第一章　内积空间

1.1　内积空间的定义

1.1.1　内积空间的定义

定义 1.1.1: 共轭

设 F 是一个域，自同构 $\sigma : F \to F$ 如果满足：

$$\forall a \in F, \sigma^2(a) = a \tag{1.1}$$

那么我们称 σ 是一个共轭映射，$\sigma(a)$ 称为 a 的共轭，也记作 $\bar{a}$。

定义 1.1.2: 内积空间

设 F 是一个定义了共轭和偏序的域，V 是一个 F 上的线性空间，映射 $f : V \times V \to F$ 如果满足：

- $f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$（共轭对称性）
- $f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma)$（对第一个变量可加）
- $f(k\alpha, \beta) = kf(\alpha, \beta)$（对第一个变量线性）
- $f(\alpha, \alpha) \geqslant 0, f(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$（正定性）

那么我们称 f 是 V 上的一个内积，此时称 $(F, V, +, \cdot, f)$ 是一个内积空间（我们也简称 V 是一个内积空间）

习惯上，我们也常常将 $f(\alpha, \beta)$ 记作 $\langle \alpha, \beta \rangle_W$。如果我们仅在一个线性空间中讨论，我们也常常简写为 $\langle \alpha, \beta \rangle$。

基于抽象内积空间，我们可以提出一些相关的概念：

定义 1.1.3: 正交

设 V 是一个内积空间，$\langle\alpha,\beta\rangle=0$，

那么我们称 α 与 β 是正交的，记作 $\alpha\perp\beta$

如果一个基是相互正交的，那么它被称为正交基：

定义 1.1.4: 正交基

设 V 是一个内积空间，V 的一个基 B 如果满足：

$\forall\alpha,\beta\in B,\alpha\neq\beta,\langle\alpha,\beta\rangle=0$，

那么我们称 B 是 V 的一个正交基。

我们特别考虑一种特殊的”补空间“，称为正交补：

定义 1.1.5: 正交补

设 V 是 F 上的一个内积空间，$S\subseteq V$。我们定义：

$$S^{\perp}=\{\alpha\in V|\forall\beta\in S,\alpha\perp\beta\} \tag{1.2}$$

称为 S 的正交补。

值得注意的是，上述定义中，我们并不要求 S 是一个子空间；我们也将看到，就算 S 是子空间，正交补和 S 的直和也不一定是整个空间。

接下来我们讨论两类重要的内积空间

1.1.2 实内积空间、复内积空间

定义 1.1.6: 实内积空间

考虑 $\mathbb{R}$ 及其上的平凡自同构 $\sigma(x)=x$

此时，实数域 $\mathbb{R}$ 上的内积空间，称为实内积空间。

特别地，如果此时内积空间还是有限维的，我们称之为 Euclidean 空间

由定义可知，实内积空间拥有以下独特的特性：不仅仅是对单变量线性，而是对双变量线性，而且完全对称。也就是说，它是一个对称双线性映射；特别地，由于实数域是全序集，因此任意向量的内积都是可比的。

定义 1.1.7: 复内积空间

考虑 $\mathbb{C}$ 及其上的共轭映射 $\sigma(a+bi)=a-bi$

复数域 $\mathbb{C}$ 上的内积空间，称为复内积空间（或酉空间）

实内积空间和复内积空间的独特特点是：可以定义范数，并导出度量，进而产生拓扑

定义 1.1.8: 内积空间中的范数

设 V 是 F 上的一个内积空间，$F=\mathbb{R}$ 或者 $F=\mathbb{C}$，V 上的自然范数 $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ 定义为：

$$\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle} \tag{1.3}$$

我们这里特意要求基域只能是实数或复数域是因为：在一般域上，不能保证向量与自身的内积可以定义良好的平方根。

在实内积空间和酉空间中，如果正交基的每一个向量的范数都是 1，我们也称之为标准正交基：

定义 1.1.9: 标准正交基

设 V 是 F 上的一个内积空间，$F=\mathbb{R}$ 或者 $F=\mathbb{C}$，V 的一个正交基 B 如果满足：

$\forall\alpha\in B,\|\alpha\|=1$

那么我们称 B 是 V 的一个标准正交基。

此时，内积空间转变为一个线性赋范空间；进而，我们可以用范数定义度量：

定义 1.1.10: 内积空间中的度量

设 V 是 F 上的一个内积空间，$F=\mathbb{R}$ 或者 $F=\mathbb{C}$，V 上的自然度量 $d:V\times V\to F$ 定义为：

