

第一章 内积空间

1.1 内积空间的定义

1.1.1 内积空间的定义

定义 1.1.1: 共轭

设 F 是一个域，自同构 $\sigma: F \rightarrow F$ 如果满足：

$$\forall a \in F, \sigma^2(a) = a \quad (1.1)$$

那么我们称 σ 是一个共轭映射， $\sigma(a)$ 称为 a 的共轭，也记作 \bar{a} 。

定义 1.1.2: 内积空间

设 F 是一个定义了共轭和偏序的域， V 是一个 F 上的线性空间，映射 $f: V \times V \rightarrow F$ 如果满足：

- $f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$ (共轭对称性)
- $f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma)$ (对第一个变量可加)
- $f(k\alpha, \beta) = kf(\alpha, \beta)$ (对第一个变量线性)
- $f(\alpha, \alpha) \geq 0, f(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$ (正定性)

那么我们称 f 是 V 上的一个内积，此时称 $(F, V, +, \cdot, f)$ 是一个内积空间 (我们也简称 V 是一个内积空间)

习惯上，我们也常常将 $f(\alpha, \beta)$ 记作 $\langle \alpha, \beta \rangle_W$ 。如果我们仅在一个线性空间中讨论，我们也常常简写为 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 。

基于抽象内积空间，我们可以提出一些相关的概念：

定义 1.1.3: 正交

设 V 是一个内积空间, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$,
 那么我们称 α 与 β 是正交的, 记作 $\alpha \perp \beta$

如果一个基是相互正交的, 那么它被称为正交基:

定义 1.1.4: 正交基

设 V 是一个内积空间, V 的一个基 B 如果满足:
 $\forall \alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta, \langle \alpha, \beta \rangle = 0$,
 那么我们称 B 是 V 的一个正交基。

我们特别考虑一种特殊的”补空间“, 称为正交补:

定义 1.1.5: 正交补

设 V 是 F 上的一个内积空间, $S \subseteq V$ 。我们定义:

$$S^\perp = \{\alpha \in V | \forall \beta \in S, \alpha \perp \beta\} \quad (1.2)$$

称为 S 的正交补。

值得注意的是, 上述定义中, 我们并不要求 S 是一个子空间; 我们也将看到, 就算 S 是子空间, 正交补和 S 的直和也不一定是整个空间。

接下来我们讨论两类重要的内积空间

1.1.2 实内积空间、复内积空间**定义 1.1.6: 实内积空间**

考虑 \mathbb{R} 及其上的平凡自同构 $\sigma(x) = x$

此时, 实数域 \mathbb{R} 上的内积空间, 称为实内积空间。

特别地, 如果此时内积空间还是有限维的, 我们称之为 Euclidean 空间

由定义可知, 实内积空间拥有以下独特的特性: 不仅仅是对单变量线性, 而是对双变量线性, 而且完全对称。也就是说, 它是一个对称双线性映射; 特别地, 由于实数域是全序集, 因此任意向量的内积都是可比的。

定义 1.1.7: 复内积空间

考虑 \mathbb{C} 及其上的共轭映射 $\sigma(a + bi) = a - bi$

复数域 \mathbb{C} 上的内积空间，称为复内积空间（或酉空间）

实内积空间和复内积空间的独特特点是：可以定义范数，并导出度量，进而产生拓扑

定义 1.1.8: 内积空间中的范数

设 V 是 F 上的一个内积空间， $F = \mathbb{R}$ 或者 $F = \mathbb{C}$ ， V 上的自然范数 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为：

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (1.3)$$

我们这里特意要求基域只能是实数或复数域是因为：在一般域上，不能保证向量与自身的内积可以定义良好的平方根。

在实内积空间和酉空间中，如果正交基的每一个向量的范数都是 1，我们也称之为标准正交基：

定义 1.1.9: 标准正交基

设 V 是 F 上的一个内积空间， $F = \mathbb{R}$ 或者 $F = \mathbb{C}$ ， V 的一个正交基 B 如果满足：

$$\forall \alpha \in B, \|\alpha\| = 1$$

那么我们称 B 是 V 的一个标准正交基。

此时，内积空间转变为一个线性赋范空间；进而，我们可以用范数定义度量：

定义 1.1.10: 内积空间中的度量

设 V 是 F 上的一个内积空间， $F = \mathbb{R}$ 或者 $F = \mathbb{C}$ ， V 上的自然度量 $d : V \times V \rightarrow F$ 定义为：

