 1.2.12.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子，那么有  $\text{Im } A = \text{Im } A^*$

**证明:** 对上面的命题，左右取正交补，得：

$$\text{Im } A^* = \text{Im } A$$

于是命题得证。  $\square$

4.

**命题 1.2.13.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子，那么有  $\ker A \oplus \text{Im } A = V$

$$\text{证明: } \ker A \oplus \text{Im } A = \ker A^* \oplus (\ker A^*)^\perp = V$$

于是命题得证。  $\square$

5.

**命题 1.2.14.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子，那么  $\forall \lambda \in F, A - \lambda I$  也是正规算子

$$\begin{aligned} \text{证明: } (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* &= (A - \lambda I)(A^* - \lambda I) = AA^* - \lambda A - \lambda A^* + \lambda^2 I = A^*A - \lambda A^* - \\ &\quad \lambda + \lambda^2 I = (A^* - \lambda I)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I) \end{aligned}$$

于是命题得证。  $\square$

6.

**命题 1.2.15.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子，那么  $\lambda$  是  $A$  的特征值， $\alpha$  是  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量的充要条件是：

$\bar{\lambda}$  是  $A^*$  的特征值,  $\alpha$  是  $A^*$  的属于  $\bar{\lambda}$  的特征向量

证明:  $\alpha$  是  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量

$$\Leftrightarrow A(\alpha) = \lambda\alpha$$

$$\Leftrightarrow \langle (A - \lambda I)(\alpha), (A - \lambda I)(\alpha) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle (A - \lambda I)^*(\alpha), (A - \lambda I)^*(\alpha) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow A^*(\alpha) = \bar{\lambda}\alpha$$

于是命题得证。 □

7.

**命题 1.2.16.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子, 那么  $A$  的属于不同特征值的特征向量相互正交

证明: 假设  $\alpha, \beta \in V, k, l \in F, k \neq l, A(\alpha) = k\alpha, A(\beta) = l\beta$

注意到:

$$\begin{aligned} & (k - l)\langle \alpha, \beta \rangle \\ &= k\langle \alpha, \beta \rangle - l\langle \alpha, \beta \rangle \\ &= \langle k\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, l\beta \rangle \\ &= \langle A(\alpha), \beta \rangle - \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle \\ &= \langle A(\alpha), \beta \rangle - \langle A(\alpha), \beta \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \end{aligned}$$

于是命题得证。 □

### 1.2.3 自伴算子

**定义 1.2.3:** 自伴算子

设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$ , 如果  $A = A^*$ , 那么我们称  $A$  是一个自伴算子

讨论性质。

#### 1. 自伴算子仅具有实特征值

**推论 1.2.3:** 自伴算子仅具有实特征值

$V$  是一个  $F$  上的内积空间,  $F = \mathbb{R}$  或  $F = \mathbb{C}$ , 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是自伴算子, 那么  $A$  的所有特征值都是实数

**证明:** 这是显然的, 因为假如  $\alpha$  是  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量, 那么注意到:

$$\text{此时 } \lambda\alpha = A(\alpha) = A^*(\alpha) = \bar{\lambda}\alpha$$

由特征值和特征向量的定义可知,  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , 因此  $\lambda = \bar{\lambda}$ , 即  $\lambda \in \mathbb{R}$ 。  $\square$

2.

**命题 1.2.17.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是自伴算子, 那么  $A$  的所有特征值都是实数

3.

**命题 1.2.18.** 如果  $A \in \text{hom}(V, V)$  是自伴算子, 那么属于不同特征值的特征向量相互正交

4.

**命题 1.2.19.** 设  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$  是正规算子的充要条件是:

存在两个自伴算子  $T, S \in \text{hom}(V, V)$ , 使得  $TS = ST, A = T + iS$

事实上, 在复内积空间中, 向量与其在算子作用下的向量的内积, 也可以反应算子的自伴性, 如下:

5.

**命题 1.2.20.** 设  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$ , 那么  $A$  是自伴算子的充要条件是:

$$\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle \in \mathbb{R}$$

## 1.2.4 谱定理

**定义 1.2.4: 谱**

设  $V$  是  $F$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$ , 我们定义:

$$\sigma(A) := \{\lambda \in F \mid A - \lambda I \text{ 不可逆}\} \quad (1.15)$$

称为  $A$  的谱

**定理 1.2.4: 实谱定理**

设  $V$  是  $\mathbb{R}$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$

以下三个命题等价:

1.  $A$  是自伴算子
2.  $V$  存在一个标准正交基, 使得  $A$  在该基下的矩阵为对角矩阵
3.  $V$  存在一个由  $A$  的特征向量组成的标准正交基

**定理 1.2.5: 复谱定理**

设  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的一个内积空间,  $A \in \text{hom}(V, V)$

以下三个命题等价:

1.  $A$  是正规算子
2.  $V$  存在一个标准正交基, 使得  $A$  在该基下的矩阵为对角矩阵
3.  $V$  存在一个由  $A$  的特征向量组成的标准正交基

## 1.3 保距算子、么正算子

## 1.4酉算子

## 1.5 奇异值与奇异值分解

## 1.6 UR、QR、Schur 分解