第一章　线性空间

1.1　线性空间的定义

1.1.1　线性空间的定义

定义 1.1.1: 线性空间

设 F 是一个域，V 是一个集合，存在两个运算 $+ : V \times V \to V$ 和 $\cdot : F \times V \to V$，分别称为加法和乘法，使得：

① $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \alpha \in V, \mathbf{0} + \alpha = \alpha$

② $\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V, \text{s.t. } \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$

③ $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha$

④ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

⑤ $\forall \alpha \in V, 1 \cdot \alpha = \alpha$

⑥ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k \cdot l) \cdot \alpha = k \cdot (l \cdot \alpha)$

⑦ $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k + l) \cdot \alpha = k \cdot \alpha + l \cdot \alpha$

⑧ $\forall k \in F, \alpha \in V, k \cdot (\beta + \gamma) = k \cdot \beta + k \cdot \gamma$

那么我们称 V 是一个 F 上的线性空间（或向量空间）

1.1.2　线性子空间

定义 1.1.2: 线性子空间

设 V 是一个线性空间，集合 $W \subseteq V$，如果 W 在 V 的运算构成一个线性空间，那么我们称 W 是 V 的一个线性子空间

1.1.3 线性空间的性质

1.

命题 1.1.1. $\mathbf{0}$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，$\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 均是零元，并且 $\mathbf{0}_1 \neq \mathbf{0}_2$

我们注意到：$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

2.

命题 1.1.2. $\forall \alpha \in V$，$-\alpha$ 是唯一的

证明: 不妨假设命题不成立，α 有两个逆元 β_1, β_2，并且 $\beta_1 \neq \beta_2$

我们注意到：$\beta_1 = \mathbf{0} + \beta_1 = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 = \beta_2 + (\alpha + \beta_1) = \beta_2 + \mathbf{0} = \beta_2$，与假设矛盾，于是命题得证 □

3.

命题 1.1.3. $\forall \alpha \in V, 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$

证明: $0 \cdot \alpha = (0+0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha$

$\Rightarrow 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha) = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha + (-0 \cdot \alpha)$

$\Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot \alpha$ □

4.

命题 1.1.4. $\forall k \in F, k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

证明: $k \cdot \mathbf{0} = k \cdot (0 \cdot \alpha) = (k \cdot 0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = \mathbf{0}$ □

5.

命题 1.1.5. $\forall \alpha \in V, (-1) \cdot \alpha = -\alpha$

证明: $\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha = (1 + (-1)) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \alpha$

$\Rightarrow \mathbf{0} + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha + (-1) \cdot \alpha \Rightarrow (-1) \cdot \alpha = -\alpha$ □

6. 事实上，验证一个子集是否是线性子空间，只需要验证封闭性即可，其他的条件都是不必要的。

命题 1.1.6. $W \subseteq V$ 是 V 的线性子空间，当且仅当：

$\forall k \in F, \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta \in V, k \cdot \alpha \in V$

证明： 充分性是显然的，对于必要性，我们依次验证：

首先，$0 \in F$，因此 $0 \cdot \alpha = \mathbf{0} \in W$

其次，因为 $-1 \in F$，所以 $(-1) \cdot \alpha = -\alpha \in W$

剩余的六条运算律，因为 W 上的运算即是 V 上的运算在 W 上的限制，所以显然成立。

那么命题得证。 □

1.2 线性组合

本节中，我们着手研究一系列向量以相加，相乘的形式组合而成的新向量，称之为线性组合。

其最一般的形式是 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$，但是我们希望能够进一步拓展，考虑无穷多个向量的线性组合。

因此，我们需要先定义向量列的极限，其最好方式就是先定义出线性空间中的度量。

1.2.1 度量线性空间

定义 1.2.1: 度量线性空间、线性组合的定义

设 V 是一个域 F 上的线性空间，映射 $d : V \times V \to F$ 如果满足：

① $\forall \alpha, \beta \in V, d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

② $\forall \alpha, \beta \in V, d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$

③ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \geqslant d(\alpha, \gamma)$

那么我们称 (V, d) 是一个度量线性空间（或 Banach 空间），d 称为 V 中的度量

这样，我们就可以定义出线性组合

定义 1.2.2: 线性组合

设 V 是一个域 F 上的线性空间，$\{\alpha_i \in V\}$ 是一个至多可数的向量组

那么如果向量 $\beta \in V$ 满足：$\forall \varepsilon > 0, \exists, n \in \mathbb{N}_+, \text{s.t. } d(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i, \beta) < \varepsilon, k_i \in F$

那么我们称 β 是一个由向量组 $\{\alpha_i \in V\}$ 张成的的线性组合，并称 β 可以由 $\{\alpha_i \in V\}$ 线性表出

如果 $\{\alpha_i \in V\}$ 可数，记作：$\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$，否则记作 $\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$，其中 n 是向量组的元素数

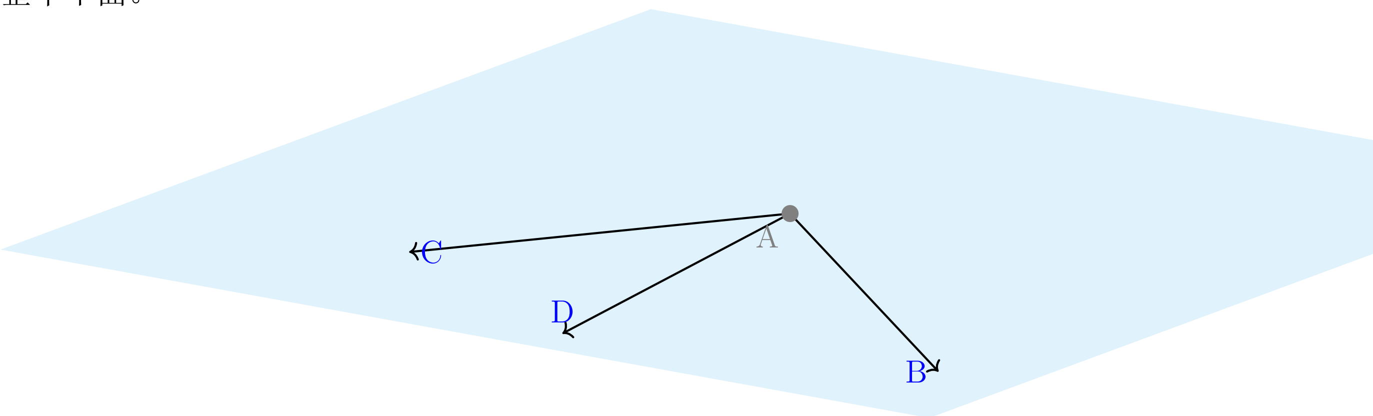
由向量组 S 张成的全体线性组合形成的子空间记作：$span_F(S)$（或 $L(S)$，$\langle S \rangle$）。特别地，如果 S 不可数，我们记 $span_F(S)$ 为由 S 的有限子集张成的全体向量的集合

我们不考虑不可数的向量组张成的线性组合，因为不可数的向量的求和的定义通常是不良好的。

此后除非特别说明，我们默认我们所说的向量组指的是至多可数的向量组。

1.2.2 向量组的线性相关性和线性无关性

我们观察到一个现象：向量组张成线性子空间时，并非每一个向量都有贡献，有些向量是不必要的。就像下图中，尽管三个向量张成了整个平面，但是其实任取其中之二，就足以张成整个平面。



我们会自然地认为：如果每一个向量都和其他向量的“方向”不一样，就不会有不必要的向量，或者说，不应该可以在赋予非零系数时，张成零向量

此时，向量组被称为是“线性无关的”。

定义 1.2.3: 线性无关的向量组

向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 如果满足：

$\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x = \mathbf{0} \Rightarrow \forall x \in A, k_x = 0$
那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个线性无关的向量组

