第一章　线性映射及其矩阵

本章开始，我们转向线性映射的研究。

我们将用三章完成线性映射的研究。本章我们将从映射最基本的研究方式：向量的作用开始

线性映射的独特之处在于：一方面它能在常规的映射加法和纯量乘法下构成一个线性空间；另一方面，如果我们将复合视为乘法，它可以构成一个幺环。

第一节中，我们将给出线性映射的定义及运算，并研究基本性质；

第二节中，我们将研究两种由线性映射导出的子空间，核和像，并借此提出一个概念：秩。它和我们之前的秩也有很强的联系；

第三节到第五节中，我们将研究矩阵，它是将线性映射在基下的作用写成的一张数表，非常便于在数值上研究矩阵；

第六节中，我们将研究行列式，它是一个反对称多线性函数，我们以此为工具，为后续我们对线性映射分解的研究铺垫。

1.1　线性映射的定义和运算

1.1.1　线性映射的定义

我们首先给出线性映射的定义

定义 1.1.1: 线性映射

设 V_1, V_2 是一个 F 上的两个线性空间，，映射 $A : V_1 \to V_2$ 如果满足：

$\forall \alpha, \beta \in V_1, k \in F$

$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$

$A(k\alpha) = kA(\alpha)$

那么我们称 A 是一个从 V_1 到 V_2 的线性映射

全体 V_1 到 V_2 的线性映射的集合记作 $\hom_F(V_1, V_2)$，或简记作 $\hom(V_1, V_2)$

特别地，如果 $V_1 = V_2$，我们称 A 是一个 V_1 上的线性变换

有一些常用的线性映射，我们在这里列出来：

定义 1.1.2: 一些常用的线性映射

1. 恒等变换：$I : V \ni \alpha \mapsto \alpha \in V$
2. 数乘变换：$k : V \ni \alpha \mapsto k\alpha \in V$
3. 零变换：$0 : V_1 \ni \alpha \mapsto \mathbf{0}_{V_2} \in V_2$

1.1.2 线性映射的运算

前面我们定义了线性映射，现在我们开始赋予 $\hom(V_1, V_2)$ 线性空间和环的性质。

我们会定义三种运算：加法、纯量乘法、乘法

定义 1.1.3: 线性映射的运算

我们定义：

映射 $+ : \hom(V_1, V_2) \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为加法，如果满足：

$$\forall A, B \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A + B)(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha) \tag{1.1}$$

映射 $\cdot : F \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为纯量乘法，如果满足：

$$\forall k \in F, A \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in F, (k \cdot A)(\alpha) = kA(\alpha) \tag{1.2}$$

映射 $\circ : \hom(V_1, V_2) \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为乘法，如果满足：

$$\forall A, B \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A \circ B)(\alpha) = A\left(B(\alpha)\right) \tag{1.3}$$

我们也常常把 $k \cdot A$ 简记为 kA，将 $A \circ B$ 简记为 AB

显然，$(\hom(V_1, V_2), F, +, \cdot)$ 是一个线性空间，0 是它的零向量；

$(\hom(V_1, V_2), +, \circ)$ 是一个幺环，0 是它的加法单位元，I 是它的乘法单位元

除此之外，还有一些运算，但是它们是针对特殊的线性映射的，比如说：

定义 1.1.4: 线性变换的幂

$\forall A \in \hom(V, V)$

我们定义：$A^m := \begin{cases} A \circ A^{m-1}, m \geqslant 1 \\ I, m = 0 \end{cases} \quad , m \geqslant 0$

如果一个线性变换的幂不会使其本身变化，我们称它是一个幂等变换

定义 1.1.5: 幂等映射

$A \in \hom(V, V)$ 如果有：

$A = A^2$

我们称它是一个幂等变换

如果一个线性变换，存在一个自然数，使其在这个自然数次幂下为零变换，那么我们称它是一个幂零变换

定义 1.1.6: 幂零变换

$A \in \hom(V, V)$ 如果有：

$\exists l \in \mathbb{N}_+, A^l = 0$，且 $\forall n \in N_+, n < l, A^n \neq 0$

那么我们称 A 是一个幂零指数为 l 的幂零变换

我们不再讨论其他的运算，我们接下来转入线性映射一般性质的研究

1.1.3 线性映射的性质

1.

命题 1.1.1. $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$

证明： $A(\mathbf{0}_{V_1}) = A(0 \cdot \mathbf{0}_{V_1}) = 0 \cdot A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$ □

2.

命题 1.1.2. $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(-\alpha) = -A(\alpha)$

证明： $A(-\alpha) = A((-1) \cdot \alpha) = (-1) \cdot A(\alpha) = -A(\alpha)$ □

3.

命题 1.1.3. $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i A(\alpha_i)$

证明： 对 n 使用数学归纳法易证。 □

值得注意，这个定理并不能随意地推广到 $\aleph_0$，因为此时依赖于度量线性空间或线性映射的进一步性质。

4.

命题 1.1.4. $\forall A \in \hom(V, V), m \geqslant 1, A^m = A^{m-1} \circ A$

证明： 对 m 作数学归纳法。

首先，当 $m = 2$ 时，$A^2 = A \circ A$，命题成立

现在假设 m 时成立，我们来证明 $m + 1$ 时命题也成立：

$A^m = A \circ A^{m-1} = A \circ A^{m-2} \circ A = A^{m-1} \circ A$，于是命题得证。 □

这个命题看似显然，但是是必要的，因为线性映射环不交换。这个命题指出：递归式地推导幂时，从左右方向都是等价的。进一步，在递归中不断变换方向也不会影响结果。

5.

命题 1.1.5. $\forall A \in \hom(V_1, V_2)$

如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，那么 $A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_s)$ 也线性相关

证明： $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

$\Rightarrow \exists k_1, \cdots, k_s, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_s = \mathbf{0}$，其中 $k_1, \cdots, k_s$ 不全为零

$\Rightarrow A(k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_s) = k_1A(\alpha_1) + \cdots + k_nA(\alpha_s) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_n)$ 线性无关 □

值得注意的是，不同于同构映射，在这个命题中把线性相关改为线性无关会使命题变得不成立。比如说，零映射会把任何线性无关的向量组变得线性相关

6.

命题 1.1.6. $\forall T, Y \in \hom(V_1, V_2)$，$B$ 是 V_1 的一个基

如果 $\forall \alpha \in B, T(\alpha) = Y(\beta)$，那么 $T = Y$

证明： 只需证明：$\forall \gamma \in V_1, T(\gamma) = Y(\gamma)$

因为 B 是 V_1 的基，所以一定有 $\gamma = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_s \in B$

此时，$T(\gamma) = k_1T(\alpha_1) + \cdots + k_sT(\alpha_s) = k_1Y(\alpha_1) + \cdots + k_sY(\alpha_s) = Y(\gamma)$，于是命题得证。 □

这个命题指出，线性映射完全由其在基上的作用决定，因为我们其实只需要指定基上的像就指定了线性映射本身。

最后，还有一个问题未被解决：$\hom(V, W)$ 的维数和 $\dim V, \dim W$ 有什么关系。这个问题比较复杂，因为涉及无限维时，维数的公式会变得和有限情形完全不同。在讲解行列式后，我们将在附录一中解决这个问题。