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\| \tag{1.4}$$

进而，我们可以定义极限和连续：

定义 1.1.11: 内积空间中向量列的极限

设 V 是一个实内积空间或酉空间，$\{\alpha_i\}$ 是 V 中的一个向量列，如果存在一个向量 $\alpha \in V$，使得：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, d(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon \tag{1.5}$$

我们称向量列 $\{\alpha_i\}$ 收敛于 α，记作 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$

定义 1.1.12: 连续线性泛函

设 V, W 分别是一个实内积空间或酉空间，$f \in \hom(V, W)$，如果有：

$$\forall \{\alpha_i\}, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \tag{1.6}$$

那么我们称 f 是一个连续线性泛函

进而可以定义完备性：

定义 1.1.13: Hillbert 空间

设 V 是一个实内积空间或酉空间，如果 V 中符合下面条件的任意向量列 $\{\alpha_i\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall m, n \geqslant N, d(\alpha_m, \alpha_n) < \varepsilon \tag{1.7}$$

收敛。

那么，我们称 V 是完备的，并称它是一个 Hillbert 空间。

我们也可以定义开集和闭集

定义 1.1.14: 开集和闭集

设 V 是一个实内积空间或酉空间，$S \subseteq V$，如果对于任意 $\alpha \in S$，存在 $r > 0$，使得：

$$B(\alpha, r) = \{\beta \in V | d(\alpha, \beta) < r\} \subseteq S \tag{1.8}$$

那么我们称 S 是一个开集。

如果 $V - S$ 是一个开集，那么我们称 S 是一个闭集。

1.1.3 内积空间的性质

我们讨论一些性质。

1. 首先，我们讨论内积的线性性质。

命题 1.1.1. $\langle \alpha, \beta+\gamma\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle + \langle \alpha, \gamma\rangle$

$\langle \alpha, k\gamma\rangle = \overline{k}\langle \alpha, \gamma\rangle$

证明： $\langle \alpha, \beta+\gamma\rangle = \overline{\langle \beta+\gamma, \alpha\rangle} = \overline{\langle \beta, \alpha\rangle} + \overline{\langle \gamma, \alpha\rangle} = \langle \alpha, \beta\rangle + \langle \alpha, \gamma\rangle$

$\langle \alpha, k\gamma\rangle = \overline{\langle k\gamma, \alpha\rangle} = \overline{k}\overline{\langle \gamma, \alpha\rangle} = \overline{k}\langle \alpha, \gamma\rangle$ □

接下来我们考察一种特别的内积，它只定义在实内积空间或酉空间，被称为标准内积：

2.

命题 1.1.2. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 维线性空间，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 的一个基，$\forall \alpha, \beta \in V$，如果 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i$，那么我们说：

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \tag{1.9}$$

是 V 上的一个内积

证明： 设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \beta = \sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i, \gamma = \sum\limits_{i=1}^n c_i\alpha_i$，那么：

$f(\alpha, \beta) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_ib_i = \sum\limits_{i=1}^n b_ia_i = f(\sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i) = f(\beta, \alpha)$

$f(\alpha, \beta+\gamma) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n (b_i+c_i)\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_i(b_i+c_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_ib_i + \sum\limits_{i=1}^n a_ic_i = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i) + f(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n c_i\alpha_i) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$

$f(\alpha, k\beta) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, k\sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n kb_i\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_i(kb_i) = k\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i = kf(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i) = kf(\alpha, \beta)$

$\forall \alpha \neq \mathbf{0}, f(\alpha, \alpha) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 > 0$

于是命题得证。 □

酉空间情形类似如下：

3.

命题 1.1.3. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个 n 维线性空间，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 的一个基，$\forall \alpha, \beta \in V$，如果 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i$，那么我们说：

$$f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i} \tag{1.10}$$

是 V 上的一个内积

证明: 设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\alpha_i,\gamma=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$，那么：

$f(\alpha,\beta)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{b_i\overline{a_i}}=\overline{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\overline{a_i}}=\overline{f(\beta,\alpha)}$

$f(\alpha,\beta+\gamma)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i+c_i)\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i+c_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\overline{b_i}+\overline{c_i})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{c_i}=f(\alpha,\beta)+f(\alpha,\gamma)$

$f(\alpha,k\beta)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,k\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\alpha_i)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}(kb_i)\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{kb_i}=\overline{k}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}=\overline{k}f(\alpha,\beta)$

$\forall\alpha\neq\mathbf{0},f(\alpha,\alpha)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^2>0$

于是命题得证。 □

我们接下来探讨正交的性质。

4.

