数学分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 1 月 7 日

前言标题

前言内容

2025 年 1 月 7 日

目录

第一章　一些通用的数学概念和记号

1.1　逻辑符号

第二章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

2.1　欧拉-麦克劳林公式

我们直观上会认为，一个连续的级数和应该可以用这一整数区间的积分来大致模拟。一些结果也的确呈现了这个特征，比如以下有关调和级数的命题：

$\sum\limits_{n=1}^{x}\frac{1}{n}=\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t+o(1)$

特别地，其中的余项有 $o(1)\to\varepsilon$,ε 为欧拉常数.

我们对这里的余项做探讨，探究何时可以积分和求和的差值为常数阶，以及这一余项大小如何。

2.1.1　伯努利数

1. 定义

定义 2.1.1: 伯努利数的级数定义

符合以下级数展开的数列称为伯努利数：

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \tag{2.1}$$

以上的定义十分简洁，但是难以计算。但是显然，借助 Taylor 级数我们可以推导出等价的递归定义：

定义 2.1.2: 伯努利数的递归定义

$$B_0 = 1, B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \tag{2.2}$$

证明: 利用级数定义中的展开式反推:

$\because (e^z - 1)\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = z$

$\therefore z\left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}z + \ldots\cdots + \frac{1}{(n+1)!}z^n + R_1(z)\right]\left[B_0 + B_1 z + \cdots + \frac{B_n}{n!}z^n + R_2(z)\right] = z$

对比常数项可知: $B_0 = 1$ 进一步, 如果 n 大于 1, 对比系数可得: $B_0 \cdot \frac{1}{(n+1)!} + B_1 \cdot \frac{1}{n!} + \cdots + B_k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \cdots \frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} = 0$

左右同乘 $(n+1)!$, 得: $B_0 \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} + B_1 \cdot \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} + \cdots + B_k \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k)!} + \cdots + B_n \cdot \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0} n\binom{n+1}{k}B_k = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0} n - 1\binom{n+1}{k}B_k = -(n+1)B_n$

$\Rightarrow B_n = -\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$

□

2. 性质

① 除 1 外, 所有奇数项的伯努利数为 0

命题 2.1.1. $B_{2n+1} = \begin{cases} 0, n \geqslant 1 \\ -\frac{1}{2}, n = 0 \end{cases}$

证明: 由前面的伯努利数定义可知, $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析

考虑函数 $\phi(x) = \frac{f(z)}{z^{2n+2}}$ 的洛朗展开

$\phi(z) = \frac{B_0}{0!}z^{-2n-2} + \cdots + \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-1} + \cdots$

$\Rightarrow Res_{z=0}\phi(z) = \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow \oint_C \phi(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$, 其中 $C = \{|z| = 1\}$

记上述积分为 I, 做代换 $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$

$I = \int_0^{2\pi} ie^{i\theta}\frac{e^{i\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}e^{-(2n+2)i\theta}\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta+2n\pi i}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

作代换 $\alpha=\theta-\pi$，并利用标准指数函数在虚轴的半个周期上变号，得到：

$$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\alpha+2n\pi i}}{e^{-e^{i\alpha}}-1}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\int_0^{\pi}-e^{-2ni\theta}=\begin{cases}0,n\geqslant 0\\ -\pi,n=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow B_{2n+1}=\begin{cases}0,n\geqslant 1\\ -\frac{1}{2},n=0\end{cases}$$ □

② 自然幂指数和的通式

命题 2.1.2. $S_p(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}(-1)^iB_i\binom{p+1}{i}n^{p+1-i}$

证明： 明天再说，累了 □

③

命题 2.1.3. $B_n=-n\zeta(1-n),n\geqslant 1$

证明： 黎曼 Zeta 函数的定义为；

$$\zeta(s)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s},Re(s)>1\\ \frac{1}{1-2^{1-s}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s},0<Re(s)\leqslant 1\\ 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s),Re(s)\leqslant 0\end{cases}$$

解析延拓过程可以参考《复分析笔记》

先考虑 $n=2k+1,k>0$ 的情形，此时依 Zeta 函数定义，$\zeta(-2k)=0$，因为 $\sin(n\pi)=0$，命题成立。

而当 $n=1$，$\zeta(0)=-\frac{1}{2},B_1=-\frac{1}{2}$，命题成立。

接下来考虑 n 为偶数的情形：

我们注意到，在余切函数的展开式中，恰好包含求和、位于分母的 n 这两种形式，通过 Taylor 展开可以组成我们期望的 Zeta 函数形式：

□

定理 2.1.1: 欧拉-麦克劳林公式

假设 $f(x)$ 无穷阶可导，那么：

$$\sum_{a\le n<b} f(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + (-1)^m \int_a^b \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\mathrm{d}x \quad (2.3)$$

2.1.2 伯努利多项式

1. 定义

定义 2.1.3: 伯努利多项式的级数定义

满足以下级数的函数族 $B_n(x)$ 称为伯努利多项式

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \quad (2.4)$$

2.2 其他四种三角函数的泰勒展开

2.2.1 $\tan x$

定理 2.2.1: 正切函数的 Taylor 展开

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-2)B_2n}{(2n)!} x^{2n-1} \quad (2.5)$$

证明: 怎么开始套娃了（恼） □

2.3 原函数初等性的判定方法

2.3.1 切比雪夫定理

定理 2.3.1: 切比雪夫定理

设 $m,n,p\in\mathbb{Q}-\{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

初等的充要条件是：$p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$ 中至少有一个为整数

2.3.2 刘维尔定理

2.4 一些超越积分的特殊解法

2.4.1 Direchlet 积分