1.2 线性映射的核和像

本节中，我们将借助核与像继续研究线性映射。所谓核，即是线性映射映到零的那一部分；像则是值域。

同时，我们会引入对偶映射，借助本节中核与像的工具，我们将看到对偶和本身之间的联系。

1.2.1 核与像的定义

定义 1.2.1: 线性映射的核

设 $A \in \mathrm{hom}(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\ker A := \{\alpha \in V_1 | A(\alpha) = \mathbf{0}_{V_2}\} \tag{1.4}$$

称为线性映射 A 的核

定义 1.2.2: 线性映射的像

设 $A \in \mathrm{hom}(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\mathrm{Im}\, A := A(V_1) := \{A(\alpha) | \alpha \in V_1\} \tag{1.5}$$

•

称为线性映射 A 的像

特别地，核与像的维数我们分别称为零化度和秩：

定义 1.2.3: 线性映射的零化度

设 $A \in \mathrm{hom}(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\mathrm{nullity}(A) := \dim(\ker A) \tag{1.6}$$

称为线性映射 A 的零化度

定义 1.2.4: 线性映射的秩

设 $A \in \mathrm{hom}(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\mathrm{rank}(A) := \dim(\mathrm{Im}\, A) \tag{1.7}$$

称为线性映射 A 的秩

事实上，线性映射的秩和之前我们曾提及的向量组的秩有着很大的联系，我们将在后续看到这一点。

为了方便后续性质的研究，接下来我们给出对偶映射的概念

定义 1.2.5: 对偶映射

设 $T \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义对偶映射 $T^* \in \hom(V_2^*, V_1^*)$

如果满足：$\forall f \in V_2^*, \alpha \in V_1$

$$(T^*(f))(\alpha) = (f \circ T)(\alpha) \tag{1.8}$$

1.2.2 核与像的性质

接下来研究核与像的性质

1.

命题 1.2.1. $\forall A \in \hom(V, W), \ker A, \operatorname{Im} A$ 都是线性空间

证明: 先证明 $\ker A$ 是一个线性空间

注意到，$\mathbf{0}_V \in \ker A$，因为 $A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$，因此 $\ker A$ 非空

那么，只需注意到 $\forall \alpha, \beta \in \ker A, A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha + \beta \in \ker A$

$\forall \alpha \in \ker A, k \in F, A(k\alpha) = kA(\alpha) = \mathbf{0}_W \Rightarrow k\alpha \in \ker A$

再证明 $\operatorname{Im} A$ 是一个线性空间

注意到，$\mathbf{0}_W = A(\mathbf{0}_V) \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A \neq \emptyset$

那么，只需注意到 $\forall A(\alpha), A(\beta) \in \operatorname{Im} A, A(\alpha) + A(\beta) = A(\alpha + \beta) \in \operatorname{Im} A$

$\forall A(\alpha) \in \operatorname{Im} A, k \in F, kA(\alpha) = A(k\alpha) \in \operatorname{Im} A$

于是命题得证 □

2.

命题 1.2.2. $A \in \hom(V, W)$，那么：

A 是单射 $\Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

证明: 先证明充分性。注意到，$A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$，而 A 为单射，于是一定有 $\ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

再证明必要性。设 $A(\alpha) = A(\beta)$，那么 $A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha - \beta = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow A$ 是单射 □

3.

命题 1.2.3. $A \in \hom(V, W)$，那么：

A 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = W$

证明: 这是显然的。 □

4. 秩-零化度定理 在给出定理前，我们先给出一个引理。它是一个线性空间的“同态基本定理”，证明方法也很相似

引理 1.2.1

$\forall A \in \hom(V, W)$

$$V/\ker A \cong \operatorname{Im} A \tag{1.9}$$

证明： 设 $\phi : V/\ker A \ni \alpha + \ker A \mapsto A(\alpha) \in \operatorname{Im} A$

首先验证它的确是一个映射

假设 $\alpha + \ker A = \beta + \ker A$

那么 $\alpha - \beta \in \ker A \Rightarrow A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow A(\alpha) = A(\beta)$

所以 ϕ 的确是一个映射

接下来验证它是一个单射

设 $\phi(\alpha + \ker A) = \phi(\beta + \ker A)$

$\Rightarrow A(\alpha) = A(\beta) \Rightarrow A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W$

$\Rightarrow \alpha - \beta \in \ker A \Rightarrow \alpha + \ker A = \beta + \ker A$

于是 ϕ 是单射。ϕ 显然是满射

接下来验证线性性：

$\forall \alpha + \ker A, \beta + \ker A \in V/\ker A, k \in F$

$\phi\left((\alpha + \ker A) + (\beta + \ker A)\right) = \phi\left((\alpha + \beta) + \ker A\right) = A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) = \phi(\alpha + \ker A) + \phi(\beta + \ker A)$

$\phi\left(k \cdot (\alpha + \ker A)\right) = \phi(k\alpha + \ker A) = A(k\alpha) = kA(\alpha) = k\phi(\alpha + \ker A)$

于是命题得证。 □

它的直接推论是被称为秩-零化度定理的结论，它揭示了秩和零化度的联系

定理 1.2.2: 秩-零化度定理

$\forall A \in \hom(V, W)$

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = \dim V \tag{1.10}$$

证明： $V/\ker A \cong \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \dim(V/\ker A) = \dim \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \dim V - \dim \ker A = \dim \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = \dim V$ □

5. 有限维映射和其对偶的秩相同 我们先证明一个引理：

引理 1.2.3: 子空间及其零化子维数和为原空间维数

设 V 是一个 F 上的线性空间，$\dim V = n < \aleph_0$，U 是 V 的一个线性子空间

我们定义 $U' = \{A \in V^* | \forall \alpha \in U, A(\alpha) = 0\}$

那么有：$\dim U + \dim U' = \dim V$

证明： 设 $\dim U = m, 0 \leqslant m \leqslant n$

取 U 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，并补全为 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的对偶基为 $\{f_1, \cdots, f_n\}$

我们来证明：$\{f_{m+1}, \cdots, f_n\}$ 是 U' 的一个基

取 $\forall A \in U'$。因为 $U' \subseteq V^*$，那么 A 一定可以被对偶基线性表出

不妨设 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i$

注意到，当 $1 \leqslant j \leqslant m, A(\alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i(\alpha_j) = k_j$

但因为 $\alpha_j \in U$，因此 $k_j = A(\alpha_j) = 0$

因此有 $A = \sum\limits_{i=m+1}^{n} k_i f_i$

这说明 U' 可由 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 线性表出。又因为 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 线性无关，因此 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 也线性无关

因此 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 是 U' 的一个基，那么 $\dim U' = n - m$，命题得证。 □

接下来给出命题

命题 1.2.4. 设 $T \in \hom(V, W), \dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0$

那么 $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^*)$

证明： 只需注意到，$\ker T^* = \{f \in W^* | T^*(f) = \mathbf{0}_{V^*}\}$

$= \{f \in W^* | f \circ T = \mathbf{0}_{V^*}\}$

$= \{f \in W^* | \forall \alpha \in V, f(T(\alpha)) = 0\}$

$= \{f \in W^* | \forall \beta \in \operatorname{Im} T, f(\beta) = 0\}$

而按照引理，有：$\dim \operatorname{Im} T + \dim\{f \in W^* | \forall \beta \in \operatorname{Im} T, f(\beta) = 0\} = \dim W$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T^* = \dim W$

再运用秩-零化度定理，有：$\dim \operatorname{Im} T^* + \dim \ker T^* = \dim W^* = \dim W$

因此有 $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^* \Rightarrow \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^*)$，命题得证 □

6.