命题 1.1.4. 设 V 是一个内积空间，$S\subseteq V$，那么 $S^{\perp}$ 是 V 的一个子空间

证明: 取 $\forall\alpha,\beta\in S^{\perp},k\in F$

依定义，有 $\forall\eta\in S,\langle\alpha,\eta\rangle=0,\langle\beta,\eta\rangle=0$

注意到：$\langle\alpha+\beta,\eta\rangle=\langle\alpha,\eta\rangle+\langle\beta,\eta\rangle=0+0=0\Rightarrow\alpha+\beta\in S^{\perp}$

$\langle k\alpha,\eta\rangle=k\langle\alpha,\eta\rangle=0\Rightarrow k\alpha\in S^{\perp}$

于是命题得证。 □

5.

命题 1.1.5. 设 V 是一个内积空间，V 的有限子集 S 如果不存在零向量，且向量两两正交，那么它线性无关

证明: 设 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\forall i\neq j,\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0,\alpha_i\neq\mathbf{0}$

考察线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\mathbf{0}$

对 $\forall i\leqslant l,k_i=0$ 作强归纳法。

首先，$\mathbf{0}=\langle\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i,\alpha_1\rangle=k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle\Rightarrow k_1=0$，于是 $i=1$ 时成立；

现在假设 $i\leqslant l$ 时成立，考察 $l+1$ 时：

$\mathbf{0}=\langle\sum\limits_{i=l+1}^{n}k_i\alpha_i,\alpha_{l+1}\rangle=k_{l+1}\langle\alpha_{l+1},\alpha_{l+1}\rangle\Rightarrow k_{l+1}=0$，于是 $i=l+1$ 时成立。

由强归纳法原理，$\forall i\leqslant n,k_i=0$，于是命题得证。 □

它的直接推论是，正交基是一定存在的：

6.

命题 1.1.6. 任意有限维内积空间的正交基都是存在的。

证明: 取 V 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$

考察以下一系列线性组合：$\eta_i=\alpha_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{\langle\alpha_i,\eta_j\rangle}{\langle\eta_j,\eta_j\rangle}\eta_j$

对归纳假设：$\forall i,j\leqslant k,i\neq j,\langle\eta_i,\eta_j\rangle=0,\langle\eta_i,\eta_i\rangle\neq0$ 使用数学归纳法。

首先，当 $k=1$，$\eta_1=\alpha_1$，归纳假设显然成立；

我们现在假设 k 时成立，考察 $k+1$ 时：

$\forall j<k+1$

$\langle\eta_{k+1},\eta_j\rangle=\langle\alpha_{k+1},\eta_j\rangle-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\langle\alpha_{k+1},\eta_i\rangle}{\langle\eta_i,\eta_i\rangle}\langle\eta_i,\eta_j\rangle$

$=\langle\alpha_{k+1},\eta_j\rangle-\frac{\langle\alpha_{k+1},\eta_j\rangle}{\langle\eta_j,\eta_j\rangle}\cdot\langle\eta_j,\eta_j\rangle=\mathbf{0}$

$\langle\eta_j,\eta_{k+1}\rangle=\overline{\langle\eta_{k+1},\eta_j\rangle}=0$，此时归纳假设成立。

于是 $\{\eta_i\}$ 的确是相互正交的；由有限正交向量组线性无关，以及基的性质，$\{\eta_i\}$ 是 V 的一个正交基。 □

7.

命题 1.1.7. 设 V 是 F 上的一个内积空间，$\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$ 是 V 的一个标准正交基，那么对于 $\forall\alpha\in V$

$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\alpha,\eta_i\rangle\eta_i$

证明: 因为 $\{\eta_i\}$ 的确是一个基，因为一定能找到一系列系数 k_i，使得 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\eta_i$

此时只需注意到：$\langle\alpha,\eta_i\rangle=\langle\sum\limits_{j=1}^{n}k_j\eta_j,\eta_i\rangle=k_i\langle\eta_i,\eta_i\rangle=k_i$

$\Rightarrow\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\alpha,\eta_i\rangle\eta_i$ □

