实分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 3 月 10 日

前言标题

前言内容

2025 年 3 月 10 日

目录

第一章　测度论

实分析中我们希望解决一个问题：如何扩展黎曼积分的定义，使得一些连续性不太好的函数也可积？

黎曼积分是基于“分割”的，强调的是一个区间上的积分；我们尝试将其扩展到具有“长度”的集合上。

我们先讨论如何建立“长度”的精确定义

1.1　外测度

我们提出一些最为基础的想法：如果可以用一系列“盒子”覆盖一个集合，我们可以主观地认为，这个集合的体积小于这个“复合盒子”的大小。如果取这些大小的下确界，我们就可以将其视为这个集合的体积。因此我们提出外测度的概念。

1.1.1　区间的体积

首先我们先考察区间的体积如何定义。我们将在后续看到，为何不在此直接定义出区间的外测度。

先给出区间（矩形）、正方体的定义

定义 1.1.1: 区间、正方体

集合 $[a,b]=[a_1,b_1]\times\cdots[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n, a_i\leqslant b_i, a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n, b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ 称为以 a,b 为端点的一个闭区间；

集合 $(a,b)=(a_1,b_1)\times\cdots(a_n,b_n)\subset\mathbb{R}^n, a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n, b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ 称为以 a,b 为端点的一个闭区间；

如果 $[a,b]$ 有 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}, b_i-a_i$ 为定值，那么称 $[a,b]$ 为一个正方体；

如果 (a,b) 有 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}, b_i-a_i$ 为定值，那么称 (a,b) 为一个正方体；

闭区间和开区间统称为区间（也称为矩形）。

并规定：如果两个区间 A,B 仅在其边界 $\partial A,\partial B$ 上有公共点，即 $(A\cap B)\subseteq(\partial A\cap\partial B)$，那么称这两个区间几乎不相交。

接下来，我们给出闭区间的体积的定义

定义 1.1.2: 闭区间的体积

们定义闭区间 $R=[a,b]$ 的体积

$$|R|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

1.1.2 外测度的定义

于是可以给出外侧度的定义：

定义 1.1.3: 外侧度

设集合 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，集合族 $\{Q_i\}$ 覆盖 E，即 $E\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Q_i$

我们定义：

$m_*(E)=inf\sum\limits_{i=1}^{\infty}|Q_i|$，称为 E 的外侧度

在考察外测度性质前，我们先证明几个引理，并考察几个比较平凡的集合的外测度。

引理 1.1.1: 闭区间体积的有限可加性

设集合 R 是有限个几乎不相交的闭区间的并，即 $R=\bigcup_{i=1}^{n} R_i$

那么有：$|R|=\sum_{i=1}^{n}|R_i|$

证明: 延展这些区间 R_i，一定会产生一系列网格，以及 $1,\cdots,M$ 的一个分割 $J_1,\cdots,J_N$，使得

$R=\bigcup_{j=1}^{M}\tilde{R}_j, R_k=\bigcup_{j\in J_k}\tilde{R}_j$，并且 $\tilde{R}_j$ 几乎不相交

实际上，数字 $1,\cdots,M$ 正标明了这些方格中包含 R 的那些方格，J_k 正是包含了 R_k 的那些序号的集合.

显然，一定有 $|R|=\sum_{j=1}^{M}|\tilde{R}_j|$，于是有

$|R|=\sum_{j=1}^{M}|\tilde{R}_j|=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_k}|\tilde{R}_j|\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}|R_k|$，因为每一个小区间 R_k 也是一系列区间的并 □

那么我们如果取消上面的几乎不相交的条件，那么重复这个过程就可以得到这个结论：

推论 1.1.2

设集合 R 包含于有限个闭区间的并，即 $R\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} R_i$

那么有：$|R|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|R_i|$

我们接下来转向不规则集合的外测度

定理 1.1.3

$\mathbb{R}$ 的任意一个开子集 O 都可以唯一地写成可数个不相交开区间的并

证明: 取 $x\in O$，接下来，取

$a_x=inf\{a|a<x,(a,x)\subseteq O\}, b_x=sup\{b|b>x,(x,b)\subseteq O\}$

于是，$I_x=(a_x,b_x)$ 是包含 x 的最大的 O 的子区间，因此有

$O=\bigcup_{x\in O} I_x$

我们接下来证明唯一性。只需要证明，不同的这些 I_x 不相交即可。

取 I_x,I_y，假设 $I_x\cap I_y\neq\emptyset$，那么又因为 I_x,I_y 分别是包含 x,y 的最大子区间，于是一定

有

$(I_x \cap I_y) \subseteq I_x, (I_y \cap I_x) \subseteq I_y \Leftrightarrow I_x = I_y$，这样这一部分就证明完毕了。

