第一章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。

1.1　$\hom(V,W)$ 的维数

这篇附录中，我们解决一个问题：$\hom(V,W)$ 的维数是多少。

引理 1.1.1

$\hom(V,W) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F,W)$

证明: 任取 V 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，我们定义：

$\phi : \hom(V,W) \ni f \mapsto (\{1,\cdots,n\} \ni i \mapsto (F \ni k \mapsto kf(\alpha_i) \in W) \in \hom(F,W)) \in \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F,W)$

（即满足 $\phi(f)(i)(k) = kf(\alpha_i)$ 的唯一映射）

接下来验证 ϕ 是同构映射

首先，容易注意到 $\phi(f) = \phi(g) \Rightarrow f = g$，因此 ϕ 是单射

其次，$\forall\, (\{1,\cdots,n\} \ni i \mapsto g_i \in \hom(F,W)) \in \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F,W)$

注意到，如果设 $f : V \ni \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} k_i g_i(1_F)$，那么 $\phi(f)(i) = g_i$，于是 ϕ 是满射

接下来验证它是一个线性映射

$\forall f, g \in \hom(V,W), \phi(f+g)(i)(k) = k(f+g)(\alpha_i) = kf(\alpha_i) + kg(\alpha_i) = \phi(f)(i)(k) + \phi(g)(i)(k) \Rightarrow \phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$

$\forall f \in \hom(V,W), l \in F, \phi(lf)(i)(k) = k(lf)(\alpha_i) = lkf(\alpha_i) = l\phi(f)(i)(k) \Rightarrow \phi(lf) = l\phi(f)$

因此它是一个同构映射，命题得证。 □

引理 1.1.2

$\hom(F,W)\cong W$

证明： 任取 V 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，我们定义：

$\psi:\alpha\in W\mapsto(F\ni k\mapsto k\alpha\in W)\in\hom(F,W)$

注意到：$\psi(\alpha)=\psi(\beta)\Rightarrow\psi(\alpha)(k)=\psi(\beta)(k)\Rightarrow k\alpha=k\beta\Rightarrow\alpha=\beta$，于是 ψ 是单射

$\forall f\in\hom(F,W),\psi(f(1_F))(k)=kf(1_F)=f(k)\Rightarrow\psi(f(1_F))=f$，于是 ψ 是满射

$\forall\alpha,\beta\in W,\psi(\alpha+\beta)(k)=k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta=\psi(\alpha)(k)+\psi(\beta)(k)\Rightarrow\psi(\alpha+\beta)=\psi(\alpha)+\psi(\beta)$

$\forall\alpha\in W,l\in F,\psi(l\alpha)(k)=lk\alpha=l\psi(\alpha)(k)\Rightarrow\psi(l\alpha)=l\psi(\alpha)$

于是 ψ 是一个同构映射。 □

引理 1.1.3

$|\hom(V,W)|=|W|^{\dim V}$

证明： 事实上，线性映射只由基上的作用决定，因此如果设 V 的一个基为 B

$|\hom(V,W)|=\mathrm{Card}\{f:B\to W\}=|W|^{|B|}=|W|^{\dim V}$ □

引理 1.1.4

$\dim\hom_F(V,W)\geqslant|F|$

证明：

□

引理 1.1.5

设 U 是 F 上的一个线性空间，那么 $|U|=|F|\cdot\dim_F U$

证明：

□

定理 1.1.6: $\hom_F(V_1, V_2)$ **的维数**

$$\dim \hom_F(V, W) = \begin{cases} 0, \dim V = 0 \vee \dim W = 0 \\ (\dim V) \cdot (\dim W), \dim V = n < \aleph_0 \\ |\hom(V, W)| = |W|^{\dim V} = (|F| \cdot \dim W)^{\dim V}, \dim \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

证明: 首先考虑 V, W 中存在零空间的情形。

如果 $\dim V = 0$，即 $V = \{\mathbf{0}_V\}$，而我们知道线性映射仅能把零向量映射到零向量，此时 $\hom(V, W)$ 中仅存在零映射，维数为零

如果 $\dim W = 0$。即 $W = \{\mathbf{0}_W\}$，此时映射只有零映射（因为 W 中仅存在零向量），维数为零

接下来考虑 V, W 中不存在零空间，且 $\dim V = n < \aleph_0$ 的情形。

此时，$\dim \hom(V, W) = \dim \bigoplus_{i=1}^{n} \hom(F, W) = n \cdot \dim \hom(F, W) = n \cdot \dim W = (\dim V) \cdot (\dim W)$

最后我们证明 $\dim V, \dim W$ 均是无限的情形。

□