8. **定理 1.1.1: Cauchy-Buniakowski-Schwarz 不等式**

设 V 是一个实内积空间或酉空间，$\alpha, \beta \in V$，那么：

$$|\langle\alpha, \beta\rangle| \leqslant \|\alpha\|\|\beta\| \tag{1.11}$$

等号成立的充分必要条件是 α 与 β 线性相关

证明： 当 α, β 线性相关，要不 $\alpha = \mathbf{0}$，要不 $\beta = k\alpha$，此时不等式显然成立

考察 α, β 线性无关的情形

此时，一定有：$\forall k, \alpha - k\beta \neq \mathbf{0}$

此时，$\langle\alpha - k\beta, \alpha - k\beta\rangle > 0$

$\Rightarrow \|\alpha\|^2 - k\langle\alpha, \beta\rangle - \overline{k}\langle\beta, \alpha\rangle + |k|^2\|\beta\|^2 > 0$

代入 $k = -\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\|\beta\|^2}$，得：

$\|\alpha\|^2 - \frac{\overline{\langle\alpha,\beta\rangle}\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\beta\|^2} - \frac{\langle\alpha,\beta\rangle\overline{\langle\alpha,\beta\rangle}}{\|\beta\|^2} + \frac{|\langle\beta,\alpha\rangle|^2}{\|\beta\|^2} > 0$

$\Rightarrow \|\alpha\|^2 - \frac{|\langle\alpha,\beta\rangle|^2}{\|\beta\|^2} > 0$

$\Rightarrow |\langle\alpha, \beta\rangle|^2 < \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$

于是命题得证。 □

上述定理适用于两类内积空间，尽管实内积空间并不能简单视为复内积空间的一个子空间，但是证明过程中利用的性质都是通用的，我们统一地写出这个证明。

9. 最后，我们讨论 Hillbert 空间上的性质

命题 1.1.8. *设 V 是一个 F 上的 Hillbert 空间，$S \subseteq V$ 是 V 的一个闭子空间，那么有 $S \oplus S^\perp = V$*

证明： 我们先证明 $S + S^\perp = V$

$\forall \alpha \in V$，考察函数 $f(\theta) = \|\alpha - \theta\|, \theta \in S$

由于 S 是闭集，那么 f 的最小值一定存在，取 β 使得 $f(\beta) = \min_\theta f(\theta)$，并记 $\gamma = \alpha - \beta$

我们来证明，的确有 $\gamma \in S^\perp$

$\forall \eta \in S$，我们希望证明 $\langle\gamma, \eta\rangle = 0$

考察函数 $g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

由于 $t\eta + \beta \in S$，而 $\|\alpha - \theta\|$ 在 $\theta = \beta$ 时取得最小值，因此，$g(t)$ 在 $t = 0$ 时取得最小值。

显然，$g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2 = \|\gamma - t\eta\|^2 = \|\gamma\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle\gamma, \eta\rangle + t^2\|\eta\|^2$ 连续可导

于是，一定有 $g'(0) = (-2\,\mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle + 2t\|\eta\|^2)|_{t=0} = -2\,\mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle = 0$。

若 $F = \mathbb{R}$，那么 $\langle\gamma,\eta\rangle = 0$，论证完成；

对于 $F = \mathbb{C}$ 的情形，考虑 $g(t) = \|\alpha - (ti\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

同理可得 $\mathrm{Re}\langle\gamma, i\eta\rangle = 0$。

$\Rightarrow \mathrm{Re}(-i\langle\gamma,\eta\rangle) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\mathrm{Im}\langle\gamma,\eta\rangle - i\,\mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\langle\gamma,\eta\rangle = 0$。

于是此时有 $\langle\gamma,\eta\rangle = 0$，论证完成。

最后我们证明 $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$

设 $\alpha \in S \cap S^{\perp}$，那么 $\langle\alpha,\alpha\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$

于是命题得证。 □

利用这个结论可以证明以下重要事实：

定理 1.1.2: Riesz 表示定理

设 V 是一个 F 上的 Hillbert 空间，如果 $f \in \hom(V, F)$ 是一个连续泛函，那么存在唯一的 $\phi \in V$，使得：

$$f(\alpha) = \langle\alpha,\phi\rangle \tag{1.12}$$

证明： 我们首先证明：$\ker f$ 是一个闭集。

注意到：任意收敛序列 $\{\alpha_n\} \subseteq \ker f$，因为 f 是连续的，因此有

$f(\lim_{n\to\infty}\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n \in \ker f$

即 $\ker f$ 对任意序列的极限封闭。

接下来考察集合 $\overline{\ker f} := \{\lambda | \forall\lambda \in O, O\text{是开集}, O \cap \ker f \neq \emptyset\}$

