数学分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 2 月 23 日

前言标题

前言内容

2025 年 2 月 23 日

目录

第一章　一些通用的数学概念和记号

1.1　逻辑符号

第二章　一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

2.1　逐点收敛性和一致收敛性

2.1.1　逐点收敛性

定义 2.1.1: 逐点收敛性

考虑函数列 $f_n : X \to \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$，$\{f_n(x), n \in\}$ 收敛，则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 称为极限函数，同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

第三章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

3.1　实数的等价定义

第二章提及的实数公理定义了实数；但是，其实还有一些构造性方法可以定义实数。戴德金分割和柯西序列是其中的两个。

首先，我们要先构造出自然数集，进而构造有理数集。

3.1.1　Peano 公理，自然数集

1. 自然数集的定义

定义 3.1.1: 自然数集的 Peano 公理

存在一个运算 $*:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_+$，称为后继，满足以下性质：

① 存在一个元素 0，$0\in\mathbb{N}$

② $\forall a\in\mathbb{N}, a^*\neq 0$

③ 如果 $a\neq b$, 那么 $a^*\neq b^*$

这个集合 $\mathbb{N}$ 称为自然数集，$\mathbb{N}_+$ 称为正整数集。

可以看出来，Peano 公理与实数公理不同，是借助后继运算而不是加法和乘法。不过，接下来我们将递归地定义加法和乘法，并定义自然数的序。

我们按照之前的常用记号，记 $0^*=1, 1^*=2, 2^*=3,\cdots$

2. 加法

定义 3.1.2: 自然数的加法

我们定义运算 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，称为加法，满足以下性质：

$a^* + b = (a+b)^*$

特别地，我们定义 $0 + b = b$

我们首先验证此处定义的加法是否依旧具有交换律和结合律

我们首先证明几个引理。

引理 3.1.1

$n + 0 = n$

证明： 对 n 使用数学归纳法：首先，当 $n = 0, 0 + 0 = 0$ 依定义是成立的。

接下来假设 $n + 0 = n$，那么，$n^* + 0 = (n+0)^* = n^*$，依归纳原理，命题得证。 □

引理 3.1.2

$n + m^* = (n+m)^*$

证明： 固定 m，对 n 作数学归纳法：

首先，当 $n = 0$，$0 + m^* = m^* = (0+m)^*$

现在假设 $n + m^* = (n+m)^*$

那么，$n^* + m^* = (n^* + m)^*$

这里可以将 n^* 视为一个整体，加上 m 的后继，于是命题得证。 □

于是，我们证明了自然数加法的交换律：

命题 3.1.1. $n + m = m + n$

证明： 固定 n，对 m 作数学归纳法。

首先，当 $m = 0$，$n + 0 = 0 + n$，命题成立。

现在假设 $n + m = m + n$，我们只需证明 $n + m^* = m^* + n$，而这是已经证明的了。

但是，我们已经知道：$n + m^* = (n+m)^*, m^* + n = (m+n)^*$，而且我们已经假设 $n + m = m + n$，于是命题得证。 □

在证明过程中可以看出以下推论：

推论 3.1.3

$n + m^* = n^* + m$

于是有以下推论：

推论 3.1.4

$n^* = n + 1$

证明： 在上面的推论中代入 $m = 0$

$n + 0^* = n^* + 0$

$\Rightarrow n + 1 = n^*$ □

此后，我们不再使用 n^* 的记号，而是用 $n + 1$ 代替。

命题 3.1.2. $(a + b) + c = a + (b + c)$

证明： 固定 a, c，对 b 作数学归纳法。

当 $b = 0$，$(a + 0) + c = a + c = a + (0 + c)$，命题成立。

现在假设 $(a + b) + c = a + (b + c)$

那么，$(a + (b + 1)) + c$

$= ((a + b) + 1) + c = (a + b + c) + 1$

$= a + ((b + c) + 1) = a + ((b + 1) + c)$，命题得证。 □

从此以后，我们就可以使用形如 $a + b + c$ 的符号了，因为我们已经证明了这种求和在不同顺序下有相同的结果。

至此，我们证明了加法在自然数集上的交换律和结合律。

我们在证明一个显然的命题。

命题 3.1.3. $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

证明： 对 c 作数学归纳法：

当 $c = 0$，$a + 0 = a, b + 0 = b$，所以命题显然成立。

现在假设 $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

那么 $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c \Leftrightarrow (a + c) + 1 = (b + c) + 1 \Leftrightarrow a + (c + 1) = b + (c + 1)$，于是命题得证。 □