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| \quad (1.4)$$

进而，我们可以定义极限和连续：

定义 1.1.11: 内积空间中向量列的极限

设 V 是一个实内积空间或酉空间, $\{\alpha_i\}$ 是 V 中的一个向量列, 如果存在一个向量 $\alpha \in V$, 使得:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, d(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon \quad (1.5)$$

我们称向量列 $\{\alpha_i\}$ 收敛于 α , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$

定义 1.1.12: 连续线性泛函

设 V, W 分别是一个实内积空间或酉空间, $f \in \text{hom}(V, W)$, 如果有:

$$\forall \{\alpha_i\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) \quad (1.6)$$

那么我们称 f 是一个连续线性泛函

进而可以定义完备性:

定义 1.1.13: Hilbert 空间

设 V 是一个实内积空间或酉空间, 如果 V 中符合下面条件的任意向量列 $\{\alpha_i\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall m, n \geq N, d(\alpha_m, \alpha_n) < \varepsilon \quad (1.7)$$

收敛。

那么, 我们称 V 是完备的, 并称它是一个 Hilbert 空间。

我们也可以定义开集和闭集

定义 1.1.14: 开集和闭集

设 V 是一个实内积空间或酉空间, $S \subseteq V$, 如果对于任意 $\alpha \in S$, 存在 $r > 0$, 使得:

$$B(\alpha, r) = \{\beta \in V | d(\alpha, \beta) < r\} \subseteq S \quad (1.8)$$

那么我们称 S 是一个开集。

如果 $V - S$ 是一个开集, 那么我们称 S 是一个闭集。

1.1.3 内积空间的性质

我们讨论一些性质。

1. 首先, 我们讨论内积的线性性质。

命题 1.1.1. $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$

$\langle \alpha, k\gamma \rangle = \bar{k} \langle \alpha, \gamma \rangle$

证明: $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \overline{\langle \beta + \gamma, \alpha \rangle} = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle} + \overline{\langle \gamma, \alpha \rangle} = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$

$\langle \alpha, k\gamma \rangle = \overline{\langle k\gamma, \alpha \rangle} = \overline{k \langle \gamma, \alpha \rangle} = \bar{k} \langle \alpha, \gamma \rangle$

□

接下来我们考察一种特别的内积, 它只定义在实内积空间或酉空间, 被称为标准内积:

2.

命题 1.1.2. 设 V 是 \mathbb{R} 上的一个 n 维线性空间, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一个基,

$\forall \alpha, \beta \in V$, 如果 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$, 那么我们就说:

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (1.9)$$

是 V 上的一个内积

证明: 设 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i, \gamma = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$, 那么:

$$f(\alpha, \beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n b_i a_i = f\left(\sum_{i=1}^n b_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = f(\beta, \alpha)$$

$$f(\alpha, \beta + \gamma) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i (b_i + c_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i c_i = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) +$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i\right) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$$

$$f(\alpha, k\beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, k \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n k b_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i (k b_i) = k \sum_{i=1}^n a_i b_i =$$

$$k f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = k f(\alpha, \beta)$$

$$\forall \alpha \neq \mathbf{0}, f(\alpha, \alpha) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$$

于是命题得证。

□

酉空间情形类似如下:

3.

命题 1.1.3. 设 V 是 \mathbb{C} 上的一个 n 维线性空间, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一个基,

$\forall \alpha, \beta \in V$, 如果 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$, 那么我们就说:

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \quad (1.10)$$

是 V 上的一个内积

证明: 设 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i, \gamma = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$, 那么:

$$f(\alpha, \beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i = \sum_{i=1}^n \overline{b_i a_i} = \overline{\sum_{i=1}^n b_i a_i} = \overline{f(\beta, \alpha)}$$

$$f(\alpha, \beta + \gamma) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i + c_i} = \sum_{i=1}^n a_i (\bar{b}_i + \bar{c}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i + \sum_{i=1}^n a_i \bar{c}_i = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$$

$$f(\alpha, k\beta) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, k \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n (kb_i) \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{kb_i} = \bar{k} \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i = \bar{k} f(\alpha, \beta)$$

$$\forall \alpha \neq \mathbf{0}, f(\alpha, \alpha) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 > 0$$

于是命题得证。 \square

我们接下来探讨正交的性质。

4.

命题 1.1.4. 设 V 是一个内积空间, $S \subseteq V$, 那么 S^\perp 是 V 的一个子空间

证明: 取 $\forall \alpha, \beta \in S^\perp, k \in F$

依定义, 有 $\forall \eta \in S, \langle \alpha, \eta \rangle = 0, \langle \beta, \eta \rangle = 0$

注意到: $\langle \alpha + \beta, \eta \rangle = \langle \alpha, \eta \rangle + \langle \beta, \eta \rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta \in S^\perp$

$\langle k\alpha, \eta \rangle = k \langle \alpha, \eta \rangle = 0 \Rightarrow k\alpha \in S^\perp$

于是命题得证。 \square

5.

