第一章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。

1.1　$\hom(V,W)$ 的维数

这篇附录中，我们解决一个问题：$\hom(V,W)$ 的维数是多少。

引理 1.1.1

$\hom(V,W) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F,W)$

证明： 任取 V 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，我们定义：

$\phi : \hom(V,W) \ni f \mapsto (\{1,\cdots,n\} \ni i \mapsto (F \ni k \mapsto kf(\alpha_i) \in W) \in \hom(F,W)) \in \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F,W)$

（即满足 $\phi(f)(i)(k) = kf(\alpha_i)$ 的唯一映射）

接下来验证 ϕ 是同构映射

首先，容易注意到 $\phi(f) = \phi(g) \Rightarrow f = g$，因此 ϕ 是单射

其次，$\forall\,(\{1,\cdots,n\} \ni i \mapsto g_i \in \hom(F,W)) \in \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F,W)$

注意到，如果设 $f : V \ni \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} k_i g_i(1_F)$，那么 $\phi(f)(i) = g_i$，于是 ϕ 是满射

接下来验证它是一个线性映射

$\forall f,g \in \hom(V,W), \phi(f+g)(i)(k) = k(f+g)(\alpha_i) = kf(\alpha_i) + kg(\alpha_i) = \phi(f)(i)(k) + \phi(g)(i)(k) \Rightarrow \phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$

$\forall f \in \hom(V,W), l \in F, \phi(lf)(i)(k) = k(lf)(\alpha_i) = lkf(\alpha_i) = l\phi(f)(i)(k) \Rightarrow \phi(lf) = l\phi(f)$

因此它是一个同构映射，命题得证。 □

引理 1.1.2

$\hom(F,W)\cong W$

证明： 任取 V 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，我们定义：

$\psi:\alpha\in W\mapsto(F\ni k\mapsto k\alpha\in W)\in\hom(F,W)$

注意到：$\psi(\alpha)=\psi(\beta)\Rightarrow\psi(\alpha)(k)=\psi(\beta)(k)\Rightarrow k\alpha=k\beta\Rightarrow\alpha=\beta$，于是 ψ 是单射

$\forall f\in\hom(F,W),\psi(f(1_F))(k)=kf(1_F)=f(k)\Rightarrow\psi(f(1_F))=f$，于是 ψ 是满射

$\forall\alpha,\beta\in W,\psi(\alpha+\beta)(k)=k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta=\psi(\alpha)(k)+\psi(\beta)(k)\Rightarrow\psi(\alpha+\beta)=\psi(\alpha)+\psi(\beta)$

$\forall\alpha\in W,l\in F,\psi(l\alpha)(k)=lk\alpha=l\psi(\alpha)(k)\Rightarrow\psi(l\alpha)=l\psi(\alpha)$

于是 ψ 是一个同构映射。 □

引理 1.1.3

$|\hom(V,W)|=|W|^{\dim V}$

证明： 事实上，线性映射只由基上的作用决定，因此如果设 V 的一个基为 B

$|\hom(V,W)|=\mathrm{Card}\{f:B\to W\}=|W|^{|B|}=|W|^{\dim V}$ □

引理 1.1.4

$\dim\hom_F(V,W)\geqslant|F|$

证明： 取 V 的一个基 B，任取 B 的一个可数子集 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots\}$，又任取 $\gamma\in W,\gamma\neq\mathbf{0}_W$

我们定义：$k\in F,f_k(\alpha_i)=k^{i-1}\gamma$，并且 $\forall\beta\in B-\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},f_k(\beta)=\mathbf{0}_W$

显然，如此定义的映射集 $\{f_k|k\in F\}$ 中的任意映射都是线性映射（因为我们给出且只给出了在基上的像）

我们来验证，$\{f_k|k\in F\}$ 的任意有限子集线性无关

取它的一个有限子集 $\{f_{k_1},\cdots,f_{k_s}\}$

如果 $\sum\limits_{i=1}^{s}l_if_{k_i}=0$

$\Rightarrow\forall\alpha_j,\sum\limits_{i=1}^{s}l_if_{k_i}(\alpha_j)=\mathbf{0}_W$

$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{s}l_ik_i^{j-1}\gamma=\mathbf{0}_W$

$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{s}l_ik_i^{j-1}=0$

因此，$\forall j \in \mathbb{N}_+, \sum\limits_{i=1}^{s} l_i k_i^{j-1} = 0$，我们取前 s 项，并写成方程组的形式：