3. 乘法

定义 3.1.3: 自然数的乘法

们定义运算 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，称为乘法，满足以下性质：

$a \cdot (b+1) = a \cdot b + a$

并且特别定义：$a \cdot 0 = 0$

我们仿照加法，先证明几个引理。

引理 3.1.5

$0 \cdot a = 0$

证明： 对 a 作数学归纳法：

当 $a = 0$，$0 \cdot 0 = 0$

现在假设 $0 \cdot a = 0$，那么：$0 \cdot (a+1) = 0 \cdot a + 0 = 0$，命题得证 □

引理 3.1.6

$(b+1) \cdot a = b \cdot a + a$

证明： 固定 b，对 a 作数学归纳法：

当 $a = 0$，$(b+1) \cdot 0 = 0 = b \cdot 0 + 0$

现在假设 $(b+1) \cdot a = b \cdot a + a$

那么，$(b+1) \cdot (a+1) = (b+1) \cdot a + (b+1)$

$= b \cdot a + a + (b+1) = b \cdot a + b + (a+1)$

$= b \cdot a + a + (b+1) = b \cdot (a+1) + (a+1)$，命题得证。 □

接下来证明交换律

命题 3.1.4. $a \cdot b = b \cdot a$

证明： 固定 a，对 b 作数学归纳法。

当 $b = 0$，$a \cdot 0 = 0 \cdot a$，命题成立。

现在假设 $a \cdot b = b \cdot a$，我们欲证 $a \cdot (b+1) = (b+1) \cdot a$

但是我们知道：$a \cdot (b+1) = a \cdot b + a, (b+1) \cdot a = b \cdot a + a$，并且我们已经假设 $a \cdot b = b \cdot a$，于是命题成立。 □

于是有以下推论：

推论 3.1.7

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

证明： $a \cdot 1 = a \cdot (0+1) = a \cdot 0 + a = a$，再结合交换律即得证。 □

这个推论说明：我们利用 Peano 公理定义的 1 依旧是对乘法的单位元，与我们在实数公理下定义的 1 一致。

接下来证明分配律。

命题 3.1.5. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

证明： 固定 a 和 b，对 c 作数学归纳法。

当 $c = 0$，$a \cdot (b+0) = a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0$，命题成立。

现在假设 $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

那么，$a \cdot (b+(c+1)) = a \cdot ((b+c)+1)$

$= a \cdot (b+c) + a = a \cdot b + a \cdot c + a = a \cdot b + a \cdot (c+1)$，于是命题得证。 □

最后，我们证明结合律。

命题 3.1.6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

证明： 固定 a, b，对 c 作数学归纳法：

当 $c = 0$，$a \cdot (b \cdot 0) = a \cdot 0 = 0 = (a \cdot b) \cdot 0$，命题成立

现在假设 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

那么，$a \cdot (b \cdot (c+1)) = a \cdot (b \cdot c + b)$

$= a \cdot (b \cdot c) + a \cdot b = (a \cdot b) \cdot c + a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (c+1)$，命题得证。 □

至此，我们证明了自然数集上关于加法、乘法、加法与乘法联系的公理。

4. 序

定义 3.1.4: 自然数集上的序

我们定义：$\mathbb{N}$ 上存在一个关系 $\geqslant$，称为大于等于，满足以下性质：

$a \geqslant b$，当且仅当 $\exists p \in \mathbb{N}, a = b + p$

如果 $a \geqslant b$，我们又称 $b \leqslant a$，如此定义的关系 $\leqslant$ 称为小于等于;

如果 $a \geqslant b$，并且 $a \neq b$，那么我们称 $a > b$，如此定义的关系 $>$ 称为大于；

如果 $a \leqslant b$，并且 $a \neq b$，那么我们称 $a < b$，如此定义的关系 $<$ 称为小于

我们首先验证这里的序的确是序公理中的序，即验证自反性、传递性、反对称性。

命题 3.1.7. $\forall a \in \mathbb{N}, a \geqslant a$

证明: 注意到，$a = a + 0, 0 \in \mathbb{N}$ □

命题 3.1.8. $a \geqslant b, b \geqslant c \Rightarrow a \geqslant c$

证明: $a \geqslant b, b \geqslant c \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{N}, a = b + s, b = c + t$

即 $a = c + s + t$，而 $s + t \in \mathbb{N}$ □

命题 3.1.9. $a \geqslant b, b \geqslant a \Rightarrow a = b$

证明: $a \geqslant b, b \geqslant a \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{N}, a = b + s, b = a + t$

$\Rightarrow s + t = 0$，现在假设 $s \neq 0$，那么 $\exists u \in \mathbb{N}, u + 1 = s$

所以 $(u + 1) + t = 0 \Rightarrow (u + t) + 1 = 0$，但是按照公理，应该没有元素的后继为 0。

所以我们有 $s = 0$，此时 $a = b + 0 = b$。 □

接下来我们证明序与加法联系的公理在现在依旧是成立的：

命题 3.1.10. $a \geqslant b \Rightarrow \forall s \in \mathbb{N}, a + s \geqslant b + s$

证明: $a \geqslant b \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}, a = b + t$

