第一章　内积空间

1.1　内积空间的定义

1.1.1　内积空间的定义

定义 1.1.1: 共轭

设 F 是一个域，自同构 $\sigma : F \to F$ 如果满足：

$$\forall a \in F, \sigma^2(a) = a \tag{1.1}$$

那么我们称 σ 是一个共轭映射，$\sigma(a)$ 称为 a 的共轭，也记作 $\bar{a}$。

定义 1.1.2: 内积空间

设 F 是一个定义了共轭和偏序的域，V 是一个 F 上的线性空间，映射 $f : V \times V \to F$ 如果满足：

- $f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$（共轭对称性）
- $f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma)$（对第一个变量可加）
- $f(k\alpha, \beta) = kf(\alpha, \beta)$（对第一个变量线性）
- $f(\alpha, \alpha) \geqslant 0, f(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$（正定性）

那么我们称 f 是 V 上的一个内积，此时称 $(F, V, +, \cdot, f)$ 是一个内积空间（我们也简称 V 是一个内积空间）

习惯上，我们也常常将 $f(\alpha, \beta)$ 记作 $\langle \alpha, \beta \rangle$

基于抽象内积空间，我们可以提出一些相关的概念：

定义 1.1.3: 正交

设 V 是一个内积空间，$\langle\alpha,\beta\rangle = 0$，

那么我们称 α 与 β 是正交的，记作 $\alpha \perp \beta$

如果一个基是相互正交的，那么它被称为正交基：

定义 1.1.4: 正交基

设 V 是一个内积空间，V 的一个基 B 如果满足：

$\forall\alpha,\beta \in B, \alpha \neq \beta, \langle\alpha,\beta\rangle = 0$，

那么我们称 B 是 V 的一个正交基。

我们特别考虑一种特殊的”补空间“，称为正交补：

定义 1.1.5: 正交补

设 V 是 F 上的一个内积空间，$S \subseteq V$。我们定义：

$$S^{\perp} = \{\alpha \in V | \forall\beta \in S, \alpha \perp \beta\} \tag{1.2}$$

称为 S 的正交补。

值得注意的是，上述定义中，我们并不要求 S 是一个子空间；我们也将看到，就算 S 是子空间，正交补和 S 的直和也不一定是整个空间。

另外一个后续常用的概念是共轭算子：

定义 1.1.6: 共轭算子

设 V 是 F 上的一个内积空间，$A \in \hom(V,V)$，我们定义满足以下条件的算子 $A^* : V \to V$

$$\langle A(\alpha),\beta\rangle = \langle\alpha, A^*(\beta)\rangle \tag{1.3}$$

接下来我们讨论两类重要的内积空间

1.1.2 实内积空间、复内积空间

定义 1.1.7: 实内积空间

考虑 $\mathbb{R}$ 及其上的平凡自同构 $\sigma(x) = x$

此时，实数域 $\mathbb{R}$ 上的内积空间，称为实内积空间。

特别地，如果此时内积空间还是有限维的，我们称之为 Euclidean 空间

由定义可知，实内积空间拥有以下独特的特性：不仅仅是对单变量线性，而是对双变量线性，而且完全对称。也就是说，它是一个对称双线性映射；特别地，由于实数域是全序集，因此任意向量的内积都是可比的。

定义 1.1.8: 复内积空间

考虑 $\mathbb{C}$ 及其上的共轭映射 $\sigma(a + bi) = a - bi$

复数域 $\mathbb{C}$ 上的内积空间，称为复内积空间（或酉空间）

实内积空间和复内积空间的独特特点是：可以定义范数，并导出度量，进而产生拓扑

定义 1.1.9: 内积空间中的范数

设 V 是 F 上的一个内积空间，$F = \mathbb{R}$ 或者 $F = \mathbb{C}$，V 上的自然范数 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ 定义为：

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \tag{1.4}$$

我们这里特意要求基域只能是实数或复数域是因为：在一般域上，不能保证向量与自身的内积可以定义良好的平方根。

在实内积空间和酉空间中，如果正交基的每一个向量的范数都是 1，我们也称之为标准正交基：

定义 1.1.10: 标准正交基

设 V 是 F 上的一个内积空间，$F = \mathbb{R}$ 或者 $F = \mathbb{C}$，V 的一个正交基 B 如果满足：

$\forall \alpha \in B, \|\alpha\| = 1$

那么我们称 B 是 V 的一个标准正交基。

此时，内积空间转变为一个线性赋范空间；进而，我们可以用范数定义度量：

定义 1.1.11: 内积空间中的度量

设 V 是 F 上的一个内积空间，$F=\mathbb{R}$ 或者 $F=\mathbb{C}$，V 上的自然度量 $d: V\times V\to F$ 定义为：

