

数学分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 1 月 9 日

前言标题

前言内容

2025 年 1 月 9 日

目录

第一章 一些通用的数学概念和记号	0
1.1 逻辑符号	0
第二章 一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算	1
2.1 逐点收敛性和一致收敛性	1
2.1.1 逐点收敛性	1
第三章 附录	2
3.1 欧拉-麦克劳林公式	2
3.1.1 伯努利数	2
3.1.2 伯努利多项式	5
3.2 其他四种三角函数的泰勒/洛朗展开	5
3.2.1 $\cot x$	5
3.2.2 $\tan x$	6
3.3 原函数初等性的判定方法	7
3.3.1 切比雪夫定理	7
3.3.2 刘维尔定理	7
3.4 一些超越积分的特殊解法	7
3.4.1 Dirichlet 积分	7

第一章 一些通用的数学概念和记号

1.1 逻辑符号

第二章 一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

2.1 逐点收敛性和一致收敛性

2.1.1 逐点收敛性

定义 2.1.1: 逐点收敛性

考虑函数列 $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$, $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛, 则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 称为极限函数, 同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

第三章 附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

3.1 欧拉-麦克劳林公式

我们直观上会认为，一个连续的级数和应该可以用这一整数区间的积分来大致模拟。一些结果也的确呈现了这个特征，比如以下有关调和级数的命题：

$$\sum_{n=1}^x \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t} dt + o(1)$$

特别地，其中的余项有 $o(1) \rightarrow \varepsilon, \varepsilon$ 为欧拉常数。

我们对这里的余项做探讨，探究何时可以积分和求和的差值为常数阶，以及这一余项大小如何。

3.1.1 伯努利数

1. 定义

定义 3.1.1: 伯努利数的级数定义

符合以下级数展开的数列称为伯努利数：

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (3.1)$$

以上的定义十分简洁，但是难以计算。但是显然，借助 Taylor 级数我们可以推导出等价的递归定义：

定义 3.1.2: 伯努利数的递归定义

$$B_0 = 1, B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (3.2)$$

证明: 利用级数定义中的展开式反推:

$$\because (e^z - 1) \left(\frac{z}{e^z - 1} \right) = z$$

$$\therefore z \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}z + \dots + \frac{1}{(n+1)!}z^n + R_1(z) \right] \left[B_0 + B_1z + \dots + \frac{B_n}{n!}z^n + R_2(z) \right] = z$$

$$\text{对比常数项可知: } B_0 = 1 \text{ 进一步, 如果 } n \text{ 大于 } 1, \text{ 对比系数可得: } B_0 \cdot \frac{1}{(n+1)!} + B_1 \cdot \frac{1}{n!} + \dots + B_k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \dots \frac{B_n}{n!} \cdot \frac{1}{1!} = 0$$

$$\text{左右同乘 } (n+1)!, \text{ 得: } B_0 \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} + B_1 \cdot \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} + \dots + B_k \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k)!} + \dots + B_n \cdot \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n n \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n n-1 \binom{n+1}{k} B_k = -(n+1)B_n$$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$$

□

2. 性质

① 除 1 外, 所有奇数项的伯努利数为 0

$$\text{命题 3.1.1. } B_{2n+1} = \begin{cases} 0, n \geq 1 \\ -\frac{1}{2}, n = 0 \end{cases}$$

证明: 由前面的伯努利数定义可知, $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析

考虑函数 $\phi(z) = \frac{f(z)}{z^{2n+2}}$ 的洛朗展开

$$\phi(z) = \frac{B_0}{0!} z^{-2n-2} + \dots + \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res}_{z=0} \phi(z) = \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \oint_C \phi(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ 其中 } C = \{|z| = 1\}$$

记上述积分为 I , 做代换 $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$

$$I = \int_0^{2\pi} i e^{i\theta} \frac{e^{i\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} e^{-(2n+2)i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{e^{-2ni\theta+2n\pi i}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta$$

作代换 $\alpha = \theta - \pi$, 并利用标准指数函数在虚轴的半个周期上变号, 得到:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi \frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta + \int_0^\pi \frac{e^{-2ni\alpha + 2n\pi i}}{e^{-e^{i\alpha}} - 1} d\alpha \\ &= \int_0^\pi -e^{-2ni\theta} = \begin{cases} 0, n \geq 0 \\ -\pi, n = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow B_{2n+1} &= \begin{cases} 0, n \geq 1 \\ -\frac{1}{2}, n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

