# 第一章　线性映射

本章开始，我们转向线性映射的研究。

我们将用三章完成线性映射的研究。本章我们将从映射最基本的研究方式：向量的作用开始

线性映射的独特之处在于：一方面它能在常规的映射加法和纯量乘法下构成一个线性空间；另一方面，如果我们将复合视为乘法，它可以构成一个幺环。

第一节中，我们将给出线性映射的定义及运算，并研究基本性质；

第二节中，我们将研究两种由线性映射导出的子空间，核和像，并借此提出一个概念：秩。它和我们之前的秩也有很强的联系；

第三节到第五节中，我们将研究矩阵，它是将线性映射在基下的作用写成的一张数表，非常便于在数值上研究矩阵；

第六节中，我们将研究行列式，它是一个反对称多线性函数，我们以此为工具，为后续我们对线性映射分解的研究铺垫。

## 1.1　线性映射的定义和运算

### 1.1.1　线性映射的定义

我们首先给出线性映射的定义

**定义 1.1.1: 线性映射**

设 $V_1, V_2$ 是一个 $F$ 上的两个线性空间,，映射 $A : V_1 \to V_2$ 如果满足：

$\forall \alpha, \beta \in V_1, k \in F$

$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$

$A(k\alpha) = kA(\alpha)$

那么我们称 $A$ 是一个从 $V_1$ 到 $V_2$ 的线性映射

全体 $V_1$ 到 $V_2$ 的线性映射的集合记作 $\hom_F(V_1, V_2)$，或简记作 $\hom(V_1, V_2)$

特别地，如果 $V_1 = V_2$，我们称 $A$ 是一个 $V_1$ 上的线性变换

有一些常用的线性映射，我们在这里列出来：

**定义 1.1.2: 一些常用的线性映射**

1. 恒等变换：$I : V \ni \alpha \mapsto \alpha \in V$
2. 数乘变换：$k : V \ni \alpha \mapsto k\alpha \in V$
3. 零变换：$0 : V_1 \ni \alpha \mapsto \mathbf{0}_{V_2} \in V_2$

### 1.1.2 线性映射的运算

前面我们定义了线性映射，现在我们开始赋予 $\hom(V_1, V_2)$ 线性空间和环的性质。

我们会定义三种运算：加法、纯量乘法、乘法

**定义 1.1.3: 线性映射的运算**

我们定义：

映射 $+ : \hom(V_1, V_2) \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为加法，如果满足：

$$\forall A, B \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A + B)(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha) \tag{1.1}$$

映射 $\cdot : F \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为纯量乘法，如果满足：

$$\forall k \in F, A \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in F, (k \cdot A)(\alpha) = kA(\alpha) \tag{1.2}$$

映射 $\circ : \hom(V_1, V_2) \times \hom(V_1, V_2) \to \hom(V_1, V_2)$，称为乘法，如果满足：

$$\forall A, B \in \hom(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A \circ B)(\alpha) = A\left(B(\alpha)\right) \tag{1.3}$$

我们也常常把 $k \cdot A$ 简记为 $kA$，将 $A \circ B$ 简记为 $AB$

显然，$(\hom(V_1, V_2), F, +, \cdot)$ 是一个线性空间，0 是它的零向量；

$(\hom(V_1, V_2), +, \circ)$ 是一个幺环，0 是它的加法单位元，$I$ 是它的乘法单位元

除此之外，还有一些运算，但是它们是针对特殊的线性映射的，比如说：

**定义 1.1.4: 线性变换的幂**

$\forall A \in \hom(V, V)$

我们定义：$A^m := \begin{cases} A \circ A^{m-1}, m \geqslant 1 \\ I, m = 0 \end{cases}, m \geqslant 0$

如果一个映射的幂不会使其本身变化，我们称它是一个幂等变换

**定义 1.1.5: 幂等映射**

$A \in \hom(V, V)$ 如果有：

$A = A^2$

我们称它是一个幂等变换

我们不再讨论其他的运算，我们接下来转入线性映射一般性质的研究

### 1.1.3 线性映射的性质

1.

