第一章　线性空间

1.1　线性空间的定义

1.1.1　线性空间的定义

定义 1.1.1: 线性空间

设 F 是一个域，V 是一个集合，存在两个运算 $+: V \times V \to V$ 和 $\cdot: F \times V \to V$，分别称为加法和乘法，使得：

① $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \alpha \in V, \mathbf{0} + \alpha = \alpha$

② $\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V, \text{s.t. } \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

③ $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha$

④ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

⑤ $\forall \alpha \in V, 1 \cdot \alpha = \alpha$

⑥ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k \cdot l) \cdot \alpha = k \cdot (l \cdot \alpha)$

⑦ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k + l) \cdot \alpha = k \cdot \alpha + l \cdot \alpha$

⑧ $\forall k \in F, \alpha \in V, k \cdot (\beta + \gamma) = k \cdot \beta + k \cdot \gamma$

那么我们称 V 是一个 F 上的线性空间（或向量空间）

1.1.2　线性子空间

定义 1.1.2: 线性子空间

设 V 是一个线性空间，集合 $W \subseteq V$，如果 W 在 V 的运算构成一个线性空间，那么我们称 W 是 V 的一个线性子空间

1.1.3 线性空间的性质

1.

命题 1.1.1. $\mathbf{0}$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 均是零元，并且 $\mathbf{0}_1 \neq \mathbf{0}_2$

我们注意到：$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

2.

命题 1.1.2. $\forall \alpha \in V$，$-\alpha$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，α 有两个逆元 β_1, β_2，并且 $\beta_1 \neq \beta_2$

我们注意到：$\beta_1 = \mathbf{0} + \beta_1 = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 = \beta_2 + (\alpha + \beta_1) = \beta_2 + \mathbf{0} = \beta_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

3.

命题 1.1.3. $\forall \alpha \in V, 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$

证明: $0 \cdot \alpha = (0+0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha$

$\Rightarrow 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha) = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha)$

$\Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot \alpha$ □

4.

命题 1.1.4. $\forall k \in F, k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

证明: $k \cdot \mathbf{0} = k \cdot (0 \cdot \alpha) = (k \cdot 0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$ □

5.

命题 1.1.5. $\forall \alpha \in V, (-1) \cdot \alpha = -\alpha$

证明: $\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha = (1 + (-1)) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \alpha$

$\Rightarrow \mathbf{0} + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha + (-1) \cdot \alpha \Rightarrow (-1) \cdot \alpha = -\alpha$ □

6. 事实上，验证一个子集是否是线性子空间，只需要验证封闭性即可，其他的条件都是不必要的。

命题 1.1.6. $W \subseteq V$ 是 V 的线性子空间，当且仅当：

$\forall k \in F, \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta \in V, k \cdot \alpha \in V$

证明： 充分性是显然的，对于必要性，我们依次验证：

首先，$0 \in F$，因此 $0 \cdot \alpha = \mathbf{0} \in W$

其次，因为 $-1 \in F$，所以 $(-1) \cdot \alpha = -\alpha \in W$

剩余的六条运算律，因为 W 上的运算即是 V 上的运算在 W 上的限制，所以显然成立。

那么命题得证。 □

1.2 线性组合

本节中，我们着手研究一系列向量以相加，相乘的形式组合而成的新向量，称之为线性组合。

其最一般的形式是 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$，但是我们希望能够进一步拓展，考虑无穷多个向量的线性组合。

因此，我们需要先定义向量列的极限，其最好方式就是先定义出线性空间中的度量。

1.2.1 度量线性空间

定义 1.2.1: 度量线性空间、线性组合的定义

设 V 是一个域 F 上的线性空间，映射 $d : V \times V \to F$ 如果满足：

① $\forall \alpha, \beta \in V, d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

② $\forall \alpha, \beta \in V, d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$

③ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \geqslant d(\alpha, \gamma)$

那么我们称 (V, d) 是一个度量线性空间（或 Banach 空间），d 称为 V 中的度量

这样，我们就可以定义出线性组合

定义 1.2.2: 线性组合

设 V 是一个域 F 上的线性空间，$\{\alpha_i \in V\}$ 是一个至多可数的向量组

那么如果向量 $\beta \in V$ 满足：$\forall \varepsilon > 0, \exists, n \in \mathbb{N}_+, \text{s.t. } d(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i, \beta) < \varepsilon, k_i \in F$