命题 1.2.5. 设 $A \in \hom(V, W)$，如果 $\dim V = \dim W$，那么：

A 是满射 $\Leftrightarrow$ A 是单射

证明： 因为 $V/\ker A \cong \operatorname{Im} A$

A 是满射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = W \Leftrightarrow \operatorname{Im} A \cong W \Leftrightarrow \operatorname{Im} A \cong W \cong V$

$\Leftrightarrow V \cong V/\ker A \Leftrightarrow \dim\ker A = 0 \Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}_V\} \Leftrightarrow A$ 是单射 □

7.

命题 1.2.6. $A \in \hom(V, V), A$ 可逆 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \dim V$

证明： A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 是双射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \dim V$ □

在这里，我们利用了因为线性变换的定义域和陪域一定同维，所以其实双射就是满射的性质

事实上，容易发现线性映射可逆的必要条件是它的秩等于配域的维数

1.3 矩阵

为了方便后续的研究，我们引入一种“数表”，即矩阵。它和有限维空间上的线性映射完全同构

1.3.1 矩阵的定义

定义 1.3.1: 矩阵

形如以下的矩形阵列称为一个域 F 上的矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in F$

简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})。m 称为矩阵的行数，n 称为矩阵的列数。

特别地，如果 $m = n$，我们称它是一个 m 阶方阵。

F 上的全体 $m \times n$ 矩阵的集合记作 $M_{m\times n}(F)$，特别地如果 $m = n$，记作 $M_n(F)$。

我们也将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 m 行 n 列处的元素记作 $\boldsymbol{A}_{ij}$

我们也常常将 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 记作 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 或 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$，其中 $\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{pmatrix}$，$\beta_j=(a_{j1},\cdots,a_{jn})$ 可以看出来，矩阵也是可以视为一个向量组，因此，我们也可以对其定义秩：

定义 1.3.2: 矩阵的秩

设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in M_{m\times n}(F)$

我们定义：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \tag{1.11}$$

称为矩阵的秩

后续我们会看到，矩阵秩、线性映射秩、向量组秩其实是统一的

1.3.2 矩阵的运算

1. 相等

定义 1.3.3: 矩阵的相等

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(F),\boldsymbol{B}\in M_{m\times n}(F)$，如果 $\forall i,j,\boldsymbol{A}(i;j)=\boldsymbol{B}(i;j)$，则称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

2. 转置

定义 1.3.4: 矩阵的转置

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(F)$，

我们定义矩阵 $\boldsymbol{A}^T\in M_{n\times m}(F)$ 为满足 $\boldsymbol{A}^T(i;j)=\boldsymbol{A}(j;i)$ 的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置。

3. 加法

定义 1.3.5: 矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(F),\boldsymbol{B}\in M_{m\times n}(F)$

我们定义：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(i;j)=\boldsymbol{A}(i;j)+\boldsymbol{B}(i;j)$。

4. 纯量乘法

定义 1.3.6: 矩阵的纯量乘法

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), k \in F$，

我们定义矩阵 $k \cdot \boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F)$ 为满足 $(k \cdot \boldsymbol{A})(i;j) = k \cdot \boldsymbol{A}(i;j)$ 的矩阵。

5. 乘法

定义 1.3.7: 矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{n\times p}(F)$，

我们定义矩阵 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \in M_{m\times p}(F)$ 为满足 $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})(i;j) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(i;k)\boldsymbol{B}(k;j)$ 的矩阵

6. 幂

定义 1.3.8: 方阵的幂

$\forall \boldsymbol{A} \in M_n(F)$

我们定义：$\boldsymbol{A}^m := \begin{cases} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{m-1}, m \geqslant 1 \\ \boldsymbol{I}, m = 0 \end{cases} \quad , m \geqslant 0$

7. 和行向量的乘法

最后，为了后续研究线性映射，我们再定义一种新运算

定义 1.3.9: V^n 中的行向量和矩阵的乘积

设 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in V^m, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(F)$，

我们定义：

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \cdot \boldsymbol{A} = (\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{im}\alpha_i)$

值得注意的是，这个运算并不是矩阵乘法的退化，因为此处乘法的左元中的向量是一个一般的向量，而不一定是列向量

1.3.3 线性映射的矩阵

给出矩阵及其运算的基本定义后，我们可以开始讨论如何将线性映射写成矩阵了。

定义 1.3.10: 线性映射的矩阵

设 $A \in \hom(V, W), \dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0$

取 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，$W$ 的一个基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$

如果矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$ 满足：

$$(A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_m)) = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是线性映射 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下的矩阵

特别地，如果 $V = W$ 且 $\alpha_i = \beta_i$，我们称 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 下的矩阵

我们也常常简记 $(A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_m))$ 为 $A(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

我们习惯上用大写字母表示线性映射，而用加粗的大写字母表示它在某个基下的矩阵

我们接下来会看到，矩阵的运算其实就是线性映射的运算

1.3.4 矩阵的性质

1.

命题 1.3.1. $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\boldsymbol{A} + (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\boldsymbol{B}$

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)(k\boldsymbol{A}) = k\left((\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\boldsymbol{A}\right)$

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)(\boldsymbol{AB}) = \left((\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}$

证明： $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = (\sum_{i=1}^m (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(i;1)\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^m (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(i;m)\alpha_i)$

$= (\sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}(i;1)\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}(i;m)\alpha_i) + (\sum_{i=1}^m \boldsymbol{B}(i;1)\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^m \boldsymbol{B}(i;m)\alpha_i)$

$= (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\boldsymbol{A} + (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\boldsymbol{B}$

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)(k\boldsymbol{A}) = (\sum_{i=1}^m (k\boldsymbol{A})(i;1)\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^m (k\boldsymbol{A})(i;m)\alpha_i)$

$= k(\sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}(i;1)\alpha_i, \cdots, \sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}(i;m)\alpha_i)$

$= k\left((\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\boldsymbol{A}\right)$

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{n\times s}(F)$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(\boldsymbol{AB})=(\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{AB})(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{AB})(i;m)\alpha_i)$

$=(\sum_{i=1}^m(\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{A}(i;j)\boldsymbol{B}(j;1))\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m(\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{A}(i;j)\boldsymbol{B}(j;m))\alpha_i)$

$=(\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{B}(j;1)(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;j)\alpha_i),\cdots,\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{B}(j;m)(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;j)\alpha_i))$

$=(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;m)\alpha_i)\boldsymbol{B}$

$=((\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}$ □

2.

命题 1.3.2. 设 $A,B\in\hom(V,W)$，其中 V,W 是 F 上的有限维线性空间

分别取 V,W 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$

设 A,B 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$

那么：$A+B$ 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

证明: 只需证明：$(A+B)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

注意到，$(A+B)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=A(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+B(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

$=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{A}+(\beta_1,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{B}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

命题得证。 □

3.

命题 1.3.3. 设 $A\in\hom(V,W),k\in F$，其中 V,W 是 F 上的有限维线性空间

分别取 V,W 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$

设 A 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$

那么：kA 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵为 $k\boldsymbol{A}$

证明: 只需证明：$(kA)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(k\boldsymbol{A})$

注意到，$(kA)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=k\,(A(\alpha_1,\cdots,\alpha_m))$

$=k\,((\beta_1,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{A})=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(k\boldsymbol{A})$

命题得证。 □

4.

