

数学分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 2 月 2 日

前言标题

前言内容

2025 年 2 月 2 日

目录

第一章 一些通用的数学概念和记号	0
1.1 逻辑符号	0
第二章 一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算	1
2.1 逐点收敛性和一致收敛性	1
2.1.1 逐点收敛性	1
第三章 附录	2
3.1 实数的等价定义	2
3.1.1 Peano 公理, 自然数集	2
3.1.2 有理数集	6
3.1.3 戴德金分割	6
3.1.4 柯西序列	6
3.2 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\infty$ 的比较, 皮亚诺曲线	6
3.2.1 约定的记号	6
3.2.2 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\infty$ 的比较	7
3.2.3 皮亚诺曲线	10
3.3 伯努利数与欧拉数	10
3.3.1 伯努利数	10
3.3.2 欧拉数	14
3.4 欧拉-麦克劳林公式	14
3.4.1 伯努利多项式	15
3.5 其他四种三角函数的泰勒/洛朗展开	15
3.5.1 $\cot x$	15

3.5.2	$\tan x$	17
3.6	原函数初等性的判定方法	17
3.6.1	切比雪夫定理	17
3.6.2	刘维尔定理	18
3.7	一些超越积分的特殊解法	18
3.7.1	Direchlet 积分	18

第一章 一些通用的数学概念和记号

1.1 逻辑符号

第二章 一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

2.1 逐点收敛性和一致收敛性

2.1.1 逐点收敛性

定义 2.1.1: 逐点收敛性

考虑函数列 $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$, $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛, 则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 称为极限函数, 同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

第三章 附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

3.1 实数的等价定义

第二章提及的实数公理定义了实数；但是，其实还有一些构造性方法可以定义实数。戴德金分割和柯西序列是其中的两个。

首先，我们要先构造出自然数集，进而构造有理数集。

3.1.1 Peano 公理，自然数集

1. 自然数集的定义

定义 3.1.1: 自然数集的 Peano 公理

存在一个运算 $*$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_+$ ，称为后继，满足以下性质：

- ① 存在一个元素 0 , $0 \in \mathbb{N}$
- ② $\forall a \in \mathbb{N}, a^* \neq 0$
- ③ 如果 $a \neq b$, 那么 $a^* \neq b^*$

这个集合 \mathbb{N} 称为自然数集， \mathbb{N}_+ 称为正整数集。

可以看出来，Peano 公理与实数公理不同，是借助后继运算而不是加法和乘法。不过，接下来我们将递归地定义加法和乘法，并定义自然数的序。

我们按照之前的常用记号，记 $0^* = 1, 1^* = 2, 2^* = 3, \dots$

2. 加法

定义 3.1.2: 自然数的加法

我们定义运算 $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 称为加法, 满足以下性质:

$$a^* + b = (a + b)^*$$

特别地, 我们定义 $0 + b = b$

我们首先验证此处定义的加法是否依旧具有交换律和结合律

我们首先证明几个引理。

引理 3.1.1

$$n + 0 = n$$

证明: 对 n 使用数学归纳法: 首先, 当 $n = 0, 0 + 0 = 0$ 依定义是成立的。

接下来假设 $n + 0 = n$, 那么, $n^* + 0 = (n + 0)^* = n^*$, 依归纳原理, 命题得证。 \square

引理 3.1.2

$$n + m^* = (n + m)^*$$

证明: 固定 m , 对 n 作数学归纳法:

首先, 当 $n = 0, 0 + m^* = m^* = (0 + m)^*$

现在假设 $n + m^* = (n + m)^*$

那么, $n^* + m^* = (n^* + m)^*$

这里可以将 n^* 视为一个整体, 加上 m 的后继, 于是命题得证。 \square

于是, 我们证明了自然数加法的交换律:

命题 3.1.1. $n + m = m + n$

证明: 固定 n , 对 m 作数学归纳法。

首先, 当 $m = 0, n + 0 = 0 + n$, 命题成立。

现在假设 $n + m = m + n$, 我们只需证明 $n + m^* = m^* + n$, 而这是已经证明的了。

但是, 我们已经知道: $n + m^* = (n + m)^*, m^* + n = (m + n)^*$, 而且我们已经假设 $n + m = m + n$, 于是命题得证。 \square

在证明过程中可以看出以下推论:

