第一章　线性映射

本章开始，我们转向线性映射的研究。

我们将用三章完成线性映射的研究。本章我们将从映射最基本的研究方式：向量的作用开始

线性映射的独特之处在于：一方面它能在常规的映射加法和纯量乘法下构成一个线性空间；另一方面，如果我们将复合视为乘法，它可以构成一个幺环。

第一节中，我们将给出线性映射的定义及运算，并研究基本性质；

第二节中，我们将研究两种由线性映射导出的子空间，核和像，并借此提出一个概念：秩。它和我们之前的秩也有很强的联系；

第三节到第五节中，我们将研究矩阵，它是将线性映射在基下的作用写成的一张数表，非常便于在数值上研究矩阵；

第六节中，我们将研究行列式，它是一个反对称多线性函数，我们以此为工具，为后续我们对线性映射分解的研究铺垫。

1.1　线性映射的定义和运算

1.1.1　线性映射的定义

我们首先给出线性映射的定义

定义 1.1.1: 线性映射

设 V_1, V_2 是一个 F 上的两个线性空间,，映射 $A: V_1 \to V_2$ 如果满足：

$\forall \alpha, \beta \in V_1, k \in F$

$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$

$A(k\alpha) = kA(\alpha)$

那么我们称 A 是一个从 V_1 到 V_2 的线性映射

全体 V_1 到 V_2 的线性映射的集合记作 $\hom_F(V_1, V_2)$，或简记作 $\hom(V_1, V_2)$

特别地，如果 $V_1 = V_2$，我们称 A 是一个 V_1 上的线性变换

有一些常用的线性映射，我们在这里列出来：

定义 1.1.2: 一些常用的线性映射

1. 恒等变换：$I: V \ni \alpha \mapsto \alpha \in V$
2. 数乘变换：$k: V \ni \alpha \mapsto k\alpha \in V$
3. 零变换：$0: V_1 \ni \alpha \mapsto \mathbf{0}_{V_2} \in V_2$

1.1.2 线性映射的运算

前面我们定义了线性映射，现在我们开始赋予 $\hom(V_1, V_2)$ 线性空间和环的性质。

我们会定义三种运算：加法、纯量乘法、乘法

定义 1.1.3: 线性映射的运算

我们定义：

映射 $+ : \hom(V_1, V_2) \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为加法，如果满足：

$$\forall A, B \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A + B)(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha) \tag{1.1}$$

映射 $\cdot : F \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为纯量乘法，如果满足：

$$\forall k \in F, A \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in F, (k \cdot A)(\alpha) = kA(\alpha) \tag{1.2}$$

映射 $\circ : \hom(V_1, V_2) \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为乘法，如果满足：

$$\forall A, B \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A \circ B)(\alpha) = A\left(B(\alpha)\right) \tag{1.3}$$

我们也常常把 $k \cdot A$ 简记为 kA，将 $A \circ B$ 简记为 AB

显然，$(\hom(V_1, V_2), F, +, \cdot)$ 是一个线性空间，0 是它的零向量；

$(\hom(V_1, V_2), +, \circ)$ 是一个幺环，0 是它的加法单位元，I 是它的乘法单位元

除此之外，还有一些运算，但是它们是针对特殊的线性映射的，比如说：

定义 1.1.4: 线性变换的幂

$\forall A \in \hom(V, V)$

我们定义：$A^m := \begin{cases} A \circ A^{m-1}, m \geqslant 1 \\ I, m = 0 \end{cases}, m \geqslant 0$

如果一个映射的幂不会使其本身变化，我们称它是一个幂等变换

定义 1.1.5: 幂等映射

$A \in \hom(V, V)$ 如果有：

$A = A^2$

我们称它是一个幂等变换

我们不再讨论其他的运算，我们接下来转入线性映射一般性质的研究

1.1.3 线性映射的性质

1.

命题 1.1.1. $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$

证明： $A(\mathbf{0}_{V_1}) = A(0 \cdot \mathbf{0}_{V_1}) = 0 \cdot A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$ □

2.

命题 1.1.2. $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(-\alpha) = -A(\alpha)$

证明： $A(-\alpha) = A((-1) \cdot \alpha) = (-1) \cdot A(\alpha) = -A(\alpha)$ □

3.

命题 1.1.3. $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i A(\alpha_i)$

证明： 对 n 使用数学归纳法易证。 □

值得注意，这个定理并不能随意地推广到 $\aleph_0$，因为此时依赖于度量线性空间或线性映射的进一步性质。

4.