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\| \tag{1.5}$$

进而，我们可以定义极限和连续：

定义 1.1.12: 内积空间中向量列的极限

设 V 是一个实内积空间或酉空间，$\{\alpha_i\}$ 是 V 中的一个向量列，如果存在一个向量 $\alpha\in V$，使得：

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,d(\alpha_n,\alpha)<\varepsilon \tag{1.6}$$

我们称向量列 $\{\alpha_i\}$ 收敛于 α，记作 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$

定义 1.1.13: 连续线性泛函

设 V,W 分别是一个实内积空间或酉空间，$f\in\hom(V,W)$，如果有：

$$\forall\{\alpha_i\},\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}f(\alpha_n) \tag{1.7}$$

那么我们称 f 是一个连续线性泛函

进而可以定义完备性：

定义 1.1.14: Hillbert 空间

设 V 是一个实内积空间或酉空间，如果 V 中符合下面条件的任意向量列 $\{\alpha_i\}$

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall m,n\geqslant N,d(\alpha_m,\alpha_n)<\varepsilon \tag{1.8}$$

收敛。

那么，我们称 V 是完备的，并称它是一个 Hillbert 空间。

我们也可以定义开集和闭集

定义 1.1.15: 开集和闭集

设 V 是一个实内积空间或酉空间，$S \subseteq V$，如果对于任意 $\alpha \in S$，存在 $r > 0$，使得：

$$B(\alpha, r) = \{\beta \in V | d(\alpha, \beta) < r\} \subseteq S \tag{1.9}$$

那么我们称 S 是一个开集。

如果 $V - S$ 是一个开集，那么我们称 S 是一个闭集。

1.1.3 内积空间的性质

我们讨论一些性质。

1. 首先，我们讨论内积的线性性质。

   命题 1.1.1. $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$

   $\langle \alpha, k\gamma \rangle = \overline{k} \langle \alpha, \gamma \rangle$

   证明： $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \overline{\langle \beta + \gamma, \alpha \rangle} = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle} + \overline{\langle \gamma, \alpha \rangle} = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$

   $\langle \alpha, k\gamma \rangle = \overline{\langle k\gamma, \alpha \rangle} = \overline{k} \overline{\langle \gamma, \alpha \rangle} = \overline{k} \langle \alpha, \gamma \rangle$ □

   接下来我们考察一种特别的内积，它只定义在实内积空间或酉空间，被称为标准内积：

2. **命题 1.1.2.** 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 n 维线性空间，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V 的一个基，$\forall \alpha, \beta \in V$，如果 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$，那么我们说：

   $$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \tag{1.10}$$

   是 V 上的一个内积

   证明： 设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, \beta = \sum\limits_{i=1}^n b_i \alpha_i, \gamma = \sum\limits_{i=1}^n c_i \alpha_i$，那么：

   $f(\alpha, \beta) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n b_i \alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_i b_i = \sum\limits_{i=1}^n b_i a_i = f(\sum\limits_{i=1}^n b_i \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i) = f(\beta, \alpha)$

   $f(\alpha, \beta+\gamma) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n (b_i+c_i) \alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_i (b_i+c_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_i b_i + \sum\limits_{i=1}^n a_i c_i = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n b_i \alpha_i) + f(\sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n c_i \alpha_i) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$

   $f(\alpha, k\beta) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, k \sum\limits_{i=1}^n b_i \alpha_i) = f(\sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n k b_i \alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^n a_i (k b_i) = k \sum\limits_{i=1}^n a_i b_i = k f(\sum\limits_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^n b_i \alpha_i) = k f(\alpha, \beta)$

$\forall\alpha\neq\mathbf{0}, f(\alpha,\alpha)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2>0$

于是命题得证。 □

酉空间情形类似如下：

3.