$\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_{F^s}$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{s-1} & \cdots & k_s^{s-1} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \ddots \\ l_s \end{pmatrix}$

注意到，$|\boldsymbol{A}| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s}(k_j - k_i) \neq 0$

因此方程组 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_{F^s}$ 仅有平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{F^s}$

又因为这个有限子集是随意选取的，因此 $\{f_k | k \in F\}$ 线性无关。

那么，就必须有 $\dim \hom(V, W) \geqslant |F|$，命题得证 □

引理 1.1.5

设 U 是 F 上的一个线性空间，那么 $|U| = |F| \cdot \dim_F U$

证明:

□

引理 1.1.6

$\hom(V, W) \cong \{f : B_1 \to G | G \subseteq F^{B_2}, \forall g \in G, supp(g) < \aleph_0\}$

其中 B_1, B_2 分别是是 V, W 的基

证明: 记 $\mathcal{P} = \{f : B_1 \to G | G \subseteq F^{B_2}, \forall g \in G, supp(g) < \aleph_0\}$

我们定义 $\phi : \hom(V, W) \ni T \mapsto \big(B_1 \ni \alpha \mapsto \big(B_2 \ni \beta \mapsto T_{\alpha\beta} \in F\big) \in G\big) \in \mathcal{P}$

其中 $T(\alpha) = \sum\limits_{\beta \in B_2} T_{\alpha\beta}\beta$

这个定义是合理的，因为我们知道，任意一个向量可由有限个基向量线性组合，因此 $B_2 \ni \beta \mapsto T_{\alpha\beta} \in F$ 是有限支撑的（即使 B_2 无限）

接下来验证 ϕ 是同构映射

先验证它是线性的：

注意到：$\forall A, B \in \hom(V, W), \phi(A+B)(\alpha)(\beta) = (A+B)_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} = \phi(A)(\alpha)(\beta) + \phi(B)(\alpha)(\beta) \Rightarrow \phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$

$\forall k \in F, A \in \hom(V, W), \phi(kA)(\alpha)(\beta) = (kA)_{\alpha\beta} = k \cdot A_{\alpha\beta} = k\phi(A)(\alpha)(\beta) \Rightarrow \phi(kA) = k\phi(A)$

接下来验证它是一个双射：

注意到：$\forall g \in \mathcal{P}$，令 $T(\alpha) = \sum\limits_{\beta \in B_2} g(\alpha)(\beta)\beta, \alpha \in B_1$。这个定义是良好的，因为它仅仅给出了在基上的作用，而且由于 $g(\alpha)$ 是有限支撑的，所以求和是良好的。

$\phi(T)(\alpha)(\beta) = g(\alpha)(\beta) \Rightarrow \phi(T) = g$

又注意到: $\phi(A) = \phi(B) \Rightarrow \forall \alpha \in B_1, \beta \in B_2, \phi(A)(\alpha)(\beta) = \phi(B)(\alpha)(\beta) \Rightarrow A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} \Rightarrow A = B$

于是 ϕ 的确是一个同构映射，命题得证。 □

定理 1.1.7: $\hom_F(V_1, V_2)$ 的维数

$$\dim \hom_F(V, W) = \begin{cases} 0, \dim V = 0 \vee \dim W = 0 \\ (\dim V) \cdot (\dim W), \dim V = n < \aleph_0 \\ |\hom(V, W)| = |W|^{\dim V} = (|F| \cdot \dim W)^{\dim V}, \dim V \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

证明: 首先考虑 V, W 中存在零空间的情形。

如果 $\dim V = 0$，即 $V = \{\mathbf{0}_V\}$，而我们知道线性映射仅能把零向量映射到零向量，此时 $\hom(V, W)$ 中仅存在零映射，维数为零

如果 $\dim W = 0$。即 $W = \{\mathbf{0}_W\}$，此时映射只有零映射（因为 W 中仅存在零向量），维数为零

接下来考虑 V, W 中不存在零空间，且 $\dim V = n < \aleph_0$ 的情形。

此时，$\dim \hom(V, W) = \dim \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F, W) = n \cdot \dim \hom(F, W) = n \cdot \dim W = (\dim V) \cdot (\dim W)$

最后我们证明 $\dim V, \dim W$ 均是无限的情形。

□

1.1.1 线性方程组解的情况

1.1.2 线性变换的 Smith 标准型