数学分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 1 月 31 日

前言标题

前言内容

2025 年 1 月 31 日

目录

第一章　一些通用的数学概念和记号

1.1　逻辑符号

第二章　一致收敛性、函数项级数与函数族的基本运算

在之前章节的讨论中，曾经涉及了级数一般项是函数的级数，也就是所谓的函数项级数。

在此之前，我们利用了所谓“逐点收敛”，即对每一变量取值收敛。但是，一些例子中我们发现这种收敛性并不具备很好的性质。

我们提出一致收敛性这一全新的收敛性，这一性质可以允许级数仅仅需要少量条件就可以拥有微分、积分上的良好性质

2.1　逐点收敛性和一致收敛性

2.1.1　逐点收敛性

定义 2.1.1: 逐点收敛性

考虑函数列 $f_n : X \to \mathbb{R}$. 如果在点 $x \in X$，$\{f_n(x), n \in\}$ 收敛，则称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在点 x 收敛

使得 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集合称为收敛集。

$\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 在其收敛集上产生的极限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 称为极限函数，同时称 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 逐点收敛于 $f(x)$

第三章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

3.1　实数的等价定义

第二章提及的实数公理定义了实数；但是，其实还有一些构造性方法可以定义实数。戴德金分割和柯西序列是其中的两个。

首先，我们要先构造出自然数集，进而构造有理数集。

3.1.1　Peano 公理，自然数集

1. 自然数集的定义

定义 3.1.1: 自然数集的 Peano 公理

存在一个运算 $*:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_+$，称为后继，满足以下性质：

① 存在一个元素 0，$0\in\mathbb{N}$

② $\forall a\in\mathbb{N}, a^*\neq 0$

③ 如果 $a\neq b$, 那么 $a^*\neq b^*$

这个集合 $\mathbb{N}$ 称为自然数集，$\mathbb{N}_+$ 称为正整数集。

可以看出来，Peano 公理与实数公理不同，是借助后继运算而不是加法和乘法。不过，接下来我们将递归地定义加法和乘法，并定义自然数的序。

我们按照之前的常用记号，记 $0^*=1, 1^*=2, 2^*=3,\cdots$

2. 加法

定义 3.1.2: 自然数的加法

我们定义运算 $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，称为加法，满足以下性质：

$a^* + b = (a+b)^*$

特别地，我们定义 $0 + b = b$

我们首先验证此处定义的加法是否依旧具有交换律和结合律

我们首先证明几个引理。

引理 3.1.1

$n + 0 = n$

证明： 对 n 使用数学归纳法：首先，当 $n = 0, 0 + 0 = 0$ 依定义是成立的。

接下来假设 $n + 0 = n$，那么，$n^* + 0 = (n+0)^* = n^*$，依归纳原理，命题得证。 □

引理 3.1.2

$n + m^* = (n+m)^*$

证明： 固定 m，对 n 作数学归纳法：

首先，当 $n = 0$，$0 + m^* = m^* = (0+m)^*$

现在假设 $n + m^* = (n+m)^*$

那么，$n^* + m^* = (n^* + m)^*$

这里可以将 n^* 视为一个整体，加上 m 的后继，于是命题得证。 □

结合加法的定义，马上得到以下推论：

推论 3.1.3

$n + m^* = n^* + m$

于是又有以下推论：

推论 3.1.4

$n^* = n + 1$

证明： 在上面的推论中代入 $m = 0$

$n + 0^* = n^* + 0$

$\Rightarrow n+1=n^*$ □

此后，我们不再使用 n^* 的记号，而是用 $n+1$ 代替。

于是，我们证明了自然数加法的交换律：

命题 3.1.1. $n+m=m+n$

证明： 固定 n，对 m 作数学归纳法。

首先，当 $m=0$，$n+0=0+n$，命题成立。

现在假设 $n+m=m+n$，我们只需证明 $n+(m+1)=(m+1)+n$，而这是已经证明的了。 □

命题 3.1.2. $(a+b)+c=a+(b+c)$

证明： 固定 a,c，对 b 作数学归纳法。

当 $b=0$，$(a+0)+c=a+c=a+(0+c)$，命题成立。

现在假设 $(a+b)+c=a+(b+c)$

那么，$(a+(b+1))+c$

$=((a+b)+1)+c=(a+b+c)+1$

$=a+((b+c)+1)=a+((b+1)+c)$，命题得证。 □

至此，我们证明了加法在自然数集上的交换律和结合律。

3. 乘法

定义 3.1.3: 自然数的乘法

们定义运算 $\cdot:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，称为乘法，满足以下性质：

$a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$

并且特别定义：$a\cdot 0=0$

3.1.2 有理数集

3.1.3 戴德金分割

3.1.4 柯西序列

3.2 $\mathbb{R},\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\infty$ 的比较，皮亚诺曲线