命题 1.1.4. $\forall A \in \hom(V, V), m \geqslant 1, A^m = A^{m-1} \circ A$

证明： 对 m 作数学归纳法。

首先，当 $m = 2$ 时，$A^2 = A \circ A$，命题成立

现在假设 m 时成立，我们来证明 $m + 1$ 时命题也成立：

$A^m = A \circ A^{m-1} = A \circ A^{m-2} \circ A = A^{m-1} \circ A$，于是命题得证。 □

这个命题看似显然，但是是必要的，因为线性映射环不交换。这个命题指出：递归式地推导幂时，从左右方向都是等价的。进一步，在递归中不断变换方向也不会影响结果。

5.

命题 1.1.5. $\forall A \in \hom(V_1, V_2)$

如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，那么 $A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_s)$ 也线性相关

证明： $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

$\Rightarrow \exists k_1, \cdots, k_s, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_s = \mathbf{0}$，其中 $k_1, \cdots, k_s$ 不全为零

$\Rightarrow A(k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_s) = k_1 A(\alpha_1) + \cdots + k_n A(\alpha_s) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_n)$ 线性无关 □

值得注意的是，不同于同构映射，在这个命题中把线性相关改为线性无关会使命题变得不成立。比如说，零映射会把任何线性无关的向量组变得线性相关

6.

命题 1.1.6. $\forall T, Y \in \hom(V_1, V_2)$，$B$ 是 V_1 的一个基

如果 $\forall \alpha \in B, T(\alpha) = Y(\beta)$，那么 $T = Y$

证明： 只需证明：$\forall \gamma \in V_1, T(\gamma) = Y(\gamma)$

因为 B 是 V_1 的基，所以一定有 $\gamma = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_s \in B$

此时，$T(\gamma) = k_1T(\alpha_1) + \cdots + k_sT(\alpha_s) = k_1Y(\alpha_1) + \cdots + k_sY(\alpha_s) = Y(\gamma)$，于是命题得证。 □

这个命题指出，线性映射完全由其在基上的作用决定，因为我们其实只需要指定基上的像就指定了线性映射本身。

最后，还有一个问题未被解决：$\hom(V, W)$ 的维数和 $\dim V, \dim W$ 有什么关系。这个问题比较复杂，因为涉及无限维时，维数的公式会变得和有限情形完全不同。在讲解行列式后，我们将在附录一中解决这个问题。

1.2 线性映射的核和像

本节中，我们将借助核与像继续研究线性映射。所谓核，即是线性映射映到零的那一部分；像则是值域。

同时，我们会引入对偶映射，借助本节中核与像的工具，我们将看到对偶和本身之间的联系。

1.2.1 核与像的定义

定义 1.2.1: 线性映射的核

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\ker A := \{\alpha \in V_1 | A(\alpha) = \mathbf{0}_{V_2}\} \tag{1.4}$$

称为线性映射 A 的核

定义 1.2.2: 线性映射的像

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\operatorname{Im} A := A(V_1) := \{A(\alpha) | \alpha \in V_1\} \tag{1.5}$$

•

称为线性映射 A 的像

特别地，核与像的维数我们分别称为零化度和秩：

定义 1.2.3: 线性映射的零化度

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\operatorname{nullity}(A) := \dim(\ker A) \tag{1.6}$$

称为线性映射 A 的零化度

定义 1.2.4: 线性映射的秩

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\operatorname{rank}(A) := \dim(\operatorname{Im} A) \tag{1.7}$$

称为线性映射 A 的秩

事实上，线性映射的秩和之前我们曾提及的向量组的秩有着很大的联系，我们将在后续看到这一点。

为了方便后续性质的研究，接下来我们给出对偶映射的概念

定义 1.2.5: 对偶映射

设 $T \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义对偶映射 $T^* \in \hom(V_2^*, V_1^*)$

如果满足：$\forall f \in V_2^*, \alpha \in V_1$

$$(T^*(f))(\alpha) = (f \circ T)(\alpha) \tag{1.8}$$

1.2.2 核与像的性质

接下来研究核与像的性质

1. **命题 1.2.1.** $\forall A \in \hom(V, W), \ker A, \operatorname{Im} A$ 都是线性空间

   证明: 先证明 $\ker A$ 是一个线性空间

   注意到，$\mathbf{0}_V \in \ker A$，因为 $A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$，因此 $\ker A$ 非空