命题 1.1.5. 设 V 是一个内积空间, V 的有限子集 S 如果不存在零向量, 且向量两两正交, 那么它线性无关

证明: 设 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \forall i \neq j, \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \alpha_i \neq \mathbf{0}$

考察线性组合 $\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i = \mathbf{0}$

对 $\forall i \leq l, k_i = 0$ 作强归纳法。

首先, $\mathbf{0} = \langle \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i, \alpha_1 \rangle = k_1 \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \Rightarrow k_1 = 0$, 于是 $i = 1$ 时成立;

现在假设 $i \leq l$ 时成立, 考察 $l+1$ 时:

$\mathbf{0} = \langle \sum_{i=l+1}^n k_i \alpha_i, \alpha_{l+1} \rangle = k_{l+1} \langle \alpha_{l+1}, \alpha_{l+1} \rangle \Rightarrow k_{l+1} = 0$, 于是 $i = l + 1$ 时成立。

由强归纳法原理, $\forall i \leq n, k_i = 0$, 于是命题得证。□

它的直接推论是, 正交基是一定存在的:

6.

命题 1.1.6. 任意有限维内积空间的正交基都是存在的。

证明: 取 V 的一个基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

考察以下一系列线性组合: $\eta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \alpha_i, \eta_j \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle} \eta_j$

对归纳假设: $\forall i, j \leq k, i \neq j, \langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0, \langle \eta_i, \eta_i \rangle \neq 0$ 使用数学归纳法。

首先, 当 $k = 1, \eta_1 = \alpha_1$, 归纳假设显然成立;

我们现在假设 k 时成立, 考察 $k + 1$ 时:

$\forall j < k + 1$

$$\langle \eta_{k+1}, \eta_j \rangle = \langle \alpha_{k+1}, \eta_j \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \alpha_{k+1}, \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle} \langle \eta_i, \eta_j \rangle$$

$$= \langle \alpha_{k+1}, \eta_j \rangle - \frac{\langle \alpha_{k+1}, \eta_j \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle} \cdot \langle \eta_j, \eta_j \rangle = 0$$

$\langle \eta_j, \eta_{k+1} \rangle = \overline{\langle \eta_{k+1}, \eta_j \rangle} = 0$, 此时归纳假设成立。

于是 $\{\eta_i\}$ 的确是相互正交的; 由有限正交向量组线性无关, 以及基的性质, $\{\eta_i\}$ 是 V 的一个正交基。□

7.

命题 1.1.7. 设 V 是 F 上的一个内积空间, $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ 是 V 的一个标准正交基, 那么

对于 $\forall \alpha \in V$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \eta_i \rangle \eta_i$$

证明: 因为 $\{\eta_i\}$ 的确是一个基, 因为一定能找到一系列系数 k_i , 使得 $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \eta_i$

此时只需注意到: $\langle \alpha, \eta_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n k_j \eta_j, \eta_i \rangle = k_i \langle \eta_i, \eta_i \rangle = k_i$

$$\Rightarrow \alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \eta_i \rangle \eta_i$$

□

定理 1.1.1: Cauchy-Buniakowski-Schwarz 不等式

设 V 是一个实内积空间或酉空间, $\alpha, \beta \in V$, 那么:

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\| \quad (1.11)$$

等号成立的充分必要条件是 α 与 β 线性相关

8.

证明: 当 α, β 线性相关, 要不 $\alpha = \mathbf{0}$, 要不 $\beta = k\alpha$, 此时不等式显然成立

考察 α, β 线性无关的情形

此时, 一定有: $\forall k, \alpha - k\beta \neq \mathbf{0}$

此时, $\langle \alpha - k\beta, \alpha - k\beta \rangle > 0$

$$\Rightarrow \|\alpha\|^2 - k\langle \alpha, \beta \rangle - \bar{k}\langle \beta, \alpha \rangle + |k|^2 \|\beta\|^2 > 0$$

代入 $k = -\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\beta\|^2}$, 得:

$$\|\alpha\|^2 - \frac{\langle \alpha, \beta \rangle \langle \alpha, \beta \rangle}{\|\beta\|^2} - \frac{\langle \alpha, \beta \rangle \langle \alpha, \beta \rangle}{\|\beta\|^2} + \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|^2}{\|\beta\|^2} > 0$$

$$\Rightarrow \|\alpha\|^2 - \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|^2}{\|\beta\|^2} > 0$$

$$\Rightarrow |\langle \alpha, \beta \rangle|^2 < \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$$