推论 3.1.3

$$n + m^* = n^* + m$$

于是有以下推论：

推论 3.1.4

$$n^* = n + 1$$

证明： 在上面的推论中代入 $m = 0$

$$n + 0^* = n^* + 0$$

$$\Rightarrow n + 1 = n^*$$

□

此后，我们不再使用 n^* 的记号，而是用 $n + 1$ 代替。

命题 3.1.2. $(a + b) + c = a + (b + c)$

证明： 固定 a, c ，对 b 作数学归纳法。

当 $b = 0$ ， $(a + 0) + c = a + c = a + (0 + c)$ ，命题成立。

现在假设 $(a + b) + c = a + (b + c)$

那么， $(a + (b + 1)) + c$

$$= ((a + b) + 1) + c = (a + b + c) + 1$$

$$= a + ((b + c) + 1) = a + ((b + 1) + c)，命题得证。$$

□

至此，我们证明了加法在自然数集上的交换律和结合律。

3. 乘法

定义 3.1.3: 自然数的乘法

们定义运算 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ，称为乘法，满足以下性质：

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$$

并且特别定义： $a \cdot 0 = 0$

我们仿照加法，先证明几个引理。

引理 3.1.5

$$0 \cdot a = 0$$

证明： 对 a 作数学归纳法：

当 $a = 0$, $0 \cdot 0 = 0$

现在假设 $0 \cdot a = 0$, 那么: $0 \cdot (a + 1) = 0 \cdot a + 0 = 0$, 命题得证 \square

引理 3.1.6

$$(b + 1) \cdot a = b \cdot a + a$$

证明: 固定 b , 对 a 作数学归纳法:

当 $a = 0$, $(b + 1) \cdot 0 = 0 = b \cdot 0 + 0$

现在假设 $(b + 1) \cdot a = b \cdot a + a$

那么, $(b + 1) \cdot (a + 1) = (b + 1) \cdot a + (b + 1)$

$= b \cdot a + a + (b + 1) = b \cdot a + b + (a + 1)$

$= b \cdot a + a + (b + 1) = b \cdot (a + 1) + (a + 1)$, 命题得证。 \square

接下来证明交换律

命题 3.1.3. $a \cdot b = b \cdot a$

证明: 固定 a , 对 b 作数学归纳法。

当 $b = 0$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a$, 命题成立。

现在假设 $a \cdot b = b \cdot a$, 我们欲证 $a \cdot (b + 1) = (b + 1) \cdot a$

但是我们知道: $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$, $(b + 1) \cdot a = b \cdot a + a$, 并且我们已经假设 $a \cdot b = b \cdot a$, 于是命题成立。 \square

于是有以下推论:

推论 3.1.7

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

证明: $a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a = a$, 再结合交换律即得证。 \square

这个推论说明: 我们利用 Peano 公理定义的 1 依旧是对乘法的单位元, 与我们在实数公理下定义的 1 一致。

接下来证明分配律。

命题 3.1.4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

证明: 固定 a 和 b , 对 c 作数学归纳法。

当 $c = 0$, $a \cdot (b + 0) = a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0$, 命题成立。

现在假设 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

那么, $a \cdot (b + (c + 1)) = a \cdot ((b + c) + 1)$

$= a \cdot (b + c) + a = a \cdot b + a \cdot c + a = a \cdot b + a \cdot (c + 1)$, 于是命题得证。□

最后, 我们证明结合律。

命题 3.1.5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

证明: 固定 a, b , 对 c 作数学归纳法:

当 $c = 0$, $a \cdot (b \cdot 0) = a \cdot 0 = 0 = (a \cdot b) \cdot 0$, 命题成立

现在假设 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

那么, $a \cdot (b \cdot (c + 1)) = a \cdot (b \cdot c + b)$

$= a \cdot (b \cdot c) + a \cdot b = (a \cdot b) \cdot c + a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (c + 1)$, 命题得证。□

至此, 我们证明了自然数集上关于加法、乘法、加法与乘法联系的公理。

4. 序

定义 3.1.4: 自然数集上的序

我们定义: \mathbb{N} 上存在一个关系 \geq , 称为大于等于, 满足以下性质:

$a \geq b$, 当且仅当 $\exists p \in \mathbb{N}, a = b + p$

如果 $a \geq b$, 我们又称 $b \leq a$, 如此定义的关系 \leq 称为小于等于;