   那么，只需注意到 $\forall \alpha, \beta \in \ker A, A(\alpha+\beta) = A(\alpha) + A(\beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha + \beta \in \ker A$

   $\forall \alpha \in \ker A, k \in F, A(k\alpha) = kA(\alpha) = \mathbf{0}_W \Rightarrow k\alpha \in \ker A$

   再证明 $\operatorname{Im} A$ 是一个线性空间

   注意到，$\mathbf{0}_W = A(\mathbf{0}_V) \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A \neq \emptyset$

   那么，只需注意到 $\forall A(\alpha), A(\beta) \in \operatorname{Im} A, A(\alpha) + A(\beta) = A(\alpha+\beta) \in \operatorname{Im} A$

   $\forall A(\alpha) \in \operatorname{Im} A, k \in F, kA(\alpha) = A(k\alpha) \in \operatorname{Im} A$

   于是命题得证 □

2. **命题 1.2.2.** $A \in \hom(V, W)$，那么：

   A 是单射 $\Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

   证明: 先证明充分性。注意到，$A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$，而 A 为单射，于是一定有 $\ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

   再证明必要性。设 $A(\alpha) = A(\beta)$，那么 $A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha - \beta = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow A$ 是单射 □

3. **命题 1.2.3.** $A \in \hom(V, W)$，那么：

   A 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = W$

   证明: 这是显然的。 □

4. 秩-零化度定理 在给出定理前，我们先给出一个引理。它是一个线性空间的“同态基本定理”，证明方法也很相似

   引理 1.2.1

   $\forall A \in \hom(V, W)$

   $$V / \ker A \cong \operatorname{Im} A \tag{1.9}$$

证明： 设 $\phi : V/\ker A \ni \alpha + \ker A \mapsto A(\alpha) \in \operatorname{Im} A$

首先验证它的确是一个映射

假设 $\alpha + \ker A = \beta + \ker A$

那么 $\alpha - \beta \in \ker A \Rightarrow A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow A(\alpha) = A(\beta)$

所以 ϕ 的确是一个映射

接下来验证它是一个单射

设 $\phi(\alpha + \ker A) = \phi(\beta + \ker A)$

$\Rightarrow A(\alpha) = A(\beta) \Rightarrow A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W$

$\Rightarrow \alpha - \beta \in \ker A \Rightarrow \alpha + \ker A = \beta + \ker A$

于是 ϕ 是单射。ϕ 显然是满射

接下来验证线性性：

$\forall \alpha + \ker A, \beta + \ker A \in V/\ker A, k \in F$

$\phi\left((\alpha + \ker A) + (\beta + \ker A)\right) = \phi\left((\alpha + \beta) + \ker A\right) = A(\alpha+\beta) = A(\alpha) + A(\beta) = \phi(\alpha + \ker A) + \phi(\beta + \ker A)$

$\phi\left(k \cdot (\alpha + \ker A)\right) = \phi(k\alpha + \ker A) = A(k\alpha) = kA(\alpha) = k\phi(\alpha + \ker A)$

于是命题得证。 □

它的直接推论是被称为秩-零化度定理的结论，它揭示了秩和零化度的联系

定理 1.2.2: 秩-零化度定理

$\forall A \in \hom(V, W)$

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = \dim V \tag{1.10}$$

证明： $V/\ker A \cong \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \dim(V/\ker A) = \dim \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \dim V - \dim \ker A = \dim \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = \dim V$ □

5. 有限维映射和其对偶的秩相同 我们先证明一个引理：

引理 1.2.3: 子空间及其零化子维数和为原空间维数

设 V 是一个 F 上的线性空间，$\dim V = n < \aleph_0$，U 是 V 的一个线性子空间

我们定义 $U' = \{A \in V^* | \forall \alpha \in U, A(\alpha) = 0\}$

那么有：$\dim U + \dim U' = \dim V$

证明: 设 $\dim U = m, 0 \leqslant m \leqslant n$

取 U 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，并补全为 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的对偶基为 $\{f_1, \cdots, f_n\}$

我们来证明：$\{f_{m+1}, \cdots, f_n\}$ 是 U' 的一个基

取 $\forall A \in U'$。因为 $U' \subseteq V^*$，那么 A 一定可以被对偶基线性表出

不妨设 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i$

注意到，当 $1 \leqslant j \leqslant m, A(\alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i(\alpha_j) = k_j$

