

第一章 线性映射

本章开始，我们转向线性映射的研究。

我们将用三章完成线性映射的研究。本章我们将从映射最基本的研究方式：向量的作用开始

线性映射的独特之处在于：一方面它能在常规的映射加法和纯量乘法下构成一个线性空间；另一方面，如果我们将复合视为乘法，它可以构成一个幺环。

第一节中，我们将给出线性映射的定义及运算，并研究基本性质；

第二节中，我们将研究两种由线性映射导出的子空间，核和像，并借此提出一个概念：秩。它和我们之前的秩也有很强的联系；

第三节到第五节中，我们将研究矩阵，它是将线性映射在基下的作用写成的一张数表，非常便于在数值上研究矩阵；

第六节中，我们将研究行列式，它是一个反对称多线性函数，我们以此为工具，为后续我们对线性映射分解的研究铺垫。

1.1 线性映射的定义和运算

1.1.1 线性映射的定义

我们首先给出线性映射的定义

定义 1.1.1: 线性映射

设 V_1, V_2 是一个 F 上的两个线性空间,, 映射 $A: V_1 \rightarrow V_2$ 如果满足:

$$\forall \alpha, \beta \in V_1, k \in F$$

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$$

$$A(k\alpha) = kA(\alpha)$$

那么我们称 A 是一个从 V_1 到 V_2 的线性映射

全体 V_1 到 V_2 的线性映射的集合记作 $\text{hom}_F(V_1, V_2)$, 或简记作 $\text{hom}(V_1, V_2)$

特别地, 如果 $V_1 = V_2$, 我们称 A 是一个 V_1 上的线性变换

有一些常用的线性映射, 我们在这里列出来:

定义 1.1.2: 一些常用的线性映射

1. 恒等变换: $I: V \ni \alpha \mapsto \alpha \in V$
2. 数乘变换: $k: V \ni \alpha \mapsto k\alpha \in V$
3. 零变换: $0: V_1 \ni \alpha \mapsto \mathbf{0}_{V_2} \in V_2$

1.1.2 线性映射的运算

前面我们定义了线性映射, 现在我们开始赋予 $\text{hom}(V_1, V_2)$ 线性空间和环的性质。

我们会定义三种运算: 加法、纯量乘法、乘法

定义 1.1.3: 线性映射的运算

我们定义:

映射 $+$: $\text{hom}(V_1, V_2) \times \text{hom}(V_1, V_2) \rightarrow \text{hom}(V_1, V_2)$, 称为加法, 如果满足:

$$\forall A, B \in \text{hom}(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A + B)(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha) \quad (1.1)$$

映射 \cdot : $F \times \text{hom}(V_1, V_2) \rightarrow \text{hom}(V_1, V_2)$, 称为纯量乘法, 如果满足:

$$\forall k \in F, A \in \text{hom}(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (k \cdot A)(\alpha) = kA(\alpha) \quad (1.2)$$

映射 \circ : $\text{hom}(V_1, V_2) \times \text{hom}(V_1, V_2) \rightarrow \text{hom}(V_1, V_2)$, 称为乘法, 如果满足:

$$\forall A, B \in \text{hom}(V_1, V_2), \alpha \in V_1, (A \circ B)(\alpha) = A(B(\alpha)) \quad (1.3)$$

我们也常常把 $k \cdot A$ 简记为 kA , 将 $A \circ B$ 简记为 AB

显然, $(\text{hom}(V_1, V_2), F, +, \cdot)$ 是一个线性空间, 0 是它的零向量;

$(\text{hom}(V_1, V_2), +, \circ)$ 是一个么环, 0 是它的加法单位元, I 是它的乘法单位元

除此之外, 还有一些运算, 但是它们是针对特殊的线性映射的, 比如说:

定义 1.1.4: 线性变换的幂

$\forall A \in \text{hom}(V, V)$

我们定义: $A^m := \begin{cases} A \circ A^{m-1}, m \geq 1 \\ I, m = 0 \end{cases}, m \geq 0$

如果一个映射的幂不会使其本身变化, 我们称它是一个幂等变换

定义 1.1.5: 幂等映射

$A \in \text{hom}(V, V)$ 如果有:

$$A = A^2$$

我们称它是一个幂等变换

我们不再讨论其他的运算, 我们接下来转入线性映射一般性质的研究

1.1.3 线性映射的性质

1.

命题 1.1.1. $\forall A \in \text{hom}(V_1, V_2), A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$

证明: $A(\mathbf{0}_{V_1}) = A(0 \cdot \mathbf{0}_{V_1}) = 0 \cdot A(\mathbf{0}_{V_1}) = \mathbf{0}_{V_2}$ □

2.