3.2.1 约定的记号

本节中引入以下全新的记号：

1. X^Y

定义 3.2.1

$X^Y := \{f|f:Y\to X\}$

即 Y 到 X 的全体映射的集合

2. X^∞

定义 3.2.2

$X^\infty := \{\{a_n\}|a_i\in X\}$

即元素为 X 中元素的全体点列的集合

可见，X^∞ 就是 X^Y 在 $Y=\mathbb{N}$ 下的特例，也就是 $X^\infty = X^{\mathbb{N}}$

3. $\mathcal{P}(A)$

定义 3.2.3

$\mathcal{P}(A)=\{V|V\subseteq A\}$

即 A 的全体子集组成的集合

3.2.2 $\mathbb{R},\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\infty$ 的比较

我们将证明：$Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^m = Card\mathbb{R}^\infty$

我们的证明过程会按照此交换图顺序。

$$\begin{tikzcd}
 & & (0,1) \arrow[d, "Lemma2"] & & \\
 & \mathbb{R} \arrow[ur, "Lemma1"] \arrow[dl, "Proposition2"'] \arrow[d, leftrightarrow, "Proposition1"] & {[0,1]} \arrow[r, "Lemma3"'] & \{0,1\}^\infty \arrow[r, "Lemma4"] & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \arrow[d, "Lemma5"] \\
\mathbb{R}^m & \mathbb{R}^\infty \arrow[l, "Proposition2"'] & {[0,1]^\infty} \arrow[l, "Lemma6"'] & (\{0,1\}^\infty)^\infty \arrow[l, "Lemma6"'] & \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \arrow[l, "Lemma4"']
\end{tikzcd}$$

引理 3.2.1: 引理 1

$Card\mathbb{R} = Card(0,1)$

证明： 考虑以下映射 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

这个函数显然单调增，所以是单射；满射通过单调性和 $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} = 1$ 可知 □

引理 3.2.2: 引理 2

$Card(0,1) = Card[0,1]$

证明： 考虑以下 $[0,1]\to(0,1)$ 映射 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x = 0 \\ \frac{1}{3}, x = 1 \\ \frac{1}{n+2}, x = \frac{1}{n}, n > 1 \\ x, x \neq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{n}, n > 1 \end{cases}$

显然，这个映射是一个 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的双射 □

这个引理证明中映射的构造采取了“希尔伯特的旅馆”的想法。这个想法是说：

如果有一个具有可数个房间并且已经满了的旅馆，我们希望在不赶走任意一个顾客的前提下，将一个新的顾客安排进旅馆。我们可以让每个顾客都来到自己的下一个房间，而将新的顾客安排在第一个房间。

用数学语言描述就是：如果有一个点列 $\{a_n\}$, 我们希望在不舍弃任何一项下添加 m 项，我们只需要将原来的 a_i 迁移到 a_{i+m}，而把新的项添加到现在空缺的前 m 项。

在证明过程中，我们采取的是点列 $\{\frac{1}{n}, n > 1\}$，将 $0, 1$ 迁移到这个序列内。

引理 3.2.3: 引理 3

$Card[0,1] = Card\{0,1\}^\infty$

证明： 从第一章中关于进制的定理可知，$\forall a\in[0,1],\exists\{a_n\},a_i\in\{0,1\}$，使得 $a=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$，且这一对应关系是双射的。 □

引理 3.2.4: 引理 4

$Card\{0,1\}^S=Card\mathcal{P}(S)$

证明： 定义示性函数 $\chi_A:S\to\{0,1\}$。

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1,x\in A\\ \\ 0,x\in S-A\end{cases}$$