于是命题得证。 □

上述定理适用于两类内积空间, 尽管实内积空间并不能简单视为复内积空间的一个子空间, 但是证明过程中利用的性质都是通用的, 我们统一地写出这个证明。

9. 最后, 我们讨论 Hilbert 空间上的性质

命题 1.1.8. 设 V 是一个 F 上的 Hilbert 空间, $S \subseteq V$ 是 V 的一个闭子空间, 那么有 $S \oplus S^\perp = V$

证明: 我们先证明 $S + S^\perp = V$

$\forall \alpha \in V$, 考察函数 $f(\theta) = \|\alpha - \theta\|, \theta \in S$

由于 S 是闭集, 那么 f 的最小值一定存在, 取 β 使得 $f(\beta) = \min_{\theta} f(\theta)$, 并记 $\gamma = \alpha - \beta$

我们来证明, 的确有 $\gamma \in S^\perp$

$\forall \eta \in S$, 我们希望证明 $\langle \gamma, \eta \rangle = 0$

考察函数 $g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

由于 $t\eta + \beta \in S$, 而 $\|\alpha - \theta\|$ 在 $\theta = \beta$ 时取得最小值, 因此, $g(t)$ 在 $t = 0$ 时取得最小值。

显然, $g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2 = \|\gamma - t\eta\|^2 = \|\gamma\|^2 - 2t \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle + t^2 \|\eta\|^2$ 连续可导

于是, 一定有 $g'(0) = (-2 \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle + 2t\|\eta\|^2)|_{t=0} = -2 \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle = 0$ 。

若 $F = \mathbb{R}$, 那么 $\langle \gamma, \eta \rangle = 0$, 论证完成;

对于 $F = \mathbb{C}$ 的情形, 考虑 $g(t) = \|\alpha - (ti\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

同理可得 $\operatorname{Re}\langle \gamma, i\eta \rangle = 0$ 。

$\Rightarrow \operatorname{Re}(-i\langle \gamma, \eta \rangle) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\operatorname{Im}\langle \gamma, \eta \rangle - i \operatorname{Re}\langle \gamma, \eta \rangle) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\langle \gamma, \eta \rangle = 0$ 。

于是此时有 $\langle \gamma, \eta \rangle = 0$, 论证完成。

最后我们证明 $S \cap S^\perp = \{0\}$

设 $\alpha \in S \cap S^\perp$, 那么 $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

于是命题得证。 □

利用这个结论可以证明以下重要事实:

定理 1.1.2: Riesz 表示定理

设 V 是一个 F 上的 Hilbert 空间, 如果 $f \in \operatorname{hom}(V, F)$ 是一个连续泛函, 那么存在唯一的 $\phi \in V$, 使得:

$$f(\alpha) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad (1.12)$$

证明: 我们首先证明: $\ker f$ 是一个闭集。

注意到: 任意收敛序列 $\{\alpha_n\} \subseteq \ker f$, 因为 f 是连续的, 因此有

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in \ker f$$

即 $\ker f$ 对任意序列的极限封闭。

接下来考察集合 $\overline{\ker f} := \{\lambda | \forall \lambda \in O, O \text{ 是开集}, O \cap \ker f \neq \emptyset\}$

注意到, 一定有 $\ker f \subseteq \overline{\ker f}$, 因为 $\ker f$ 中的任意一点, 包含其的开集与 $\ker f$ 的交集至少包含这个点本身。

考察 $\alpha \in \overline{\ker f}$

取 $\alpha_i \in B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap \ker f$, 其中 $B(\alpha, s) := \{\beta | d(\alpha, \beta) < s\}$, 由 $\overline{\ker f}$ 的定义可知序列是的确可以取得的。

那么, 此时一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, 因为 $0 < d(\alpha, \alpha_k) < \frac{1}{k}$ 。

但是, 我们已经指出: $\ker f$ 对任意收敛序列的极限封闭, 因此 $\alpha \in \ker f$ 。那么, $\ker f = \overline{\ker f}$

那么, 我们说, $\ker f$ 是闭集。因为: $\ker f$ 已经包含了所有与开集有非空交集的点, 那么对于 $\forall \beta \in V - \ker f$, 一定存在包含 β 的一个开集 O , 使得 $O \cap \ker f = \emptyset$, 而这正