**命题 1.1.1.** $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$

**证明：** $A(\mathbf{0}_{V_1}) = A(0 \cdot \mathbf{0}_{V_1}) = 0 \cdot A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$ □

2.

**命题 1.1.2.** $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(-\alpha) = -A(\alpha)$

**证明：** $A(-\alpha) = A((-1) \cdot \alpha) = (-1) \cdot A(\alpha) = -A(\alpha)$ □

3.

**命题 1.1.3.** $\forall A \in \hom(V_1, V_2), A(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i A(\alpha_i)$

**证明：** 对 $n$ 使用数学归纳法易证。 □

值得注意，这个定理并不能随意地推广到 $\aleph_0$，因为此时依赖于度量线性空间或线性映射的进一步性质。

4.

**命题 1.1.4.** $\forall A \in \hom(V, V), m \geqslant 1, A^m = A^{m-1} \circ A$

**证明：** 对 $m$ 作数学归纳法。

首先，当 $m = 2$ 时，$A^2 = A \circ A$，命题成立

现在假设 $m$ 时成立，我们来证明 $m + 1$ 时命题也成立：

$A^m = A \circ A^{m-1} = A \circ A^{m-2} \circ A = A^{m-1} \circ A$，于是命题得证。 □

这个命题看似显然，但是是必要的，因为线性映射环不交换。这个命题指出：递归式地推导幂时，从左右方向都是等价的。进一步，在递归中不断变换方向也不会影响结果。

5.

**命题 1.1.5.** $\forall A \in \hom(V_1, V_2)$

如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，那么 $A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_s)$ 也线性相关

**证明：** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

$\Rightarrow \exists k_1, \cdots, k_s, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_s = \mathbf{0}$，其中 $k_1, \cdots, k_s$ 不全为零

$\Rightarrow A(k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_s) = k_1A(\alpha_1) + \cdots + k_nA(\alpha_s) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow A(\alpha_1), \cdots, A(\alpha_n)$ 线性无关 □

值得注意的是，不同于同构映射，在这个命题中把线性相关改为线性无关会使命题变得不成立。比如说，零映射会把任何线性无关的向量组变得线性相关

6.

**命题 1.1.6.** $\forall T, Y \in \hom(V_1, V_2)$，$B$ 是 $V_1$ 的一个基
如果 $\forall \alpha \in B, T(\alpha) = Y(\beta)$，那么 $T = Y$

**证明：** 只需证明：$\forall \gamma \in V_1, T(\gamma) = Y(\gamma)$

因为 $B$ 是 $V_1$ 的基，所以一定有 $\gamma = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_s \in B$

此时，$T(\gamma) = k_1T(\alpha_1) + \cdots + k_sT(\alpha_s) = k_1Y(\alpha_1) + \cdots + k_sY(\alpha_s) = Y(\gamma)$，于是命题得证。 □

这个命题指出，线性映射完全由其在基上的作用决定，因为我们其实只需要指定基上的像就指定了线性映射本身。

最后，还有一个问题未被解决：$\hom(V, W)$ 的维数和 $\dim V, \dim W$ 有什么关系。这个问题比较复杂，因为涉及无限维时，维数的公式会变得和有限情形完全不同。在讲解行列式后，我们将在附录一中解决这个问题。

## 1.2 线性映射的核和像

本节中，我们将借助核与像继续研究线性映射。所谓核，即是线性映射映到零的那一部分；像则是值域。

同时，我们会引入对偶映射，借助本节中核与像的工具，我们将看到对偶和本身之间的联系。

### 1.2.1 核与像的定义

**定义 1.2.1: 线性映射的核**

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\ker A := \{\alpha \in V_1 | A(\alpha) = \mathbf{0}_{V_2}\} \tag{1.4}$$