命题 1.1.2. $\forall A \in \text{hom}(V_1, V_2), A(-\alpha) = -A(\alpha)$

证明: $A(-\alpha) = A((-1) \cdot \alpha) = (-1) \cdot A(\alpha) = -A(\alpha)$ □

3.

命题 1.1.3. $\forall A \in \text{hom}(V_1, V_2), A(\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^n k_i A(\alpha_i)$

证明: 对 n 使用数学归纳法易证。 □

值得注意, 这个定理并不能随意地推广到 \aleph_0 , 因为此时依赖于度量线性空间或线性映射的进一步性质。

4.

命题 1.1.4. $\forall A \in \text{hom}(V, V), m \geq 1, A^m = A^{m-1} \circ A$

证明: 对 m 作数学归纳法。

首先, 当 $m = 2$ 时, $A^2 = A \circ A$, 命题成立

现在假设 m 时成立, 我们来证明 $m + 1$ 时命题也成立:

$A^m = A \circ A^{m-1} = A \circ A^{m-2} \circ A = A^{m-1} \circ A$, 于是命题得证。 □

这个命题看似显然, 但是是必要的, 因为线性映射环不交换。这个命题指出: 递归式地推导幂时, 从左右方向都是等价的。进一步, 在递归中不断变换方向也不会影响结果。

5.

命题 1.1.5. $\forall A \in \text{hom}(V_1, V_2)$

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 那么 $A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_s)$ 也线性相关

证明: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性相关

$\Rightarrow \exists k_1, \dots, k_s, k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s = \mathbf{0}$, 其中 k_1, \dots, k_s 不全为零

$\Rightarrow A(k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s) = k_1 A(\alpha_1) + \dots + k_s A(\alpha_s) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_s)$ 线性无关 □

值得注意的是，不同于同构映射，在这个命题中把线性相关改为线性无关会使命题变得不成立。比如说，零映射会把任何线性无关的向量组变得线性相关

6.

命题 1.1.6. $\forall T, Y \in \text{hom}(V_1, V_2)$, B 是 V_1 的一个基

如果 $\forall \alpha \in B, T(\alpha) = Y(\alpha)$, 那么 $T = Y$

证明: 只需证明: $\forall \gamma \in V_1, T(\gamma) = Y(\gamma)$

因为 B 是 V_1 的基, 所以一定有 $\gamma = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_s \in B$

此时, $T(\gamma) = k_1T(\alpha_1) + \cdots + k_sT(\alpha_s) = k_1Y(\alpha_1) + \cdots + k_sY(\alpha_s) = Y(\gamma)$, 于是命题得证。 \square

这个命题指出, 线性映射完全由其在基上的作用决定, 因为我们其实只需要指定基上的像就指定了线性映射本身。

最后, 还有一个问题未被解决: $\text{hom}(V, W)$ 的维数和 $\dim V, \dim W$ 有什么关系。这个问题比较复杂, 因为涉及无限维时, 维数的公式会变得和有限情形完全不同。在讲解行列式后, 我们将在附录一中解决这个问题。

1.2 线性映射的核和像

本节中, 我们将借助核与像继续研究线性映射。所谓核, 即是线性映射映到零的那一部分; 像则是值域。

同时, 我们会引入对偶映射, 借助本节中核与像的工具, 我们将看到对偶和本身之间的联系。

1.2.1 核与像的定义

定义 1.2.1: 线性映射的核

设 $A \in \text{hom}(V_1, V_2)$, 我们定义:

$$\ker A := \{\alpha \in V_1 | A(\alpha) = \mathbf{0}_{V_2}\} \quad (1.4)$$

称为线性映射 A 的核

定义 1.2.2: 线性映射的像

设 $A \in \text{hom}(V_1, V_2)$, 我们定义:

$$\text{Im } A := A(V_1) := \{A(\alpha) | \alpha \in V_1\} \quad (1.5)$$

•

称为线性映射 A 的像

特别地, 核与像的维数我们分别称为零化度和秩:

定义 1.2.3: 线性映射的零化度

设 $A \in \text{hom}(V_1, V_2)$, 我们定义:

$$\text{nullity}(A) := \dim(\ker A) \quad (1.6)$$

称为线性映射 A 的零化度

定义 1.2.4: 线性映射的秩

设 $A \in \text{hom}(V_1, V_2)$, 我们定义:

$$\text{rank}(A) := \dim(\text{Im } A) \quad (1.7)$$

称为线性映射 A 的秩

事实上, 线性映射的秩和之前我们曾提及的向量组的秩有着很大的联系, 我们将在后续看到这一点。

为了方便后续性质的研究, 接下来我们给出对偶映射的概念

定义 1.2.5: 对偶映射

设 $A \in \text{hom}(V_1, V_2)$, 我们定义对偶映射 $T^* \in \text{hom}(V_2^*, V_1^*)$

如果满足: $\forall f \in V_2^*, \alpha \in V_1$

$$(T^*(f))(\alpha) = (f \circ T)(\alpha) \quad (1.8)$$

1.2.2 核与像的性质

接下来研究核与像的性质

1.