是 $\ker f$ 闭的定义。

于是依照之前证明的结论，一定有 $\ker f \oplus (\ker f)^\perp = V$

于是 $\operatorname{Im} f \cong V / \ker f \cong (\ker f)^\perp$

但是， $\operatorname{Im} f \subseteq F \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 1$ ，因此 $\dim(\ker f)^\perp = 1$

取 $(\ker f)^\perp$ 的一个标准正交基 $\{\eta\}$ ，那么此时有：

$$f(\alpha) = \langle \alpha, \eta \rangle f(\eta) = \langle \alpha, \overline{f(\eta)} \eta \rangle$$

记 $\phi = \overline{f(\eta)} \eta$ ，那么此时有 $f(\alpha) = \langle \alpha, \phi \rangle$ 。

于是命题得证。 □

利用子空间和正交补直和，可以导出以下显然的事实：

命题 1.1.9. 设 V 是一个 *Hilbert* 空间，如果 S 是 V 的一个子空间，那么有 $(S^\perp)^\perp = S$

证明：我们先证明 $S \subseteq (S^\perp)^\perp$

$\forall \alpha \in S$ ，有 $\forall \beta \in S^\perp, \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ （因为这就是正交补的定义）

反过来看，其实就是 $\forall \beta \in S^\perp, \langle \beta, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha \in (S^\perp)^\perp$

接下来证明 $(S^\perp)^\perp \subseteq S$

取 $\forall \alpha \in (S^\perp)^\perp$

因为 $(S^\perp)^\perp \subseteq V$ ，因此依照之前的命题，一定存在分解 $\alpha = \beta + \gamma, \beta \in S, \gamma \in S^\perp$

此时注意到： $\gamma = \alpha - \beta, \beta \in S \Rightarrow \beta \in (S^\perp)^\perp \Rightarrow \gamma \in (S^\perp)^\perp$

因此有 $\gamma \in S^\perp \cap (S^\perp)^\perp \Rightarrow \langle \gamma, \gamma \rangle = 0 \Rightarrow \gamma = \mathbf{0}$

于是有 $\alpha = \beta \in S$ ，那么一定有 $(S^\perp)^\perp \subseteq S$ ，于是命题得证。 □

1.2 正规算子和自伴算子

本节中，如无特别说明，我们假定所有线性空间都定义了内积。

1.2.1 伴随算子

我们先定义伴随算子，它是我们后续讨论的基础。

定义 1.2.1: 共轭算子

设 V, W 是 F 上的两个内积空间, $A \in \text{hom}(V, W)$, 我们定义满足以下条件的算子 $A^* : W \rightarrow V$

$$\langle A(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V \quad (1.13)$$

我们先研究伴随算子的一些性质。

1.

命题 1.2.1. 设 $A \in \text{hom}(V, W)$, 那么 A^* 是唯一的。

证明: 不妨假设命题不成立, 那么存在 $B, C : W \rightarrow V, B \neq C$, 此时有:

$$\forall \alpha \in V, \beta \in W, \langle A\alpha, \beta \rangle_W = \langle \alpha, B\beta \rangle_V = \langle \alpha, C\beta \rangle_V$$

显然, 一定 $\exists \gamma, B(\gamma) \neq C(\gamma)$

此时注意到: $\langle B(\gamma) - C(\gamma), B(\gamma) - C(\gamma) \rangle_V = \langle B(\gamma), B(\gamma) \rangle_V - \langle B(\gamma), C(\gamma) \rangle_V = \mathbf{0} \Rightarrow B(\gamma) = C(\gamma)$, 与假设矛盾。

于是命题得证。 □

2.

命题 1.2.2. $\forall A \in \text{hom}(V, W), A^* \in \text{hom}(W, V)$

证明: $\forall \alpha \in V, \beta \in W, k \in F$

$$\langle \alpha, (A^* + B^*)(\beta) \rangle_V = \langle A(\alpha), \beta \rangle_W + \langle B(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V + \langle \alpha, B^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, A^*(\beta) + B^*(\beta) \rangle_V$$

$$\Rightarrow (A^* + B^*)(\beta) = A^*(\beta) + B^*(\beta)$$

$$\langle \alpha, (kA^*)(\beta) \rangle_V = k \langle A(\alpha), \beta \rangle_W = k \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, kA^*(\beta) \rangle_V$$

$$\Rightarrow (kA^*)(\beta) = kA^*(\beta)$$

于是命题得证。 □

3.

