高等代数笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 4 月 21 日

前言标题

前言内容

2025 年 4 月 21 日

目录

第一章　线性空间

1.1　线性空间的定义

1.1.1　线性空间的定义

定义 1.1.1: 线性空间

设 F 是一个域，V 是一个集合，存在两个运算 $+: V \times V \to V$ 和 $\cdot: F \times V \to V$，分别称为加法和乘法，使得：

① $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \alpha \in V, \mathbf{0} + \alpha = \alpha$

② $\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V, \text{s.t. } \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

③ $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha$

④ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

⑤ $\forall \alpha \in V, 1 \cdot \alpha = \alpha$

⑥ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k \cdot l) \cdot \alpha = k \cdot (l \cdot \alpha)$

⑦ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k + l) \cdot \alpha = k \cdot \alpha + l \cdot \alpha$

⑧ $\forall k \in F, \alpha \in V, k \cdot (\beta + \gamma) = k \cdot \beta + k \cdot \gamma$

那么我们称 V 是一个 F 上的线性空间（或向量空间）

1.1.2　线性子空间

定义 1.1.2: 线性子空间

设 V 是一个线性空间，集合 $W \subseteq V$，如果 W 在 V 的运算构成一个线性空间，那么我们称 W 是 V 的一个线性子空间

1.1.3 线性空间的性质

1.

命题 1.1.1. $\mathbf{0}$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 均是零元，并且 $\mathbf{0}_1 \neq \mathbf{0}_2$

我们注意到：$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

2.

命题 1.1.2. $\forall \alpha \in V$，$-\alpha$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，α 有两个逆元 β_1, β_2，并且 $\beta_1 \neq \beta_2$

我们注意到：$\beta_1 = \mathbf{0} + \beta_1 = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 = \beta_2 + (\alpha + \beta_1) = \beta_2 + \mathbf{0} = \beta_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

3.

命题 1.1.3. $\forall \alpha \in V, 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$

证明: $0 \cdot \alpha = (0 + 0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha$

$\Rightarrow 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha) = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha)$

$\Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot \alpha$ □

4.

命题 1.1.4. $\forall k \in F, k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

证明: $k \cdot \mathbf{0} = k \cdot (0 \cdot \alpha) = (k \cdot 0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$ □

5.

命题 1.1.5. $\forall \alpha \in V, (-1) \cdot \alpha = -\alpha$

证明: $\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha = (1 + (-1)) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \alpha$

$\Rightarrow \mathbf{0} + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha + (-1) \cdot \alpha \Rightarrow (-1) \cdot \alpha = -\alpha$ □

6. 事实上，验证一个子集是否是线性子空间，只需要验证封闭性即可，其他的条件都是不必要的。

命题 1.1.6. $W \subseteq V$ 是 V 的线性子空间，当且仅当：

$\forall k \in F, \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta \in V, k \cdot \alpha \in V$

证明: 充分性是显然的，对于必要性，我们依次验证:

首先，$0 \in F$，因此 $0 \cdot \alpha = \mathbf{0} \in W$

其次，因为 $-1 \in F$，所以 $(-1) \cdot \alpha = -\alpha \in W$

剩余的六条运算律，因为 W 上的运算即是 V 上的运算在 W 上的限制，所以显然成立。

那么命题得证。 □

1.2 线性组合

1.3 极大线性无关向量组、向量组的秩

1.4 基、线性空间的维数

1.5 线性子空间的直和

1.6 线性空间的同构

1.7 商空间

第二章　矩阵

2.1　矩阵的定义和运算

2.2　矩阵的行列式

2.3　矩阵的初等变换、线性方程组的解

2.4　可逆矩阵

2.5　矩阵的分块

第三章 线性映射

3.1 线性映射的定义与性质

3.2 线性映射的运算

3.3 线性映射的核和像

3.4 线性映射的矩阵

3.5 线性映射的特征值和特征向量

3.6 线性映射可对角化的条件

3.7 自伴算子和正规算子

3.8 谱定理

3.9 线性映射的不变子空间

3.10 线性映射的最小多项式

3.11 线性映射的 Jordan 标准形

3.12 线性函数和对偶空间

第四章　多重线性映射

4.1　Galois 群

定义 4.1.1: Galois 群

设 E, F 是两个域，$E\backslash F$ 是一个扩张，那么称

$Gal(E\backslash F) = \{\sigma \in Aut(E) | \sigma|_F = id_F\}$

是 $E\backslash F$ 的 $Galois$ 群

定理 4.1.1: 有限扩张的 Galois 群有限

如果 $E\backslash F$ 是有限扩张，那么 $Gal(E\backslash F)$ 是有限群

第五章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。

5.1　一些典型的域

5.1.1　F_p

首先约定，这一部分的讨论中，都认为 p 是一个素数。

我们首先讨论的是一个典型的有限域——模 p 剩余类域。

定义 5.1.1: F_p

设 F 是一个域，$CharF \geqslant p$ 且 p 是一个素数，

我们定义 $F_p = N(\mathbb{Z}_p)$

并定义其中的加法和乘法为：

$+_F = N^-1 \circ + \circ N, \cdot_F = N^-1 \circ \cdot \circ N$

定理 5.1.1: F_p 没有真子域

设 p 是一个素数，那么域 F_p 不存在真子域，即 $F_p \backslash E \to E = F_p$

证明： 不妨假设命题不成立，那么一定有真子域 $E \subseteq F_p$

不妨假设 $[F_p : E] = d$，因为 F_p 是有限域，那么 $|E|, |F_p|$ 都是有限的。

但是，$|F_p| = |E|^d$

$\Rightarrow p = |E|^d$，但是 p 是素数，因此只可能 $d = 1$

于是 $|F_p| = |E|$，那么只可能 $F_p = E$，与假设矛盾，于是命题得证。 □

5.1.2 $\mathbb{Q}$

定理 5.1.2: Q 没有真子域

$\mathbb{Q}$ 不存在真子域，即 $\mathbb{Q}\backslash E \to E = \mathbb{Q}$

证明: 不妨假设命题不成立，$E \subset \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 真子域。

那么，因为 $0, 1 \in E$，由域对加法封闭，那么一定有 $\mathbb{N} \subseteq E$

进一步，因为任意元素的加法逆存在，于是有 $\mathbb{Z} \subseteq E$

于是，由任意非零元素的逆存在，一定有 $\mathbb{Q} \subseteq E$。

但是，我们假设 $E \subset \mathbb{Q}$，矛盾。于是命题成立 □