数学分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 1 月 10 日

前言标题

前言内容

2025 年 1 月 10 日

目录

第一章　一些通用的数学概念和记号

1.1　逻辑符号

第二章　一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

2.1　逐点收敛性和一致收敛性

2.1.1　逐点收敛性

定义 2.1.1: 逐点收敛性

考虑函数列 $f_n : X \to \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$，$\{f_n(x), n \in\}$ 收敛，则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 称为极限函数，同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

第三章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

3.1　伯努利数与欧拉数

在对泰勒公式的研究中，我们推到了标准指数函数 $\exp x$ 的级数展开，它的系数是极其容易推导的。

但是，如果我们考察其倒数，那么就变得相当难以推导：因为它的高阶导数一阶比一阶难以求得。

这一附录中我们反其道而行之，先假设系数，再利用其与指数函数乘积求出系数，从而提出了两个重要的数列：伯努利数和欧拉数。

特别地，由于三角函数的分析定义正是利用的指数函数，利用伯努利数和欧拉数可以求出很多之前难以求出的展开式。

3.1.1　伯努利数

1. 定义

定义 3.1.1: 伯努利数的级数定义

符合以下级数展开的数列称为伯努利数：

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \tag{3.1}$$

以上的定义十分简洁，但是难以计算。但是显然，借助 Taylor 级数我们可以推导出等价

的递归定义：

定义 3.1.2: 伯努利数的递归定义

$$B_0=1, B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \tag{3.2}$$

证明： 利用级数定义中的展开式反推：

$\because (e^z-1)\left(\frac{z}{e^z-1}\right)=z$

$\therefore z\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}z+\ldots\cdots+\frac{1}{(n+1)!}z^n+R_1(z)\right]\left[B_0+B_1z+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+R_2(z)\right]=z$

对比常数项可知：$B_0=1$ 进一步，如果 n 大于 1，对比系数可得：$B_0\cdot\frac{1}{(n+1)!}+B_1\cdot\frac{1}{n!}+\cdots+B_k\cdot\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\cdots\frac{B_n}{n!}\cdot\frac{1}{1!}=0$

左右同乘 $(n+1)!$，得：$B_0\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot0!}+B_1\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot1!}+\cdots+B_k\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k)!}+\cdots+B_n\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot1!}=0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k=-(n+1)B_n$

$\Rightarrow B_n=-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$

□

2. 性质

① 除 1 外，所有奇数项的伯努利数为 0

命题 3.1.1. $B_{2n+1}=\begin{cases}0, n\geqslant 1\\ -\frac{1}{2}, n=0\end{cases}$

证明： 由前面的伯努利数定义可知，$f(z)=\frac{z}{e^z-1}$ 在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析

考虑函数 $\phi(x)=\frac{f(z)}{z^{2n+2}}$ 的洛朗展开

$\phi(z)=\frac{B_0}{0!}z^{-2n-2}+\cdots+\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-1}+\cdots$

$\Rightarrow Res_{z=0}\phi(z)=\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow \oint_C\phi(z)\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$，其中 $C=\{|z|=1\}$

记上述积分为 I，做代换 $z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$

$I=\int_0^{2\pi}ie^{i\theta}\frac{e^{i\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}e^{-(2n+2)i\theta}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta+2n\pi i}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

作代换 $\alpha=\theta-\pi$，并利用标准指数函数在虚轴的半个周期上变号，得到：

$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} \frac{e^{-2ni\alpha+2n\pi i}}{e^{-e^{i\alpha}}-1}\mathrm{d}\alpha$

$= \int_0^{\pi} -e^{-2ni\theta} = \begin{cases} 0, n \geqslant 0 \\ -\pi, n=0 \end{cases}$

$\Rightarrow B_{2n+1} = \begin{cases} 0, n \geqslant 1 \\ -\frac{1}{2}, n=0 \end{cases}$ □

②

命题 3.1.2. $B_n = -n\zeta(1-n), n \geqslant 1$

证明: 黎曼 Zeta 函数的定义为；

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, Re(s)>1 \\ \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}, 0<Re(s)\leqslant 1 \\ 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s), Re(s)\leqslant 0 \end{cases}$$