称为线性映射 $A$ 的核

**定义 1.2.2: 线性映射的像**

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\operatorname{Im} A := A(V_1) := \{A(\alpha) | \alpha \in V_1\} \tag{1.5}$$

•

称为线性映射 $A$ 的像

特别地，核与像的维数我们分别称为零化度和秩：

**定义 1.2.3: 线性映射的零化度**

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\operatorname{nullity}(A) := \dim(\ker A) \tag{1.6}$$

称为线性映射 $A$ 的零化度

**定义 1.2.4: 线性映射的秩**

设 $A \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义：

$$\operatorname{rank}(A) := \dim(\operatorname{Im} A) \tag{1.7}$$

称为线性映射 $A$ 的秩

事实上，线性映射的秩和之前我们曾提及的向量组的秩有着很大的联系，我们将在后续看到这一点。

为了方便后续性质的研究，接下来我们给出对偶映射的概念

**定义 1.2.5: 对偶映射**

设 $T \in \hom(V_1, V_2)$，我们定义对偶映射 $T^* \in \hom(V_2^*, V_1^*)$

如果满足：$\forall f \in V_2^*, \alpha \in V_1$

$$(T^*(f))\,(\alpha) = (f \circ T)(\alpha) \tag{1.8}$$

### 1.2.2 核与像的性质

接下来研究核与像的性质

1. **命题 1.2.1.** $\forall A \in \hom(V, W), \ker A, \operatorname{Im} A$ 都是线性空间

   **证明:** 先证明 $\ker A$ 是一个线性空间

   注意到，$\mathbf{0}_V \in \ker A$，因为 $A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$，因此 $\ker A$ 非空

   那么，只需注意到 $\forall \alpha, \beta \in \ker A, A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha + \beta \in \ker A$

   $\forall \alpha \in \ker A, k \in F, A(k\alpha) = kA(\alpha) = \mathbf{0}_W \Rightarrow k\alpha \in \ker A$

   再证明 $\operatorname{Im} A$ 是一个线性空间

   注意到，$\mathbf{0}_W = A(\mathbf{0}_V) \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A \neq \emptyset$

   那么，只需注意到 $\forall A(\alpha), A(\beta) \in \operatorname{Im} A, A(\alpha) + A(\beta) = A(\alpha + \beta) \in \operatorname{Im} A$

   $\forall A(\alpha) \in \operatorname{Im} A, k \in F, kA(\alpha) = A(k\alpha) \in \operatorname{Im} A$

   于是命题得证 □

2. **命题 1.2.2.** $A \in \hom(V, W)$，那么：

   $A$ 是单射 $\Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

   **证明:** 先证明充分性。注意到，$A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$，而 $A$ 为单射，于是一定有 $\ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

   再证明必要性。设 $A(\alpha) = A(\beta)$，那么 $A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha - \beta = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow A$ 是单射 □

3. **命题 1.2.3.** $A \in \hom(V, W)$，那么：

   $A$ 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = W$

   **证明:** 这是显然的。 □

4. 秩-零化度定理 在给出定理前，我们先给出一个引理。它是一个线性空间的“同态基本定理”，证明方法也很相似

   **引理 1.2.1**

   $\forall A \in \hom(V, W)$

   $$V / \ker A \cong \operatorname{Im} A \tag{1.9}$$

**证明：** 设 $\phi : V/\ker A \ni \alpha + \ker A \mapsto A(\alpha) \in \operatorname{Im} A$

首先验证它的确是一个映射

假设 $\alpha + \ker A = \beta + \ker A$

那么 $\alpha - \beta \in \ker A \Rightarrow A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow A(\alpha) = A(\beta)$

所以 $\phi$ 的确是一个映射

接下来验证它是一个单射

设 $\phi(\alpha + \ker A) = \phi(\beta + \ker A)$

$\Rightarrow A(\alpha) = A(\beta) \Rightarrow A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W$

$\Rightarrow \alpha - \beta \in \ker A \Rightarrow \alpha + \ker A = \beta + \ker A$