如果一个向量组不是线性无关的，那么我们称它是线性相关的，我们可以写出以下定义

定义 1.2.4: 线性相关的向量组

向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 如果满足：

存在不全为零的一组系数 $k_x, x \in A$，使得 $\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x = \mathbf{0}$

那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个线性相关关的向量组

1.2.3 线性相关和线性无关的性质

1. 单个向量当且仅当它是零向量是线性相关

   命题 1.2.1. α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$

   证明： 先证充分性，如果 α 线性相关，那么 $\exists k \in F, k \neq 0, k\alpha = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$

   必要性是显然的 □

2. 如果一个部分组线性相关，整个向量组也是线性相关的

   命题 1.2.2. 如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个向量组，它的一个部分组 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}, B \subseteq A$ 线性相关，那么 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 也是线性相关的

   证明： 因为 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}$ 线性相关，所以存在不全为零的系数 $k_x, x \in B$，使得 $\sum\limits_{x\in B} k_x\alpha_x = \mathbf{0}$
   我们可以将 k_x 扩展到 A 上，令 $k_x = 0, x \in A - B$，那么 $\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x = \sum\limits_{x\in B} k_x\alpha_x = \mathbf{0}$，所以 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关 □

   反过来，我们可以推论出，线性无关向量组的任意部分组也是线性无关的

   推论 1.2.1: 线性无关向量组的任意部分组都线性无关

   若向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，那么它的任意一个部分组 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}, B \subseteq A$ 也是线性无关的

证明: 如果并非如此，那么至少有一个部分组线性相关，那么按照命题，整个向量组线性相关，这与假设矛盾，所以命题得证 □

因此，一个显然的事实是，一个包含零向量的向量组是一定线性相关的

命题 1.2.3. 如果 $\mathbf{0} \in \{\alpha_x \in V | x \in A\}$，那么 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关

证明: 显然 □

3. 向量组线性相关的充要条件是：存在一个向量可以由其他向量线性表出

命题 1.2.4. 向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组中存在一个向量可以由其他向量线性表出

证明: 先证充分性。如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关,那么存在不全为零的系数 $k_x, x \in A$，使得 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x = \mathbf{0}$

取其中任意一个不为零的系数 $k_a \neq 0$，那么有 $\alpha_a = -\frac{1}{k_a} \sum\limits_{x \in A - \{a\}} k_x \alpha_x$，充分性得证

接下来证明必要性，如果 $\alpha_a = \sum\limits_{x \in A - \{a\}} k_x \alpha_x$，那么我们只需令 $k_a = -1$

那么就有 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x = \mathbf{0}$ □

4. 能唯一地表出一个向量的向量组线性无关

命题 1.2.5. $\beta \in V$ 可以被 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 唯一地线性表出 $\Leftrightarrow \{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关

证明: 先证充分性。

这其实是显然的,因为如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关,那么有一个线性组合 $\sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x = \mathbf{0}$ 并且 k_x 不全为零

假设 $\beta = \sum\limits_{x \in A} l_x \alpha_x$，那么也有 $\sum\limits_{x \in A} (k_x + l_x) \alpha_x$，这与假设矛盾

再证必要性。

不妨假设 $\beta = \sum\limits_{x \in A} l_x \alpha_x = \sum\limits_{x \in A} k_x \alpha_x \exists x \in A, k_x \neq l_x$

那么 $\sum\limits_{x \in A} (l_x - k_x) \alpha_x = \mathbf{0}$，又因为 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，所以 $l_x - k_x = 0$。因此表出方式是唯一的，命题得证 □

5. 向线性无关向量组中加入一个向量，如果变得线性相关，那么这个向量可以由其他向量线性表出

命题 1.2.6. 如果 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，$\{\beta, \alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关
那么 β 可由 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性表出

证明： 因为 $\{\beta, \alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关，所以存在不全为零的系数 $k_x, l \in F, x \in A$，使得 $\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x + l\beta = \mathbf{0}$

我们只需证 $l \neq 0$。我们不妨假设 $l = 0$

那么 $\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x = \mathbf{0}$。但是 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性无关，所以 $\forall x \in A, k_x = 0$，这与系数不全为零的假设矛盾