只需证明，$\forall s \in \mathbb{N} a + s = b + t + s$ 成立，但是按照之前我们证明的命题，这是显然的。 □

3.1.2 整数集

1. 整数集的定义

定义 3.1.5: 整数集

我们将形如 $a—b$ 的数对称为整数，其中 $a, b \in \mathbb{N}$。

并特别规定：$a—b = c—d \Leftrightarrow a + d = b + c$

集合 $\mathbb{Z} = \{a—b | a, b \in \mathbb{N}\}$ 称为整数集

我们还希望，整数集是自然数集的一个补充，因此有以下补充定义：

定义 3.1.6: 自然数集和整数集

我们定义：$a—0 = a, a \in \mathbb{N}$

这个定义是良好的，因为我们容易知道，$\{a—0 | a \in \mathbb{N}\}$ 与 $\mathbb{N}$ 同构。

整数集构造的想法是很自然的：整数集在直观的认知下是自然数集及其“相反数”的并，因此我们希望我们定义的整数可以分解为两个自然数的“差”。

接下来我们沿着这个想法，定义出我们直观上的加、乘、负、减这三种运算。

2. 整数的加法

定义 3.1.7: 整数的加法

我们定义：

$(a—b) + (c—d) := (a + c)—(b + d)$

我们先验证加法的定义是良好的，即如果按照整数的定义替换整数的形式，加法的结果不会改变。

命题 3.1.11. *如果* $(a_1—b_1) = (a_2—b_2)$，*那么一定有*

$(a_1—b_1) + (c—d) = (a_2—b_2) + (c—d), (c—d) + (a_1—b_1) = (c—d) + (a_2—b_2)$

证明： 先证第一条。$(a_1—b_1) + (c—d) = (a_1 + c)—(b_1 + d), (a_2—b_2) + (c—d) = (a_2 + c)—(b_2 + d)$，

于是只需证 $a_1 + c + b_2 + d = b_1 + d + a_2 + c$，但这按照整数相等的定义是显然的。

同理可证第二条。 □

在定义了整数的加法后，我们还需验证，在加法的关系下 $a—0$ 依旧和 a 是等同的。

命题 3.1.12. $(a—0) + (b—0) = a + b = (a + b)—0$

这个命题是显然的。

接下来我们验证之前自然数的运算现在依旧是成立的。

命题 3.1.13. $a+b=b+a$

证明: 设 $a=(a_1—a_2), b=(b_1—b_2)$,

于是，$a+b=(a_1+b_1—a_2+b_2)$

$b+a=(b_1+a_1—b_2+a_2)$，但是我们已经在自然数集中证明了交换律。 □

命题 3.1.14. $(a+b)+c=a+(b+c)$

证明: 设 $a=(a_1—a_2), b=(b_1—b_2), c=(c_1—c_2)$,

于是，$(a+b)+c=((a_1+b_1)+c_1—(a_2+b_2)+c_2)$

$a+(b+c)=(a_1+(b_1+c_1)—a_2+(b_2+c_2))$，但是我们已经在自然数集中证明了结合律。 □

命题 3.1.15. $x+0=0+x=x$

证明: 因为已经证明交换律，所以只需证明 $x+0=x$，但是这是显然的。 □

3. 整数的乘法

定义 3.1.8: 整数的乘法

我们定义:

$(a—b)\cdot(c—d):=(a\cdot c+b\cdot d)—(a\cdot d+b\cdot c)$

同样地，我们先验证乘法的定义是良好的。

命题 3.1.16. 如果 $(a_1—b_1)=(a_2—b_2)$,

那么 $(a_1—b_1)\cdot(c—d)=(a_2—b_2)\cdot(c—d), (c—d)\cdot(a_1—b_1)=(c—d)\cdot(a_2—b_2)$

证明: 先证第一条。

$(a_1—b_1)\cdot(c—d)=(a_1\cdot c+b_1\cdot d)—(a_1\cdot d+b_1\cdot c)$

$(a_2—b_2)\cdot(c—d)=(a_2\cdot c+b_2\cdot d)—(a_2\cdot d+b_2\cdot c)$

那么只需证明: $a_1\cdot c+b_1\cdot d+a_2\cdot d+b_2\cdot c=a_1\cdot d+b_1\cdot c+a_2\cdot c+b_2\cdot d$

$\Leftrightarrow (a_1+b_2)\cdot c+(a_2+b_1)\cdot d=(b_1+a_2)\cdot c+(a_1+b_2)\cdot d$，但是按照整数相等的定义这是显然的。

同理可证第二条。 □

4. 整数的负

定义 3.1.9: 整数的负

我们定义整数 $(a—b)$ 的负为：

$-(a—b) := (b—a)$，记作 $-(a—b)$

3.1.3 有理数集

3.1.4 戴德金分割

3.1.5 柯西序列

3.2 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\infty$ 的比较，皮亚诺曲线

3.2.1 约定的记号

本节中引入以下全新的记号：

1. X^Y

定义 3.2.1

$X^Y := \{f | f : Y \to X\}$

即 Y 到 X 的全体映射的集合

2. X^∞

定义 3.2.2

$X^\infty := \{\{a_n\} | a_i \in X\}$

即元素为 X 中元素的全体点列的集合

可见，X^∞ 就是 X^Y 在 $Y = \mathbb{N}$ 下的特例，也就是 $X^\infty = X^{\mathbb{N}}$

3. $\mathcal{P}(A)$

定义 3.2.3

$\mathcal{P}(A)=\{V|V\subseteq A\}$

即 A 的全体子集组成的集合

3.2.2 $\mathbb{R},\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\infty$ 的比较