命题 1.1.3. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个 n 维线性空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一个基，$\forall\alpha,\beta\in V$，如果 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i$，那么我们说：

$$f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i} \tag{1.11}$$

是 V 上的一个内积

证明: 设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\alpha_i,\gamma=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$，那么：

$f(\alpha,\beta)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\overline{b_i}\overline{a_i}}=\overline{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\overline{a_i}}=\overline{f(\beta,\alpha)}$

$f(\alpha,\beta+\gamma)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i+c_i)\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i+c_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\overline{b_i}+\overline{c_i})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{c_i}=f(\alpha,\beta)+f(\alpha,\gamma)$

$f(\alpha,k\beta)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,k\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\alpha_i)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}(kb_i)\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{kb_i}=\overline{k}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}=\overline{k}f(\alpha,\beta)$

$\forall\alpha\neq\mathbf{0}, f(\alpha,\alpha)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^2>0$

于是命题得证。 □

我们接下来探讨正交的性质。

4.

命题 1.1.4. 设 V 是一个内积空间，$S\subseteq V$，那么 $S^{\perp}$ 是 V 的一个子空间

证明: 取 $\forall\alpha,\beta\in S^{\perp},k\in F$

依定义，有 $\forall\eta\in S,\langle\alpha,\eta\rangle=0,\langle\beta,\eta\rangle=0$

注意到：$\langle\alpha+\beta,\eta\rangle=\langle\alpha,\eta\rangle+\langle\beta,\eta\rangle=0+0=0\Rightarrow\alpha+\beta\in S^{\perp}$

$\langle k\alpha,\eta\rangle=k\langle\alpha,\eta\rangle=0\Rightarrow k\alpha\in S^{\perp}$

于是命题得证。 □

5.

命题 1.1.5. 设 V 是一个内积空间，V 的有限子集 S 如果不存在零向量，且向量两两正交，那么它线性无关

证明: 设 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\forall i\neq j,\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0,\alpha_i\neq\mathbf{0}$

考察线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\mathbf{0}$

对 $\forall i\leqslant l,k_i=0$ 作强归纳法。

首先，$\mathbf{0}=\langle\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i,\alpha_1\rangle=k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle\Rightarrow k_1=0$，于是 $i=1$ 时成立；

现在假设 $i\leqslant l$ 时成立，考察 $l+1$ 时：

$\mathbf{0}=\langle\sum\limits_{i=l+1}^{n}k_i\alpha_i,\alpha_{l+1}\rangle=k_{l+1}\langle\alpha_{l+1},\alpha_{l+1}\rangle\Rightarrow k_{l+1}=0$，于是 $i=l+1$ 时成立。

由强归纳法原理，$\forall i\leqslant n,k_i=0$，于是命题得证。 □

它的直接推论是，正交基是一定存在的：

6.

命题 1.1.6. 任意有限维内积空间的正交基都是存在的。

证明: 取 V 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$

考察以下一系列线性组合：$\eta_i=\alpha_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\frac{\langle\alpha_i,\eta_j\rangle}{\langle\eta_j,\eta_j\rangle}\eta_j$

对归纳假设：$\forall i,j\leqslant k,i\neq j,\langle\eta_i,\eta_j\rangle=0,\langle\eta_i,\eta_i\rangle\neq 0$ 使用数学归纳法。

首先，当 $k=1$，$\eta_1=\alpha_1$，归纳假设显然成立；

我们现在假设 k 时成立，考察 $k+1$ 时：

$\forall j<k+1$

$\langle\eta_{k+1},\eta_j\rangle=\langle\alpha_{k+1},\eta_j\rangle-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\langle\alpha_{k+1},\eta_i\rangle}{\langle\eta_i,\eta_i\rangle}\langle\eta_i,\eta_j\rangle$

$=\langle\alpha_{k+1},\eta_j\rangle-\frac{\langle\alpha_{k+1},\eta_j\rangle}{\langle\eta_j,\eta_j\rangle}\cdot\langle\eta_j,\eta_j\rangle=\mathbf{0}$

$\langle\eta_j,\eta_{k+1}\rangle=\overline{\langle\eta_{k+1},\eta_j\rangle}=0$，此时归纳假设成立。

于是 $\{\eta_i\}$ 的确是相互正交的；由有限正交向量组线性无关，以及基的性质，$\{\eta_i\}$ 是 V 的一个正交基。 □

7.