那么我们称 β 是一个由向量组 $\{\alpha_i \in V\}$ 张成的的线性组合，并称 β 可以由 $\{\alpha_i \in V\}$ 线性表出

如果 $\{\alpha_i \in V\}$ 可数，记作：$\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$，否则记作 $\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$，其中 n 是向量组的元素数

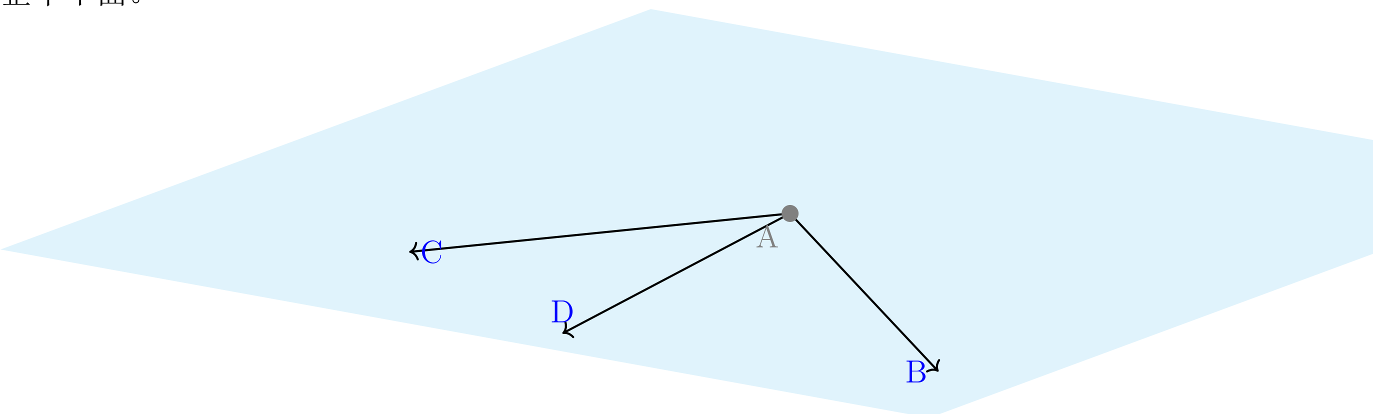
由向量组 S 张成的全体线性组合形成的子空间记作：$span_F(S)$（或 $L(S)$，$\langle S \rangle$）

我们不考虑不可数的向量组张成的线性组合，因为不可数的向量的求和的定义通常是不良好的。

此后除非特别说明，我们默认我们所说的向量组指的是至多可数的向量组。

1.2.2 向量组的线性相关性和线性无关性

我们观察到一个现象：向量组张成线性子空间时，并非每一个向量都有贡献，有些向量是不必要的。就像下图中，尽管三个向量张成了整个平面，但是其实任取其中之二，就足以张成整个平面。



我们会自然地认为：如果每一个向量都和其他向量的“方向”不一样，就不会有不必要的向量，或者说，不应该可以在赋予非零系数时，张成零向量

此时，向量组被称为是“线性无关的”。

定义 1.2.3: 线性无关的向量组

向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 如果满足:

$\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x = \mathbf{0} \Rightarrow \forall x \in A, k_x = 0$

那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个线性无关的向量组

如果一个向量组不是线性无关的，那么我们称它是线性相关的，我们可以写出以下定义

定义 1.2.4: 线性相关的向量组

向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 如果满足:

存在不全为零的一组系数 $k_x, x \in A$，使得 $\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x = \mathbf{0}$

那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个线性相关关的向量组

1.2.3 线性相关和线性无关的性质

1. 单个向量当且仅当它是零向量是线性相关

   命题 1.2.1. α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$

   证明: 先证充分性，如果 α 线性相关，那么 $\exists k \in F, k \neq 0, k\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$

   必要性是显然的 □

2. 如果一个部分组线性相关，整个向量组也是线性相关的

   命题 1.2.2. 如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个向量组, 它的一个部分组 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}, B \subseteq A$ 线性相关，那么 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 也是线性相关的