并定义映射 $\varphi:\mathcal{P}(S)\to\{0,1\}^S$

$\varphi(A):=\chi_A$

接下来证明 φ 是双射：

φ 的单射性是显然的；而对于满射性，$\forall f\in\{0,1\}^S$

令 $A=\{x|f(x)=1\}$，那么就有 $\chi_A=f$，双射性得证 □

引理 3.2.5: 引理 5

合 A,B 若有 $CardA=CardB$，那么有 $Card\mathcal{P}(A)=Card\mathcal{P}(B)$

证明： 设 $CardA=CardB$，且 $A\to B$ 的双射是 f

那么我们构造：$g:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B)$

$g(X):=\{b|b=f(a),a\in X\}$

接下来证明 g 是双射

先证明单射性。设 $X\neq Y$, 所以一定 $\exists a$，只处于 X,Y 这两个集合中的一个

因为 f 是一个双射,所以 $f(a)$ 只处于 $g(X),g(Y)$ 这两个集合中的一个,所以 $g(X)\neq g(Y)$，单射性得证。

对于满射性，由 f 的满射性可知这是显然的。 □

引理 3.2.6: 引理 6

果 $CardX=CardY$，那么 $CardX^Z=CardY^Z$

证明： 设 $X\to Y$ 的双射为 f

那么定义映射 $\varphi:X^Z\to Y^Z$

$\varphi(g) = f \circ g$

φ 的双射性是显然的。 □

命题 3.2.1. $Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^\infty$

证明: 由引理 1,2,3 可知，$Card\mathbb{R} = Card\{0,1\}^\infty$

接下来,只需注意到两个事实:$Card(\{0,1\}^\infty)^\infty = Card\{0,1\}^\mathbb{Q}$,因为我们知道 $Card\mathbb{N}^2 = Card\mathbb{Q}$，

并且注意到 $Card\mathbb{N} = Card\mathbb{Q}$，再利用引理 4,5，即得 $Card\mathbb{R} = Card\left(\{0,1\}^\infty\right)^\infty$

接下来，我们利用引理 3 的结果：$Card[0,1] = Card\{0,1\}^\infty$，并且使用引理 6，我们即得：

$Card\mathbb{R} = Card[0,1]^\infty$

随后，再次利用引理 6, 以及引理 1,2 得到的结果：$Card\mathbb{R} = Card[0,1]$

我们至此就得到我们所需结果：$Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^\infty$ □

命题 3.2.2. $Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^m$

证明: 设 $R_1 = \{(a, 0, \cdots)|a \in \mathbb{R}\}$

$R_2 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots)|a_i \in \mathbb{R}\}$

显然，$R_1 \subset R_2 \subset \mathbb{R}^\infty$

但是 $Card R_1 = Card\mathbb{R}, Card R_2 = Card\mathbb{R}^m, Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^\infty$, 那么一定有 $Card\mathbb{R} = Card\mathbb{R}^m$ □

3.2.3 皮亚诺曲线

3.3 伯努利数与欧拉数

在对泰勒公式的研究中，我们推到了标准指数函数 $\exp x$ 的级数展开，它的系数是极其容易推导的。

但是，如果我们考察其倒数，那么就变得相当难以推导：因为它的高阶导数一阶比一阶难以求得。

这一附录中我们反其道而行之，先假设系数，再利用其与指数函数乘积求出系数，从而提出了两个重要的数列：伯努利数和欧拉数。

特别地，由于三角函数的分析定义正是利用的指数函数，利用伯努利数和欧拉数可以求出很多之前难以求出的展开式。

3.3.1 伯努利数

1. 定义

定义 3.3.1: 伯努利数的级数定义

符合以下级数展开的数列称为伯努利数：

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \tag{3.1}$$

以上的定义十分简洁，但是难以计算。但是显然，借助 Taylor 级数我们可以推导出等价的递归定义：

定义 3.3.2: 伯努利数的递归定义

$$B_0=1, B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \tag{3.2}$$

证明： 利用级数定义中的展开式反推：

$\because (e^z-1)\left(\frac{z}{e^z-1}\right)=z$

$\therefore z\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}z+\ldots\cdots+\frac{1}{(n+1)!}z^n+R_1(z)\right]\left[B_0+B_1z+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+R_2(z)\right]=z$

对比常数项可知：$B_0=1$ 进一步，如果 n 大于 1，对比系数可得：$B_0\cdot\frac{1}{(n+1)!}+B_1\cdot\frac{1}{n!}+\cdots+B_k\cdot\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\cdots\frac{B_n}{n!}\cdot\frac{1}{1!}=0$

