第一章　矩阵

1.1　矩阵的定义和运算

1.1.1　矩阵的定义

定义 1.1.1: 矩阵

形如以下的矩形阵列称为一个域 F 上的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in F$$

简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})。m 称为矩阵的行数，n 称为矩阵的列数。

特别地，如果 $m=n$，我们称它是一个 m 阶方阵。

F 上的全体 $m\times n$ 矩阵的集合记作 $M_{m\times n}(F)$，特别地如果 $m=n$，记作 $M_n(F)$。

我们也将矩阵 A 在 m 行 n 列处的元素记作 $A(i;j)$

1.1.2　矩阵的运算

1. 相等

定义 1.1.2: 矩阵的相等

设 $A\in M_{m\times n}(F), B\in M_{m\times n}(F)$，如果 $\forall i,j, A(i;j)=B(i;j)$，则称 $A=B$。

2. 转置

定义 1.1.3: 矩阵的转置

设 $A\in M_{m\times n}(F)$，

我们定义矩阵 $A^T\in M_{n\times m}(F)$ 为满足 $A^T(i;j)=A(i;j)$ 的矩阵，称为 A 的转置。

3. 加法

定义 1.1.4: 矩阵的加法

设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{m\times n}(F)$

我们定义：$(A+B)(i;j) = A(i;j) + B(i;j)$。

4. 纯量乘法

定义 1.1.5: 矩阵的纯量乘法

设 $A \in M_{m\times n}(F), k \in F$，

我们定义矩阵 $k \cdot A \in M_{m\times n}(F)$ 为满足 $(k \cdot A)(i;j) = k \cdot A(i;j)$ 的矩阵。

5. 乘法

定义 1.1.6: 矩阵的乘法

设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times p}(F)$，

我们定义矩阵 $A \cdot B \in M_{m\times p}(F)$ 为满足 $(A \cdot B)(i;j) = \sum_{k=1}^{n} A(i;k)B(k;j)$ 的矩阵

6. 幂

定义 1.1.7: 方阵的幂

设 $A \in M_n(F)$ 是一个方阵，我们定义：

$$A^k = A \cdot A^{k-1}$$

1.1.3 矩阵的性质

1.2 行列式

1.2.1 行列式的定义和性质

定义 1.2.1: 行列式

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$

映射 $\det : V^n \to F$ 如果满足：

① $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i + \beta_i, \cdots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \cdots, \beta_i, \cdots, \alpha_n)$

② $\forall k \in F, \det(\alpha_1, \cdots, k \cdot \alpha_i, \cdots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

② $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

③ 存在 V 的一组基 $\gamma_i, \cdots, \gamma_n, \det(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = 1$

那么我们称 det 是一个 V 上的 n 阶行列式

由行列式的定义，我们可以推导出行列式的基本性质

命题 1.2.1. 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ 如果有 $\alpha_i = \alpha_j$

那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$

证明： $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

但因为 $\alpha_i = \alpha_j$，所以必有 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$ □

进一步我们可以推出，如果两个变量成系数关系，那么行列式也为零

推论 1.2.1: 存在成比例变量的行列式为零

向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ 如果有 $\alpha_i = k\alpha_j, k \in F$

那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$

证明： $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$ □

1.2.2 行列式在基上的展开

定理 1.2.2: 行列式的展开

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$，

V 上的 n 阶行列式 det 满足 $\det(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = 1$，其中 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 是 V 的一组基

那么，有：

$$\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \tag{1.1}$$

其中 $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\gamma_j$

证明： $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \det\left(\sum\limits_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1}\gamma_{i_1}, \cdots, \sum\limits_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n}\gamma_{i_n}\right)$

$= \sum\limits_{i_1=1}^{n} \cdots \sum\limits_{i_n=1}^{n} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_{k,i_k} \det(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_n})\right)$

$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma)\right)$ □

事实上，我们也可以改变第一个求和指标，使之称为一个固定但是可以随意选取的置换

推论 1.2.3

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$，

V 上的 n 阶行列式 det 满足 $\det(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = 1$，其中 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 是 V 的一组基

那么，有：

$$\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),\sigma(i)} \tag{1.2}$$

其中 $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\gamma_j$，$\rho$ 是一个置换

证明： $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)}$

对指标作置换 ρ，累乘的结果不会变化，所以有：

$\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),(\rho\circ\tau)(i)}$

记 $\sigma = \rho \circ \tau$，那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\rho^{-1}\circ\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1} \circ \sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),\sigma(i)}$

但是，$\rho^{-1} \circ \sigma \in S_n$ 其实就是 $\sigma \in S_n$，并且我们知道 $\operatorname{sgn}(\rho^{-1} \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\sigma)$

所以 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),\sigma(i)}$ □

1.2.3 矩阵的行列式

我们之前已经指出，$M_n(F) \cong F^{n^2} \cong (F^n)^n$，因此，我们可以对矩阵定义行列式：

定义 1.2.2: 矩阵的行列式

设矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in M_n(F)$，我们定义：

$|A| = \det(A) := \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

并且有 $\det(e_1, \cdots, e_n) = 1$，其中 e_i 是标准基向量 $(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$，1 在第 i 个位置上。

矩阵的行列式也可以类似地在标准基上展开

定理 1.2.4: 矩阵的行列式的展开

设 F 是一个域，矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(F)$ 那么，有：

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \tag{1.3}$$

1.2.4 矩阵的行列式的余子式展开

1.2.5 矩阵乘积的行列式

1.3 矩阵的初等变换、线性方程组的解

1.4 可逆矩阵

1.5 矩阵的分块