命题 1.2.3. $\forall A, B \in \text{hom}(V, W), (A + B)^* = A^* + B^*$

证明: $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, (A + B)^*(\beta) \rangle_V &= \langle (A + B)(\alpha), \beta \rangle_W = \langle A(\alpha), \beta \rangle_W + \langle B(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V + \langle \alpha, B^*(\beta) \rangle_V \\ &= \langle \alpha, A^*(\beta) + B^*(\beta) \rangle_V \end{aligned}$$

由于 α, β 是任意选取的, 命题得证。 □

4.

命题 1.2.4. $(kA)^* = \bar{k}A^*$ **证明:** $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$$\langle \alpha, (kA)^*(\beta) \rangle_V = \langle (kA)(\alpha), \beta \rangle_W = k \langle A(\alpha), \beta \rangle_W = k \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, \bar{k}A^*(\beta) \rangle_V$$

由于 α, β 是任意选取的, 命题得证。□

5.

命题 1.2.5. $\forall A \in \text{hom}(V, W), (A^*)^* = A$ **证明:** $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$$\langle \alpha, (A^*)^*(\beta) \rangle_V = \langle (A^*)(\alpha), \beta \rangle_W = \langle \alpha, A(\beta) \rangle_V$$

由于 α, β 是任意选取的, 命题得证。□

6.

命题 1.2.6. $\forall A \in \text{hom}(V, W), B \in \text{hom}(U, V), (AB)^* = B^*A^*$ **证明:** $\forall \alpha \in U, \beta \in W$

$$\langle \alpha, (AB)^*(\beta) \rangle_U = \langle (AB)(\alpha), \beta \rangle_W = \langle B(\alpha), A^*(\beta) \rangle_V = \langle \alpha, (B^*A^*)(\beta) \rangle_U$$

由于 α, β 是任意选取的, 命题得证。□

7.

命题 1.2.7. 如果 $A \in \text{hom}(V, W)$ 可逆, 那么此时 $A^* \in \text{hom}(W, V)$ 也可逆, 并且有 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ **证明:** 只需证明 $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = I$ $\forall \alpha, \beta \in V$

$$\langle \alpha, (A^*(A^{-1})^*)(\beta) \rangle_V = \langle A(\alpha), (A^{-1})^*(\beta) \rangle_W = \langle (A^{-1}A)(\alpha), \beta \rangle_V = \langle \alpha, \beta \rangle_V$$

$$\langle \alpha, ((A^{-1})^*A^*)(\beta) \rangle_V = \langle (A^{-1})(\alpha), A^*(\beta) \rangle_W = \langle (AA^{-1})(\alpha), \beta \rangle_V = \langle \alpha, \beta \rangle_V$$

由于 α, β 是任意选取的, 命题得证。□

8.

命题 1.2.8. 设 $A \in \text{hom}(V, W)$, 其中 V, W 是 *Hilbert* 空间, 有以下结论:

$$(a) \ker A = (\text{Im } A^*)^\perp$$

$$(b) \text{Im } A = (\ker A^*)^\perp$$

$$(c) \ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$$

$$(d) \operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \ker A &= \{\alpha \in V \mid A(\alpha) = \mathbf{0}\} \\ &= \{\alpha \in V \mid \forall \beta \in W, \langle A(\alpha), \beta \rangle_W = 0\} \\ &= \{\alpha \in V \mid \forall \beta \in W, \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle_V = 0\} \\ &= \{A^*(\beta) \in V \mid \beta \in W\}^\perp = (\operatorname{Im} A^*)^\perp \end{aligned}$$

于是第一条性质得证。

我们取 A^* 代入上式，得： $\ker A^* = (\operatorname{Im}(A^*)^*)^\perp = (\operatorname{Im} A)^\perp$ ，于是第三条性质得证。

对第一条性质左右取正交补，得： $(\ker A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$ ，于是第四条性质得证。

对第二条性质左右取正交补，得： $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*$ ，于是第二条性质得证。 \square

9.

命题 1.2.9. 设 $A \in \operatorname{hom}(V, W)$, V, W 的一个标准正交基分别为： $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ 那么 A 在 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ 下的矩阵 \mathbf{A} ，和 A^* 在 $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 \mathbf{A}^* 满足：

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}^T} \quad (1.14)$$

其中矩阵的共轭定义为： $\overline{\mathbf{T}} := (\overline{\mathbf{T}(i; j)})_{m \times n}$

$$\text{证明: } A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}(i; k) \beta_i \Rightarrow \langle A(\alpha_k), \beta_l \rangle = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}(i; k) \langle \beta_i, \beta_l \rangle = \mathbf{A}(l; k)$$

$$A^*(\beta_l) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}(j; l) \alpha_j \Rightarrow \langle \alpha_k, A^*(\beta_l) \rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{A}(j; l)} \langle \alpha_k, \alpha_j \rangle = \overline{\mathbf{A}(k; l)}$$