左右同乘 $(n+1)!$，得：$B_0\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}+B_1\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot 1!}+\cdots+B_k\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k)!}+\cdots+B_n\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot 1!}=0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k=-(n+1)B_n$

$\Rightarrow B_n=-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$

□

2. 性质

① 除 1 外，所有奇数项的伯努利数为 0

命题 3.3.1. $B_{2n+1}=\begin{cases}0,n\geqslant 1\\ -\frac{1}{2},n=0\end{cases}$

证明： 由前面的伯努利数定义可知，$f(z)=\frac{z}{e^z-1}$ 在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析

考虑函数 $\phi(x)=\frac{f(z)}{z^{2n+2}}$ 的洛朗展开

$\phi(z)=\frac{B_0}{0!}z^{-2n-2}+\cdots+\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-1}+\cdots$

$\Rightarrow Res_{z=0}\phi(z)=\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow \oint_C\phi(z)\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$, 其中 $C=\{|z|=1\}$

记上述积分为 I，做代换 $z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$

$I=\int_0^{2\pi}ie^{i\theta}\frac{e^{i\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}e^{-(2n+2)i\theta}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{-2ni\theta+2n\pi i}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta$

作代换 $\alpha=\theta-\pi$，并利用标准指数函数在虚轴的半个周期上变号，得到：

$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ni\alpha+2n\pi i}}{e^{-e^{i\alpha}}-1}\mathrm{d}\alpha$

$=\int_0^{\pi}-e^{-2ni\theta}=\begin{cases}0,n\geqslant 0\\ -\pi,n=0\end{cases}$

$\Rightarrow B_{2n+1}=\begin{cases}0,n\geqslant 1\\ -\frac{1}{2},n=0\end{cases}$ □

②

命题 3.3.2. $B_n=-n\zeta(1-n),n\geqslant 1$

证明： 黎曼 Zeta 函数的定义为；

$$\zeta(s)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s},Re(s)>1\\ \frac{1}{1-2^{1-s}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s},0<Re(s)\leqslant 1\\ 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s),Re(s)\leqslant 0\end{cases}$$

解析延拓过程可以参考《复分析笔记》

先考虑 $n=2k+1,k>0$ 的情形，此时依 Zeta 函数定义，$\zeta(-2k)=0$，因为 $\sin(n\pi)=0$，命题成立。

而当 $n=1$，$\zeta(0)=-\frac{1}{2}, B_1=-\frac{1}{2}$，命题成立。

接下来考虑 n 为偶数的情形：

我们欲证 $B_{2n}=-2n\zeta(1-2n)$

$\Rightarrow B_{2n}=-2n2^{1-2n}\pi^{-2n}\sin\left(\frac{\pi(1-2n)}{2}\right)\Gamma(2n)\zeta(2n)$

考虑函数 $f_n(z)=\frac{z^{-2n}}{e^z-1}$

$=z^{-2n-1}\frac{z}{e^z-1}$

$=z^{-2n-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k$

$=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^{k-2n-1}$

对比-1 阶系数，得：

$Res_{z=0}f_n(z)=\frac{B_{2n}}{(2n)!}$

再考虑 $z=2\pi ki$ 处的留数

$Res_{z=2\pi ki}f_n(z)=\lim\limits_{z\to 2\pi ni}\frac{z^{-2n}}{e^z-1}(z-2\pi ki)$