那么有 $l \neq 0$，于是 $\beta = -\frac{1}{l}\sum\limits_{x\in A} k_x\alpha_x$，命题得证 □

1.3 极大线性无关向量组、向量组的秩

前面我们讨论了线性无关向量组，它可以说是“所有元素都有贡献”的，接下来我们讨论，如果把一个向量集剔除至恰好包含所有“有贡献”的向量，这种向量组有什么性质

我们的一个想法是，如果剔除至向量组本身依旧线性无关，但是加入任意向量就变得线性相关，那么这个向量组就是我们想要的“极大线性无关向量组”

1.3.1 极大线性无关向量组

定义 1.3.1: 极大线性无关向量组

设 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 是一个向量组

如果它的一个部分组 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}, B \subseteq A$ 线性无关，并且 $\forall \beta \in V, \{\beta, \alpha_x | x \in B\}$ 线性相关

那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in B\}$ 是 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 的一个极大线性无关向量组

我们直观地认为，每一个极大线性无关向量组应该具备相同的元素数（或势），就像在三维空间中，我们可以选取不同的坐标系，但是每个坐标系都恰好三个坐标轴

1.3.2 向量组的等价

我们在向量组上定义以下等价关系：

定义 1.3.2: 向量组的线性表出

如果向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 中的任意向量可由 $\{\beta_x \in V | x \in B\}$ 线性表出

那么我们称 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 可由 $\{\beta_x \in V | x \in B\}$ 线性表出

定义 1.3.3: 向量组的等价

如果向量组 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 可由 $\{\beta_x \in V|x \in B\}$ 线性表出，并且 $\{\beta_x \in V|x \in B\}$ 可由 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 线性表出

那么我们称 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 和 $\{\beta_x \in V|x \in B\}$ 是等价的，记作：$\{\alpha_x \in V|x \in A\} \cong \{\beta_x \in V|x \in B\}$

我们首先验证它的确是一个等价关系

命题 1.3.1. 向量组的等价是一个等价关系

证明: 自反性是显然的，因为向量组中的任意向量 α_x 可以由它自己线性表出；

对称性由定义是显然的；

最后证明传递性，假设 $\{\alpha_x \in V|x \in A\} \cong \{\beta_x \in V|x \in B\}, \{\beta_x \in V|x \in B\} \cong \{\gamma_x \in V|x \in C\}$

设 $\alpha_x = \sum\limits_{y\in B} k_{xy}\beta_y, \beta_y = \sum\limits_{z\in C} l_{yz}\gamma_z$

那么 $\alpha_x = \sum\limits_{y\in B} k_{xy}\left(\sum\limits_{z\in C} l_{yz}\gamma_z\right) = \sum\limits_{y\in B, z\in C} k_{xy}l_{yz}\gamma_z$

因此 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 可由 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 线性表出，同理可证 $\{\gamma_x \in V|x \in C\}$ 可由 $\{\alpha_x \in V|x \in A\}$ 线性表出

所以 $\{\alpha_x \in V|x \in A\} \cong \{\gamma_x \in V|x \in C\}$，传递性得证。于是命题得证 □

接下来讨论一些向量组等价的性质：

1. 任何向量组和它的极大线性无关向量组等价

   命题 1.3.2. 任何向量组和它的极大线性无关向量组等价

   证明: 极大线性无关向量组显然可以由原向量组线性表出；

   而按照极大线性无关向量组的定义，向其中加入任意一个向量，向量组会变得线性相关，于是，原向量组中的任意一个向量都可以由极大线性无关向量组线性表出。命题得证 □

2. 向量组的两个极大线性无关向量组等价

   命题 1.3.3. 向量组的两个极大线性无关向量组等价

   证明: 只需利用上面的性质和等价的传递性即可完成证明。 □

3. 一个向量组如果可以由一个势比它小的向量组线性表出，那么它线性相关 在给出命题及其证明前，我们先证明一个显然的引理

引理 1.3.1

向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 如果线性相关，

那么一定 $\exists k, \text{s.t. } \alpha_k$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ 线性表出，并且 $\text{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n) = \text{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