命题 1.3.4. 设 $A\in\hom(W,U),B\in\hom(V,W)$，其中 V,W 是 F 上的有限维线性空间

分别取 V,W,U 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\},\{\gamma_1,\cdots,\gamma_k\}$

设 A 在 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\},\{\gamma_1,\cdots,\gamma_k\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$

B 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$

那么：AB 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\gamma_1,\cdots,\gamma_k\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$

证明： 只需证明：$(AB)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)(\boldsymbol{AB})$

注意到，$(AB)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=A\left(B(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\right)$

$=A((\beta_1,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{B})=A(\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}(i,1)\beta_i,\cdots,\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}(i,m)\beta_i)$

$=(\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}(i,1)A(\beta_i),\cdots,\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}(i,m)A(\beta_i))=(A(\beta_1),\cdots,A(\beta_n))\,\boldsymbol{B}$

$((\gamma_1,\cdots,\gamma_k)\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}=((\gamma_1,\cdots,\gamma_k))\,(\boldsymbol{AB})$

命题得证。 □

至此，我们证明了有限维到有限维的线性映射的运算和矩阵的运算别无二致

5.

命题 1.3.5. $\dim_F M_{m\times n}(F)=mn$

证明： 设 $\boldsymbol{E_{ij}}\in M_{m\times n}(F)$ 满足：

$\boldsymbol{E_{ij}}(k;l)=\delta_{ik}\delta_{jk}$

显然 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 线性无关

那么，只需注意到：

$\forall\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(F),\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}A(i;j)\boldsymbol{J_{ij}}\right)$

于是 $\dim_F M_{m\times n}(F)=\mathrm{Card}\{\boldsymbol{J}_{ij}\}=mn$，命题得证。 □

6.

命题 1.3.6. 设 V,W 是 F 上的线性空间，$\dim V=n<\aleph_0,\dim W=m<\aleph_0$

那么：$\hom(V,W)\cong M_{m\times n}(F)$

证明： 注意到：$\dim hom(V,W)=mn$

依照前面的命题和同构的性质，命题得证。 □

此命题中我们使用了有关线性映射空间的维数的结论，证明参见附录。

7. 矩阵乘法的交换律

命题 1.3.7. 设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(F),\boldsymbol{B}\in M_{n\times k}(F),\boldsymbol{C}\in M_{k\times s}(F)$

那么有：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

命题 1.3.8. 分别任取 F 上的线性空间 V,W,U,H,使得 $\dim V=n,\dim W=m,\dim U=k,\dim H=s$

依照前面的命题，一定能找到 $A \in \hom(V,W), B \in \hom(U,V), C \in \hom(H,U)$，使得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是它们的矩阵

注意到，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}),(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 分别是 $A(BC),(AB)C$ 的矩阵。

而因为 $A(BC)=(AB)C$，所以一定有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$，命题得证。

8. 矩阵乘法的分配律

命题 1.3.9. 如果 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{n\times k}(F), \boldsymbol{C} \in M_{n\times k}(F)$

那么有：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；

如果 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times k}(F), \boldsymbol{B} \in M_{n\times k}(F), \boldsymbol{C} \in M_{k\times s}(F)$

那么有：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

命题 1.3.10. 分别任取 F 上的线性空间 V,W,U,H,使得 $\dim V=n, \dim W=m, \dim U=k, \dim H=s$

先证左分配律：

依照前面的命题，一定能找到 $A \in \hom(V,W), B \in \hom(U,V), C \in \hom(U,V)$，使得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是它们的矩阵

注意到，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}),\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ 分别是 $A(B+C),AB+AC$ 的矩阵。

而因为 $A(B+C)=AB+AC$，所以一定有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

再证右分配律：

依照前面的命题，一定能找到 $A \in \hom(U,V), B \in \hom(U,V), C \in \hom(H,U)$，使得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是它们的矩阵

注意到，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C},\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ 分别是 $(A+B)C,AC+BC$ 的矩阵。

而因为 $(A+B)C=AC+BC$，所以一定有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

命题得证。

于是，我们证明了 $(M_n(F),+,\cdot)$ 是一个环。事实上，它是一个非交换幺环。

非交换是显然的，我们接下来讨论它的幺元。

9. 单位矩阵的性质

命题 1.3.11. 设 $\boldsymbol{I_n} \in M_n(F)$ 满足：$\boldsymbol{I_n}(i;j)=\delta_{ij}$

那么有：$\forall \boldsymbol{A} \in M_{n\times m}(F), \boldsymbol{I_n}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

$\forall \boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{A}\boldsymbol{I_n}=\boldsymbol{A}$

$\forall \boldsymbol{A} \in M_n(F), \boldsymbol{A}\boldsymbol{I_n}=\boldsymbol{I_n}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

证明: 事实上，以上都是显然的，因为只需注意到：

任取一个 n 维线性空间 V 和它的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

$I(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{I_n}$

因此，$\boldsymbol{A}$ 是 I 在任意基上的矩阵，因此上述性质是显然的。 □

上述结论说明：$\boldsymbol{I_n}$ 是 $M_n(F)$ 的乘法单位元，它一般也被称为单位矩阵

在证明过程中，我们还发现：不同于绝大多数线性映射的矩阵和其基的选择有关，恒等变换在任意基下的矩阵都是单位矩阵

我们将在后续用一节专门研究可逆矩阵

10.

命题 1.3.12. $\forall k \in F, \boldsymbol{A} \in M_{n\times m}(F), \boldsymbol{B} \in M_{m\times k}(F)$

$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

命题 1.3.13. 随意取三个 F 上的线性空间 V, W, U,使得 $\dim V = m, \dim W = n, \dim U = k$

依照前面的命题，一定能找到 $A \in \hom(V, W), B \in \hom(U, V)$，使得 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是它们的矩阵

注意到，$k(\boldsymbol{AB}), (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$ 分别是 $k(AB), (kA)B, A(kB)$ 的矩阵。

而因为 $k(AB) = (kA)B = A(kB)$，所以一定有 $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

命题得证。

11.

命题 1.3.14. $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{m-1} = \boldsymbol{A}^{m-1} \cdot \boldsymbol{A}, m \geqslant 1$

证明: 只需证明：$\forall A \in \hom(V, V)$，任取 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵，那么 $\boldsymbol{A}^m$ 是 A^m 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵

使用数学归纳法。首先，当 $m = 1$ 时，结论就假设，显然成立

现在假设 m 时命题成立，于是 $\boldsymbol{A}^{m+1} = A \circ A^m$ 是在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A}^{m+1}$

因此结论成立，依照之前我们证明的线性映射性质，命题显然成立。 □

12.

命题 1.3.15. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

证明： $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T(j;i)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(i;j)=\boldsymbol{A}(i;j)+\boldsymbol{B}(i;j)=\boldsymbol{A}^T(j;i)+\boldsymbol{B}^T(j;i)$

命题得证 □

13.

命题 1.3.16. $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T$

证明： $(k\boldsymbol{A})^T(j;i)=(k\boldsymbol{A})(i;j)=k\boldsymbol{A}(i;j)=k\boldsymbol{A}^T(j;i)$

命题得证 □

14.