$=(2\pi ki)^{-2n}=(-1)^n(2\pi k)^{-2n}$

记 $C_N=\{|z|=(2N+1)\pi\}$，G_N 为 C_0,C_N 围成的区域

$\therefore\int_{\partial G_N}f_n(z)=\int_{C_N}f_n(z)-\int_{C_0}f_n(z)$

而 $\int_{\partial G_N}=2\pi i\sum\limits_{k=-N}^{N}Res_{z=2\pi ki}f_n(z)$

$=2\pi i\sum\limits_{k=-N}^{N}(-1)^n(2\pi k)^{-2n}$

$=4\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}(-1)^n(2\pi k)^{-2n}$

接下来考察 $\int_{C_N}f_n(z)$，因为在 C_N 上 $|\frac{1}{e^z-1}|$ 有界，而：

$\int_{C_N}z^{-2n}=\int_{C_N}ie^{i\theta}N^{-2n}=O(N^{-2n})$

所以 $\int_{C_N}f_n(z)=O(N^{-2n})$

再接下来考察 $\int_{C_0}f_n(z)$

$\int_{C_0}f_n(z)=2\pi iRes_{z=0}f_n(z)=\frac{2\pi iB_{2n}}{(2n)!}$

$\because\int_{\partial G_N}f_n(z)=\int_{C_N}f_n(z)-\int_{C_0}f_n(z)$

$\therefore 4\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}(-1)^n(2\pi k)^{-2n}=O(N^{-2n})-2\pi i\frac{2\pi iB_{2n}}{(2n)!}$

取 $N\to+\infty$，那么 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2(-1)^n(2\pi k)^{-2n}=-\frac{B_{2n}}{(2n)!}$

$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}(2\pi k)^{-2n}$

$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$

$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

$\Rightarrow B_{2n} = 2n(-1)^{n+1} 2^{1-2n} \pi^{-2n} \Gamma(2n)\zeta(2n)$

只需注意到，$(-1)^{n+1} = -\sin\left(\frac{(1-2n)\pi}{2}\right)$，那么这一结果就是我们所证的命题。 □

这一证明的关键在于注意到 $\frac{z^{-2n}}{e^z-1}$ 在 0 处的留数与伯努利数有关，而其他奇点处的留数之和与自然数负幂求和有关，从而联系了伯努利数和 Zeta 函数。

③ 伯努利数偶数项相互交错

命题 3.3.3. $B_{4k} < 0, B_{4k+2} > 0, k \geqslant 1$

证明： 我们利用之前命题中的结果 $B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

当 n 分别为 $2k, 2k+1$ 时：

$B_{4k} = (4k)! \frac{2(-1)^{2k+1}}{(2\pi)^{4k}} \zeta(4k) = -(4k)! \frac{2}{(2\pi)^{4k}} \zeta(4k)$

$B_{4k+2} = (4k+2)! \frac{2(-1)^{2k+2}}{(2\pi)^{4k+2}} \zeta(4k+2) = (4k+2)! \frac{2}{(2\pi)^{4k+2}} \zeta(4k+2)$

而 Zeta 函数对于全体正整数取正值，命题得证。 □

④ 从 B_6 开始，伯努利数的绝对值依次递增

命题 3.3.4. $|B_{2k}| < |B_{2k+2}|, k \geqslant 3$

证明： 在之前的命题中，我们证明了：$\Rightarrow B_{2n} = (2n)! \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n)$

$\therefore |B_{2k}| = (2k)! \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$

$|B_{2k+2}| = (2k+2)! \frac{2}{(2\pi)^{2k+2}} \zeta(2k+2)$

两者作差，$|B_{2k+2}| - |B_{2k}|$

$= 2 \frac{(2k+2)!\zeta(2k+2) - (2k)!\zeta(2k)(2\pi)^2}{(2\pi)^{2k+2}}$

因为当 $s > 1, s \in \mathbb{N}_+$ 时，$\zeta(s)$ 单调递减且 $\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 1$

我们计算得 $\zeta(6) = \frac{\pi^2}{945}$，所以可以作估计：$\zeta(2k+2) > 1, \zeta(2k) < \frac{\pi^2}{945}$

$\therefore (2k+2)!\zeta(2k+2) - (2k)!\zeta(2k)(2\pi)^2$

$> (2k+2)! - (2k)! \cdot 4\pi^2 \frac{\pi^6}{945}$

$= \left((2k+2)(2k+1) - 4\pi^2 \frac{\pi^6}{945}\right)(2k)! > 0$

□

⑤ 自然幂指数和的通式

命题 3.3.5. $S_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum\limits_{i=0}^{p} (-1)^i B_i \binom{p+1}{i} n^{p+1-i}$

证明： 明天再说，累了 □

3.3.2 欧拉数

3.4 欧拉-麦克劳林公式

我们直观上会认为，一个连续的级数和应该可以用这一整数区间的积分来大致模拟。一些结果也的确呈现了这个特征，比如以下有关调和级数的命题：

$\sum\limits_{n=1}^{x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t + o(1)$

特别地，其中的余项有 $o(1) \to \varepsilon$,ε 为欧拉常数.