如果 $a \geq b$, 并且 $a \neq b$, 那么我们称 $a > b$, 如此定义的关系 $>$ 称为大于;

如果 $a \leq b$, 并且 $a \neq b$, 那么我们称 $a < b$, 如此定义的关系 $<$ 称为小于

3.1.2 有理数集

3.1.3 戴德金分割

3.1.4 柯西序列

3.2 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\infty$ 的比较, 皮亚诺曲线

3.2.1 约定的记号

本节中引入以下全新的记号:

1. X^Y

定义 3.2.1

$$X^Y := \{f | f: Y \rightarrow X\}$$

即 Y 到 X 的全体映射的集合

2. X^∞

定义 3.2.2

$$X^\infty := \{\{a_n\} | a_i \in X\}$$

即元素为 X 中元素的全体点列的集合

可见, X^∞ 就是 X^Y 在 $Y = \mathbb{N}$ 下的特例, 也就是 $X^\infty = X^\mathbb{N}$

3. $\mathcal{P}(A)$

定义 3.2.3

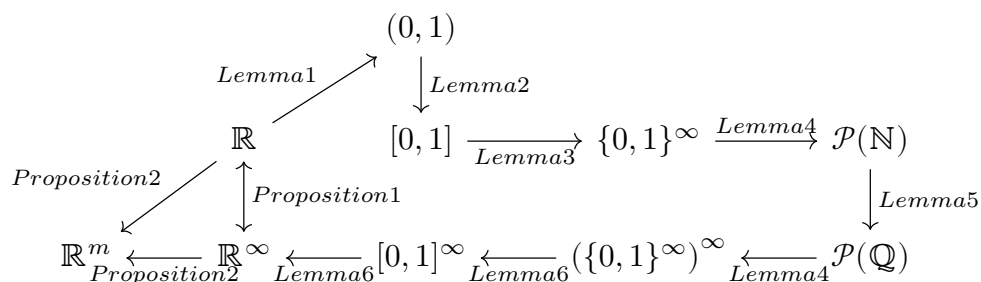
$$\mathcal{P}(A) = \{V | V \subseteq A\}$$

即 A 的全体子集组成的集合

3.2.2 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\infty$ 的比较

我们将证明: $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}\mathbb{R}^m = \text{Card}\mathbb{R}^\infty$

我们的证明过程会按照此交换图顺序。



引理 3.2.1: 引理 1

$$\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}(0, 1)$$

证明: 考虑以下映射 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

这个函数显然单调增, 所以是单射; 满射通过单调性和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$ 可知 \square

引理 3.2.2: 引理 2

$$\text{Card}(0, 1) = \text{Card}[0, 1]$$

证明: 考虑以下 $[0, 1] \rightarrow (0, 1)$ 映射 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x = 0 \\ \frac{1}{3}, x = 1 \\ \frac{1}{n+2}, x = \frac{1}{n}, n > 1 \\ x, x \neq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{n}, n > 1 \end{cases}$

显然, 这个映射是一个 $[0, 1]$ 到 $(0, 1)$ 的双射 □

这个引理证明中映射的构造采取了“希尔伯特的旅馆”的想法。这个想法是说:

如果有一个具有可数个房间并且已经满了的旅馆, 我们希望在赶走任意一个顾客的前提下, 将一个新的顾客安排进旅馆。我们可以让每个顾客都来到自己的下一个房间, 而将新的顾客安排在第一个房间。

用数学语言描述就是: 如果有一个点列 $\{a_n\}$, 我们希望在不舍弃任何一项下添加 m 项, 我们只需要将原来的 a_i 迁移到 a_{i+m} , 而把新的项添加到现在空缺的前 m 项。

在证明过程中, 我们采取的是点列 $\{\frac{1}{n}, n > 1\}$, 将 $0, 1$ 迁移到这个序列内。

引理 3.2.3: 引理 3

$$\text{Card}[0, 1] = \text{Card}\{0, 1\}^\infty$$

证明: 从第一章中关于进制的定理可知, $\forall a \in [0, 1], \exists \{a_n\}, a_i \in \{0, 1\}$, 使得

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \text{ 且这一对应关系是双射的。}$$

□

引理 3.2.4: 引理 4

$$\text{Card}\{0, 1\}^S = \text{Card}\mathcal{P}(S)$$

证明: 定义示性函数 $\chi_A : S \rightarrow \{0, 1\}$ 。

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in S - A \end{cases}$$

并定义映射 $\varphi : \mathcal{P}(S) \rightarrow \{0, 1\}^S$

$$\varphi(A) := \chi_A$$

接下来证明 φ 是双射:

φ 的单射性是显然的; 而对于满射性, $\forall f \in \{0, 1\}^S$

令 $A = \{x | f(x) = 1\}$, 那么就有 $\chi_A = f$, 双射性得证 \square

引理 3.2.5: 引理 5

合 A, B 若有 $\text{Card}A = \text{Card}B$, 那么有 $\text{Card}\mathcal{P}(A) = \text{Card}\mathcal{P}(B)$

证明: 设 $\text{Card}A = \text{Card}B$, 且 $A \rightarrow B$ 的双射是 f

那么我们构造: $g: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$

$g(X) := \{b | b = f(a), a \in X\}$

接下来证明 g 是双射

先证明单射性。设 $X \neq Y$, 所以一定 $\exists a$, 只处于 X, Y 这两个集合中的一个

因为 f 是一个双射, 所以 $f(a)$ 只处于 $g(X), g(Y)$ 这两个集合中的一个, 所以 $g(X) \neq g(Y)$, 单射性得证。

对于满射性, 由 f 的满射性可知这是显然的。 \square

引理 3.2.6: 引理 6

果 $\text{Card}X = \text{Card}Y$, 那么 $\text{Card}X^{\mathbb{Z}} = \text{Card}Y^{\mathbb{Z}}$

证明: 设 $X \rightarrow Y$ 的双射为 f

那么定义映射 $\varphi: X^{\mathbb{Z}} \rightarrow Y^{\mathbb{Z}}$

$\varphi(g) = f \circ g$

φ 的双射性是显然的。 \square

命题 3.2.1. $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}\mathbb{R}^\infty$

证明: 由引理 1,2,3 可知, $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}\{0, 1\}^\infty$

接下来, 只需注意到两个事实: $\text{Card}(\{0, 1\}^\infty)^\infty = \text{Card}\{0, 1\}^{\mathbb{Q}}$, 因为我们知道 $\text{Card}\mathbb{N}^2 = \text{Card}\mathbb{Q}$,

并且注意到 $\text{Card}\mathbb{N} = \text{Card}\mathbb{Q}$, 再利用引理 4,5, 即得 $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}(\{0, 1\}^\infty)^\infty$

接下来, 我们利用引理 3 的结果: $\text{Card}[0, 1] = \text{Card}\{0, 1\}^\infty$, 并且使用引理 6, 我们即得:

$\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}[0, 1]^\infty$

随后, 再次利用引理 6, 以及引理 1,2 得到的结果: $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}[0, 1]$

我们至此就得到我们所需结果: $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}\mathbb{R}^\infty$ \square

命题 3.2.2. $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}\mathbb{R}^m$

证明: 设 $R_1 = \{(a, 0, \dots) | a \in \mathbb{R}\}$

$R_2 = \{(a_1, a_2, \dots, a_m, \dots) | a_i \in \mathbb{R}\}$

显然, $R_1 \subset R_2 \subset \mathbb{R}^\infty$

但是 $\text{Card}R_1 = \text{Card}\mathbb{R}, \text{Card}R_2 = \text{Card}\mathbb{R}^m, \text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}\mathbb{R}^\infty$, 那么一定有 $\text{Card}\mathbb{R} = \text{Card}\mathbb{R}^m$ \square

3.2.3 皮亚诺曲线

3.3 伯努利数与欧拉数

在对泰勒公式的研究中, 我们推到了标准指数函数 $\exp x$ 的级数展开, 它的系数是极其容易推导的。

但是, 如果我们考察其倒数, 那么就变得相当难以推导: 因为它的高阶导数一阶比一阶难以求得。

这一附录中我们反其道而行之, 先假设系数, 再利用其与指数函数乘积求出系数, 从而提出了两个重要的数列: 伯努利数和欧拉数。

特别地, 由于三角函数的分析定义正是利用的指数函数, 利用伯努利数和欧拉数可以求出很多之前难以求出的展开式。

3.3.1 伯努利数

1. 定义

定义 3.3.1: 伯努利数的级数定义

符合以下级数展开的数列称为伯努利数:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (3.1)$$

以上的定义十分简洁, 但是难以计算。但是显然, 借助 Taylor 级数我们可以推导出等价的递归定义:

定义 3.3.2: 伯努利数的递归定义

$$B_0 = 1, B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (3.2)$$

证明: 利用级数定义中的展开式反推:

$$\because (e^z - 1) \left(\frac{z}{e^z - 1} \right) = z$$

$$\because z \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}z + \dots + \frac{1}{(n+1)!}z^n + R_1(z) \right] \left[B_0 + B_1z + \dots + \frac{B_n}{n!}z^n + R_2(z) \right] = z$$

$$\text{对比常数项可知: } B_0 = 1 \text{ 进一步, 如果 } n \text{ 大于 } 1, \text{ 对比系数可得: } B_0 \cdot \frac{1}{(n+1)!} + B_1 \cdot \frac{1}{n!} + \dots + B_k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \dots \frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} = 0$$

$$\text{左右同乘 } (n+1)!, \text{ 得: } B_0 \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} + B_1 \cdot \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} + \dots + B_k \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k)!} + \dots + B_n \cdot \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k = -(n+1)B_n$$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$$

□

2. 性质

① 除 1 外, 所有奇数项的伯努利数为 0

$$\text{命题 3.3.1. } B_{2n+1} = \begin{cases} 0, n \geq 1 \\ -\frac{1}{2}, n = 0 \end{cases}$$

证明: 由前面的伯努利数定义可知, $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析

考虑函数 $\phi(x) = \frac{f(z)}{z^{2n+2}}$ 的洛朗展开

$$\phi(z) = \frac{B_0}{0!} z^{-2n-2} + \dots + \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res}_{z=0} \phi(z) = \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \oint_C \phi(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ 其中 } C = \{|z| = 1\}$$

记上述积分为 I , 做代换 $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$

$$I = \int_0^{2\pi} i e^{i\theta} \frac{e^{i\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} e^{-(2n+2)i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta+2n\pi i}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta$$

作代换 $\alpha = \theta - \pi$, 并利用标准指数函数在虚轴的半个周期上变号, 得到:

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{i\theta}-1} d\theta + \int_0^\pi \frac{e^{-2ni\alpha+2n\pi i}}{e^{-i\alpha}-1} d\alpha \\
 &= \int_0^\pi -e^{-2ni\theta} = \begin{cases} 0, n \geq 0 \\ -\pi, n = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow B_{2n+1} = \begin{cases} 0, n \geq 1 \\ -\frac{1}{2}, n = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

②

命题 3.3.2. $B_n = -n\zeta(1-n), n \geq 1$

证明: 黎曼 Zeta 函数的定义为:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, Re(s) > 1 \\ \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}, 0 < Re(s) \leq 1 \\ 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), Re(s) \leq 0 \end{cases}$$

解析延拓过程可以参考《复分析笔记》

先考虑 $n = 2k + 1, k > 0$ 的情形, 此时依 Zeta 函数定义, $\zeta(-2k) = 0$, 因为 $\sin(n\pi) = 0$, 命题成立。

而当 $n = 1, \zeta(0) = -\frac{1}{2}, B_1 = -\frac{1}{2}$, 命题成立。

接下来考虑 n 为偶数的情形:

我们欲证 $B_{2n} = -2n\zeta(1-2n)$

$$\Rightarrow B_{2n} = -2n2^{1-2n}\pi^{-2n} \sin\left(\frac{\pi(1-2n)}{2}\right) \Gamma(2n)\zeta(2n)$$

考虑函数 $f_n(z) = \frac{z^{-2n}}{e^z-1}$

$$\begin{aligned}
 &= z^{-2n-1} \frac{z}{e^z-1} \\
 &= z^{-2n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^{k-2n-1}
 \end{aligned}$$

对比-1 阶系数, 得:

$$Res_{z=0} f_n(z) = \frac{B_{2n}}{(2n)!}$$

再考虑 $z = 2\pi ki$ 处的留数

$$Res_{z=2\pi ki} f_n(z) = \lim_{z \rightarrow 2\pi ni} \frac{z^{-2n}}{e^z-1} (z - 2\pi ki)$$

$$= (2\pi ki)^{-2n} = (-1)^n (2\pi k)^{-2n}$$

记 $C_N = \{|z| = (2N+1)\pi\}$, G_N 为 C_0, C_N 围成的区域

$$\therefore \int_{\partial G_N} f_n(z) = \int_{C_N} f_n(z) - \int_{C_0} f_n(z)$$