由伴随算子的定义，有 $\langle A(\alpha_k), \beta_l \rangle = \langle \alpha_k, A^*(\beta_l) \rangle$ ，于是一定有 $\mathbf{A}(l; k) = \overline{\mathbf{A}(k; l)}$

命题得证。 \square

1.2.2 正规算子

先给出定义。

定义 1.2.2: 正规算子

设 V 是 F 上的一个内积空间， $A \in \operatorname{hom}(V, V)$ ，如果 $AA^* = A^*A$ ，那么我们称 A 是一个正规算子

我们讨论正规算子的性质

1. 先给出两个引理:

引理 1.2.1

V 是 \mathbb{C} 上的一个内积空间, $A \in \text{hom}(V, V)$

如果 $\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0$, 那么 $A = 0$

证明: 注意到:

$$\forall \alpha, \beta \in V$$

$$\begin{aligned} & \frac{\langle A(\alpha+\beta), \alpha+\beta \rangle - \langle A(\alpha-\beta), \alpha-\beta \rangle}{4} + \frac{\langle A(\alpha+i\beta), \alpha+i\beta \rangle - \langle A(\alpha-i\beta), \alpha-i\beta \rangle}{4} i \\ &= \frac{2\langle A(\beta), \alpha \rangle + 2\langle A(\alpha), \beta \rangle}{4} + \frac{-2i\langle A(\alpha), \beta \rangle + 2i\langle A(\beta), \alpha \rangle}{4} i \\ &= \langle A(\alpha), \beta \rangle \end{aligned}$$

但是, 注意到原式的每一项都具备 $\langle A(\gamma), \gamma \rangle$ 的形式。那么, 一定有 $\langle A(\alpha), \beta \rangle = 0$, 从而 $A = 0$ 。

命题得证。 □

引理 1.2.2

V 是 F 上的一个内积空间, $F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$ 。如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 满足 $A = A^*$, 那么:

$$\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

证明: $\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha + \beta), \alpha + \beta \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle + \langle A(\beta), \beta \rangle + \langle A(\alpha), \beta \rangle + \langle A(\beta), \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha), \beta \rangle + \langle A(\beta), \alpha \rangle = 0$$

此时, 如果 $F = \mathbb{R}$, 那么立即得到 $\langle A(\alpha), \beta \rangle = 0 \Rightarrow A = 0$;

而如果 $F = \mathbb{C}$, 前面的引理已经指出了 $A = 0$ 。于是命题得证。 □

事实上, 符合以上所述的的算子我们一般称为自伴算子, 它显然是一种特殊的正规算子。

但是, 因为正规算子是更一般的情形, 我们暂时不先介绍它。

命题 1.2.10. $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子 $\Leftrightarrow \forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = \langle A^*(\alpha), A^*(\alpha) \rangle$

证明: A 是正规算子 $\Leftrightarrow AA^* - A^*A = 0$

注意到, $(AA^* - A^*A)^* = AA^* - A^*A$

于是 A 是自伴算子 $\Leftrightarrow \forall \alpha \in V, \langle (AA^* - A^*A)(\alpha), \alpha \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \langle AA^*(\alpha), \alpha \rangle = \langle A^*A(\alpha), \alpha \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = \langle A^*(\alpha), A^*(\alpha) \rangle$$

于是命题得证。 \square

2.

命题 1.2.11. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子, 那么有 $\ker A = \ker A^*$

证明: 依照之前的命题, 一定有:

$$\begin{aligned} \ker A &= \{\alpha \in V | A(\alpha) = \mathbf{0}\} = \{\alpha \in V | \langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = 0\} = \{\alpha \in V | \langle A^*(\alpha), A^*(\alpha) \rangle = 0\} \\ &= \{\alpha \in V | A^*(\alpha) = \mathbf{0}\} = \ker A^* \end{aligned}$$

于是命题得证。 \square

3.

命题 1.2.12. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子, 那么有 $\text{Im } A = \text{Im } A^*$

证明: 对上面的命题, 左右取正交补, 得:

$$\text{Im } A^* = \text{Im } A$$

于是命题得证。 \square

4.

命题 1.2.13. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子, 那么有 $\ker A \oplus \text{Im } A = V$

证明: $\ker A \oplus \text{Im } A = \ker A^* \oplus (\ker A^*)^\perp = V$

于是命题得证。 \square

5.

