第一章　线性空间

1.1　线性空间的定义

1.1.1　线性空间的定义

定义 1.1.1: 线性空间

设 F 是一个域，V 是一个集合，存在两个运算 $+ : V \times V \to V$ 和 $\cdot : F \times V \to V$，分别称为加法和乘法，使得：

① $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \alpha \in V, \mathbf{0} + \alpha = \alpha$

② $\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V, \text{s.t. } \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

③ $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha$

④ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

⑤ $\forall \alpha \in V, 1 \cdot \alpha = \alpha$

⑥ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k \cdot l) \cdot \alpha = k \cdot (l \cdot \alpha)$

⑦ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k + l) \cdot \alpha = k \cdot \alpha + l \cdot \alpha$

⑧ $\forall k \in F, \alpha \in V, k \cdot (\beta + \gamma) = k \cdot \beta + k \cdot \gamma$

那么我们称 V 是一个 F 上的线性空间（或向量空间）

1.1.2　线性子空间

定义 1.1.2: 线性子空间

设 V 是一个线性空间，集合 $W \subseteq V$，如果 W 在 V 的运算构成一个线性空间，那么我们称 W 是 V 的一个线性子空间

1.1.3 线性空间的性质

1.

命题 1.1.1. $\mathbf{0}$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 均是零元，并且 $\mathbf{0}_1 \neq \mathbf{0}_2$

我们注意到：$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

2.

命题 1.1.2. $\forall \alpha \in V$，$-\alpha$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，α 有两个逆元 β_1, β_2，并且 $\beta_1 \neq \beta_2$

我们注意到：$\beta_1 = \mathbf{0} + \beta_1 = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 = \beta_2 + (\alpha + \beta_1) = \beta_2 + \mathbf{0} = \beta_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

3.

命题 1.1.3. $\forall \alpha \in V, 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$

证明: $0 \cdot \alpha = (0 + 0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha$

$\Rightarrow 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha) = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha)$

$\Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot \alpha$ □

4.

命题 1.1.4. $\forall k \in F, k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

证明: $k \cdot \mathbf{0} = k \cdot (0 \cdot \alpha) = (k \cdot 0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$ □

5.

命题 1.1.5. $\forall \alpha \in V, (-1) \cdot \alpha = -\alpha$

证明: $\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha = (1 + (-1)) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \alpha$

$\Rightarrow \mathbf{0} + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha + (-1) \cdot \alpha \Rightarrow (-1) \cdot \alpha = -\alpha$ □

6. 事实上，验证一个子集是否是线性子空间，只需要验证封闭性即可，其他的条件都是不必要的。

命题 1.1.6. $W \subseteq V$ 是 V 的线性子空间，当且仅当：

$\forall k \in F, \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta \in V, k \cdot \alpha \in V$

证明： 充分性是显然的，对于必要性，我们依次验证：

首先，$0 \in F$，因此 $0 \cdot \alpha = \mathbf{0} \in W$

其次，因为 $-1 \in F$，所以 $(-1) \cdot \alpha = -\alpha \in W$

剩余的六条运算律，因为 W 上的运算即是 V 上的运算在 W 上的限制，所以显然成立。

那么命题得证。 $\square$

1.2 线性组合

1.3 极大线性无关向量组、向量组的秩

1.4 基、线性空间的维数

1.5 线性子空间的直和

1.6 线性空间的同构

1.7 商空间