命题 1.2.1. $\forall A \in \text{hom}(V, W)$, $\ker A, \text{Im } A$ 都是线性空间

证明: 先证明 $\ker A$ 是一个线性空间

注意到, $\mathbf{0}_V \in \ker A$, 因为 $A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, 因此 $\ker A$ 非空

那么, 只需注意到 $\forall \alpha, \beta \in \ker A, A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha + \beta \in \ker A$

$\forall \alpha \in \ker A, k \in F, A(k\alpha) = kA(\alpha) = \mathbf{0}_W \Rightarrow k\alpha \in \ker A$

再证明 $\text{Im } A$ 是一个线性空间

注意到, $\mathbf{0}_W = A(\mathbf{0}_V) \in \text{Im } A \Rightarrow \text{Im } A \neq \emptyset$

那么, 只需注意到 $\forall A(\alpha), A(\beta) \in \text{Im } A, A(\alpha) + A(\beta) = A(\alpha + \beta) \in \text{Im } A$

$\forall A(\alpha) \in \text{Im } A, k \in F, kA(\alpha) = A(k\alpha) \in \text{Im } A$

于是命题得证 □

2.

命题 1.2.2. $A \in \text{hom}(V, W)$, 那么:

A 是单射 $\Leftrightarrow \ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

证明: 先证明充分性。注意到, $A(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, 而 A 为单射, 于是一定有 $\ker A = \{\mathbf{0}_V\}$

再证明必要性。设 $A(\alpha) = A(\beta)$, 那么 $A(\alpha - \beta) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha - \beta = \mathbf{0}_V \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow A$ 是单射 □

3.

命题 1.2.3. $A \in \text{hom}(V, W)$, 那么:

A 是单射 $\Leftrightarrow \text{Im } A = W$

证明: 这是显然的。 □

4. 秩-零化度定理 在给出定理前, 我们先给出一个引理。它是一个线性空间的“同态基本定理”, 证明方法也很相似

引理 1.2.1

$\forall A \in \text{hom}(V, W)$

$$V / \ker A \cong \text{Im } A \quad (1.9)$$

证明:

□

它的直接推论是被称为秩-零化度定理的结论，它揭示了秩和零化度的联系

定理 1.2.2: 秩-零化度定理

$$\forall A \in \text{hom}(V, W)$$

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = \dim V \quad (1.10)$$

5. 有限维映射和其对偶的秩相同

命题 1.2.4. 设 $A \in \text{hom}(V, W)$, $\dim V, \dim W = n < \aleph_0$

那么 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^*)$

6.

命题 1.2.5. 设 $A \in \text{hom}(V, W)$, 如果 $\dim V = \dim W$, 那么:

A 是满射 $\Leftrightarrow A$ 是单射

1.3 矩阵

1.3.1 矩阵的定义

定义 1.3.1: 矩阵

形如以下的矩形阵列称为一个域 F 上的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in F$$

简记为 $(a_{ij})_{m \times n}$ 或 (a_{ij}) 。 m 称为矩阵的行数， n 称为矩阵的列数。

特别地，如果 $m = n$ ，我们称它是一个 m 阶方阵。

F 上的全体 $m \times n$ 矩阵的集合记作 $M_{m \times n}(F)$ ，特别地如果 $m = n$ ，记作 $M_n(F)$ 。

我们也将矩阵 A 在 m 行 n 列处的元素记作 A_{ij}

1.3.2 矩阵的运算

1. 相等

定义 1.3.2: 矩阵的相等

设 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{m \times n}(F)$, 如果 $\forall i, j, A(i; j) = B(i; j)$, 则称 $A = B$ 。

2. 转置

定义 1.3.3: 矩阵的转置

设 $A \in M_{m \times n}(F)$,

我们定义矩阵 $A^T \in M_{n \times m}(F)$ 为满足 $A^T(i; j) = A(j; i)$ 的矩阵, 称为 A 的转置。

3. 加法

定义 1.3.4: 矩阵的加法

设 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{m \times n}(F)$

我们定义: $(A + B)(i; j) = A(i; j) + B(i; j)$ 。

4. 纯量乘法

定义 1.3.5: 矩阵的纯量乘法

设 $A \in M_{m \times n}(F), k \in F$,

我们定义矩阵 $k \cdot A \in M_{m \times n}(F)$ 为满足 $(k \cdot A)(i; j) = k \cdot A(i; j)$ 的矩阵。