于是 $\phi$ 是单射。$\phi$ 显然是满射

接下来验证线性性：

$\forall \alpha + \ker A, \beta + \ker A \in V/\ker A, k \in F$

$\phi\left((\alpha + \ker A) + (\beta + \ker A)\right) = \phi\left((\alpha + \beta) + \ker A\right) = A(\alpha+\beta) = A(\alpha) + A(\beta) = \phi(\alpha + \ker A) + \phi(\beta + \ker A)$

$\phi\left(k \cdot (\alpha + \ker A)\right) = \phi(k\alpha + \ker A) = A(k\alpha) = kA(\alpha) = k\phi(\alpha + \ker A)$

于是命题得证。 □

它的直接推论是被称为秩-零化度定理的结论，它揭示了秩和零化度的联系

**定理 1.2.2: 秩-零化度定理**

$\forall A \in \hom(V, W)$

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = \dim V \tag{1.10}$$

**证明：** $V/\ker A \cong \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \dim(V/\ker A) = \dim \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \dim V - \dim \ker A = \dim \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = \dim V$ □

5. 有限维映射和其对偶的秩相同 我们先证明一个引理：

**引理 1.2.3: 子空间及其零化子维数和为原空间维数**

设 $V$ 是一个 $F$ 上的线性空间，$\dim V = n < \aleph_0$，$U$ 是 $V$ 的一个线性子空间

我们定义 $U' = \{A \in V^* | \forall \alpha \in U, A(\alpha) = 0\}$

那么有：$\dim U + \dim U' = \dim V$

**证明：** 设 $\dim U = m, 0 \leqslant m \leqslant n$

取 $U$ 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，并补全为 $V$ 的一个基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的对偶基为 $\{f_1, \cdots, f_n\}$

我们来证明：$\{f_{m+1}, \cdots, f_n\}$ 是 $U'$ 的一个基

取 $\forall A \in U'$。因为 $U' \subseteq V^*$，那么 $A$ 一定可以被对偶基线性表出

不妨设 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i$

注意到，当 $1 \leqslant j \leqslant m, A(\alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i(\alpha_j) = k_j$

但因为 $\alpha_j \in U$，因此 $k_j = A(\alpha_j) = 0$

因此有 $A = \sum\limits_{i=m+1}^{n} k_i f_i$

这说明 $U'$ 可由 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 线性表出。又因为 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 线性无关，因此 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 也线性无关

因此 $\{f_{m+1}, \cdot, f_n\}$ 是 $U'$ 的一个基，那么 $\dim U' = n - m$，命题得证。 □

接下来给出命题

**命题 1.2.4.** 设 $T \in \hom(V, W), \dim V = m < \aleph_0, \dim W = n < \aleph_0$

那么 $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^*)$

**证明：** 只需注意到，$\ker T^* = \{f \in W^* | T^*(f) = \mathbf{0}_{V^*}\}$

$= \{f \in W^* | f \circ T = \mathbf{0}_{V^*}\}$

$= \{f \in W^* | \forall \alpha \in V, f(T(\alpha)) = 0\}$

$= \{f \in W^* | \forall \beta \in \operatorname{Im} T, f(\beta) = 0\}$

而按照引理，有：$\dim \operatorname{Im} T + \dim\{f \in W^* | \forall \beta \in \operatorname{Im} T, f(\beta) = 0\} = \dim W$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T^* = \dim W$

再运用秩-零化度定理，有：$\dim \operatorname{Im} T^* + \dim \ker T^* = \dim W^* = \dim W$

因此有 $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^* \Rightarrow \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^*)$，命题得证 □

6.