命题 1.3.17. 设 V,W 是 F 上的两个线性空间，$\dim V=n<\aleph_0,\dim W=m<\aleph_0$

分别取 V,W 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$，设其对偶基是 $\{f_1,\cdots,f_n\},\{g_1,\cdots,g_m\}$

$\forall A\in\hom(V,W)$，如果它在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$

那么 $A^*\in\hom(W^*,V^*)$ 在 $\{g_1,\cdots,g_m\},\{f_1,\cdots,f_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}^T$

证明： 设 $A^*\in\hom(W^*,V^*)$ 在 $\{g_1,\cdots,g_m\},\{f_1,\cdots,f_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}'$

$A^*(g_j)=\sum\limits_{i=1}^n\boldsymbol{A}'(i;j)f_i$

$\Rightarrow A^*(g_j)(\alpha_k)=\sum\limits_{i=1}^n\boldsymbol{A}'(i;j)f_i(\alpha_k)$

$\Rightarrow (g_jA)(\alpha_k)=\sum\limits_{i=1}^n\boldsymbol{A}'(i;j)\delta_{ik}$

$\Rightarrow g_j(\sum\limits_{l=1}^m\boldsymbol{A}(l;k)\beta_l)=\boldsymbol{A}'(k;j)$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}(j;k)=\boldsymbol{A}'(k;j)$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^T$

命题得证 □

15. 我们先证明一个引理

引理 1.3.1

设 V,W,U 是 F 上的两个线性空间，$\dim V=n<\aleph_0,\dim W=m<\aleph_0,\dim U=k<\aleph_0$

$\forall A\in\hom(V,W),B\in\hom(U,V)$

那么 $(AB)^*=B^*A^*$

证明： $\forall g\in W^*,\gamma\in U$

$(AB)^*(g)(\gamma)=(gAB)(\gamma)=B^*(A^*(g))(\gamma)=(B^*A^*)(g)(\gamma)$

$\Rightarrow (AB)^* = B^*A^*$ □

命题 1.3.18. $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

证明： 任取 F 上的三个线性空间 V, W, U，使得 $\dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0, \dim U = k < \aleph_0$

分别取 V, W, U 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}, \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$

并记其对偶基为 $\{f_1, \cdots, f_m\}, \{g_1, \cdots, g_n\}, \{u_1, \cdots, u_k\}$

显然存在 $A \in \hom(V, W)$，使得它在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$

存在 $B \in \hom(U, V)$，使得它在 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$

注意到：$(\boldsymbol{AB})^T$ 是 $(AB)^*$ 在 $\{g_1, \cdots, g_n\}, \{u_1, \cdots, u_k\}$ 下的矩阵

$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ 是 B^*A^* 在 $\{g_1, \cdots, g_n\}, \{u_1, \cdots, u_k\}$ 下的矩阵

那么，因为 $(AB)^* = B^*A^*$，所以一定有 $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ □

16.

命题 1.3.19. 设 V, W 是 F 上的两个线性空间，$\dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0$

任取 V, W 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$

$\forall A \in \hom(V, W)$，设 $\boldsymbol{A}$ 是 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下的矩阵

那么有：$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$

证明： 设 $\boldsymbol{A} = (\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$

我们只需证明:$\dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{span}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$,因为 $\operatorname{rank}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) = \dim \operatorname{span}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$（参阅命题 1.4.7）

显然，$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}(A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_m))$

考虑自然同构：$\phi : W \ni \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n$

显然 ϕ 是一个同构映射。

那么，只需注意到：$\forall k_1 A(\alpha_1) + \cdots, k_m A(\alpha_m) \in \operatorname{Im}(A)$

$\phi(k_1 A(\alpha_1) + \cdots, k_m A(\alpha_m)) = k_1\gamma_1 + \cdots, k_m\gamma_m \in \operatorname{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

$\forall k_1\gamma_1 + \cdots, k_m\gamma_m \in \operatorname{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

$\phi^{-1}(k_1\gamma_1 + \cdots, k_m\gamma_m) = k_1 A(\alpha_1) + \cdots, k_m A(\alpha_m) \in \operatorname{Im}(A)$

因此，$\operatorname{Im}(A) \cong \operatorname{span}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$，于是命题得证 □

至此，我们证明了，矩阵、向量组、线性映射的秩是统一的。

17. 矩阵行秩等于列秩

命题 1.3.20. 设 $\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ 那么，$\operatorname{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \operatorname{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_m)$

证明： 设 V, W 是域 F 上的两个线性空间，$\dim V = n < \aleph_0, \dim W = m < \aleph_0$

分别任取 V, W 的一个基 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}, \{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$

显然存在 $A \in \hom(V, W)$，使得它在 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}, \{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$

于是有:$\operatorname{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^*) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T) = \operatorname{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_m)$

于是命题得证。 □

18.

命题 1.3.21. 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{n\times k}(F)$

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}$

证明： 先证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$

设 V, W, U 是 F 上的三个线性空间，$\dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0, \dim U = k < \aleph_0$

任取 V, W, U 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}, \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$

显然存在 $A \in \hom(V, W), B \in \hom(U, V)$，使得 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，B 在 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$

于是，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(AB) = \dim \operatorname{Im}(AB)$

注意到：$\operatorname{Im}(AB) = \{A(B(\alpha)) | \alpha \in U\} \subseteq \{A(\beta) | \beta \in V\} = \operatorname{Im}(A)$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(AB) \leqslant \dim \operatorname{Im}(A) \Rightarrow \operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A) \Rightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$

又注意到：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}\left((\boldsymbol{AB})^T\right) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^T) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$

于是命题得证。 □

19.

命题 1.3.22. 设 V 是一个 F 上的线性空间，$\dim V = n < \aleph_0$

取 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，设 $A \in \hom(V, V)$ 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$

A 是幂等变换 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵

证明： A 是幂等变换 $\Leftrightarrow A^2 = A \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵 □

20.

命题 1.3.23. 设 V, W 是域 F 上的两个线性空间，$\dim V = n < \aleph_0, \dim W = m < \aleph_0$

设 V, W 的一个基分别是 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$

$\forall A \in \hom(V, W)$，如果它在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$

$\gamma \in V$ 满足 $\gamma = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{x} \in F^n$

那么，$A(\gamma)$ 在 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 下的坐标是 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}$。

证明: 设 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$

那么，$A(\gamma) = A\left((\alpha 1, \cdots, \alpha_n)\mathbf{x}\right)$

$= A(x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n) = x_1 A(\alpha_1) + \cdots + x_n A(\alpha_n) = \left(A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\right)\mathbf{x}$

$\left((\beta_1, \cdots, \beta_m)\boldsymbol{A}\right)\mathbf{x} = (\beta_1, \cdots, \beta_m)\left(\boldsymbol{A}\mathbf{x}\right)$

于是命题得证 □

1.4 分块矩阵

1.5 特殊矩阵

本节中我们介绍一些后续需要用到的特殊矩阵

1. 单位矩阵

定义 1.5.1: 单位矩阵

n 阶矩阵环 $M_n(F)$ 的乘法单位元称为单位矩阵，记作 $\boldsymbol{I_n}$，或简记为 $\boldsymbol{I}$

在前面一节，我们已经知道，$\boldsymbol{I}$ 的具体形式，其实就是满足 $\boldsymbol{I}(i; j) = \delta_{ij}$ 的矩阵

也就是 $\boldsymbol{I_n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

2. 数量矩阵

定义 1.5.2: 数量矩阵

我们称单位矩阵与一纯量的乘法的结果为数量矩阵：

$$k\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k \end{pmatrix} \in M_n(F), k \in F \tag{1.13}$$