我们将证明：$Card\mathbb{R}=Card\mathbb{R}^m=Card\mathbb{R}^\infty$

我们的证明过程会按照此交换图顺序。

$$
\begin{tikzcd}
 & & (0,1) \arrow[d, "Lemma2"] & & \\
 & \mathbb{R} \arrow[ur, "Lemma1"] \arrow[dl, "Proposition2"'] \arrow[d, leftrightarrow, "Proposition1"] & {[0,1]} \arrow[r, "Lemma3"'] & \{0,1\}^\infty \arrow[r, "Lemma4"] & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \arrow[d, "Lemma5"] \\
\mathbb{R}^m & \mathbb{R}^\infty \arrow[l, "Proposition2"'] & {[0,1]^\infty} \arrow[l, "Lemma6"'] & (\{0,1\}^\infty)^\infty \arrow[l, "Lemma6"'] & \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \arrow[l, "Lemma4"']
\end{tikzcd}
$$

引理 3.2.1: 引理 1

$Card\mathbb{R}=Card(0,1)$

证明： 考虑以下映射 $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$

这个函数显然单调增，所以是单射；满射通过单调性和 $\lim\limits_{x\to-\infty}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}=1$ 可知 □

引理 3.2.2: 引理 2

$Card(0,1)=Card[0,1]$

证明： 考虑以下 $[0,1]\to(0,1)$ 映射 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},x=0\\ \frac{1}{3},x=1\\ \frac{1}{n+2},x=\frac{1}{n},n>1\\ x,x\neq0,x\neq1,x\neq\frac{1}{n},n>1\end{cases}$

显然，这个映射是一个 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的双射 □

这个引理证明中映射的构造采取了“希尔伯特的旅馆”的想法。这个想法是说：

如果有一个具有可数个房间并且已经满了的旅馆，我们希望在不赶走任意一个顾客的前提下，将一个新的顾客安排进旅馆。我们可以让每个顾客都来到自己的下一个房间，而将新的顾客安排在第一个房间。

用数学语言描述就是：如果有一个点列 $\{a_n\}$, 我们希望在不舍弃任何一项下添加 m 项，我们只需要将原来的 a_i 迁移到 a_{i+m}，而把新的项添加到现在空缺的前 m 项。

在证明过程中，我们采取的是点列 $\{\frac{1}{n}, n>1\}$，将 $0,1$ 迁移到这个序列内。

引理 3.2.3: 引理 3

$Card[0,1]=Card\{0,1\}^\infty$

证明： 从第一章中关于进制的定理可知，$\forall a\in[0,1],\exists\{a_n\},a_i\in\{0,1\}$，使得 $a=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$，且这一对应关系是双射的。 □

引理 3.2.4: 引理 4

$Card\{0,1\}^S=Card\mathcal{P}(S)$

证明： 定义示性函数 $\chi_A:S\to\{0,1\}$。

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ \\ 0, x\in S-A\end{cases}$$

并定义映射 $\varphi:\mathcal{P}(S)\to\{0,1\}^S$

$\varphi(A):=\chi_A$

接下来证明 φ 是双射：

φ 的单射性是显然的；而对于满射性，$\forall f\in\{0,1\}^S$

令 $A=\{x|f(x)=1\}$，那么就有 $\chi_A=f$，双射性得证 □

引理 3.2.5: 引理 5

合 A,B 若有 $CardA=CardB$，那么有 $Card\mathcal{P}(A)=Card\mathcal{P}(B)$

证明： 设 $CardA=CardB$，且 $A\to B$ 的双射是 f

那么我们构造：$g:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B)$

$g(X):=\{b|b=f(a),a\in X\}$

接下来证明 g 是双射

先证明单射性。设 $X\neq Y$, 所以一定 $\exists a$，只处于 X,Y 这两个集合中的一个

因为 f 是一个双射,所以 $f(a)$ 只处于 $g(X),g(Y)$ 这两个集合中的一个,所以 $g(X)\neq g(Y)$，单射性得证。

对于满射性，由 f 的满射性可知这是显然的。 □

引理 3.2.6: 引理 6

果 $CardX = CardY$，那么 $CardX^Z = CardY^Z$

证明: 设 $X \to Y$ 的双射为 f

那么定义映射 $\varphi : X^Z \to Y^Z$

$\varphi(g) = f \circ g$

φ 的双射性是显然的。 □

命题 3.2.1. $Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^\infty$

证明: 由引理 1,2,3 可知，$Card\mathbb{R} = Card\{0,1\}^\infty$

接下来,只需注意到两个事实:$Card(\{0,1\}^\infty)^\infty = Card\{0,1\}^\mathbb{Q}$,因为我们知道 $Card\mathbb{N}^2 = Card\mathbb{Q}$，

并且注意到 $Card\mathbb{N} = Card\mathbb{Q}$，再利用引理 4,5，即得 $Card\mathbb{R} = Card\left(\{0,1\}^\infty\right)^\infty$

接下来，我们利用引理 3 的结果：$Card[0,1] = Card\{0,1\}^\infty$，并且使用引理 6，我们即得：

$Card\mathbb{R} = Card[0,1]^\infty$

随后，再次利用引理 6, 以及引理 1,2 得到的结果：$Card\mathbb{R} = Card[0,1]$

我们至此就得到我们所需结果：$Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^\infty$ □

命题 3.2.2. $Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^m$

证明: 设 $R_1 = \{(a,0,\cdots)|a \in \mathbb{R}\}$

$R_2 = \{(a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots)|a_i \in \mathbb{R}\}$

显然，$R_1 \subset R_2 \subset \mathbb{R}^\infty$

但是 $CardR_1 = Card\mathbb{R}, CardR_2 = Card\mathbb{R}^m, Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^\infty$, 那么一定有 $Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^m$ □