接下来证明这些区间的数量可数。由有理数的性质我们知道，每个区间至少包含一个有理数，又因为 $\mathbb{Q}$ 可数，这些区间的数量自然也是可数的。 □

我们尝试将这个结果推广到 $\mathbb{R}^d$

定理 1.1.4

R^d 中的每个开子集 O 都可以唯一地写成可数个几乎不相交的闭区间的并

证明： 我们将所有坐标为整数的点，相互连接，形成一个所有线段都平行于坐标轴的一系列网格。

随后，我们按以下步骤重复操作：

首先选取完全包含于 O 的网格将其接受，完全不包含的则排除，剩余的保留下来。

接下来，将剩余的网格，全部按坐标的中心分割为 2^d 个相同的小区间。

最后，我们把这些小区间组成的一系列网格，重复上面的两步。

这个过程一定会构造一个 $O = \bigcup\limits_{s \in A} R_s$，其中 R_x 是这些小闭区间。因为，每一个 $x \in O$，都一定能找到一个小正方体包含它。

显然，A 一定至多可数，因为整个过程在可数步内完成，这意味着，一定有 $\mathrm{Card}A \leqslant \mathrm{Card}\mathbb{N}^d$。

唯一性由构造方式是显然的。 □

在考虑这些引理后，我们开始计算一些集合的测度。

例 1.1.1. *单点的外测度* $m_*(a) = 0, a \in \mathbb{R}^d$

证明： 其实，单个点也是一个区间，只不过它的任意方向的上下界都相等。那么，这个点就覆盖自己。

单点的体积 $|a| = 0$，因为外测度非负，所以只能有 $m_*(a) = 0$ □

例 1.1.2. *闭正方体的外测度就是它的体积，即* $m_*(R) = |R|$

值得注意的是，这个命题不能因为闭正方体覆盖自己而直接得证，因为与前面的单点不同，我们仅由这一点不能断定没有其他覆盖的体积小于 $|R|$

证明： 首先，闭正方体自己覆盖自己，所以一定有 $m_*(R) \leqslant |R|$，我们只需证明相反的不等式。

取 R 的一个覆盖 $R\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_i$

取 $\varepsilon>0$，于是对于每一个 R_i，一定可以找到一个开区间 $S_i, R_i\subseteq S_i, |S_i|\leqslant(1+\varepsilon)|R_i|$

于是，$\{S_i\}$ 也构成了 R 的一个覆盖 $R\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$。

因为 R 是闭正方体，因此是紧集，于是一定能取一个有限覆盖 $R\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i$。

取 S_i 的闭包，那么也有 $R\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i$，那么利用前面的引理 1.1.2 得到：

$|R|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|S_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}|S_i|$

于是有 $|R|\leqslant(1+\varepsilon)\sum\limits_{i=1}^{n}|R_i|\leqslant(1+\varepsilon)\sum\limits_{i=1}^{\infty}|R_i|$

但是 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}|R_i|$ 覆盖 R，ε 也是随意选区的，于是有 $|R|\leqslant m_*(R)$。那么命题得证。 □

例 1.1.3. 开正方体的外测度 $m_*(R)=|R|$

证明： 首先，R 覆盖 R，所以必须有 $m_*(R)\leqslant|R|$

我们证明相反的不等式。取一个闭正方体 $R_0\subseteq R$，于是一定有 $m_*(R_0)\leqslant m_*(R)$，但是 R 也覆盖 R_0，于是 $|R_0|\leqslant m_*(R)$

但是，$|R_0|$ 可以无限接近于 R，于是一定有 $m_*(R)\leqslant|R|$，那么命题得证 □

例 1.1.4. 区间的外测度 $m_*(R)=|R|$

证明： 首先，显然有 $m_*(R)\leqslant|R|$

我们接下来证明相反的不等式。作一个 $\mathbb{R}^d$ 中边长为 $\frac{1}{k}$ 的网络，我们取那些包含在 R 中的网格，形成集合 J，并将那些与 R 相交的网格形成集合 K