注意到，一定有 $\ker f \subseteq \overline{\ker f}$，因为 $\ker f$ 中的任意一点，包含其的开集与 $\ker f$ 的交集至少包含这个点本身。

考察 $\alpha \in \overline{\ker f}$

取 $\alpha_i \in B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap \ker f$，其中 $B(\alpha, s) := \{\beta | d(\alpha,\beta) < s\}$，由 $\overline{\ker f}$ 的定义可知序列是的确可以取得的。

那么，此时一定有 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$，因为 $0 < d(\alpha,\alpha_k) < \frac{1}{k}$。

但是，我们已经指出：$\ker f$ 对任意收敛序列的极限封闭，因此 $\alpha \in \ker f$。那么，$\ker f = \overline{\ker f}$

那么，我们说，$\ker f$ 是闭集。因为：$\ker f$ 已经包含了所有与开集有非空交集的点，那么对于 $\forall\beta \in V - \ker f$，一定存在包含 β 的一个开集 O，使得 $O \in V - \ker f$，而这正

是 $\ker f$ 闭的定义。

于是依照之前证明的结论，一定有 $\ker f \oplus (\ker f)^{\perp} = V$

于是 $\operatorname{Im} f \cong V/\ker f \operatorname{Im} \cong (\ker f)^{\perp}$

但是，$\operatorname{Im} f \subseteq F \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 1$，因此 $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$

取 $(\ker f)^{\perp}$ 的一个标准正交基 $\{\eta\}$，那么此时有：

$f(\alpha) = \langle \alpha, \eta \rangle f(\eta) = \langle \alpha, \overline{f(\eta)}\eta \rangle$

记 $\phi = \overline{f(\eta)}\eta$，那么此时有 $f(\alpha) = \langle \alpha, \phi \rangle$。

于是命题得证。 □

利用子空间和正交补直和，可以导出以下显然的事实：

命题 1.1.9. 设 V 是一个 *Hillbert* 空间，如果 S 是 V 的一个子空间，那么有 $(S^{\perp})^{\perp} = S$

证明： 我们先证明 $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$

$\forall \alpha \in S$，有 $\forall \beta \in S^{\perp}, \langle \alpha, \beta \rangle = 0$（因为这就是正交补的定义）

反过来看，其实就是 $\forall \beta \in S^{\perp}, \langle \beta, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha \in (S^{\perp})^{\perp}$

接下来证明 $(S^{\perp})^{\perp} \subseteq S$

取 $\forall \alpha \in (S^{\perp})^{\perp}$

因为 $(S^{\perp})^{\perp} \subseteq V$，因此依照之前的命题，一定存在分解 $\alpha = \beta + \gamma, \beta \in S, \gamma \in S^{\perp}$

此时注意到：$\gamma = \alpha - \beta, \beta \in S \Rightarrow \beta \in (S^{\perp})^{\perp} \Rightarrow \gamma \in (S^{\perp})^{\perp}$

因此有 $\gamma \in S^{\perp} \cap (S^{\perp})^{\perp} \Rightarrow \langle \gamma, \gamma \rangle = 0 \Rightarrow \gamma = \mathbf{0}$

于是有 $\alpha = \beta \in S$，那么一定有 $(S^{\perp})^{\perp} \subseteq S$，于是命题得证。 □

1.2 正规算子和自伴算子

本节中，如无特别说明，我们假定所有线性空间都定义了内积。

1.2.1 伴随算子

我们先定义伴随算子，它是我们后续讨论的基础。

定义 1.2.1: 共轭算子

设 V, W 是 F 上的两个内积空间，$A \in \hom(V, W)$，我们定义满足以下条件的算子 $A^*: W \to V$

$$\langle A(\alpha), \beta\rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta)\rangle_V \tag{1.13}$$

我们先研究伴随算子的一些性质。

1.

命题 1.2.1. 设 $A \in \hom(V, W)$，那么 A^* 是唯一的。

证明： 不妨假设命题不成立，那么存在 $B, C : W \to V, B \neq C$，此时有：

$\forall \alpha \in V, \beta \in W, \langle A\alpha, \beta\rangle_W = \langle \alpha, B\beta\rangle_V = \langle \alpha, C\beta\rangle_V$

显然，一定 $\exists \gamma, B(\gamma) \neq C(\gamma)$

此时注意到：$\langle B(\gamma) - C(\gamma), B(\gamma) - C(\gamma)\rangle_V = \langle B(\gamma), B(\gamma)\rangle_V - \langle B(\gamma), C(\gamma)\rangle_V = \mathbf{0} \Rightarrow B(\gamma) = C(\gamma)$，与假设矛盾。

于是命题得证。 □

2.