5. 乘法

定义 1.3.6: 矩阵的乘法

设 $A \in M_{m \times n}(F), B \in M_{n \times p}(F)$,

我们定义矩阵 $A \cdot B \in M_{m \times p}(F)$ 为满足 $(A \cdot B)(i; j) = \sum_{k=1}^n A(i; k)B(k; j)$ 的矩阵

6. 幂

定义 1.3.7: 方阵的幂

设 $A \in M_n(F)$ 是一个方阵, 我们定义: $A^k = A \cdot A^{k-1}$

1.3.3 矩阵的性质

1.4 特殊矩阵

1.5 可逆矩阵

1.6 行列式

1.6.1 行列式的定义和性质

定义 1.6.1: 行列式

设 F 是一个域, V 是 F 上的一个线性空间, 并且 $\dim_F V = n$

映射 $\det : V^n \rightarrow F$ 如果满足:

$$\textcircled{1} \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \beta_i, \dots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_n)$$

$$\textcircled{2} \forall k \in F, \det(\alpha_1, \dots, k \cdot \alpha_i, \dots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

$$\textcircled{2} \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

$$\textcircled{3} \text{ 存在 } V \text{ 的一组基 } \gamma_1, \dots, \gamma_n, \det(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1$$

那么我们称 \det 是一个 V 上的 n 阶行列式

由行列式的定义, 我们可以推导出行列式的基本性质

命题 1.6.1. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n$ 如果有 $\alpha_i = \alpha_j$

那么 $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0$

证明: $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$

但因为 $\alpha_i = \alpha_j$, 所以必有 $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0$

□

进一步我们可以推出, 如果两个变量成系数关系, 那么行列式也为零

推论 1.6.1: 存在成比例变量的行列式为零

向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n$ 如果有 $\alpha_i = k\alpha_j, k \in F$

那么 $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0$

证明: $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = k \cdot \det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0$

□

1.6.2 行列式在基上的展开

定理 1.6.2: 行列式的展开

设 F 是一个域, V 是 F 上的一个线性空间, 并且 $\dim_F V = n$,

V 上的 n 阶行列式 \det 满足 $\det(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1$, 其中 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ 是 V 的一组基

那么, 有:

$$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \quad (1.11)$$

其中 $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \gamma_j$

$$\text{证明: } \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det \left(\sum_{i_1=1}^n a_{1,i_1} \gamma_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{n,i_n} \gamma_{i_n} \right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n \left(\prod_{k=1}^n a_{k,i_k} \det(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} \operatorname{sgn}(\sigma) \right) \quad \square$$

事实上, 我们也可以改变第一个求和指标, 使之称为一个固定但是可以随意选取的置换

推论 1.6.3

设 F 是一个域, V 是 F 上的一个线性空间, 并且 $\dim_F V = n$,

V 上的 n 阶行列式 \det 满足 $\det(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1$, 其中 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ 是 V 的一组基

那么, 有:

$$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\rho(i), \sigma(i)} \quad (1.12)$$

其中 $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \gamma_j$, ρ 是一个置换

$$\text{证明: } \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n a_{i, \tau(i)}$$

对指标作置换 ρ , 累乘的结果不会变化, 所以有:

$$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n a_{\rho(i), (\rho \circ \tau)(i)}$$

$$\text{记 } \sigma = \rho \circ \tau, \text{ 那么 } \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\rho^{-1} \circ \sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1} \circ \sigma) \prod_{i=1}^n a_{\rho(i), \sigma(i)}$$

但是, $\rho^{-1} \circ \sigma \in S_n$ 其实就是 $\sigma \in S_n$, 并且我们知道 $\operatorname{sgn}(\rho^{-1} \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\sigma)$

$$\text{所以 } \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\rho(i), \sigma(i)} \quad \square$$

1.6.3 矩阵的行列式

我们之前已经指出, $M_n(F) \cong F^{n^2} \cong (F^n)^n$, 因此, 我们可以对矩阵定义行列式:

定义 1.6.2: 矩阵的行列式

设矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M_n(F)$, 我们定义:

$$|A| = \det(A) := \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

并且有 $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, 其中 e_i 是标准基向量 $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, 1 在第 i 个位置上。

矩阵的行列式也可以类似地在标准基上展开

定理 1.6.4: 矩阵的行列式的展开

设 F 是一个域, 矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(F)$ 那么, 有:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \quad (1.13)$$

1.6.4 矩阵的行列式的余子式展开

1.6.5 矩阵乘积的行列式