命题 1.2.14. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子, 那么 $\forall \lambda \in F, A - \lambda I$ 也是正规算子

证明: $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = (A - \lambda I)(A^* - \lambda I) = AA^* - \lambda A - \lambda A^* + \lambda^2 I = A^*A - \lambda A^* - \lambda A + \lambda^2 I = (A^* - \lambda I)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)$

于是命题得证。 \square

6.

命题 1.2.15. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子, 那么 λ 是 A 的特征值, α 是 A 的属于 λ 的特征向量的充要条件是:

$\bar{\lambda}$ 是 A^* 的特征值, α 是 A^* 的属于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量

证明: α 是 A 的属于 λ 的特征向量

$$\Leftrightarrow A(\alpha) = \lambda\alpha$$

$$\Leftrightarrow \langle (A - \lambda I)(\alpha), (A - \lambda I)(\alpha) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle (A - \lambda I)^*(\alpha), (A - \lambda I)^*(\alpha) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow A^*(\alpha) = \bar{\lambda}\alpha$$

于是命题得证。 □

7.

命题 1.2.16. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子, 那么 A 的属于不同特征值的特征向量相互正交

证明: 假设 $\alpha, \beta \in V, k, l \in F, k \neq l, A(\alpha) = k\alpha, A(\beta) = l\beta$

注意到:

$$(k - l)\langle \alpha, \beta \rangle$$

$$= k\langle \alpha, \beta \rangle - l\langle \alpha, \beta \rangle$$

$$= \langle k\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, l\beta \rangle$$

$$= \langle A(\alpha), \beta \rangle - \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle$$

$$= \langle A(\alpha), \beta \rangle - \langle A(\alpha), \beta \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0$$

于是命题得证。 □

1.2.3 自伴算子

定义 1.2.3: 自伴算子

设 V 是 F 上的一个内积空间, $A \in \text{hom}(V, V)$, 如果 $A = A^*$, 那么我们称 A 是一个自伴算子

讨论性质。

1. 自伴算子仅具有实特征值

推论 1.2.3: 自伴算子仅具有实特征值

V 是一个 F 上的内积空间, $F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$, 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是自伴算子, 那么 A 的所有特征值都是实数

证明: 这是显然的, 因为假如 α 是 A 的属于 λ 的特征向量, 那么注意到:

$$\text{此时 } \lambda\alpha = A(\alpha) = A^*(\alpha) = \bar{\lambda}\alpha$$

由特征值和特征向量的定义可知, $\alpha \neq \mathbf{0}$, 因此 $\lambda = \bar{\lambda}$, 即 $\lambda \in \mathbb{R}$. □

2.

命题 1.2.17. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是自伴算子, 那么 A 的所有特征值都是实数

3.

命题 1.2.18. 如果 $A \in \text{hom}(V, V)$ 是自伴算子, 那么属于不同特征值的特征向量相互正交

4.

命题 1.2.19. 设 V 是 \mathbb{C} 上的一个内积空间, $A \in \text{hom}(V, V)$ 是正规算子的充要条件是:

存在两个自伴算子 $T, S \in \text{hom}(V, V)$, 使得 $TS = ST, A = T + iS$

事实上, 在复内积空间中, 向量与其在算子作用下的向量的内积, 也可以反应算子的自伴性, 如下:

5.

命题 1.2.20. 设 V 是 \mathbb{C} 上的一个内积空间, $A \in \text{hom}(V, V)$, 那么 A 是自伴算子的充要条件是:

$$\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle \in \mathbb{R}$$

1.2.4 谱定理

定义 1.2.4: 谱

设 V 是 F 上的一个内积空间, $A \in \text{hom}(V, V)$, 我们定义:

$$\sigma(A) := \{\lambda \in F \mid A - \lambda I \text{ 不可逆}\} \quad (1.15)$$

称为 A 的谱

定理 1.2.4: 实谱定理

设 V 是 \mathbb{R} 上的一个内积空间, $A \in \text{hom}(V, V)$

以下三个命题等价:

1. A 是自伴算子
2. V 存在一个标准正交基, 使得 A 在该基下的矩阵为对角矩阵
3. V 存在一个由 A 的特征向量组成的标准正交基

定理 1.2.5: 复谱定理

设 V 是 \mathbb{C} 上的一个内积空间, $A \in \text{hom}(V, V)$

以下三个命题等价:

1. A 是正规算子
2. V 存在一个标准正交基, 使得 A 在该基下的矩阵为对角矩阵
3. V 存在一个由 A 的特征向量组成的标准正交基

1.3 保距算子、么正算子

1.4 酉算子

1.5 奇异值与奇异值分解

1.6 UR、QR、Schur 分解