那么 $R\subseteq\bigcup\limits_{Q\in(J\cup K)}Q$，并且有 $\sum\limits_{Q\in J}|Q|\leqslant|R|$

我们计算 K 中包含了 R 中某一部分的网格体积之和，显然有 $O(k^{d-1})$ 个这样的网格，每一个网格的体积为 $O(k^d)$，

那么总体积 $\sum\limits_{Q\in J}|Q|=O(\frac{1}{k})$

于是 $\sum\limits_{Q\in(J\cup K)}|Q|\leqslant|R|+O(\frac{1}{k})$，取 $k\to\infty$ 即有 $m_*(R)\leqslant|R|$ □

例 1.1.5. $m_*(\mathbb{R}^d)=+\infty$

证明： 显然，一个覆盖如果覆盖了 $\mathbb{R}^d$，那么它一定也覆盖了全部的区间，因为任意一个区间都是 $\mathbb{R}^d$ 的子集；

但是，区间的体积可以取得任意大，所以只能有 $m_*(\mathbb{R}^d)=+\infty$ □

例 1.1.6. 我们如下定义康托尔集：

我们先定义 $C_0 = [0,1]$

随后定义：C_{n+1} 是 C_n 中将每一个 I_x 平分，并去除中间一段的开区间得到的集合。其中 I_x 是包含 x 的最大子区间

我们定义：$C = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} C_i$，称为康托尔集

$m_*(C) = 0$

证明： 由康托尔集的定义可知：$m_*(C_{n+1}) = \frac{2}{3}m_*(C_n)$

所以一定有 $m_*(C) = 0$ □

1.1.3 外测度的性质

1. 单调性

   命题 1.1.1. 如果 $E \subseteq F$，那么 $m_*(E) \leqslant m_*(F)$

   证明： F 的覆盖一定也是 E 的覆盖，所以这个命题显然成立 □

2. 可数可加性

   命题 1.1.2. 如果 $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$，

   那么有 $m_*(E) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_*(E_i)$

   证明： 首先，如果有一个 $m_*(E_j) = \infty$，那么命题显然成立。我们接下来对有限外测度情形考虑。

   那么，$\forall \varepsilon > 0$，对于任意一个 E_i，一定能找到一个闭区间覆盖 $E_i \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} R_{i,j}$，其中 $R_{i,j}$ 是闭区间，并且有 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |R_{i,j}| \leqslant m_*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

   那么，$E \subseteq \bigcup\limits_{i=1,j=1}^{\infty} R_{i,j}$ 是 E 的一个覆盖。

   于是有 $m_*(E) \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |R_{i,j}| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |R_{i,j}| \right)$

   $\leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} (m_*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_*(E_i) + \varepsilon$。

   于是命题得证。 □

3.

命题 1.1.3. 设 $E \subseteq R^d$，那么有 $m_*(E) = inf\, m_*(O)$，其中 O 是开集。

证明: 首先，$m_*(E) \leqslant \inf m_*(O)$ 显然成立。我们接下来证明相反的不等式

$\forall \varepsilon > 0$，取一个闭区间覆盖 $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$，并且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i| \leqslant m_*(E) + \frac{\varepsilon}{2}$

对于每一个 R_i，可以选取一个开区间 R_i^0，使得 $R_i \subseteq R_i^0, |R_i^0| \leqslant |R_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$

那么按照开集的性质，$O = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i^0$ 也是开集。此时我们利用前面的命题得到：

$m_*(O) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_*(R_i^0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i^0|$

$\leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(|R_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$

$= \sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m_*(E) + \varepsilon$

于是我们证明了相反的不等式 $m_*(O) \leqslant m_*(E)$，那么命题得证。 □

1.2 可测集和 Lebesgue 测度

1.3 可测函数

第二章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

2.1　原函数初等性的判定方法

2.1.1　切比雪夫定理

定理 2.1.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

初等的充要条件是：$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中至少有一个为整数

2.1.2　刘维尔定理

2.2　一些超越积分的特殊解法

2.2.1　Direchlet 积分