命题 1.2.2. $\forall A \in \hom(V, W), A^* \in \hom(W, V)$

证明： $\forall \alpha \in V, \beta \in W, k \in F$

$\langle \alpha, (A^* + B^*)(\beta)\rangle_V = \langle A(\alpha), \beta\rangle_W + \langle B(\alpha), \beta\rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta)\rangle_V + \langle \alpha, B^*(\beta)\rangle_V = \langle \alpha, A^*(\beta) + B^*(\beta)\rangle_V$

$\Rightarrow (A^* + B^*)(\beta) = A^*(\beta) + B^*(\beta)$

$\langle \alpha, (kA^*)(\beta)\rangle_V = k\langle A(\alpha), \beta\rangle_W = k\langle \alpha, A^*(\beta)\rangle_V = \langle \alpha, kA^*(\beta)\rangle_V$

$\Rightarrow (kA^*)(\beta) = kA^*(\beta)$

于是命题得证。 □

3.

命题 1.2.3. $\forall A, B \in \hom(V, W), (A + B)^* = A^* + B^*$

证明： $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$\langle \alpha, (A + B)^*(\beta)\rangle_V = \langle (A + B)(\alpha), \beta\rangle_W = \langle A(\alpha), \beta\rangle_W + \langle B(\alpha), \beta\rangle_W = \langle \alpha, A^*(\beta)\rangle_V + \langle \alpha, B^*(\beta)\rangle_V = \langle \alpha, A^*(\beta) + B^*(\beta)\rangle_V$

由于 α, β 是任意选取的，命题得证。 □

4.

命题 1.2.4. $(kA)^* = \overline{k}A^*$

证明: $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$\langle \alpha, (kA)^*(\beta)\rangle_V = \langle (kA)(\alpha), \beta\rangle_W = k\langle A(\alpha), \beta\rangle_W = k\langle \alpha, A^*(\beta)\rangle_V = \langle \alpha, \overline{k}A^*(\beta)\rangle_V$

由于 α, β 是任意选取的，命题得证。 □

5.

命题 1.2.5. $\forall A \in \hom(V, W), (A^*)^* = A$

证明: $\forall \alpha \in V, \beta \in W$

$\langle \alpha, (A^*)^*(\beta)\rangle_V = \langle (A^*)(\alpha), \beta\rangle_W = \langle \alpha, A(\beta)\rangle_V$

由于 α, β 是任意选取的，命题得证。 □

6.

命题 1.2.6. $\forall A \in \hom(V, W), B \in \hom(U, V), (AB)^* = B^*A^*$

证明: $\forall \alpha \in U, \beta \in W$

$\langle \alpha, (AB)^*(\beta)\rangle_U = \langle (AB)(\alpha), \beta\rangle_W = \langle B(\alpha), A^*(\beta)\rangle_V = \langle \alpha, (B^*A^*)(\beta)\rangle_U$

由于 α, β 是任意选取的，命题得证。 □

7.

命题 1.2.7. 如果 $A \in \hom(V, W)$ 可逆，那么此时 $A^* \in \hom(W, V)$ 也可逆，并且有 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

证明: 只需证明 $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = I$

$\forall \alpha, \beta \in V$

$\langle \alpha, (A^*(A^{-1})^*)(\beta)\rangle_V = \langle A(\alpha), (A^{-1})^*(\beta)\rangle_W = \langle (A^{-1}A)(\alpha), \beta\rangle_V = \langle \alpha, \beta\rangle_V$

$\langle \alpha, ((A^{-1})^*A^*)(\beta)\rangle_V = \langle (A^{-1})(\alpha), A^*(\beta)\rangle_W = \langle (AA^{-1})(\alpha), \beta\rangle_V = \langle \alpha, \beta\rangle_V$

由于 α, β 是任意选取的，命题得证。 □

8.