记作 $k\boldsymbol{I}$

全体数量矩阵显然构成一个线性子空间，我们一般记为 $F\boldsymbol{I}$

3. 基本矩阵

定义 1.5.3: 基本矩阵

我们定义基本矩阵 $\boldsymbol{E_{ij}} \in M_{m\times n}(F)$ 为满足以下条件的矩阵：

$\boldsymbol{E_{ij}}(k;l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$

我们之前已经指出，全体基本矩阵是矩阵空间的一个基

容易注意到以下结果：

命题 1.5.1. 设 $\mathbf{e}_i$ 为 F^n 中仅在第 i 个元素上为 1，其他元素均为 0 的向量

那么有：$\boldsymbol{E}_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$

4. 对角矩阵

定义 1.5.4: 对角矩阵

我们定义：

$$diag\{d_1, \cdots, d_n\} = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \in M_n(F), d_1, \cdots, d_n \in F \tag{1.14}$$

5. 初等矩阵

定义 1.5.5: 初等矩阵

设 $\mathbf{e}_i$ 为 F^n 中仅在第 i 个元素上为 1，其他元素均为 0 的向量

我们定义：

$$\boldsymbol{P}(i,j) = \boldsymbol{I} - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \in M_n(F) \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{P}(i(c)) = \boldsymbol{I} + (c-1)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T \in M_n(F), c \in F, c \neq 0 \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{P}(j,i(c)) = \boldsymbol{I} + c\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^T \in M_n(F), i \neq j, c \in F \tag{1.17}$$

这三种矩阵统称为初等矩阵

容易注意到它们的具体形式：$\boldsymbol{P}(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{P}(i(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & k & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{P}(j,i(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

6. 对称矩阵、反对称矩阵

定义 1.5.6: 对称矩阵与反对称矩阵

我们定义：

如果 $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$ 满足：

$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$，那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵；

$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$，那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是一个反对称矩阵。

7. 上三角矩阵、下三角矩阵

定义 1.5.7: 我

定义：

如果 $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$ 满足：

$\forall i > j, \boldsymbol{A}(i;j) = 0$，那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是一个上三角矩阵；

$\forall i < j, \boldsymbol{A}(i;j) = 0$，那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是一个下三角矩阵。

1.6 可逆矩阵

可逆矩阵其实就是矩阵环 $M_n(F)$ 中的可逆元。本节中我们将研究可逆矩阵的一些基本性质，以及矩阵环中的特殊性质。最后，我们会看到它的一个简单应用：过渡矩阵和相似

1.6.1 可逆矩阵的定义

定义 1.6.1: 可逆矩阵

设 $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$，如果 $\exists \boldsymbol{A}^{-1} \in M_n(F)$，使得：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{1.18}$$

那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是一个可逆矩阵，并称 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

我们记全体可逆矩阵的集合为 $GL_n(F)$，称为 F 上的 n 阶可逆矩阵群

1.6.2 可逆矩阵的性质

1.

命题 1.6.1. $\boldsymbol{A} \in GL_n(F) \Rightarrow \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$

证明： 依照定义显然。 □

2.

命题 1.6.2. 设 V 是一个 F 上的线性空间，且它们一个基是 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

则 $\forall A \in \hom(V, V)$，若 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，那么：

A 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in GL_n(F)$

且此时 A^{-1} 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}^{-1}$

证明： A 可逆 $\Leftrightarrow \exists B \in \hom(V, V), AB = BA = I$

记 B 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则：

A 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in GL_n(F), \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$

于是命题得证。 □

3.

命题 1.6.3. $\boldsymbol{A} \in GL_n(F) \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$

证明： 设 V 是一个 F 上的线性空间，$\dim V = n < \aleph_0$

任取 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

显然存在 $A \in \hom(V, V)$，使得 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 上的矩阵是 $\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A} \in GL_n(F) \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$ □

4.

命题 1.6.4. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(F)$

那么：$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in GL_n(F), \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$

证明： $n = \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \Rightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n \Rightarrow \boldsymbol{A} \in GL_n(F)$

同理可证 $\boldsymbol{B} \in GL_n(F)$，$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$ 依照定义是显然的。

于是命题得证 □

5.

命题 1.6.5. $(\boldsymbol{P}(i,j))^{-1} = \boldsymbol{P}(j,i)$

$(\boldsymbol{P}(i(c)))^{-1} = \boldsymbol{P}(i(\frac{1}{c}))$

$(\boldsymbol{P}(j,i(c)))^{-1} = \boldsymbol{P}(j,i(-c))$

证明： 注意到：

$\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{P}(j;i) = \left(\boldsymbol{I} - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T\right)\left(\boldsymbol{I} - (\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)^T\right)$

$= (\boldsymbol{I} - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T)^2 = \boldsymbol{I} - 2(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T + (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T$

当 $i \neq j$，有 $(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = \delta_{ii} + \delta_{jj} - 2\delta_{ij} = 2$

于是有 $\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{P}(j;i) = \boldsymbol{I}$

注意到：

$\boldsymbol{P}(i(c))\boldsymbol{P}(i(\frac{1}{c})) = (\boldsymbol{I} + (c-1)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T)\left(\boldsymbol{I} + (\frac{1}{c} - 1)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\right)$

$= \boldsymbol{I} + (c + \frac{1}{c} - 2)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T + (1 - c - \frac{1}{c} + 1)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T = \boldsymbol{I}$

注意到：

$\boldsymbol{P}(j,i(c))\boldsymbol{P}(j,i(-c)) = \left(\boldsymbol{I} + c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\right)\left(\boldsymbol{I} - c\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\right)$

$= \boldsymbol{I} - c^2\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T = \boldsymbol{I}$

于是命题得证。 □

1.6.3 过渡矩阵

我们研究一种矩阵，称为过渡矩阵。

定义 1.6.2: 过渡矩阵

设 V 是一个 F 上的有限维线性空间，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 是它的两个基

如果 $\boldsymbol{S} \in M_n(F)$ 满足：

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\boldsymbol{S} \tag{1.19}$$

那么我们称 $\boldsymbol{S}$ 是 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 到 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的过渡矩阵

容易看出，其实过渡矩阵就是恒等变换 I 在定义域和值域上选取不同基后的矩阵

我们可以看出以下性质：

1.

   命题 1.6.6. 如果 $\boldsymbol{S}$ 是 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 到 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的过渡矩阵，那么 $\boldsymbol{S} \in GL_n(F)$

   证明： 注意到：I 在 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PS} = \boldsymbol{SP} = \boldsymbol{I}$

   于是命题得证 □

2. 过渡矩阵最大的应用，就是给出了切换线性变换的矩阵所依赖的基后，矩阵究竟会如何变化。

   命题 1.6.7. 设 V 是 F 上的线性空间，$\dim V = n < \aleph_0$，$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是它的两个基

   设 $A \in \hom(V, V)$ 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{S}$ 是 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 到 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵

   那么，A 在 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有：

   $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$

证明： 这是显然的，因为 $A = IAI$，而 I 在 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{S}$，在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}$ □

如果两个矩阵具备以上所述的关系——即同一变换在不同基下，我们称这种关系为相似。接下来我们正式阐述相似矩阵

1.6.4 矩阵的相似

定义 1.6.3: 相似矩阵

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(F)$

如果 $\exists \boldsymbol{P} \in GL_n(F)$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$

那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$

接下来我们研究相似矩阵的性质

1.