**命题 1.2.5.** 设 $A \in \hom(V, W)$，如果 $\dim V = \dim W$，那么：

$A$ 是满射 $\Leftrightarrow$ $A$ 是单射

**证明：** 因为 $V/\ker A \cong \operatorname{Im} A$

$A$ 是满射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = W \Leftrightarrow \operatorname{Im} A \cong W \Leftrightarrow \operatorname{Im} A \cong W \cong V$

$\Leftrightarrow V \cong V/\ker A \Leftrightarrow \dim\ker A = 0 \Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}_V\} \Leftrightarrow A$ 是单射 □

## 1.3 矩阵

为了方便后续的研究，我们引入一种“数表”，即矩阵。它和有限维空间上的线性映射完全同构

### 1.3.1 矩阵的定义

**定义 1.3.1: 矩阵**

形如以下的矩形阵列称为一个域 $F$ 上的矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in F$

简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})$。$m$ 称为矩阵的行数，$n$ 称为矩阵的列数。

特别地，如果 $m = n$，我们称它是一个 $m$ 阶方阵。

$F$ 上的全体 $m \times n$ 矩阵的集合记作 $M_{m\times n}(F)$，特别地如果 $m = n$，记作 $M_n(F)$。

我们也将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $m$ 行 $n$ 列处的元素记作 $\boldsymbol{A}_{ij}$

我们也常常将 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 记作 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 或 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$，其中 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \beta_j = (a_{j1}, \cdots, a_{jn})$

### 1.3.2 矩阵的运算

1. 相等

**定义 1.3.2: 矩阵的相等**

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}(F)$，如果 $\forall i, j, \boldsymbol{A}(i;j) = \boldsymbol{B}(i;j)$，则称 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

2. 转置

**定义 1.3.3: 矩阵的转置**

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F)$，

我们定义矩阵 $\boldsymbol{A}^T \in M_{n\times m}(F)$ 为满足 $\boldsymbol{A}^T(i;j) = \boldsymbol{A}(j;i)$ 的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置。

3. 加法

**定义 1.3.4: 矩阵的加法**

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}(F)$

我们定义：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(i;j) = \boldsymbol{A}(i;j) + \boldsymbol{B}(i;j)$。

4. 纯量乘法

**定义 1.3.5: 矩阵的纯量乘法**

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), k \in F$，

我们定义矩阵 $k\cdot\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F)$ 为满足 $(k\cdot\boldsymbol{A})(i;j) = k\cdot\boldsymbol{A}(i;j)$ 的矩阵。

5. 乘法

**定义 1.3.6: 矩阵的乘法**

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(F), \boldsymbol{B} \in M_{n\times p}(F)$，

我们定义矩阵 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \in M_{m\times p}(F)$ 为满足 $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(i;j) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(i;k)\boldsymbol{B}(k;j)$ 的矩阵

6. 幂

**定义 1.3.7: 方阵的幂**

$\forall \boldsymbol{A} \in M_n(F)$

我们定义：$\boldsymbol{A}^m := \begin{cases} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{m-1}, m \geqslant 1 \\ \boldsymbol{I}, m = 0 \end{cases} , m \geqslant 0$

7. 和行向量的乘法

最后，为了后续研究线性映射，我们再定义一种新运算

**定义 1.3.8: $V^n$ 中的行向量和矩阵的乘积**

设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in V^m, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M_{m\times n}(F)$，

我们定义：

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\cdot\boldsymbol{A}=(\sum_{i=1}^m a_{i1}\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m a_{im}\alpha_i)$

值得注意的是，这个运算并不是矩阵乘法的退化，因为此处乘法的左元中的向量是一个一般的向量，而不一定是列向量

### 1.3.3 线性映射的矩阵

给出矩阵及其运算的基本定义后，我们可以开始讨论如何将线性映射写成矩阵了。

**定义 1.3.9: 线性映射的矩阵**

设 $A\in\hom(V,W),\dim V=m<\aleph_0,\dim W=n<\aleph_0$

取 $V$ 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，$W$ 的一个基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_{m\times n}(F)$ 满足：

$$(A(\alpha_1),\cdots,A(\alpha_m))=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

那么我们称 $\boldsymbol{A}$ 是线性映射 $A$ 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 和 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵

特别地，如果 $V=W$ 且 $\alpha_i=\beta_i$，我们称 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换 $A$ 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 下的矩阵

我们也常常简记 $(A(\alpha_1),\cdots,A(\alpha_m))$ 为 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

我们习惯上用大写字母表示线性映射，而用加粗的大写字母表示它在某个基下的矩阵

我们接下来会看到，矩阵的运算其实就是线性映射的运算

### 1.3.4 矩阵的性质

1.