命题 1.2.8. 设 $A \in \hom(V, W)$，其中 V, W 是 *Hillbert* 空间，有以下结论：

(a) $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

(b) $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)^\perp$

(c) $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$

(d) $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp$

证明: $\ker A = \{\alpha \in V | A(\alpha) = \mathbf{0}\}$

$= \{\alpha \in V | \forall \beta \in W, \langle A(\alpha), \beta\rangle_W = 0\}$

$= \{\alpha \in V | \forall \beta \in W, \langle \alpha, A^*(\beta)\rangle_V = 0\}$

$= \{A^*(\beta) \in V | \beta \in W\}^\perp = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

于是第一条性质得证。

我们取 A^* 代入上式，得：$\ker A^* = (\operatorname{Im}(A^*)^*)^\perp = (\operatorname{Im} A)^\perp$，于是第三条性质得证。

对第一条性质左右取正交补，得：$(\ker A)^\perp = \operatorname{Im} A^*$，于是第四条性质得证。

对第二条性质左右取正交补，得：$(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*$，于是第二条性质得证。 □

9.

命题 1.2.9. 设 $A \in \hom(V, W)$,V, W 的一个标准正交基分别为:$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 那么 A 在 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$，和 A^* 在 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 满足：

$$\boldsymbol{A}^* = \overline{\boldsymbol{A}^T} \tag{1.14}$$

其中矩阵的共轭定义为：$\overline{\boldsymbol{T}} := (\overline{\boldsymbol{T}(i;j)})_{m\times n}$

证明: $A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}(i;k)\beta_i \Rightarrow \langle A(\alpha_k), \beta_l\rangle = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}(i;k)\langle \beta_i, \beta_l\rangle = \boldsymbol{A}(l;k)$

$A^*(\beta_l) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}(j;l)\alpha_j \Rightarrow \langle \alpha_k, A^*(\beta_l)\rangle = \sum_{j=1}^{m} \overline{\boldsymbol{A}(j;l)}\langle \alpha_k, \alpha_j\rangle = \overline{\boldsymbol{A}(k;l)}$

由伴随算子的定义，有 $\langle A(\alpha_k), \beta_l\rangle = \langle \alpha_k, A^*(\beta_l)\rangle$，于是一定有 $\boldsymbol{A}(l;k) = \overline{\boldsymbol{A}(k;l)}$

命题得证。 □

1.2.2 正规算子

先给出定义。

定义 1.2.2: 正规算子

设 V 是 F 上的一个内积空间，$A \in \hom(V, V)$，如果 $AA^* = A^*A$，那么我们称 A 是一个正规算子

我们讨论正规算子的性质

1. 先给出两个引理：

引理 1.2.1

V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个内积空间，$A \in \mathrm{hom}(V, V)$

如果 $\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0$，那么 $A = \mathbf{0}$

证明： 注意到：

$\forall \alpha, \beta \in V$

$\frac{\langle A(\alpha+\beta), \alpha+\beta \rangle - \langle A(\alpha-\beta), \alpha-\beta \rangle}{4} + \frac{\langle A(\alpha+i\beta), \alpha+i\beta \rangle - \langle A(\alpha-i\beta), \alpha-i\beta \rangle}{4} i$

$= \frac{2\langle A(\beta), \alpha \rangle + 2\langle A(\alpha, \beta \rangle}{4} + \frac{-2i\langle A(\alpha), \beta \rangle + 2i\langle A(\beta), \alpha \rangle}{4} i$

$= \langle A(\alpha), \beta \rangle$

但是，注意到原式的每一项都具备 $\langle A(\gamma), \gamma \rangle$ 的形式。那么，一定有 $\langle A(\alpha), \beta \rangle = 0$，从而 $A = 0$。

命题得证。 □

引理 1.2.2

V 是 F 上的一个内积空间，$F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$。如果 $A \in \mathrm{hom}(V, V)$ 满足 $A = A^*$，那么：

$\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$

证明： $\forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha + \beta), \alpha + \beta \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha), \alpha \rangle + \langle A(\beta), \beta \rangle + \langle A(\alpha), \beta \rangle + \langle A(\beta), \alpha \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in V, \langle A(\alpha), \beta \rangle + \langle A(\beta), \alpha \rangle = 0$

此时，如果 $F = \mathbb{R}$，那么立即得到 $\langle A(\alpha), \beta \rangle = 0 \Rightarrow A = 0$；

而如果 $F = \mathbb{C}$，前面的引理已经指出了 $A = 0$。于是命题得证。 □

事实上，符合以上所述的的算子我们一般称为自伴算子，它显然是一种特殊的正规算子。但是，因为正规算子是更一般的情形，我们暂时不先介绍它。

命题 1.2.10. $A \in \mathrm{hom}(V, V)$ 是正规算子 $\Leftrightarrow \forall \alpha \in V, \langle A(\alpha), A(\alpha) \rangle = \langle A^*(\alpha), A^*(\alpha) \rangle$

证明： A 是正规算子 $\Leftrightarrow AA^* - A^*A = 0$

注意到，$(AA^* - A^*A)^* = AA^* - A^*A$

于是 A 是自伴算子 $\Leftrightarrow \forall \alpha \in V, \langle (AA^* - A^*A)(\alpha), \alpha \rangle = 0$

$\Leftrightarrow$ □

2.