接下来给出命题

证明： 因为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 线性相关，所以一定 $\exists k_1, \cdots, k_n, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \mathbf{0}$

只需选取满足 $k_i \neq 0$ 的最大的下标 p，那么有 $\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p = \mathbf{0}$

于是 $\alpha_p = -\frac{1}{k_p}\sum\limits_{i=1}^{p-1}\alpha_i$

此时因为 α_p 可由前面的向量线性表出，因此去除其不会对生成的子空间有任何影响，命题得证。 □

命题 1.3.4. 如果向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 可由 $\{\beta_x \in V | x \in B\}$ 线性表出，并且 $Card\ A > Card\ B$

那么 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 线性相关

证明： 先考虑两者都是有限向量组的情况

我们可以证明：如果 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 可由 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 线性表出，并且 $m > n$，那么 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 线性相关

记 $W = \text{span}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$。

我们采取以下方法证明：用 α_i 逐步替换 β_j，但是保持生成的子空间不变。最后，我们一定会发现，β_j 已经被全部替换，但是此时依旧有 α_i 未曾被加入向量组过。这就说明了 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 中有向量可以被其它向量线性表出，即 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 线性相关

也就是说，我们希望构造一系列向量组 $B_0, B_1, \ldots, B_n$，使得对于 $j = 0, 1, \ldots, n$，向量组 B_j 满足：

(a) B_j 的长度为 n。

(b) $\text{span}(B_j) = W$。

(c) B_j 包含向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ 以及从原始向量组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 中剩下的 $n - j$ 个向量。

我们首先取 $B_0 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$

我们如此由 B_{j-1} 迭代出向量组 B_j:

考虑向量组 $\alpha_j \cup B_{j-1}$（并且不失一般性地将 α_j 置于向量组的首位）。由于 $\alpha_j \in W$，所以一定有 $\mathrm{span}(\alpha_j \cup B_{j-1}) = W$

由于 $\mathrm{span}(B_{j-1}) = W$，向量 α_j 在 B_{j-1} 生成的子空间中，因此向量组 $\alpha_j \cup B_{j-1}$ 是线性相关的。

根据前面的引理，线性相关的向量组 $\alpha_j \cup B_{j-1}$ 中存在一个向量，它是其前面向量的线性组合。设这个向量为 w。

如果 $w = \alpha_j$，则 α_j 是空向量组的线性组合，意味着 $\alpha_j = \mathbf{0}$，于是该向量组是线性相关的，证明结束。

接下来考虑 w 是 B_{j-1} 中的一个向量。如果 $w \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}\}$,那么它可以被 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 中的向量线性表出，那么向量组线性相关，证明结束。

因此只需考虑这个向量 w 是 B_{j-1} 中那些来自 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 的向量

由于 w 可以由向量组中前面的向量线性表出，我们可以从 $\alpha_j \cup B_{j-1}$ 中移除 w，得到新的向量组 $B_j = (\alpha_j \cup B_{j-1}) - w$。这个新的向量组 B_j 仍然生成子空间 W

这样，我们就完成了向量组序列 $B_0, B_1, \dots, B_n$ 的构造。

此时，我们只需注意到，$\mathrm{span}(B_n) = \mathrm{span}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = W, \alpha_{n+1} \in W$。于是 α_{n+1} 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，于是 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 线性相关，证明完毕。

最后，我们考虑 $\mathrm{Card}A = \mathbb{N}, \mathrm{Card}B < \mathbb{N}$ 的情况。此时，一定能找到 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 的一个有限部分组线性相关，于是整个向量组就线性相关了。