命题 1.1.7. 设 V 是 F 上的一个内积空间，$\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$ 是 V 的一个标准正交基，那么对于 $\forall\alpha\in V$

$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\alpha,\eta_i\rangle\eta_i$

证明: 因为 $\{\eta_i\}$ 的确是一个基，因为一定能找到一系列系数 k_i，使得 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\eta_i$

此时只需注意到：$\langle\alpha,\eta_i\rangle=\langle\sum\limits_{j=1}^{n}k_j\eta_j,\eta_i\rangle=k_i\langle\eta_i,\eta_i\rangle=k_i$

$\Rightarrow\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\alpha,\eta_i\rangle\eta_i$ □

8. **定理 1.1.1: Cauchy-Buniakowski-Schwarz 不等式**

设 V 是一个实内积空间或酉空间，$\alpha,\beta\in V$，那么：

$$|\langle\alpha,\beta\rangle|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\| \tag{1.12}$$

等号成立的充分必要条件是 α 与 β 线性相关

证明： 当 α,β 线性相关，要不 $\alpha=\mathbf{0}$，要不 $\beta=k\alpha$，此时不等式显然成立

考察 α,β 线性无关的情形

此时，一定有：$\forall k,\alpha-k\beta\neq\mathbf{0}$

此时，$\langle\alpha-k\beta,\alpha-k\beta\rangle>0$

$\Rightarrow\|\alpha\|^2-k\langle\alpha,\beta\rangle-\overline{k}\langle\beta,\alpha\rangle+|k|^2\|\beta\|^2>0$

代入 $k=-\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\|\beta\|^2}$，得：

$\|\alpha\|^2-\frac{\overline{\langle\alpha,\beta\rangle}\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\beta\|^2}-\frac{\langle\alpha,\beta\rangle\overline{\langle\alpha,\beta\rangle}}{\|\beta\|^2}+\frac{|\langle\beta,\alpha\rangle|^2}{\|\beta\|^2}>0$

$\Rightarrow\|\alpha\|^2-\frac{|\langle\alpha,\beta\rangle|^2}{\|\beta\|^2}>0$

$\Rightarrow|\langle\alpha,\beta\rangle|^2<\|\alpha\|^2\|\beta\|^2$

于是命题得证。 □

上述定理适用于两类内积空间，尽管实内积空间并不能简单视为复内积空间的一个子空间，但是证明过程中利用的性质都是通用的，我们统一地写出这个证明。

9. 最后，我们讨论 Hillbert 空间上的性质

命题 1.1.8. *设 V 是一个 F 上的 Hillbert 空间，$S\subseteq V$ 是 V 的一个闭子空间，那么有 $S\oplus S^{\perp}=V$*

证明： 我们先证明 $S+S^{\perp}=V$

$\forall\alpha\in V$，考察函数 $f(\theta)=\|\alpha-\theta\|,\theta\in S$

由于 S 是闭集，那么 f 的最小值一定存在，取 β 使得 $f(\beta)=\min_{\theta}f(\theta)$，并记 $\gamma=\alpha-\beta$

我们来证明，的确有 $\gamma\in S^{\perp}$

$\forall\eta\in S$，我们希望证明 $\langle\gamma,\eta\rangle=0$

考察函数 $g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

由于 $t\eta + \beta \in S$，而 $\|\alpha - \theta\|$ 在 $\theta = \beta$ 时取得最小值，因此，$g(t)$ 在 $t = 0$ 时取得最小值。

显然，$g(t) = \|\alpha - (t\eta + \beta)\|^2 = \|\gamma - t\eta\|^2 = \|\gamma\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle + t^2\|\eta\|^2$ 连续可导

于是，一定有 $g'(0) = (-2\,\mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle + 2t\|\eta\|^2)|_{t=0} = -2\,\mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle = 0$。

若 $F = \mathbb{R}$，那么 $\langle\gamma,\eta\rangle = 0$，论证完成；

对于 $F = \mathbb{C}$ 的情形，考虑 $g(t) = \|\alpha - (ti\eta + \beta)\|^2, t \in \mathbb{R}$

同理可得 $\mathrm{Re}\langle\gamma, i\eta\rangle = 0$。

$\Rightarrow \mathrm{Re}(-i\langle\gamma,\eta\rangle) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\mathrm{Im}\langle\gamma,\eta\rangle - i\,\mathrm{Re}\langle\gamma,\eta\rangle) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\langle\gamma,\eta\rangle = 0$。

于是此时有 $\langle\gamma,\eta\rangle = 0$，论证完成。

最后我们证明 $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$

设 $\alpha \in S \cap S^\perp$，那么 $\langle\alpha,\alpha\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$