命题 1.2.11. 如果 $A \in \hom(V, V)$ 是正规算子，那么有 $\ker A = \ker A^*$

证明:

□

3.

命题 1.2.12. 如果 $A \in \hom(V, V)$ 是正规算子，那么有 $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^*$

4.

命题 1.2.13. 如果 $A \in \hom(V, V)$ 是正规算子，那么有 $\ker A \oplus \operatorname{Im} A = V$

5.

命题 1.2.14. 如果 $A \in \hom(V, V)$ 是正规算子，那么 $\forall \lambda \in F, A - \lambda I$ 也是正规算子

6.

命题 1.2.15. 如果 $A \in \hom(V, V)$ 是正规算子，那么 λ 是 A 的特征值，α 是 A 的属于 λ 的特征向量的充要条件是：

$\overline{\lambda}$ 是 A^* 的特征值，α 是 A^* 的属于 $\overline{\lambda}$ 的特征向量

7.

命题 1.2.16. 如果 $A \in \hom(V, V)$ 是正规算子，那么 A 的属于不同特征值的特征向量相互正交

1.2.3 自伴算子

定义 1.2.3: 自伴算子

设 V 是 F 上的一个内积空间，$A \in \hom(V, V)$，如果 $A = A^*$，那么我们称 A 是一个自伴算子

讨论性质。

推论 1.2.3: 自伴算子仅具有实特征值

V 是一个 F 上的内积空间，$F=\mathbb{R}$ 或 $F=\mathbb{C}$，如果 $A\in\hom(V,V)$ 是自伴算子，那么 A 的所有特征值都是实数

1.

2.

命题 1.2.17. 如果 $A\in\hom(V,V)$ 是自伴算子，那么 A 的所有特征值都是实数

3.

命题 1.2.18. 如果 $A\in\hom(V,V)$ 是自伴算子，那么属于不同特征值的特征向量相互正交

4.

命题 1.2.19. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个内积空间，$A\in\hom(V,V)$ 是正规算子的充要条件是：存在两个自伴算子 $T,S\in\hom(V,V)$，使得 $TS=ST, A=T+iS$

事实上，在复内积空间中，向量与其在算子作用下的向量的内积，也可以反应算子的自伴性，如下：

5.

命题 1.2.20. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个内积空间，$A\in\hom(V,V)$，那么 A 是自伴算子的充要条件是：

$\forall\alpha\in V,\langle A(\alpha),\alpha\rangle\in\mathbb{R}$

特别地，如果内积始终为零，那么此时算子会直接退化为零算子：

命题 1.2.21. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个内积空间，$A\in\hom(V,V)$

如果 $\forall\alpha\in V,\langle A(\alpha),\alpha\rangle=0$，那么 $A=\mathbf{0}$

在一般的内积空间上，上述命题一般不成立，而是必须先限制算子是自伴的：

命题 1.2.22. 设 V 是 F 上的一个内积空间，$A\in\hom(V,V)$ 是自伴算子

如果 $\forall\alpha\in V,\langle A(\alpha),\alpha\rangle=0$，那么 $A=\mathbf{0}$

1.2.4 谱定理

定义 1.2.4: 谱

设 V 是 F 上的一个内积空间，$A \in \hom(V,V)$，我们定义：

$$\sigma(A) := \{\lambda \in F | A - \lambda I \text{不可逆}\} \tag{1.15}$$

称为 A 的谱

定理 1.2.4: 实谱定理

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个内积空间，$A \in \hom(V,V)$

以下三个命题等价：

1. A 是自伴算子
2. V 存在一个标准正交基，使得 A 在该基下的矩阵为对角矩阵
3. V 存在一个由 A 的特征向量组成的标准正交基

定理 1.2.5: 复谱定理

设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个内积空间，$A \in \hom(V,V)$

以下三个命题等价：

1. A 是正规算子
2. V 存在一个标准正交基，使得 A 在该基下的矩阵为对角矩阵
3. V 存在一个由 A 的特征向量组成的标准正交基

1.3 保距算子、幺正算子

1.4 酉算子

1.5 奇异值与奇异值分解

1.6 UR、QR、Schur 分解