**命题 1.3.1.** $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{A}+(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{B}$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(k\boldsymbol{A})=k\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{A}\right)$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}$

**证明:** $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(i;m)\alpha_i)$

$=(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;m)\alpha_i)+(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{B}(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{B}(i;m)\alpha_i)$

$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{A}+(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{B}$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(k\boldsymbol{A})=(\sum_{i=1}^m(k\boldsymbol{A})(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m(k\boldsymbol{A})(i;m)\alpha_i)$

$=k(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;m)\alpha_i)$

$=k\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{A}\right)$

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(F),\boldsymbol{B}\in M_{n\times s}(F)$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(i;m)\alpha_i)$

$=(\sum_{i=1}^m(\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{A}(i;j)\boldsymbol{B}(j;1))\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m(\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{A}(i;j)\boldsymbol{B}(j;m))\alpha_i)$

$=(\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{B}(j;1)(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;j)\alpha_i),\cdots,\sum\limits_{j=1}^n\boldsymbol{B}(j;m)(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;j)\alpha_i))$

$=(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;1)\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}(i;m)\alpha_i)\boldsymbol{B}$

$=\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}$ □

2.

**命题 1.3.2.** 设 $A,B\in\hom(V,W)$，其中 $V,W$ 是 $F$ 上的有限维线性空间

分别取 $V,W$ 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$

设 $A,B$ 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$

那么：$A+B$ 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

**证明:** 只需证明：$(A+B)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

注意到，$(A+B)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=A(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+B(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

$=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{A}+=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\boldsymbol{B}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

命题得证。 □

## 1.4 特殊矩阵

## 1.5 可逆矩阵

## 1.6 迹和行列式

### 1.6.1 张量积

在研究迹和行列式前，我们先研究张量积。张量积一般应用于多重线性映射的研究中，后面我们会看到：行列式是一种特殊的多重线性映射。

张量积的本意是将两个线性空间组合在一起形成新的空间，并且希望可以将原来的两个空间和新的空间对应。

在双线性映射，即对每一分量都线性的映射的研究中，我们将两个空间组合在一起，视为同一空间研究

我们希望：新的空间和原来的两个空间应该别无二致。因此，如果确立了两个空间 $V,W$ 到张量积空间 $U$ 的映射，我们希望每一个 $V,W$ 到 $Z$ 的双线性映射，都只能确定唯一的 $U$ 到 $Z$ 的映射。

以上想法给出了以下定义：

**定义 1.6.1: 双线性映射**

设 $V,W,Z$ 是三个线性空间，

映射 $f:V\times W\to Z$ 如果满足：

1. $\forall\alpha,\beta\in V,\gamma\in W,f(\alpha+\beta,\gamma)=f(\alpha,\gamma)+f(\beta+\gamma)$
2. $\forall\alpha\in V,\beta,\gamma\in W,f(\alpha,\beta+\gamma)=f(\alpha,\beta)+f(\alpha,\gamma)$
3. $\forall k\in F,\alpha\in V,\beta\in W,f(k\cdot\alpha,\beta)=k\cdot f(\alpha,\beta),f(\alpha,k\cdot\beta)=k\cdot f(\alpha,\beta)$

那么我们称 $f$ 是一个双线性映射

**定义 1.6.2: 线性空间的张量积**

设 $V, W, Z$ 是三个线性空间，如果线性空间 $V \otimes W$ 满足：

存在映射 $f : V \times W \to V \otimes W$，使得：

任意的 $f : V \times W \to Z$ 的双线性映射 $g$，存在唯一的线性映射 $h : V \otimes W \to Z$，使得 $g = h \circ f$