   命题 1.6.8. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(F)$

   那么：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \exists T \in \hom(V, V), \dim_F V = n$，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 T 分别在基 B_1, B_2 下的矩阵

   证明： 根据前面同一变换在不同基下矩阵的关系，这是显然的 □

2. 相似是一种等价关系

   这是前面命题的直接推论：

   推论 1.6.1: 矩

   的相似是一种等价关系

   证明： 这是显然的，因为我们已经指出，相似矩阵只是同一映射在不同基下的表示 □

3. 相似矩阵具有相同的秩

   这事实上也只是前面命题的推论

   推论 1.6.2: 如

   $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(F), \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$

   那么有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$

证明： 这是显然的，因为我们之前已经证明了，无论选取哪个基，映射的矩阵一定和映射具有相同的秩。 □

1.7 迹和行列式

1.7.1 张量积

在研究迹和行列式前，我们先研究张量积。张量积一般应用于多重线性映射的研究中，后面我们会看到：行列式是一种特殊的多重线性映射。

张量积的本意是将两个线性空间组合在一起形成新的空间，并且希望可以将原来的两个空间和新的空间对应。

在双线性映射，即对每一分量都线性的映射的研究中，我们将两个空间组合在一起，视为同一空间研究

我们希望：新的空间和原来的两个空间应该别无二致。因此，如果确立了两个空间 V, W 到张量积空间 U 的映射，我们希望每一个 V, W 到 Z 的双线性映射，都只能确定唯一的 U 到 Z 的映射。

以上想法给出了以下定义：

定义 1.7.1: 双线性映射

设 V, W, Z 是三个线性空间，

映射 $f : V \times W \to Z$ 如果满足：

1. $\forall \alpha, \beta \in V, \gamma \in W, f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta + \gamma)$
2. $\forall \alpha \in V, \beta, \gamma \in W, f(\alpha, \beta + \gamma) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$
3. $\forall k \in F, \alpha \in V, \beta \in W, f(k \cdot \alpha, \beta) = k \cdot f(\alpha, \beta), f(\alpha, k \cdot \beta) = k \cdot f(\alpha, \beta)$

那么我们称 f 是一个双线性映射

定义 1.7.2: 线性空间的张量积

设 V, W, Z 是三个 F 上的线性空间，如果线性空间 $V \otimes W$ 满足：

存在映射 $f : V \times W \to V \otimes W$，使得：

任意的 $f : V \times W \to Z$ 的双线性映射 g，存在唯一的线性映射 $h : V \otimes W \to Z$，使得 $g = h \circ f$

那么，我们称 $V \otimes W$ 是 V 和 W 的张量积

此时，我们也记 $\alpha \otimes \beta := f(\alpha, \beta)$

在继续研究之前，我们需要先证明张量积的确是存在的：

命题 1.7.1. 任意两个 F 上的线性空间 V, W 的张量积 $V \otimes W$ 是存在的，并且在同构意义下唯一

我们也容易证明，张量积在同构意义下满足结合律

命题 1.7.2. $(V \otimes W) \otimes Z \cong V \otimes (W \otimes Z)$

1.7.2 张量和外积

我们首先介绍张量的概念

定义 1.7.3: 张量

设 V 是 F 上的一个线性空间，我们定义：

$$T_s^r := T^r V \otimes T^s V^* \tag{1.20}$$

其中

$$T^p W := \begin{cases} F, p = 0 \\ W \otimes T^{p-1} W, p \geqslant 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

我们称 T_s^r 中的元素为一个 (r, s) 型张量

定义 1.7.4: 张量代数

我们定义：

$$TV = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r V \tag{1.22}$$

称为 V 上的张量代数

其中，TV 的加法和纯量乘法为映射的加法和纯量乘法

同时，我们定义 TV 中的乘法为：$\forall f, g \in TV$

$(f \cdot g)(k) = \sum\limits_{i+j=k} f(i) \otimes g(j)$

定义 1.7.5: 外代数

记 $S = \{\alpha \otimes \alpha | \alpha \in V\}, I = (S)$

我们定义：

$$\bigwedge V = TV/I \tag{1.23}$$

称为 V 上的外代数

特别地，我们记：$I_p = I \cap T^p V, \bigwedge\limits^p V = T^p V/I_p$

并定义：$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m := \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m + I$

称为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的外积

1.7.3 迹

在完成了预备工作后，我们准备开始定义矩阵的迹

迹是体现线性映射的不变量之一，其核心在于对映射复合的交换下不变

定义 1.7.6: 迹

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$

满足以下条件的映射 $\mathrm{tr} : \hom(V, V) \to F$ 称为迹：

1. $\forall A, B \in \hom(V, V), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
2. $\mathrm{tr}(I) = \dim V = n$

我们将看到，迹是存在且唯一的。

我们也可以定义矩阵的迹：

定义 1.7.7: 矩阵的迹

设 $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$，$V$ 是一个 F 上的 n 维线性空间

如果 $\mathcal{A} \in \hom(V,V)$ 在基 B 上的矩阵为 $\boldsymbol{A}$

那么我们定义：

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) := \operatorname{tr}(\mathcal{A}) \tag{1.24}$$

迹有以下性质：

1.

命题 1.7.3. *tr 存在且唯一*

证明： 取 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 和它的对偶基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$

我们定义：$f : \hom(V,V) \ni T \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\left(T(\alpha_i)\right) \in F$

$tr(TS) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \left(T \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(S(\alpha_i))\alpha_j \right)$

□

1.7.4 行列式

定义 1.7.8: 行列式

设 F 是一个域，V 是 F 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$

对于 $T \in \hom(V,V)$，我们定义映射 $\bigwedge^n T : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$ 为：

$$\left(\bigwedge^n T\right)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) := T(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge T(\alpha_n) \tag{1.25}$$

由下式导出的映射 $\det : \hom(V,V) \to F$ 称为行列式：

$$\left(\bigwedge^n T\right)(\omega) = \det(T)\omega \tag{1.26}$$

我们自然地把矩阵的行列式定义为其映射的行列式：

定义 1.7.9: 矩阵的行列式

设 $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$，$V$ 是一个 F 上的 n 维线性空间

如果 $A \in \hom(V,V)$ 在基 B 上的矩阵为 $\boldsymbol{A}$

那么我们定义：

$$\det(\boldsymbol{A}) := \det(A) \tag{1.27}$$

A 的行列式的另外一种常用的符号是记作 $|A|$；特别地，我们也常常记 $\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 的行列式为 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

我们也给出子式的定义，它是矩阵的一个子矩阵的行列式，常常用于对行列式进行降阶

定义 1.7.10: 子式、余子式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(F), I = \{i_1, \cdots, i_k\}, J = \{j_1, \cdots, j_k\}$，其中 $i_1 < \cdots < i_k, j_1 < \cdots < j_k$

我们定义：

$\boldsymbol{A}_J^I := \boldsymbol{A}_{j_1,\cdots,j_k}^{i_1,\cdots,i_k} := (a_{ij})_{k\times k}, i \in I, j \in J$

行列式 $\det(\boldsymbol{A}_J^I)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式

特别地，如果 $I' = \{i_1', \cdots, i_{n-k}'\}, J' = \{j_1', \cdots, j_{n-k}'\}, i_1' < \cdots < i_{n-k}', j_1' < \cdots < j_{n-k}', I \cup I' = \mathbb{Z}_n, J \cup J' = \mathbb{Z}_n$

那么我们 $\det(\boldsymbol{A}_{J'}^{I'})$ 是 $\det(\boldsymbol{A}_J^I)$ 的余子式

映射行列式的讨论比较简单，我们接下来讨论中，主要是矩阵的行列式

1. 存在性和唯一性

   事实上，在定义中，我们甚至不能看出行列式是否存在。我们首先证明行列式是存在且唯一的

   命题 1.7.4. *det 是存在且唯一的*

   证明： 设 V 是一个 F 上的线性空间，$\dim V = n$，并取它的一个基 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$

   设 $\omega = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$，$T(\gamma_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\gamma_j$