$$\text{而 } \int_{\partial G_N} = 2\pi i \sum_{k=-N}^N \text{Res}_{z=2\pi ki} f_n(z)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=-N}^N (-1)^n (2\pi k)^{-2n}$$

$$= 4\pi i \sum_{k=1}^N (-1)^n (2\pi k)^{-2n}$$

接下来考察 $\int_{C_N} f_n(z)$, 因为在 C_N 上 $|\frac{1}{e^z-1}|$ 有界, 而:

$$\int_{C_N} z^{-2n} = \int_{C_N} i e^{i\theta} N^{-2n} = O(N^{-2n})$$

$$\text{所以 } \int_{C_N} f_n(z) = O(N^{-2n})$$

再接下来考察 $\int_{C_0} f_n(z)$

$$\int_{C_0} f_n(z) = 2\pi i \text{Res}_{z=0} f_n(z) = \frac{2\pi i B_{2n}}{(2n)!}$$

$$\therefore \int_{\partial G_N} f_n(z) = \int_{C_N} f_n(z) - \int_{C_0} f_n(z)$$

$$\therefore 4\pi i \sum_{k=1}^N (-1)^n (2\pi k)^{-2n} = O(N^{-2n}) - 2\pi i \frac{2\pi i B_{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{取 } N \rightarrow +\infty, \text{ 那么 } \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^n (2\pi k)^{-2n} = -\frac{B_{2n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} (2\pi k)^{-2n}$$

$$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

$$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$$

$$\Rightarrow B_{2n} = 2n(-1)^{n+1} 2^{1-2n} \pi^{-2n} \Gamma(2n) \zeta(2n)$$

只需注意到, $(-1)^{n+1} = -\sin\left(\frac{(1-2n)\pi}{2}\right)$, 那么这一结果就是我们所证的命题。□

这一证明的关键在于注意到 $\frac{z^{-2n}}{e^z-1}$ 在 0 处的留数与伯努利数有关, 而其他奇点处的留数之和与自然数负幂求和有关, 从而联系了伯努利数和 Zeta 函数。

③ 伯努利数偶数项相互交错

命题 3.3.3. $B_{4k} < 0, B_{4k+2} > 0, k \geq 1$

证明: 我们利用之前命题中的结果 $B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

当 n 分别为 $2k, 2k+1$ 时:

$$B_{4k} = (4k)! \frac{2(-1)^{2k+1}}{(2\pi)^{4k}} \zeta(4k) = -(4k)! \frac{2}{(2\pi)^{4k}} \zeta(4k)$$

$$B_{4k+2} = (4k+2)! \frac{2(-1)^{2k+2}}{(2\pi)^{4k+2}} \zeta(4k+2) = (4k+2)! \frac{2}{(2\pi)^{4k+2}} \zeta(4k+2)$$

而 Zeta 函数对于全体正整数取正值, 命题得证。 \square

④ 从 B_6 开始, 伯努利数的绝对值依次递增

命题 3.3.4. $|B_{2k}| < |B_{2k+2}|, k \geq 3$

证明: 在之前的命题中, 我们证明了: $\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

$$\therefore |B_{2k}| = (2k)! \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

$$|B_{2k+2}| = (2k+2)! \frac{2}{(2\pi)^{2k+2}} \zeta(2k+2)$$

两者作差, $|B_{2k+2}| - |B_{2k}|$

$$= 2 \frac{(2k+2)! \zeta(2k+2) - (2k)! \zeta(2k) (2\pi)^2}{(2\pi)^{2k+2}}$$

因为当 $s > 1, s \in \mathbb{N}_+$ 时, $\zeta(s)$ 单调递减且 $\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1$

我们计算得 $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, 所以可以作估计: $\zeta(2k+2) > 1, \zeta(2k) < \frac{\pi^2}{945}$

$$\therefore (2k+2)! \zeta(2k+2) - (2k)! \zeta(2k) (2\pi)^2$$

$$> (2k+2)! - (2k)! \cdot 4\pi^2 \frac{\pi^6}{945}$$

$$= ((2k+2)(2k+1) - 4\pi^2 \frac{\pi^6}{945}) (2k)! > 0$$

\square

⑤ 自然幂指数和的通式

$$\text{命题 3.3.5. } S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p (-1)^i B_i \binom{p+1}{i} n^{p+1-i}$$

证明: 明天再说, 累了 \square

3.3.2 欧拉数

3.4 欧拉-麦克劳林公式

我们直观上会认为, 一个连续的级数和应该可以用这一整数区间的积分来大致模拟。一些结果也的确呈现了这个特征, 比如以下有关调和级数的命题:

$$\sum_{n=1}^x \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t} dt + o(1)$$

特别地, 其中的余项有 $o(1) \rightarrow \varepsilon, \varepsilon$ 为欧拉常数.