解析延拓过程可以参考《复分析笔记》

先考虑 $n=2k+1, k>0$ 的情形，此时依 Zeta 函数定义，$\zeta(-2k)=0$，因为 $\sin(n\pi)=0$，命题成立。

而当 $n=1$，$\zeta(0)=-\frac{1}{2}, B_1=-\frac{1}{2}$，命题成立。

接下来考虑 n 为偶数的情形：

我们欲证 $B_{2n}=-2n\zeta(1-2n)$

$\Rightarrow B_{2n} = -2n2^{1-2n}\pi^{-2n}\sin\left(\frac{\pi(1-2n)}{2}\right)\Gamma(2n)\zeta(2n)$

考虑函数 $f_n(z)=\frac{z^{-2n}}{e^z-1}$

$= z^{-2n-1}\frac{z}{e^z-1}$

$= z^{-2n-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^{k-2n-1}$

对比-1 阶系数，得：

$Res_{z=0}f_n(z)=\frac{B_{2n}}{(2n)!}$

再考虑 $z=2\pi ki$ 处的留数

$Res_{z=2\pi ki}f_n(z)=\lim\limits_{z\to 2\pi ni}\frac{z^{-2n}}{e^z-1}(z-2\pi ki)$

$=(2\pi ki)^{-2n}=(-1)^n(2\pi k)^{-2n}$

记 $C_N=\{|z|=(2N+1)\pi\}$，G_N 为 C_0,C_N 围成的区域

$\therefore\int_{\partial G_N}f_n(z)=\int_{C_N}f_n(z)-\int_{C_0}f_n(z)$

而 $\int_{\partial G_N}=2\pi i\sum\limits_{k=-N}^{N}Res_{z=2\pi ki}f_n(z)$

$=2\pi i\sum\limits_{k=-N}^{N}(-1)^n(2\pi k)^{-2n}$

$=4\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}(-1)^n(2\pi k)^{-2n}$

接下来考察 $\int_{C_N}f_n(z)$，因为在 C_N 上 $|\frac{1}{e^z-1}|$ 有界，而：

$\int_{C_N}z^{-2n}=\int_{C_N}ie^{i\theta}N^{-2n}=O(N^{-2n})$

所以 $\int_{C_N}f_n(z)=O(N^{-2n})$

再接下来考察 $\int_{C_0}f_n(z)$

$\int_{C_0}f_n(z)=2\pi iRes_{z=0}f_n(z)=\frac{2\pi iB_{2n}}{(2n)!}$

$\because\int_{\partial G_N}f_n(z)=\int_{C_N}f_n(z)-\int_{C_0}f_n(z)$

$\therefore 4\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}(-1)^n(2\pi k)^{-2n}=O(N^{-2n})-2\pi i\frac{2\pi iB_{2n}}{(2n)!}$

取 $N\to+\infty$，那么 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2(-1)^n(2\pi k)^{-2n}=-\frac{B_{2n}}{(2n)!}$

$\Rightarrow B_{2n}=(2n)!\sum\limits_{k=1}^{\infty}2(-1)^{n+1}(2\pi k)^{-2n}$

$\Rightarrow B_{2n}=(2n)!\frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}$

$\Rightarrow B_{2n}=(2n)!\frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$

$\Rightarrow B_{2n}=2n(-1)^{n+1}2^{1-2n}\pi^{-2n}\Gamma(2n)\zeta(2n)$

只需注意到，$(-1)^{n+1}=-\sin\left(\frac{(1-2n)\pi}{2}\right)$，那么这一结果就是我们所证的命题。 □

这一证明的关键在于注意到 $\frac{z^{-2n}}{e^z-1}$ 在 0 处的留数与伯努利数有关，而其他奇点处的留数之和与自然数负幂求和有关，从而联系了伯努利数和 Zeta 函数。

③ 伯努利数偶数项相互交错

命题 3.1.3. $B_{4k}<0,B_{4k+2}>0,k\geqslant 1$

证明: 我们利用之前命题中的结果 $B_{2n}=(2n)!\frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$

当 n 分别为 $2k,2k+1$ 时：

$B_{4k}=(4k)!\frac{2(-1)^{2k+1}}{(2\pi)^{4k}}\zeta(4k)=-(4k)!\frac{2}{(2\pi)^{4k}}\zeta(4k)$

$B_{4k+2}=(4k+2)!\frac{2(-1)^{2k+2}}{(2\pi)^{4k+2}}\zeta(4k+2)=(4k+2)!\frac{2}{(2\pi)^{4k+2}}\zeta(4k+2)$

而 Zeta 函数对于全体正整数取正值，命题得证。 □

④ 自然幂指数和的通式

命题 3.1.4. $S_p(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}(-1)^iB_i\binom{p+1}{i}n^{p+1-i}$

证明: 明天再说，累了 □

3.1.2 欧拉数

3.2 欧拉-麦克劳林公式

我们直观上会认为，一个连续的级数和应该可以用这一整数区间的积分来大致模拟。一些结果也的确呈现了这个特征，比如以下有关调和级数的命题：

$\sum\limits_{n=1}^{x}\frac{1}{n}=\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t+o(1)$

特别地，其中的余项有 $o(1)\to\varepsilon$,ε 为欧拉常数.