于是命题得证。 □

利用这个结论可以证明以下重要事实：

定理 1.1.2: Riesz 表示定理

设 V 是一个 F 上的 Hillbert 空间，如果 $f \in \hom(V, F)$ 是一个连续泛函，那么存在唯一的 $\phi \in V$，使得：

$$f(\alpha) = \langle\alpha, \phi\rangle \tag{1.13}$$

证明： 我们首先证明：$\ker f$ 是一个闭集。

注意到：任意收敛序列 $\{\alpha_n\} \subseteq \ker f$，因为 f 是连续的，因此有

$f(\lim_{n\to\infty}\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n \in \ker f$

即 $\ker f$ 对任意序列的极限封闭。

接下来考察集合 $\overline{\ker f} := \{\lambda | \forall\lambda \in O, O\text{是开集}, O \cap \ker f \neq \emptyset\}$

注意到，一定有 $\ker f \subseteq \overline{\ker f}$，因为 $\ker f$ 中的任意一点，包含其的开集与 $\ker f$ 的交集至少包含这个点本身。

考察 $\alpha \in \overline{\ker f}$

取 $\alpha_i \in B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap \ker f$，其中 $B(\alpha, s) := \{\beta | d(\alpha,\beta) < s\}$，由 $\overline{\ker f}$ 的定义可知序列是的确可以取得的。

那么，此时一定有 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$，因为 $0 < d(\alpha,\alpha_k) < \frac{1}{k}$。

但是，我们已经指出：$\ker f$ 对任意收敛序列的极限封闭，因此 $\alpha \in \ker f$。那么，$\ker f = \overline{\ker f}$

那么，我们说，$\ker f$ 是闭集。因为：$\ker f$ 已经包含了所有与开集有非空交集的点，那么对于 $\forall \beta \in V - \ker f$，一定存在包含 β 的一个开集 O，使得 $O \in V - \ker f$，而这正是 $\ker f$ 闭的定义。

于是依照之前证明的结论，一定有 $\ker f \oplus (\ker f)^{\perp} = V$

于是 $\operatorname{Im} f \cong V/\ker f \operatorname{Im} \cong (\ker f)^{\perp}$

但是，$\operatorname{Im} f \subseteq F \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 1$，因此 $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$

取 $(\ker f)^{\perp}$ 的一个标准正交基 $\{\eta\}$，那么此时有：

$f(\alpha) = \langle \alpha, \eta \rangle f(\eta) = \langle \alpha, \overline{f(\eta)}\eta \rangle$

记 $\phi = \overline{f(\eta)}\eta$，那么此时有 $f(\alpha) = \langle \alpha, \phi \rangle$。

于是命题得证。 □

最后，我们讨论两个共轭算子的性质，作为后续的准备。

10.

命题 1.1.9. 设 $A \in \hom(V, V)$，那么 A^* 是唯一的。

证明: 不妨假设命题不成立，那么存在 $B, C : V \to V, B \neq C$，此时有：

$\forall \alpha, \beta \in V, \langle A\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, B\beta \rangle = \langle \alpha, C\beta \rangle$

显然，一定 $\exists \gamma, B(\gamma) \neq C(\gamma)$

此时注意到：$\langle B(\gamma) - C(\gamma), B(\gamma) - C(\gamma) \rangle = \langle B(\gamma), B(\gamma) \rangle - \langle B(\gamma), C(\gamma) \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow B(\gamma) = C(\gamma)$，与假设矛盾。

于是命题得证。 □

11.

命题 1.1.10. $\forall A \in \hom(V, V), A^* \in \hom(V, V)$

证明: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, k \in F$

$\langle \alpha, (A^* + B^*)(\beta) \rangle = \langle A(\alpha), \beta \rangle + \langle B(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, A^*(\beta) \rangle + \langle \alpha, B^*(\beta) \rangle = \langle \alpha, A^*(\beta) + B^*(\beta) \rangle$

$\Rightarrow (A^* + B^*)(\beta) = A^*(\beta) + B^*(\beta)$

$\langle \alpha, (kA^*)(\beta) \rangle = k\langle A(\alpha), \beta \rangle = k\langle \alpha, A^*(\beta) \rangle = \langle \alpha, kA^*(\beta) \rangle$

$\Rightarrow (kA^*)(\beta) = kA^*(\beta)$

于是命题得证。 □

1.2 正规算子和自伴算子

1.2.1 正规算子的定义

先给出定义。

定义 1.2.1: 正规算子

设 V 是 F 上的一个内积空间，$A \in \hom(V, V)$，如果 $AA^* = A^*A$，那么我们称 A 是一个正规算子

1.3 保距算子、幺正算子

1.4 酉算子

1.5 奇异值与奇异值分解

1.6 UR、QR、Schur 分解