我们对这里的余项做探讨, 探究何时可以积分和求和的差值为常数阶, 以及这一余项大小如何。

3.4.1 伯努利多项式

1. 定义

定义 3.4.1: 伯努利多项式的级数定义

满足以下级数的函数族 $B_n(x)$ 称为伯努利多项式

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \quad (3.3)$$

2. 性质

①

命题 3.4.1. $B_n(0) = B_n, B_n(1) = (-1)^n B_n$

证明: 在伯努利多项式的定义中分别代入 0, 1:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0)}{n!}$$

对比伯努利数的定义即得 $B_n(0) = B_n$

$$\frac{ze^z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1)}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow \frac{z}{1 - e^{-z}} = \frac{-z}{e^{-z} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

□

定理 3.4.1: 欧拉-麦克劳林公式

假设 $f(x)$ 无穷阶可导, 那么:

$$\sum_{a \leq n < b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_a^b + (-1)^m \int_a^b \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x) dx \quad (3.4)$$

3.5 其他四种三角函数的泰勒/洛朗展开

3.5.1 $\cot x$

借助伯努利数或者 Gamma 函数, 分别可以将余切分解为两种形式

定理 3.5.1: 余切函数的洛朗展开

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \quad (3.5)$$

这一展开是 $\cot x$ 的洛朗展开而非泰勒展开, 因为 $\cot x \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow 0$, 在 0 处不解析

证明: 依余切函数定义: $\cot x = \frac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{e^{ix} - e^{-ix}}$

$$= i \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}$$

$= i \left(1 + \frac{2}{e^{2ix} - 1}\right)$ 再利用伯努利数的级数定义:

$$\cot x = i + 2i \cdot \frac{1}{2ix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(2ix)^n}{n!}$$

$\cot x = i + 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(2ix)^{n-1}}{n!}$ 因为伯努利数的奇数项只有 $B_1 = -\frac{1}{2}$, 其余全为 0, 故:

$$\begin{aligned} \cot x &= i + 2i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(2ix)^{2n-1}}{2n!} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(i)^{2n}(2x)^{2n-1}}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \end{aligned}$$

□

定理 3.5.2: 余切函数的第二种级数展开

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \quad (3.6)$$

证明: 利用正弦函数的无穷乘积展开式:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

将 πz 移至左侧并取对数, 得:

$$\ln \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

双侧求导, 得:

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} \left(\frac{\cos \pi z}{z} - \frac{\sin \pi z}{\pi z^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2 \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}$$

进行一些基本运算并对级数内部裂项, 得:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

$$\Rightarrow \cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi z - \pi n} + \frac{1}{\pi z + \pi n} \right)$$

$$\Rightarrow \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right)$$

□

这一证明的注意力很强, 其整体思路是: 将 \cot 转换为 \cos 和 \sin 的除法, 再利用正弦函数的导数, 构造相应的对数除式, 而恰好注意到, $\sin z$ 的无穷乘积展开正适合构造对数求和。

3.5.2 $\tan x$

定理 3.5.3: 正切函数的 Taylor 展开

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \quad (3.7)$$

证明: 注意到: $\cot x = -2 \cot 2x + \cot x$ 因为: $-2 \cot 2x + \cot x = -2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$$= -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \cot x$$

$$\therefore \cot x = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (4x)^{2n-1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (2x)^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (1-2^{2n})(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} 2^{2n} (2^{2n}-1) x^{2n-1}}{(2n)!}$$

又当 $n=0$ 时一般项为 0,

$$\therefore \cot x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$$

证明: 怎么开始套娃了 (恼)

□

□

3.6 原函数初等性的判定方法

3.6.1 切比雪夫定理

定理 3.6.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$, 那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (3.8)$$

初等的充要条件是: $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中至少有一个为整数

3.6.2 刘维尔定理

3.7 一些超越积分的特殊解法

3.7.1 Direchlet 积分