我们对这里的余项做探讨，探究何时可以积分和求和的差值为常数阶，以及这一余项大小如何。

3.2.1 伯努利多项式

1. 定义

定义 3.2.1: 伯努利多项式的级数定义

满足以下级数的函数族 $B_n(x)$ 称为伯努利多项式

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n \tag{3.3}$$

定理 3.2.1: 欧拉-麦克劳林公式

假设 $f(x)$ 无穷阶可导，那么：

$$\sum_{a\le n<b}f(n)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b+(-1)^m\int_a^b\frac{B_m(x)}{m!}f^{(m)}(x)\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

3.3 其他四种三角函数的泰勒/洛朗展开

3.3.1 $\cot x$

借助伯努利数或者 Gamma 函数，分别可以将余切分解为两种形式

定理 3.3.1: 余切函数的洛朗展开

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \tag{3.5}$$

这一展开是 $\cot x$ 的洛朗展开而非泰勒展开，因为 $\cot x \sim \frac{1}{x}, x \to 0$，在 0 处不解析

证明： 依余切函数定义：$\cot x = \frac{i(e^{ix}+e^{-ix})}{e^{ix}-e^{-ix}}$

$= i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$

$= i\left(1 + \frac{2}{e^{2ix}-1}\right)$ 再利用伯努利数的级数定义：

$\cot x = i + 2i \cdot \frac{1}{2ix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(2ix)^n}{n!}$

$\cot x = i + 2i \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(2ix)^{n-1}}{n!}$ 因为伯努利数的奇数项只有 $B_1 = -\frac{1}{2}$，其余全为 0，故：

$\cot x = i + 2i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_2n(2ix)^2n-1}{2n!} - \frac{1}{2}\right)$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(i)^{2n}(2x)^{2n-1}}{2n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$ □

定理 3.3.2: 余切函数的第二种级数展开

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right) \tag{3.6}$$

证明： 利用正弦函数的无穷乘积展开式：

$\sin \pi z = \pi z \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

将 πz 移至左侧并取对数，得：

$\ln \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

双侧求导，得：

$\frac{\pi z}{\sin \pi z}\left(\frac{\cos \pi z}{z} - \frac{\sin \pi z}{\pi z^2}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2(1-\frac{z^2}{n^2})}$

进行一些基本运算并对级数内部裂项，得：

$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$

$\Rightarrow \cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi z - \pi n} + \frac{1}{\pi z + \pi n}\right)$

$\Rightarrow \cot z = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right)$ □

这一证明的注意力很强，其整体思路是：将 cot 转换为 cos 和 sin 的除法，再利用正弦函数的导数，构造相应的对数除式，而恰好注意到，$\sin z$ 的无穷乘积展开正适合构造对数求和。

3.3.2 $\tan x$

定理 3.3.3: 正切函数的 Taylor 展开

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \tag{3.7}$$

证明： 注意到：$\cot x = -2\cot 2x + \cot x$

因为：$-2\cot 2x + \cot x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x} = \cot x$

$\therefore \cot x = -2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (4x)^{2n-1}}{(2n)!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (2x)^{2n-1}}{(2n)!}$

$= -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (1-2^{2n})(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} 2^{2n} (2^{2n}-1) x^{2n-1}}{(2n)!}$

又当 $n = 0$ 时一般项为 0，

$\therefore \cot x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$ □

证明： 怎么开始套娃了（恼） □

3.4 原函数初等性的判定方法

3.4.1 切比雪夫定理

定理 3.4.1: 切比雪夫定理

设 $m,n,p\in\mathbb{Q}-\{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

初等的充要条件是：$p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$ 中至少有一个为整数

3.4.2 刘维尔定理

3.5 一些超越积分的特殊解法

3.5.1 Direchlet 积分