那么，我们称 $V \otimes W$ 是 $V$ 和 $W$ 的张量积

### 1.6.2 张量和外积

### 1.6.3 行列式的定义和性质

**定义 1.6.3: 行列式**

设 $F$ 是一个域，$V$ 是 $F$ 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$

映射 $\det : V^n \to F$ 如果满足：

① $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i + \beta_i, \cdots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \cdots, \beta_i, \cdots, \alpha_n)$

② $\forall k \in F, \det(\alpha_1, \cdots, k \cdot \alpha_i, \cdots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

② $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

③ 存在 $V$ 的一组基 $\gamma_i, \cdots, \gamma_n, \det(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = 1$

那么我们称 det 是一个 $V$ 上的 $n$ 阶行列式

由行列式的定义，我们可以推导出行列式的基本性质

**命题 1.6.1.** *向量组* $\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ *如果有* $\alpha_i = \alpha_j$

*那么* $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$

**证明:** $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

但因为 $\alpha_i = \alpha_j$，所以必有 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$ □

进一步我们可以推出，如果两个变量成系数关系，那么行列式也为零

**推论 1.6.1: 存在成比例变量的行列式为零**

向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ 如果有 $\alpha_i = k\alpha_j, k \in F$

那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$

**证明:** $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = 0$ □

### 1.6.4 行列式在基上的展开

**定理 1.6.2: 行列式的展开**

设 $F$ 是一个域，$V$ 是 $F$ 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$，

$V$ 上的 $n$ 阶行列式 det 满足 $\det(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = 1$，其中 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 是 $V$ 的一组基

那么，有：

$$\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \tag{1.12}$$

其中 $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\gamma_j$

**证明:** $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \det\left(\sum\limits_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1}\gamma_{i_1}, \cdots, \sum\limits_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n}\gamma_{i_n}\right)$

$= \sum\limits_{i_1=1}^{n} \cdots \sum\limits_{i_n=1}^{n} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_{k,i_k} \det(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_n})\right)$

$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma)\right)$ □

事实上，我们也可以改变第一个求和指标，使之称为一个固定但是可以随意选取的置换

**推论 1.6.3**

设 $F$ 是一个域，$V$ 是 $F$ 上的一个线性空间，并且 $dim_F V = n$，

$V$ 上的 $n$ 阶行列式 det 满足 $\det(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = 1$，其中 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 是 $V$ 的一组基

那么，有：

$$\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),\sigma(i)} \tag{1.13}$$

其中 $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\gamma_j$，$\rho$ 是一个置换

**证明:** $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)}$

对指标作置换 $\rho$，累乘的结果不会变化，所以有：

$\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),(\rho\circ\tau)(i)}$

记 $\sigma = \rho \circ \tau$，那么 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{\rho^{-1}\circ\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1}\circ\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),\sigma(i)}$

但是，$\rho^{-1} \circ \sigma \in S_n$ 其实就是 $\sigma \in S_n$，并且我们知道 $\operatorname{sgn}(\rho^{-1}\circ\sigma) = \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\sigma)$

所以 $\det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),\sigma(i)}$ □

### 1.6.5 矩阵的行列式

我们之前已经指出，$M_n(F) \cong F^{n^2} \cong (F^n)^n$，因此，我们可以对矩阵定义行列式：

**定义 1.6.4: 矩阵的行列式**

设矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in M_n(F)$，我们定义：

$|A| = \det(A) := \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

并且有 $\det(e_1, \cdots, e_n) = 1$，其中 $e_i$ 是标准基向量 $(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$，1 在第 $i$ 个位置上。

矩阵的行列式也可以类似地在标准基上展开

**定理 1.6.4: 矩阵的行列式的展开**

设 $F$ 是一个域，矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(F)$ 那么，有：

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \tag{1.14}$$

### 1.6.6 矩阵的行列式的余子式展开

### 1.6.7 矩阵乘积的行列式