但因为 $\alpha_j \in U$，因此 $k_j = A(\alpha_j) = 0$

因此有 $A = \sum\limits_{i=m+1}^{n} k_i f_i$

这说明 U' 可由 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 线性表出。又因为 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 线性无关，因此 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 也线性无关

因此 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 是 U' 的一个基，那么 $\dim U' = n - m$，命题得证。 □

接下来给出命题

命题 1.2.4. 设 $T \in \hom(V, W), \dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0$

那么 $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^*)$

证明: 只需注意到，$\ker T^* = \{f \in W^* | T^*(f) = \mathbf{0}_{V^*}\}$

$= \{f \in W^* | f \circ T = \mathbf{0}_{V^*}\}$

$= \{f \in W^* | \forall \alpha \in V, f(T(\alpha)) = 0\}$

$= \{f \in W^* | \forall \beta \in \operatorname{Im} T, f(\beta) = 0\}$

而按照引理，有：$\dim \operatorname{Im} T + \dim\{f \in W^* | \forall \beta \in \operatorname{Im} T, f(\beta) = 0\} = \dim W$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T^* = \dim W$

再运用秩-零化度定理，有：$\dim \operatorname{Im} T^* + \dim \ker T^* = \dim W^* = \dim W$

因此有 $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^* \Rightarrow \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^*)$，命题得证 □

6.

命题 1.2.5. 设 $A \in \hom(V, W)$，如果 $\dim V = \dim W$，那么：

A 是满射 $\Leftrightarrow$ A 是单射

证明： 因为 $V/\ker A \cong \operatorname{Im} A$

A 是满射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = W \Leftrightarrow \operatorname{Im} A \cong W \Leftrightarrow \operatorname{Im} A \cong W \cong V$

$\Leftrightarrow V \cong V/\ker A \Leftrightarrow \dim\ker A = 0 \Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}_V\} \Leftrightarrow A$ 是单射 □

1.3 矩阵

为了方便后续的研究，我们引入一种“数表”，即矩阵。它和有限维空间上的线性映射完全同构

1.3.1 矩阵的定义

定义 1.3.1: 矩阵

形如以下的矩形阵列称为一个域 F 上的矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in F$

简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})。m 称为矩阵的行数，n 称为矩阵的列数。

特别地，如果 $m = n$，我们称它是一个 m 阶方阵。

F 上的全体 $m \times n$ 矩阵的集合记作 $M_{m\times n}(F)$，特别地如果 $m = n$，记作 $M_n(F)$。

我们也将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 m 行 n 列处的元素记作 $\boldsymbol{A}_{ij}$

我们也常常将 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 记作 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 或 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$，其中 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \beta_j = (a_{j1}, \cdots, a_{jn})$

1.3.2 矩阵的运算

1. 相等

定义 1.3.2: 矩阵的相等

设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{m\times n}(F)$，如果 $\forall i, j, A(i;j) = B(i;j)$，则称 $A = B$。

2. 转置

定义 1.3.3: 矩阵的转置

设 $A \in M_{m\times n}(F)$，

我们定义矩阵 $A^T \in M_{n\times m}(F)$ 为满足 $A^T(i;j) = A(i;j)$ 的矩阵，称为 A 的转置。

3. 加法

定义 1.3.4: 矩阵的加法

设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{m\times n}(F)$

我们定义：$(A+B)(i;j) = A(i;j) + B(i;j)$。

4. 纯量乘法

定义 1.3.5: 矩阵的纯量乘法

设 $A \in M_{m\times n}(F), k \in F$，

我们定义矩阵 $k \cdot A \in M_{m\times n}(F)$ 为满足 $(k\cdot A)(i;j) = k \cdot A(i;j)$ 的矩阵。

5. 乘法

定义 1.3.6: 矩阵的乘法

设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times p}(F)$，

我们定义矩阵 $A \cdot B \in M_{m\times p}(F)$ 为满足 $(A\cdot B)(i;j) = \sum_{k=1}^{n} A(i;k)B(k;j)$ 的矩阵

6. 幂

定义 1.3.7: 方阵的幂

$\forall \boldsymbol{A} \in M_n(F)$

我们定义：$\boldsymbol{A}^m := \begin{cases} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{m-1}, m \geqslant 1 \\ \boldsymbol{I}, m = 0 \end{cases} \quad , m \geqslant 0$

1.3.3 线性映射的矩阵

定义 1.3.8: 线性映射的矩阵

设 $A \in \hom(V,W), \dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0$

取 V 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，$W$ 的一个基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$