3.2.3 皮亚诺曲线

3.3 伯努利数与欧拉数

在对泰勒公式的研究中，我们推到了标准指数函数 $\exp x$ 的级数展开，它的系数是极其容易推导的。

但是，如果我们考察其倒数，那么就变得相当难以推导：因为它的高阶导数一阶比一阶难以求得。

这一附录中我们反其道而行之，先假设系数，再利用其与指数函数乘积求出系数，从而提出了两个重要的数列：伯努利数和欧拉数。

特别地，由于三角函数的分析定义正是利用的指数函数，利用伯努利数和欧拉数可以求出很多之前难以求出的展开式。

3.3.1 伯努利数

1. 定义

定义 3.3.1: 伯努利数的级数定义

符合以下级数展开的数列称为伯努利数：

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \tag{3.1}$$

以上的定义十分简洁，但是难以计算。但是显然，借助 Taylor 级数我们可以推导出等价的递归定义：

定义 3.3.2: 伯努利数的递归定义

$$B_0=1, B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \tag{3.2}$$

证明： 利用级数定义中的展开式反推：

$\because (e^z-1)\left(\frac{z}{e^z-1}\right)=z$

$\therefore z\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}z+\ldots\cdots+\frac{1}{(n+1)!}z^n+R_1(z)\right]\left[B_0+B_1z+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+R_2(z)\right]=z$

对比常数项可知：$B_0=1$ 进一步，如果 n 大于 1，对比系数可得：$B_0\cdot\frac{1}{(n+1)!}+B_1\cdot\frac{1}{n!}+\cdots+B_k\cdot\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\cdots\frac{B_n}{n!}\cdot\frac{1}{1!}=0$

左右同乘 $(n+1)!$，得：$B_0\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}+B_1\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot 1!}+\cdots+B_k\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k)!}+\cdots+B_n\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot 1!}=0$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k=-(n+1)B_n$

$\Rightarrow B_n=-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$

□

2. 性质

① 除 1 外，所有奇数项的伯努利数为 0

命题 3.3.1. $B_{2n+1}=\begin{cases}0,n\geqslant 1\\ -\frac{1}{2},n=0\end{cases}$

证明： 由前面的伯努利数定义可知，$f(z)=\frac{z}{e^z-1}$ 在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析

考虑函数 $\phi(x)=\frac{f(z)}{z^{2n+2}}$ 的洛朗展开

$\phi(z)=\frac{B_0}{0!}z^{-2n-2}+\cdots+\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-1}+\cdots$

$\Rightarrow Res_{z=0}\phi(z)=\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow\oint_C\phi(z)\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$, 其中 $C=\{|z|=1\}$

记上述积分为 I，做代换 $z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$

$I=\int_0^{2\pi}ie^{i\theta}\frac{e^{i\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}e^{-(2n+2)i\theta}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_\pi^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_\pi^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta+2n\pi i}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

作代换 $\alpha=\theta-\pi$，并利用标准指数函数在虚轴的半个周期上变号，得到：

$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\alpha+2n\pi i}}{e^{-e^{i\alpha}}-1}\mathrm{d}\alpha$

$=\int_0^{\pi}-e^{-2ni\theta}=\begin{cases}0,n\geqslant 0\\ -\pi,n=0\end{cases}$

$\Rightarrow B_{2n+1}=\begin{cases}0,n\geqslant 1\\ -\frac{1}{2},n=0\end{cases}$ □

②

命题 3.3.2. $B_n = -n\zeta(1-n), n \geqslant 1$

证明: 黎曼 Zeta 函数的定义为;

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, Re(s) > 1 \\ \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}, 0 < Re(s) \leqslant 1 \\ 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s), Re(s) \leqslant 0 \end{cases}$$

解析延拓过程可以参考《复分析笔记》

先考虑 $n = 2k+1, k > 0$ 的情形，此时依 Zeta 函数定义，$\zeta(-2k) = 0$，因为 $\sin(n\pi) = 0$，命题成立。

而当 $n = 1$，$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, B_1 = -\frac{1}{2}$，命题成立。

接下来考虑 n 为偶数的情形：

我们欲证 $B_{2n} = -2n\zeta(1-2n)$

$\Rightarrow B_{2n} = -2n2^{1-2n}\pi^{-2n} \sin\left(\frac{\pi(1-2n)}{2}\right) \Gamma(2n)\zeta(2n)$

考虑函数 $f_n(z) = \frac{z^{-2n}}{e^z-1}$

$= z^{-2n-1} \frac{z}{e^z-1}$

$= z^{-2n-1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^{k-2n-1}$

对比-1 阶系数，得：

$Res_{z=0} f_n(z) = \frac{B_{2n}}{(2n)!}$

再考虑 $z = 2\pi ki$ 处的留数

$Res_{z=2\pi ki} f_n(z) = \lim\limits_{z \to 2\pi ni} \frac{z^{-2n}}{e^z-1}(z - 2\pi ki)$