于是命题得证。 $\square$

4. 向量组的两个极大线性无关向量组等势

命题 1.3.5. 向量组的两个极大线性无关向量组等势

证明： 设有两个极大线性无关向量组 $\{\alpha_x \in V | x \in A\}, \{\beta_x \in V | x \in B\}$

根据前面的性质,他们相互等价,因此可以相互线性表出。所以一定有 Card $A \leqslant$ Card B, Card BCar

那么一定有 Card $A =$ Card B，所以命题得证 $\square$

1.3.3 向量组的秩

在完成了前面的准备工作后，我们可以定义向量组的秩了

定义 1.3.4: 向量组的秩

向量组 $G = \{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 的极大线性无关向量组的势称为向量组的秩，记作：$rank(G)$

我们前面的命题已经保证了，无论如何选取极大线性无关组，它的势都相同，因而秩也是相同的。

接下来讨论它的性质

1.

命题 1.3.6. 向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 线性无关 $\Leftrightarrow rank(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$

证明: 先证充分性，如果向量组线性无关，那么它自身即是自己的一个极大线性无关向量组，所以 $rank(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$

再证必要性。如果 $rank(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = n$，那么它仅有一个极大线性无关向量组，即向量组本身，所以它线性无关，命题得证 □

值得注意的是，这个性质只对有限向量组成立，因为对于可数的向量组，可以存在一个可数的极大线性无关组，但是他的秩依旧和整个向量组一致。

2.

命题 1.3.7. 如果向量组 $A = \{\alpha_x \in V | x \in A\}$ 可由 $B = \{\beta_x \in V | x \in B\}$ 线性表出那么 $rank(A) \leqslant rank(B)$

证明: 选取两者的任意一个极大线性无关向量组 $C \subseteq A, D \subseteq B$

因为 $A \cong C, B \cong D$，所以 C 可由 D 线性表出

由 C 的线性无关性可知，$rank(A) = \mathrm{Card}\ C \leqslant \mathrm{Card}\ D = rank(B)$ □

1.4 基、线性空间的维数

上一节中，我们提出了极大线性无关向量组的概念。

从线性子空间的角度看，极大线性无关组是张成子空间的最小的向量组；

本节中，我们尝试进一步地，让极大线性无关组张成整个线性空间。这样的极大线性无关组的存在性并不是平凡的，因为我们甚至不知道是否存在一个向量组可以张成整个空间

1.4.1 基的定义

我们定义两种不同的基，后续我们会看到为何我们需要两种基

定义 1.4.1: Harmel 基

设 V 是一个线性空间，它的一个子集 $B \subseteq V$ 如果满足：

1. B 的任意有限子集线性无关
2. V 中的任意向量可由 B 的一个有限子集线性表出

那么我们称 B 是 V 的一个 Harmel 基

我们特别规定：$\{\mathbf{0}\}$ 的基是 $\emptyset$

定义 1.4.2: Schauder 基

设 V 是一个线性空间，它的一个子集 $B \subseteq V$ 如果满足：

1. B 线性无关
2. V 中的任意向量可由 B 线性表出

那么我们称 B 是 V 的一个 Schauder 基

我们特别规定：$\{\mathbf{0}\}$ 的基是 $\emptyset$

可以看出来，这两种基的根本区别是：Schauder 基允许无限个向量来逼近一个向量，而 Harmel 基要求向量必须由有限个向量表出

我们接下来将看到这个区别的重要影响：即两种基的存在性是不同的

1.4.2 Harmel 基的存在性

我们将证明：Harmel 基总是存在的

定理 1.4.1: Harmel 基的存在性

设 V 是一个线性空间，那么 V 中一定存在一个 Harmel 基

证明： 记 H 为 V 中所有满足全部有限子集都线性无关的子集的集合。

我们定义 H 上的一个序关系：$A, B \in H, A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B$，显然它的确是一个序，因而 H 成为一个偏序集

接下来证明，对于任意一个 H 中的链 C，$\bigcup\limits_{P\in C} P$ 正是 C 的一个上界

先证明 $\bigcup\limits_{P\in C} P$ 是 H 中的一个元素。

取 $\bigcup\limits_{P\in C} P$ 的一个有限子集 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$

事实上，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 一定属于某个 $K\in C$（因为链是按照相互包含的关系形成的），因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