如果矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$ 满足：

$$(A(\alpha_1),\cdots,A(\alpha_m)) = (\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是线性映射 A 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵

特别地，如果 $V = W$ 且 $\alpha_i = \beta_i$，我们称 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换 A 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 下的矩阵

1.3.4 矩阵的性质

1.4 特殊矩阵

1.5 可逆矩阵

1.6 行列式

1.6.1 行列式的定义和性质

定义 1.6.1: 行列式

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$

映射 $\det : V^n \to F$ 如果满足：

① $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+\beta_i,\cdots,\alpha_n) = \det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n) + \det(\alpha_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\alpha_n)$

② $\forall k \in F, \det(\alpha_1,\cdots,k\cdot\alpha_i,\cdots,\alpha_n) = k\cdot\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n)$

② $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n) = -\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n)$

③ 存在 V 的一组基 $\gamma_i,\cdots,\gamma_n, \det(\gamma_1,\cdots,\gamma_n) = 1$

那么我们称 det 是一个 V 上的 n 阶行列式

由行列式的定义，我们可以推导出行列式的基本性质

命题 1.6.1. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n$ 如果有 $\alpha_i=\alpha_j$

那么 $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=0$

证明: $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=-\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n)$

但因为 $\alpha_i=\alpha_j$，所以必有 $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=0$ □

进一步我们可以推出，如果两个变量成系数关系，那么行列式也为零

推论 1.6.1: 存在成比例变量的行列式为零

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n$ 如果有 $\alpha_i=k\alpha_j,k\in F$

那么 $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=0$

证明: $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=k\cdot\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=0$ □

1.6.2 行列式在基上的展开

定理 1.6.2: 行列式的展开

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V=n$，

V 上的 n 阶行列式 det 满足 $\det(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)=1$，其中 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ 是 V 的一组基

那么，有:

$$\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)} \tag{1.12}$$

其中 $\alpha_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}\gamma_j$

证明: $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\det\left(\sum\limits_{i_1=1}^{n}a_{1,i_1}\gamma_{i_1},\cdots,\sum\limits_{i_n=1}^{n}a_{n,i_n}\gamma_{i_n}\right)$

$=\sum\limits_{i_1=1}^{n}\cdots\sum\limits_{i_n=1}^{n}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}a_{k,i_k}\det(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_n})\right)$

$=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}a_{k,\sigma(k)}\operatorname{sgn}(\sigma)\right)$ □

事实上，我们也可以改变第一个求和指标，使之称为一个固定但是可以随意选取的置换

推论 1.6.3

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$，

V 上的 n 阶行列式 det 满足 $\det(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)=1$，其中 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ 是 V 的一组基

那么，有：

$$\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\operatorname{sgn}(\rho)\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\rho(i),\sigma(i)} \tag{1.13}$$

其中 $\alpha_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}\gamma_j$，$\rho$ 是一个置换

证明： $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\tau(i)}$

对指标作置换 ρ，累乘的结果不会变化，所以有：

$\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)\prod_{i=1}^{n}a_{\rho(i),(\rho\circ\tau)(i)}$

记 $\sigma=\rho\circ\tau$，那么 $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{\rho^{-1}\circ\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\rho^{-1}\circ\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\rho(i),\sigma(i)}$

但是，$\rho^{-1}\circ\sigma\in S_n$ 其实就是 $\sigma\in S_n$，并且我们知道 $\operatorname{sgn}(\rho^{-1}\circ\sigma)=\operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\sigma)$

所以 $\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\operatorname{sgn}(\rho)\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\rho(i),\sigma(i)}$ □

1.6.3 矩阵的行列式

我们之前已经指出，$M_n(F)\cong F^{n^2}\cong(F^n)^n$，因此，我们可以对矩阵定义行列式：

定义 1.6.2: 矩阵的行列式

设矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in M_n(F)$，我们定义：

$|A|=\det(A):=\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

并且有 $\det(e_1,\cdots,e_n)=1$，其中 e_i 是标准基向量 $(0,\cdots,1,\cdots,0)$，1 在第 i 个位置上。

矩阵的行列式也可以类似地在标准基上展开

定理 1.6.4: 矩阵的行列式的展开

设 F 是一个域，矩阵 $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(F)$ 那么，有：

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)} \tag{1.14}$$

1.6.4 矩阵的行列式的余子式展开

1.6.5 矩阵乘积的行列式