   证明: 因为 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}$ 线性相关，所以存在不全为零的系数 $k_x, x \in B$，使得 $\sum\limits_{x\in B} k_x\alpha_x = \mathbf{0}$

   我们可以将 k_x 扩展到 A 上，令 $k_x = 0, x \in A - B$，那么 $\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x = \sum\limits_{x\in B} k_x\alpha_x = \mathbf{0}$，所以 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关 □

   反过来，我们可以推论出，线性无关向量组的任意部分组也是线性无关的

   推论 1.2.1: 线性无关向量组的任意部分组都线性无关

   若向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，那么它的任意一个部分组 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}, B \subseteq A$ 也是线性无关的

证明: 如果并非如此，那么至少有一个部分组线性相关，那么按照命题，整个向量组线性相关，这与假设矛盾，所以命题得证 □

因此，一个显然的事实是，一个包含零向量的向量组是一定线性相关的

命题 1.2.3. 如果 $\mathbf{0} \in \{\alpha_x \in V | x \in A\}$，那么 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关

证明: 显然 □

3. 向量组线性相关的充要条件是：存在一个向量可以由其他向量线性表出

命题 1.2.4. 向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组中存在一个向量可以由其他向量线性表出

证明: 先证充分性。如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关，那么存在不全为零的系数 $k_x, x \in A$，使得 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x = \mathbf{0}$

取其中任意一个不为零的系数 $k_a \neq 0$，那么有 $\alpha_a = -\frac{1}{k_a} \sum\limits_{x \in A - \{a\}} k_x \alpha_x$，充分性得证

接下来证明必要性，如果 $\alpha_a = \sum\limits_{x \in A - \{a\}} k_x \alpha_x$，那么我们只需令 $k_a = -1$

那么就有 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x = \mathbf{0}$ □

4. 能唯一地表出一个向量的向量组线性无关

命题 1.2.5. $\beta \in V$ 可以被 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 唯一地线性表出 $\Leftrightarrow \{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关

证明: 先证充分性。

这其实是显然的，因为如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关，那么有一个线性组合 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x = \mathbf{0}$ 并且 k_x 不全为零

假设 $\beta = \sum\limits_{x \in A} l_x \alpha_x$，那么也有 $\sum\limits_{x \in A} (k_x + l_x) \alpha_x$，这与假设矛盾

再证必要性。

不妨假设 $\beta = \sum\limits_{x \in A} l_x \alpha_x = \sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x \exists x \in A, k_x \neq l_x$

那么 $\sum\limits_{x \in A} (l_x - k_x) \alpha_x = \mathbf{0}$，又因为 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，所以 $l_x - k_x = 0$。因此表出方式是唯一的，命题得证 □

5. 向线性无关向量组中加入一个向量，如果变得线性相关，那么这个向量可以由其他向量线性表出

命题 1.2.6. 如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，$\{\beta, \alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关

那么 β 可由 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性表出

证明： 因为 $\{\beta, \alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关，所以存在不全为零的系数 $k_x, l \in F, x \in A$，使得 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x + l\beta = \mathbf{0}$

我们只需证 $l \neq 0$。我们不妨假设 $l = 0$

那么 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x = \mathbf{0}$。但是 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，所以 $\forall x \in A, k_x = 0$，这与系数不全为零的假设矛盾

那么有 $l \neq 0$，于是 $\beta = -\frac{1}{l} \sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x$，命题得证 □

1.3 极大线性无关向量组、向量组的秩

前面我们讨论了线性无关向量组，它可以说是“所有元素都有贡献”的，接下来我们讨论，如果把一个向量集剔除至恰好包含所有“有贡献”的向量，这种向量组有什么性质

我们的一个想法是，如果剔除至向量组本身依旧线性无关，但是加入任意向量就变得线性相关，那么这个向量组就是我们想要的“极大线性无关向量组”

1.3.1 极大线性无关向量组

定义 1.3.1: 极大线性无关向量组

设 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个向量组

如果它的一个部分组 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}, B \subseteq A$ 线性无关，并且 $\forall \beta \in V, \{\beta, \alpha_x | x \in B\}$ 线性相关