我们对这里的余项做探讨，探究何时可以积分和求和的差值为常数阶，以及这一余项大小如何。

3.4.1 伯努利多项式

1. 定义

定义 3.4.1: 伯努利多项式的级数定义

满足以下级数的函数族 $B_n(x)$ 称为伯努利多项式

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \tag{3.3}$$

2. 性质

①

命题 3.4.1. $B_n(0) = B_n, B_n(1) = (-1)^n B_n$

证明： 在伯努利多项式的定义中分别代入 $0, 1$：

$\frac{z}{e^z-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0)}{n!}$

对比伯努利数的定义即得 $B_n(0) = B_n$

$\frac{ze^z}{e^z-1} = \sum\limits_{n=0}^{\in\infty} \frac{B_n(1)}{n!} z^n$

$\Rightarrow \frac{z}{1-e^{-z}} = \frac{-z}{e^{-z}-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ □

定理 3.4.1: 欧拉-麦克劳林公式

假设 $f(x)$ 无穷阶可导，那么：

$$\sum_{a \le n < b} f(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + (-1)^m \int_a^b \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

3.5 其他四种三角函数的泰勒/洛朗展开

3.5.1 $\cot x$

借助伯努利数或者 Gamma 函数，分别可以将余切分解为两种形式

定理 3.5.1: 余切函数的洛朗展开

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (2x)^{2n-1}}{(2n)!} \tag{3.5}$$

这一展开是 $\cot x$ 的洛朗展开而非泰勒展开，因为 $\cot x \sim \frac{1}{x}, x \to 0$，在 0 处不解析

证明： 依余切函数定义：$\cot x = \frac{i(e^{ix}+e^{-ix})}{e^{ix}-e^{-ix}}$

$= i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$

$= i\left(1 + \frac{2}{e^{2ix}-1}\right)$ 再利用伯努利数的级数定义：

$\cot x = i + 2i \cdot \frac{1}{2ix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n (2ix)^n}{n!}$

$\cot x = i + 2i \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n (2ix)^{n-1}}{n!}$ 因为伯努利数的奇数项只有 $B_1 = -\frac{1}{2}$，其余全为 0，故：

$\cot x = i + 2i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_2 n (2ix)^2 n-1}{2n!} - \frac{1}{2}\right)$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(i)^{2n}(2x)^{2n-1}}{2n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$ □

定理 3.5.2: 余切函数的第二种级数展开

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right) \tag{3.6}$$

证明： 利用正弦函数的无穷乘积展开式：

$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

将 πz 移至左侧并取对数，得：

$\ln \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

双侧求导，得：

$\frac{\pi z}{\sin \pi z} \left(\frac{\cos \pi z}{z} - \frac{\sin \pi z}{\pi z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2(1-\frac{z^2}{n^2})}$

进行一些基本运算并对级数内部裂项，得：

$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$

$\Rightarrow \cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi z-\pi n} + \frac{1}{\pi z+\pi n}\right)$

$\Rightarrow \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right)$ □

这一证明的注意力很强，其整体思路是：将 cot 转换为 cos 和 sin 的除法，再利用正弦函数的导数，构造相应的对数除式，而恰好注意到，$\sin z$ 的无穷乘积展开正适合构造对数求和。

3.5.2 $\tan x$

定理 3.5.3: 正切函数的 Taylor 展开

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \tag{3.7}$$

证明： 注意到：$\cot x = -2 \cot 2x + \cot x$

因为：$-2 \cot 2x + \cot x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= -\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x} = \cot x$

$\therefore \cot x = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (4x)^{2n-1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (2x)^{2n-1}}{(2n)!}$

$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n B_{2n} (1-2^{2n})(2x)^{2n-1}}{(2n)!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} 2^{2n} (2^{2n}-1) x^{2n-1}}{(2n)!}$

又当 $n = 0$ 时一般项为 0，

$\therefore \cot x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$ □

证明： 怎么开始套娃了（恼） □

3.6 原函数初等性的判定方法

3.6.1 切比雪夫定理

定理 3.6.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p \mathrm{d}x \tag{3.8}$$

初等的充要条件是：$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中至少有一个为整数

3.6.2 刘维尔定理

3.7 一些超越积分的特殊解法

3.7.1 Direchlet 积分