   注意到：$\left(\bigwedge^n T\right)(\omega) = T(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge T(\gamma_n) = \sum\limits_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\gamma_{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum\limits_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\gamma_{i_n}$

   $= \sum\limits_{i_1=1}^{n} \cdots \sum\limits_{i_n=1}^{n} \prod\limits_{k=1}^{n} a_{i_k,i}\gamma_{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{i_n}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(k),k} \right) \omega$$

$$\Rightarrow \det(T) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \right)$$

至此，我们推导出了行列式的具体形式，这说明行列式是存在且唯一的。 □

从证明过程中可见以下推论，这恰恰是矩阵行列式的计算方式

推论 1.7.1

$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(F)$

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \tag{1.28}$$

2. 行列式的交错线性性

事实上，如果考察矩阵的行列式，它呈现出交错多重线性函数的特征，这是其外积定义带来的，正如以下

定理 1.7.2: 矩阵行列式的多重线性性

对于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_i \in F^n, k \in F$

(a) $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i + \beta_i, \cdots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \cdots, \beta_i, \cdots, \alpha_n)$

(b) $\forall k \in F, \det(\alpha_1, \cdots, k \cdot \alpha_i, \cdots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

(c) $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

证明:

□

这也是矩阵行列式的基本性质。进一步，我们可以推出以下推论：

推论 1.7.3

量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ 如果有 $\alpha_i = \alpha_j$

那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$

证明: $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

但因为 $\alpha_i = \alpha_j$，所以必有 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$ □

进一步我们可以推出，如果两个变量成系数关系，那么行列式也为零

推论 1.7.4

量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ 如果有 $\alpha_i = k\alpha_j, k \in F$

那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$

证明： $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$ □

3. 行列式的置换展开

事实上，的展开的下标，只需要选取两个置换即可，其顺序和选取都是任意的

推论 1.7.5

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M_n(F)$

那么，有：

$$\det(\boldsymbol{A}) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),\sigma(i)} \tag{1.29}$$

其中 $\rho \in S_n$

证明： $\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\tau(i),i}$

对指标作置换 ρ，累乘的结果不会变化，所以有：

$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{(\rho\circ\tau)(i),\rho(i)}$

记 $\sigma = \rho \circ \tau$，那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\rho^{-1}\circ\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1} \circ \sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),\rho(i)}$

因为 $\operatorname{sgn}(\rho^{-1} \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\sigma)$

所以 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),\rho(i)}$ □

4. 行列式关于矩阵转置和可逆性的性质

命题 1.7.5. $\boldsymbol{A} \in GL_n(F) \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$

证明： $\boldsymbol{A} \notin GL_n(F) \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n$

那么，$\boldsymbol{A}$ 一定有一个列向量，可被其他列线性表出

依照之前证明的交错线性性质，一定有 $|\boldsymbol{A}| = 0$

于是命题得证。 □

5. 行列式的余子式展开

引理 1.7.6

设 V 是一个 F 上的线性空间，$\dim V = n < \aleph_0$，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 的一个基

对于 $\boldsymbol{A} \in M_n(F), i_1 < \cdots < i_k, j_1 < \cdots < j_k$，如果 $A \in \hom(V, V)$ 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$

那么有：

$\left(\bigwedge^k A\right)(\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}) = \sum\limits_{j_1 < \cdots < j_k} \det(\boldsymbol{A}^{i_1, \cdots, i_k}_{j_1, \cdots, j_k}) \cdot \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k}$

证明： 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$

$\left(\bigwedge^k A\right)(\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k})$

$= \left(\sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{s_1 i_1} \alpha_{s_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum\limits_{s_k=1}^{n} a_{s_k i_k} \alpha_{s_k}\right)$

$= \sum\limits_{\rho \in S_{\{j_1, \cdots, j_k\}}} \prod_{l=1}^{k} a_{\rho(l) i_l} \alpha_{\rho(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\rho(l)}$

$= \sum\limits_{j_1 < \cdots < j_k} \left(\sum\limits_{\rho \in S_k} \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{l=1}^{k} a_{j_{\rho(l)} i_l}\right) \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k}$

$= \sum\limits_{j_1 < \cdots < j_k} \det(\boldsymbol{A}^{i_1, \cdots, i_k}_{j_1, \cdots, j_k}) \cdot \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k}$ $\square$

下面的定理指出了行列式关于 k 列展开的方法：

定理 1.7.7: Laplace 定理

设 $\boldsymbol{A} \in M_n(F)$，那么：

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (-1)^{(i_1 + \cdots + i_k) + (j_1 + \cdots + j_k)} \det(\boldsymbol{A}^{i_1, \cdots, i_k}_{j_1, \cdots, j_k}) \det(\boldsymbol{A}^{i'_1, \cdots, i'_{n-k}}_{j'_1, \cdots, j'_{n-k}}) \tag{1.30}$$

其中 $\{i_1, \cdots, i_k\} \cup \{i'_1, \cdots, i'_{n-k}\} = \{j_1, \cdots, j_k\} \cup \{j'_1, \cdots, j'_{n-k}\} = \mathbb{Z}_n, i'_1 < \cdots < i'_{n-k}, j'_1 < \cdots < j'_{n-k}$

证明： 任取一个 F 上的 n 维线性空间 V，并取它的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

那么，一定存在一个 $A \in \hom(V, V)$，并且它在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$

于是：$\det(\boldsymbol{A}) \cdot \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$

$= A(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge A(\alpha_n)$

$= \left(\bigwedge^n A\right)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$

$= (-1)^{(i_1 + \cdots + i_k) - k} \left(A(\alpha_{i_1}) \wedge \cdots \wedge A(\alpha_{i_k})\right) \wedge \left(A(\alpha_{i'_1}) \wedge \cdots \wedge A(\alpha_{i'_{n-k}})\right)$

$$= (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)-k} \left(\sum_{j_1<\cdots<j_k} \det(\boldsymbol{A}_{j_1,\cdots,j_k}^{i_1,\cdots,i_k}) \cdot \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k} \right) \wedge$$

$$\left(\sum_{j'_1<\cdots<j'_{n-k}} \det(\boldsymbol{A}_{j'_1,\cdots,j'_{n-k}}^{i'_1,\cdots,i'_{n-k}}) \cdot \alpha_{j'_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j'_{n-k}} \right)$$

$$= (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)-k} \sum_{j_1<\cdots<j_k} \det(\boldsymbol{A}_{j_1,\cdots,j_k}^{i_1,\cdots,i_k}) \det(\boldsymbol{A}_{j'_1,\cdots,j'_{n-k}}^{i'_1,\cdots,i'_{n-k}}) \left(\alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k} \wedge \alpha_{j'_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j'_{n-k}}\right)$$

$$= (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)-k} \sum_{j_1<\cdots<j_k} \det(\boldsymbol{A}_{j_1,\cdots,j_k}^{i_1,\cdots,i_k}) \det(\boldsymbol{A}_{j'_1,\cdots,j'_{n-k}}^{i'_1,\cdots,i'_{n-k}}) (-1)^{(j_1+\cdots+j_k)-k} (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$$

$$= \left(\sum_{j_1<\cdots<j_k} (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)} \det(\boldsymbol{A}_{j_1,\cdots,j_k}^{i_1,\cdots,i_k}) \det(\boldsymbol{A}_{j'_1,\cdots,j'_{n-k}}^{i'_1,\cdots,i'_{n-k}}) \right) (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$$

于是命题得证。 □

6. 矩阵乘积的行列式