而 $\forall K\in C, K\leqslant \bigcup_{P\in C} P$ 是显然的。于是 H 中的任意一个链有上界

那么，依据 Zorn 引理，H 中一定存在一个极大元素 B。我们接下来证明，B 是 V 的一个 Harmel 基

首先，由 B 的构造方式，它的任意有限子集线性无关是显然的

我们证明任意一个向量 $\alpha\in V$ 都可以被 B 的有限子集线性表出

如果不然，那么任意的 $K\cup\{\alpha\}\subseteq B\cup\{\alpha\}$，$K\cup\{\alpha\}$ 都是线性无关的（利用命题 1.2.6）

所以 $B\cup\{\alpha\}\in H$，于是，$B\leqslant B\cup\{\alpha\}$，这与 B 是 H 的极大元素矛盾。

于是命题得证。 □

在这个证明中，我们使用了 Zorn 引理，如果我们不承认选择公理，Harmel 基的存在性就不再成立。

事实上，线性空间的 Schauder 基是不一定存在的，但是它的反例非常复杂，此处我们简单讨论一下为何我们不能按照证明 Harmel 基存在性的方式来证明 Schauder 基的存在性

前面的证明中，有一个容易被忽视的地方：为何任意一个链都有上界。在 Harmel 基的定义下，这是可以成立的，因为 Harmel 基要求的是有限子集，从而可以被链上的一个元素包含

但是当考虑 Schauder 基，它要求全体向量一起作用，此时，链的并就不一定有这样的性质了，比如考虑以下例子：

例 1.4.1. 考虑平方可和空间 $l^2=\{(a_1,\cdots,a_n,\cdots)|\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^2<+\infty\}$

并定义其中的度量为：$d\left((a_1,\cdots,a_n,\cdots),(b_1,\cdots,b_n,\cdots)\right)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}$

取它上面的一个向量组 $\{e_i\}, e_n=(0,\cdots,1,\cdots)$，其中 1 处于第 n 个位置

我们构造以下链 $\{S_k\}$：

$S_1=\{e_1\}, S_{n+1}=S_n\cup\{e_{n+1}\}$

证明：$\forall k, S_k$ 线性无关，但是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 线性相关

证明： 首先，$\forall k, S_k$ 线性无关。这是显然的，因为其实 S_k 全部是有限集

设 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2k}, n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

注意到：$\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = \mathbf{0}$

因为：$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in N_+$, s.t.

$d\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \mathbf{0}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n < \varepsilon$

此时系数显然不全为零，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 线性相关 □

所以，论证至此就失效了，我们并不能同样地证明 Schauder 基的存在性。

此后除非特别说明，我们默认我们所说的基指的是 Hamel 基

1.4.3 线性空间的维数

我们常常将基的势称为维数。自然地，因为 Schauder 基并非一直存在，我们一般选取 Hamel 基来定义维数。

但是，目前还有一个问题：我们如何保证选取不同基时，维数依旧不变？也就是说，为何两个基一定等势？

对于有限基，这个问题是容易解决的，但是对于无限基，特别是不可数基，这个问题非常难以解决。接下来，我们将花费大量篇幅论证这一点。

引理 1.4.2: Steinitz 替换引理

设 V 是一个线性空间，$S, T \subseteq V$，并且 S 的任意有限子集线性无关，$V = \mathrm{span}(T)$

那么我们断言：$|S| \leqslant |T|$

证明： 我们希望构造一个映射 $S \ni S \mapsto C_s \subseteq T$，但是此时我们发现我们无从下手。

我们退而求其次，构造 S 的子集和 T 的子集之间的映射，同时用一个偏序集逼近 T

为了保证偏序集的每一个链都有上界（后面我们会发现为何我们采取这样的奇怪构造），我们如下构造

设 $\Omega := \{(C, f) \mid C \subset T,\ f : C \to S$ 单射且$(S - f(C)) \cup C$ 线性无关$\}$.