那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}$ 是 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 的一个极大线性无关向量组

我们直观地认为，每一个极大线性无关向量组应该具备相同的元素数（或势），就像在三维空间中，我们可以选取不同的坐标系，但是每个坐标系都恰好三个坐标轴

1.3.2 向量组的等价

我们在向量组上定义以下等价关系：

定义 1.3.2: 向量组的线性表出

如果向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 中的任意向量可由 $\{\beta_x \in V | x \in B\}$ 线性表出

那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 可由 $\{\beta_x \in V | x \in B\}$ 线性表出

定义 1.3.3: 向量组的等价

如果向量组 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 可由 $\{\beta_x \in V|x \in B\}$ 线性表出，并且 $\{\beta_x \in V|x \in B\}$ 可由 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 线性表出

那么我们称 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 和 $\{\beta_x \in V|x \in B\}$ 是等价的，记作：$\{\alpha_x \in V|x \in A\} \cong \{\beta_x \in V|x \in B\}$

我们首先验证它的确是一个等价关系

命题 1.3.1. 向量组的等价是一个等价关系

证明: 自反性是显然的，因为向量组中的任意向量 α_x 可以由它自己线性表出；

对称性由定义是显然的；

最后证明传递性，假设 $\{\alpha_x \in V|x \in A\} \cong \{\beta_x \in V|x \in B\}, \{\beta_x \in V|x \in B\} \cong \{\gamma_x \in V|x \in C\}$

设 $\alpha_x = \sum\limits_{y\in B} k_{xy}\beta_y, \beta_y = \sum\limits_{z\in C} l_{yz}\gamma_z$

那么 $\alpha_x = \sum\limits_{y\in B} k_{xy}\left(\sum\limits_{z\in C} l_{yz}\gamma_z\right) = \sum\limits_{y\in B, z\in C} k_{xy}l_{yz}\gamma_z$

因此 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 可由 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 线性表出，同理可证 $\{\gamma_x \in V|x \in C\}$ 可由 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 线性表出

所以 $\{\alpha_x \in V|x \in A\} \cong \{\gamma_x \in V|x \in C\}$，传递性得证。于是命题得证 □

接下来讨论一些向量组等价的性质：

1. 任何向量组和它的极大线性无关向量组等价

   命题 1.3.2. 任何向量组和它的极大线性无关向量组等价

   证明: 极大线性无关向量组显然可以由原向量组线性表出；

   而按照极大线性无关向量组的定义，向其中加入任意一个向量，向量组会变得线性相关，于是，原向量组中的任意一个向量都可以由极大线性无关向量组线性表出。命题得证 □

2. 向量组的两个极大线性无关向量组等价

   命题 1.3.3. 向量组的两个极大线性无关向量组等价

   证明: 只需利用上面的性质和等价的传递性即可完成证明。 □

3. 一个向量组如果可以由一个势比它小的向量组线性表出，那么它线性相关 在给出命题及其证明前，我们先证明一个显然的引理

引理 1.3.1

向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 如果线性相关，

那么一定 $\exists k, \text{s.t. } \alpha_k$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ 线性表出，并且 $\text{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n) = \text{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

接下来给出命题

证明： 因为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 线性相关，所以一定 $\exists k_1, \cdots, k_n, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0}$

只需选取满足 $k_i \neq 0$ 的最大的下标 p，那么有 $\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p = \mathbf{0}$

于是 $\alpha_p = -\frac{1}{k_p} \sum\limits_{i=1}^{p-1} \alpha_i$

此时因为 α_p 可由前面的向量线性表出，因此去除其不会对生成的子空间有任何影响，命题得证。 □

命题 1.3.4. 如果向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 可由 $\{\beta_x \in V | x \in B\}$ 线性表出，并且 $\mathit{Card}\ A > \mathit{Card}\ B$

那么 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关

证明： 先考虑两者都是有限向量组的情况

我们可以证明：如果 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 可由 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 线性表出，并且 $m > n$，那么 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 线性相关