$= (2\pi ki)^{-2n} = (-1)^n (2\pi k)^{-2n}$

记 $C_N = \{|z| = (2N+1)\pi\}$，$G_N$ 为 C_0, C_N 围成的区域

$\therefore \int_{\partial G_N} f_n(z) = \int_{C_N} f_n(z) - \int_{C_0} f_n(z)$

而 $\int_{\partial G_N} = 2\pi i \sum\limits_{k=-N}^{N} Res_{z=2\pi ki} f_n(z)$

$= 2\pi i \sum\limits_{k=-N}^{N} (-1)^n (2\pi k)^{-2n}$

$= 4\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} (-1)^n (2\pi k)^{-2n}$

接下来考察 $\int_{C_N} f_n(z)$，因为在 C_N 上 $|\frac{1}{e^z-1}|$ 有界，而：

$\int_{C_N} z^{-2n} = \int_{C_N} ie^{i\theta} N^{-2n} = O(N^{-2n})$

所以 $\int_{C_N} f_n(z) = O(N^{-2n})$

再接下来考察 $\int_{C_0} f_n(z)$

$\int_{C_0} f_n(z) = 2\pi i Res_{z=0} f_n(z) = \frac{2\pi i B_{2n}}{(2n)!}$

$\because \int_{\partial G_N} f_n(z) = \int_{C_N} f_n(z) - \int_{C_0} f_n(z)$

$\therefore 4\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} (-1)^n (2\pi k)^{-2n} = O(N^{-2n}) - 2\pi i \frac{2\pi i B_{2n}}{(2n)!}$

取 $N \to +\infty$，那么 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2(-1)^n (2\pi k)^{-2n} = -\frac{B_{2n}}{(2n)!}$

$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} (2\pi k)^{-2n}$

$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$

$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

$\Rightarrow B_{2n} = 2n(-1)^{n+1} 2^{1-2n} \pi^{-2n} \Gamma(2n) \zeta(2n)$

只需注意到，$(-1)^{n+1} = -\sin\left(\frac{(1-2n)\pi}{2}\right)$，那么这一结果就是我们所证的命题。 □

这一证明的关键在于注意到 $\frac{z^{-2n}}{e^z-1}$ 在 0 处的留数与伯努利数有关，而其他奇点处的留数之和与自然数负幂求和有关，从而联系了伯努利数和 Zeta 函数。

③ 伯努利数偶数项相互交错

命题 3.3.3. $B_{4k} < 0, B_{4k+2} > 0, k \geqslant 1$

证明: 我们利用之前命题中的结果 $B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

当 n 分别为 $2k, 2k+1$ 时：

$B_{4k} = (4k)! \frac{2(-1)^{2k+1}}{(2\pi)^{4k}} \zeta(4k) = -(4k)! \frac{2}{(2\pi)^{4k}} \zeta(4k)$

$B_{4k+2} = (4k+2)! \frac{2(-1)^{2k+2}}{(2\pi)^{4k+2}} \zeta(4k+2) = (4k+2)! \frac{2}{(2\pi)^{4k+2}} \zeta(4k+2)$

而 Zeta 函数对于全体正整数取正值，命题得证。 □

④ 从 B_6 开始，伯努利数的绝对值依次递增

命题 3.3.4. $|B_{2k}| < |B_{2k+2}|, k \geqslant 3$

证明: 在之前的命题中，我们证明了：$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

$\therefore |B_{2k}| = (2k)!\frac{2}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)$

$|B_{2k+2}| = (2k+2)!\frac{2}{(2\pi)^{2k+2}}\zeta(2k+2)$

两者作差，$|B_{2k+2}| - |B_{2k}|$

$= 2\frac{(2k+2)!\zeta(2k+2)-(2k)!\zeta(2k)(2\pi)^2}{(2\pi)^{2k+2}}$

因为当 $s > 1, s \in \mathbb{N}_+$ 时，$\zeta(s)$ 单调递减且 $\lim\limits_{s\to\infty}\zeta(s) = 1$

我们计算得 $\zeta(6) = \frac{\pi^2}{945}$，所以可以作估计：$\zeta(2k+2) > 1, \zeta(2k) < \frac{\pi^2}{945}$

$\therefore (2k+2)!\zeta(2k+2) - (2k)!\zeta(2k)(2\pi)^2$

$> (2k+2)! - (2k)! \cdot 4\pi^2\frac{\pi^6}{945}$

$= \left((2k+2)(2k+1) - 4\pi^2\frac{\pi^6}{945}\right)(2k)! > 0$

□

⑤ 自然幂指数和的通式

命题 3.3.5. $S_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}(-1)^i B_i\binom{p+1}{i}n^{p+1-i}$

证明： 明天再说，累了 □

3.3.2 欧拉数

3.4 欧拉-麦克劳林公式

我们直观上会认为，一个连续的级数和应该可以用这一整数区间的积分来大致模拟。一些结果也的确呈现了这个特征，比如以下有关调和级数的命题：

$\sum\limits_{n=1}^{x}\frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t + o(1)$

特别地，其中的余项有 $o(1) \to \varepsilon$,ε 为欧拉常数.