并在它上面定义序关系：$(C_1, f_1) \preceq (C_2, f_2) \iff C_1 \subset C_2$ 且$f_2|_{C_1} = f_1$

我们先验证 Ω 中的每个链的确有上界

设 $\mathscr{C} = \{(C_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 Ω 中的全序链

设 $C := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha, f := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha$

此处映射的并指的是将全部元素的映射关系一同合并（由 Ω 的定义，此次操作的定义显然是良好的）

那么，$f: C \to S$ 的单射性是显然的；

而因为 $\forall \alpha, (S - f(C)) \cup C_\alpha \subseteq (S - f(C_\alpha) \cup C_\alpha)$ 线性无关，因此 $(S - f(C)) \cup C$ 线性无关。

于是 (C, f) 是链的上界。

故 Ω 满足 Zorn 引理的条件，我们记其极大元为 (C, f)。

我们接下来证明 $S \subset f(C) \cup C$。如果这个成立，我们可以立即用集合的势的性质推出结论。

若不然，那一定可以取 $s \in S - (f(C) \cup C)$

记 $S' := (S - f(C)) \cup C$。因为 (C, f) 是极大元，因此 S' 线性无关，所以 $S' - \{s\}$ 也是线性无关的。

我们说，一定存在一个 $t \in T - C, t \notin \operatorname{span}(S' - \{s\})$

如果不是这样，即 $T - C \subset \operatorname{span}(S - \{s\})$

那么 $s \in \operatorname{span}(T) = \operatorname{span}(T - C) + \operatorname{span}(C) \subset \operatorname{span}(S' - \{s\})$,

那么 s 可由 $S' - s$ 线性表出，那么 S' 就是线性相关的，与 S' 的线性无关性矛盾。

因此可取 $t \in T - C, t \notin \operatorname{span}(S' - \{s\})$

此时，我们定义：$g: C \cup \{t\} \longrightarrow S, \quad g|_C = f,\ g(t) = s$

而 $(S - g(C \cup \{t\})) \cup (C \cup \{t\}) = (S' - \{s\}) \cup \{t\}$ 仍线性无关（因为 $S' - s$ 线性无关且 t 不能被 $S' - s$ 线性表出），

故 $(C \cup \{t\}, g) \in \Omega$，与 (C, f) 极大矛盾。于是 $S \subset f(C) \cup C$

至此，我们可以推出最终的结论了，由 f 单射可知；

$|S| \leqslant |f(C)| + |C| = 2|C| \leqslant 2|T|$. □

进而我们知道，线性空间的两个基是等势的。

引理 1.4.3: 线性空间的两个基等势

设 V 是一个线性空间，B_1, B_2 是 V 的两个基。

那么：$|B_1| = |B_2|$

证明: 这是显然的，因为 B_1, B_2 均满足有限子集线性无关和张成 V

所以一定有 $|B_1| \leqslant |B_2|, |B_2| \leqslant |B_1|$，于是有 $|B_1| = |B_2|$，命题得证 □

证明了这个引理后，我们就可以给出维数的定义了

定义 1.4.3: 线性空间的维数

设 V 是一个 F 上的线性空间，B 是 V 的一个 Hamel 基

我们定义：

$$dim_F V = \text{Card } B \tag{1.1}$$

称为 V 的维数，简记作 $dimV$

如果 $dim_F V < +\infty$，我们称 V 是一个有限维线性空间，反之称为无限维线性空间

可以看出来，线性空间的维数不一定可数。

1.4.4 线性空间的维数的性质

现在讨论一些维数的性质

1.

命题 1.4.1. 设 V 是一个线性空间，集合 $S \subseteq V$ 如果 $|S| > dimV$

那么 S 至少有一个有限子集线性相关。

证明: 这其实是前面的 Steinitz 替换引理的直接结论

任取 V 的一个基 B，由基的定义和引理可知，如果 S 线性无关，那么一定有 $|S| \leqslant |B|$，与前提矛盾。

于是命题得证。 □

2.

1.5 线性子空间的直和

1.6 线性空间的同构

1.7 商空间

1.8 对偶空间