记 $W = \text{span}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$。

我们采取以下方法证明：用 α_i 逐步替换 β_j，但是保持生成的子空间不变。最后，我们一定会发现，β_j 已经被全部替换，但是此时依旧有 α_i 未曾被加入向量组过。这就说明了 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 中有向量可以被其它向量线性表出，即 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 线性相关

也就是说，我们希望构造一系列向量组 $B_0, B_1, \ldots, B_n$，使得对于 $j = 0, 1, \ldots, n$，向量组 B_j 满足：

(a) B_j 的长度为 n。

(b) $\text{span}(B_j) = W$。

(c) B_j 包含向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ 以及从原始向量组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 中剩下的 $n - j$ 个向量。

我们首先取 $B_0=\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$

我们如此由 B_{j-1} 迭代出向量组 B_j：

考虑向量组 $\alpha_j\cup B_{j-1}$（并且不失一般性地将 α_j 置于向量组的首位）。由于 $\alpha_j\in W$，所以一定有 $\mathrm{span}(\alpha_j\cup B_{j-1})=W$

由于 $\mathrm{span}(B_{j-1})=W$，向量 α_j 在 B_{j-1} 生成的子空间中，因此向量组 $\alpha_j\cup B_{j-1}$ 是线性相关的。

根据前面的引理，线性相关的向量组 $\alpha_j\cup B_{j-1}$ 中存在一个向量，它是其前面向量的线性组合。设这个向量为 w。

如果 $w=\alpha_j$，则 α_j 是空向量组的线性组合，意味着 $\alpha_j=\mathbf{0}$，于是该向量组是线性相关的，证明结束。

接下来考虑 w 是 B_{j-1} 中的一个向量。如果 $w\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1}\}$,那么它可以被 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 中的向量线性表出，那么向量组线性相关，证明结束。

因此只需考虑这个向量 w 是 B_{j-1} 中那些来自 $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 的向量

由于 w 可以由向量组中前面的向量线性表出，我们可以从 $\alpha_j\cup B_{j-1}$ 中移除 w，得到新的向量组 $B_j=(\alpha_j\cup B_{j-1})-w$。这个新的向量组 B_j 仍然生成子空间 W

这样，我们就完成了向量组序列 $B_0,B_1,\dots,B_n$ 的构造。

此时，我们只需注意到，$\mathrm{span}(B_n)=\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=W,\alpha_{n+1}\in W$。于是 α_{n+1} 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，于是 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 线性相关，证明完毕。

最后，我们考虑 $\mathrm{Card}A=\mathbb{N},\mathrm{Card}B<\mathbb{N}$ 的情况。此时，一定能找到 $\{\alpha_x\in V|x\in A\}$ 的一个有限部分组线性相关，于是整个向量组就线性相关了。

于是命题得证。 □

4. 向量组的两个极大线性无关向量组等势

命题 1.3.5. 向量组的两个极大线性无关向量组等势

证明： 设有两个极大线性无关向量组 $\{\alpha_x\in V|x\in A\},\{\beta_x\in V|x\in B\}$

根据前面的性质,他们相互等价,因此可以相互线性表出。所以一定有 $\mathrm{Card}\ A\leqslant\mathrm{Card}\ B,\mathrm{Card}\ B\mathrm{Car}$

那么一定有 $\mathrm{Card}\ A=\mathrm{Card}\ B$，所以命题得证 □

1.3.3 向量组的秩

在完成了前面的准备工作后，我们可以定义向量组的秩了

定义 1.3.4: 向量组的秩

向量组 $G = \{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 的极大线性无关向量组的势称为向量组的秩，记作：$rank(G)$

我们前面的命题已经保证了，无论如何选取极大线性无关组，它的势都相同，因而秩也是相同的。

接下来讨论它的性质

1.

命题 1.3.6. 向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 线性无关 $\Leftrightarrow rank(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$

证明: 先证充分性，如果向量组线性无关，那么它自身即是自己的一个极大线性无关向量组，所以 $rank(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$

再证必要性。如果 $rank(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$，那么它仅有一个极大线性无关向量组，即向量组本身，所以它线性无关，命题得证 □

1.4 基、线性空间的维数

1.5 线性子空间的直和

1.6 线性空间的同构

1.7 商空间

1.8 对偶空间