我们对这里的余项做探讨，探究何时可以积分和求和的差值为常数阶，以及这一余项大小如何。

3.4.1 伯努利多项式

1. 定义

定义 3.4.1: 伯努利多项式的级数定义

满足以下级数的函数族 $B_n(x)$ 称为伯努利多项式

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n \tag{3.3}$$

2. 性质

①

命题 3.4.1. $B_n(0)=B_n, B_n(1)=(-1)^n B_n$

证明: 在伯努利多项式的定义中分别代入 $0,1$:

$\frac{z}{e^z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(0)}{n!}$

对比伯努利数的定义即得 $B_n(0)=B_n$

$\frac{ze^z}{e^z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(1)}{n!}z^n$

$\Rightarrow \frac{z}{1-e^{-z}}=\frac{-z}{e^{-z}-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$ □

②

命题 3.4.2. $B_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i x^{n-i}$

证明: 依伯努利数定义, $\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(x)}{k!}z^k$

那么 $\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\frac{z}{e^z-1}e^{xz}$

$=\sum\limits_{i=0}^{\infty}B_i\frac{z^i}{i!}\cdot\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(xz)^j}{j!}$

$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}B_i\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{(xz)^{k-i}}{(k-i)!}\right)$

$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{B_i x^{k-i}}{(k-i)!i!}z^k\right)$

$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{B_i k!}{(k-i)!i!}x^{k-i}\right)z^k$

比较系数即得: $B_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i x^{n-i}$。 □

③

命题 3.4.3. $B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$

证明: 依伯努利数定义: $\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n$

对两侧求对 x 的导数得: $\frac{z^2e^{xz}}{e^z-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{B_n'(x)}{n!}z^n$

此处把求和下限调整为 1 是因为注意到，级数在 $i = 0$ 时为常数，因此此项导数为 0。

两侧同除 z 得：$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} z^{n-1}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B'_{n+1}(x)}{(n+1)!} z^n$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B'_{n+1}(x)}{(n+1) \cdot n!} z^n$

对比系数得：$B_n(x) = \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1}$，于是命题得证。 □

④

命题 3.4.4. $\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x = 0, n \geqslant 1$

证明： 利用上面给出的导数性质：

$\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x = \frac{B_{n+1}(x)}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(1) - B_n(0)\right)$

那么只需要注意到，当 $n \geqslant 2$，如果 n 为偶，按前面的断言有 $B_n(1) = B_n = B_n(0)$；而如果 n 为奇，那么 $B_n(1) = B_n(0) = B_n = 0$，于是命题得证。 □

⑤

命题 3.4.5. $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$

证明： 考虑构造与伯努利多项式生成函数类似的级数：

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(B_n(x+1) - B_n(x)\right) \frac{x^n}{n!}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n(x+1)\frac{x^n}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{x^n}{n!}$

$= \frac{ze^{(x+1)z}}{e^z-1} - \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$

$= \frac{ze^{xz}(e^z-1)}{e^z-1} = ze^{xz}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \frac{z^{n+1}}{n!}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n \frac{z^n}{(n)!}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n \frac{z^n}{(n)!}$，因为此级数的 $n = 0$ 项为 0。

于是对比系数即得证。 □

⑥

命题 3.4.6. $B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$

证明： 考虑以下级数：

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(x)\frac{z^n}{n!}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{(-z)^n}{n!}$

$=\frac{-ze^{-xz}}{e^{-z}-1}$

上下同乘 $-e^z$，$=\frac{ze^{(1-x)z}}{e^z-1}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n(1-x)\frac{z^n}{n!}$，于是命题得证 □

定理 3.4.1: 欧拉-麦克劳林公式

假设 $f(x)$ 无穷阶可导，那么：

$$\sum_{a\le n<b}f(n)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b+(-1)^m\int_a^b\frac{B_m(x)}{m!}f^{(m)}(x)\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

3.5 其他四种三角函数的泰勒/洛朗展开

3.5.1 $\cot x$

借助伯努利数或者 Gamma 函数，分别可以将余切分解为两种形式

定理 3.5.1: 余切函数的洛朗展开

$$\cot x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \tag{3.5}$$

这一展开是 $\cot x$ 的洛朗展开而非泰勒展开，因为 $\cot x\sim\frac{1}{x},x\to 0$，在 0 处不解析

证明： 依余切函数定义：$\cot x=\frac{i(e^{ix}+e^{-ix})}{e^{ix}-e^{-ix}}$

$=i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$

$=i\left(1+\frac{2}{e^{2ix}-1}\right)$ 再利用伯努利数的级数定义：

$\cot x=i+2i\cdot\frac{1}{2ix}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(2ix)^n}{n!}$

$\cot x=i+2i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(2ix)^{n-1}}{n!}$ 因为伯努利数的奇数项只有 $B_1=-\frac{1}{2}$，其余全为 0，故：

$\cot x=i+2i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_2n(2ix)^2n-1}{2n!}-\frac{1}{2}\right)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(i)^{2n}(2x)^{2n-1}}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$$ □

定理 3.5.2: 余切函数的第二种级数展开

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right) \tag{3.6}$$

证明： 利用正弦函数的无穷乘积展开式：

$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

将 πz 移至左侧并取对数，得：

$\ln \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

双侧求导，得：

$\frac{\pi z}{\sin \pi z}\left(\frac{\cos \pi z}{z} - \frac{\sin \pi z}{\pi z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2(1-\frac{z^2}{n^2})}$

进行一些基本运算并对级数内部裂项，得：

$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$

$\Rightarrow \cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi z-\pi n} + \frac{1}{\pi z+\pi n}\right)$