② 自然幂指数和的通式

命题 3.1.2. $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p (-1)^i B_i \binom{p+1}{i} n^{p+1-i}$

证明: 明天再说, 累了

□

③

命题 3.1.3. $B_n = -n\zeta(1-n), n \geq 1$

证明: 黎曼 Zeta 函数的定义为:

$$\zeta(s) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \operatorname{Re}(s) > 1 \\ \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}, 0 < \operatorname{Re}(s) \leq 1 \\ 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \operatorname{Re}(s) \leq 0 \end{cases}$$

解析延拓过程可以参考《复分析笔记》

先考虑 $n = 2k + 1, k > 0$ 的情形, 此时依 Zeta 函数定义, $\zeta(-2k) = 0$, 因为 $\sin(n\pi) = 0$, 命题成立。

而当 $n = 1, \zeta(0) = -\frac{1}{2}, B_1 = -\frac{1}{2}$, 命题成立。

接下来考虑 n 为偶数的情形:

我们注意到, 在余切函数的展开式中, 恰好包含求和、位于分母的 n 这两种形式, 通过 Taylor 展开可以组成我们期望的 Zeta 函数形式:

□

定理 3.1.1: 欧拉-麦克劳林公式

假设 $f(x)$ 无穷阶可导, 那么:

$$\sum_{a \leq n < b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_a^b + (-1)^m \int_a^b \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x) dx \quad (3.3)$$

3.1.2 伯努利多项式

1. 定义

定义 3.1.3: 伯努利多项式的级数定义

满足以下级数的函数族 $B_n(x)$ 称为伯努利多项式

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \quad (3.4)$$

3.2 其他四种三角函数的泰勒/洛朗展开**3.2.1 $\cot x$**

借助伯努利数或者 Gamma 函数, 分别可以将余切分解为两种形式

定理 3.2.1: 余切函数的洛朗展开

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \quad (3.5)$$

这一展开是 $\cot x$ 的洛朗展开而非泰勒展开, 因为 $\cot x \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow 0$, 在 0 处不解析

证明: 依余切函数定义: $\cot x = \frac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{e^{ix} - e^{-ix}}$

$$= i \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}$$

$= i \left(1 + \frac{2}{e^{2ix} - 1} \right)$ 再利用伯努利数的级数定义:

$$\cot x = i + 2i \cdot \frac{1}{2ix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(2ix)^n}{n!}$$

$\cot x = i + 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(2ix)^{n-1}}{n!}$ 因为伯努利数的奇数项只有 $B_1 = -\frac{1}{2}$, 其余全为 0, 故:

$$\cot x = i + 2i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(2ix)^{2n-1}}{2n!} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(i)^{2n}(2x)^{2n-1}}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \quad \square$$

定理 3.2.2: 余切函数的第二种级数展开

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \quad (3.6)$$

证明: 利用正弦函数的无穷乘积展开式:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

将 πz 移至左侧并取对数, 得:

$$\ln \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

双侧求导, 得:

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} \left(\frac{\cos \pi z}{z} - \frac{\sin \pi z}{\pi z^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2(1 - \frac{z^2}{n^2})}$$

进行一些基本运算并对级数内部裂项, 得:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

$$\Rightarrow \cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi z - \pi n} + \frac{1}{\pi z + \pi n} \right)$$

$$\Rightarrow \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \quad \square$$

这一证明的注意力很强, 其整体思路是: 将 \cot 转换为 \cos 和 \sin 的除法, 再利用正弦函数的导数, 构造相应的对数除式, 而恰好注意到, $\sin z$ 的无穷乘积展开正适合构造对数求和。

3.2.2 $\tan x$

定理 3.2.3: 正切函数的 Taylor 展开

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!} \quad (3.7)$$

证明: 怎么开始套娃了 (恼) □

3.3 原函数初等性的判定方法

3.3.1 切比雪夫定理

定理 3.3.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$, 那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (3.8)$$

初等的充要条件是: $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中至少有一个为整数

3.3.2 刘维尔定理

3.4 一些超越积分的特殊解法

3.4.1 Direchlet 积分