$\Rightarrow \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right)$ □

这一证明的注意力很强，其整体思路是：将 cot 转换为 cos 和 sin 的除法，再利用正弦函数的导数，构造相应的对数除式，而恰好注意到，$\sin z$ 的无穷乘积展开正适合构造对数求和。

3.5.2 $\tan x$

定理 3.5.3: 正切函数的 Taylor 展开

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \tag{3.7}$$

证明： 注意到：$\cot x = -2\cot 2x + \cot x$

因为：$-2\cot 2x + \cot x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x} = \cot x$

$\therefore \cot x = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n B_{2n}(4x)^{2n-1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$

$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n B_{2n}(1-2^{2n})(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}2^{2n}(2^{2n}-1)x^{2n-1}}{(2n)!}$

又当 $n=0$ 时一般项为 0，

$\therefore \cot x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}$ □

证明: 怎么开始套娃了（恼） □

3.6 原函数初等性的判定方法

3.6.1 切比雪夫定理

定理 3.6.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p \mathrm{d}x \tag{3.8}$$

初等的充要条件是：$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p$ 中至少有一个为整数

3.6.2 刘维尔定理

在介绍刘维尔定理前，需要先介绍一些微分代数的概念：

首先我们扩展微分的概念。我们将满足类似乘法、除法微分性质的泛函也称为微分。

先引入微分域及其常数域

1. 微分域

定义 3.6.1: 微分域

一个由函数组成的域 F 及其上的一个算子 $\delta : F \to F$，如果 $\forall f, g \in F$ 有：

$\neg\delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g)$

$\delta(fg) = \delta(f)\cdot g + f\cdot\delta(g)$

那么称 (F, δ) 是一个微分域

容易验证 δ 是线性算子，于是我们有时简记 $\delta(f)$ 为 δf

定义 3.6.2: 微分域的常数域

微分域 (F,δ) 的常数域定义为：

$Con(F,\delta)=\{f\in F|\delta f=0\}$

同时定义域的扩张：

定义 3.6.3: 域的扩张

设 F,K 是两个域，并且 K 是满足 $F\subseteq K$ 且包含 $h\subseteq K$ 的最小域（即 K 是任何满足上述条件的域的子域），记作 $K=F(h)$

作为接下来内容的预备，我们先验证那些显然的微分性质：

命题 3.6.1. $\delta C=0$，其中 C 为常数

证明： 只需要验证 $\delta 1=0$

那么有：$\delta(1\cdot 1)=\delta 1\cdot 1+1\cdot\delta 1=2\delta 1$

于是有 $\delta 1=0$，利用微分的线性即得证。 □

命题 3.6.2. $\delta\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\delta f\cdot g-f\delta g}{g^2}$

证明： 首先推导 $\delta\left(\frac{1}{g}\right)$

$\because\delta 1=\delta\left(g\cdot\frac{1}{g}\right)=0$

$\Rightarrow\delta g\frac{1}{g}+g\delta\left(\frac{1}{g}\right)=0$

$\Rightarrow\delta\left(\frac{1}{g}\right)=-\frac{\delta g}{g^2}$

于是 $\delta\left(\frac{f}{g}\right)=\delta\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)$

$=\delta f\frac{1}{g}-f\frac{\delta g}{g^2}=\frac{\delta f\cdot g-f\delta g}{g^2}$ □

2. 微分域的初等扩张 接下来讨论什么是“初等”的函数。

定义 3.6.4: 微分域的初等扩张

设 $(F,\delta),(K,\delta)$ 是两个微分域，$h\in K$ 并且 $K=F(h)$，那么：

¬ 如果存在 F 中的一个多项式 $p(x)\in F[x]$，有 $p(h)=0$，那么称 h 是 F 的一个代数元素，$K=F(h)$ 是 F 的单代数扩张

如果存在 F 中的一个函数 f，使得 $\delta h=\frac{\delta f}{f}$，那么称 $K=F(h)$ 是 F 的单对数扩张

如果存在 F 中的一个函数 f，使得 $\frac{\delta h}{h}=\delta f$，那么称 $K=F(h)$ 是 F 的单指数扩张。

单对数扩张和单指数扩张统称为单超越扩张，其对应的 h 称为 F 的超越元素；以上三种扩张统称为单初等扩张

有限次初等扩张的复合称为初等扩张

我们也可以在此以另外的方式定义出初等函数：

定义 3.6.5: 初等函数

如果函数 f 处于微分域 $\left(C(x),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 的某个初等扩张中，那么称 f 是一个初等函数

接下来就可以给出刘维尔定理了。

3. 刘维尔定理

定理 3.6.2: 刘维尔定理

$(F,\delta),(K,\delta)$ 是两个微分域，K 是 F 的初等扩张，并且 $Con(F,\delta)=Con(K,\delta)$，且 $\forall f\in F,\exists g\in K,s.t.\delta g=f$

那么一定 $\exists c_1,\cdots,c_n\in Con(F,\delta),u_1,\cdots,u_n,v\in F$，使得

$$g=\sum_{i=1}^{n}c_i\ln(u_i)+v \tag{3.9}$$

3.7 一些超越积分的特殊解法

3.7.1 Direchlet 积分