实分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 3 月 11 日

前言标题

前言内容

2025 年 3 月 11 日

目录

第一章 测度论

实分析中我们希望解决一个问题：如何扩展黎曼积分的定义，使得一些连续性不太好的函数也可积？

黎曼积分是基于“分割”的，强调的是一个区间上的积分；我们尝试将其扩展到具有“长度”的集合上。

我们先讨论如何建立“长度”的精确定义

1.1 外测度

我们提出一些最为基础的想法：如果可以用一系列“盒子”覆盖一个集合，我们可以主观地认为，这个集合的体积小于这个“复合盒子”的大小。如果取这些大小的下确界，我们就可以将其视为这个集合的体积。因此我们提出外测度的概念。

1.1.1 区间的体积

首先我们先考察区间的体积如何定义。我们将在后续看到，为何不在此直接定义出区间的外测度。

先给出区间（矩形）、正方体的定义

定义 1.1.1: 区间、正方体

集合 $[a,b]=[a_1,b_1]\times\cdots[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n, a_i\leqslant b_i, a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n, b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ 称为以 a,b 为端点的一个闭区间；

集合 $(a,b)=(a_1,b_1)\times\cdots(a_n,b_n)\subset\mathbb{R}^n, a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n, b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ 称为以 a,b 为端点的一个闭区间；

如果 $[a,b]$ 有 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}, b_i-a_i$ 为定值，那么称 $[a,b]$ 为一个正方体；

如果 (a,b) 有 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}, b_i-a_i$ 为定值，那么称 (a,b) 为一个正方体；

闭区间和开区间统称为区间（也称为矩形）。

并规定：如果两个区间 A,B 仅在其边界 $\partial A,\partial B$ 上有公共点，即 $(A\cap B)\subseteq(\partial A\cap\partial B)$，那么称这两个区间几乎不相交。

接下来，我们给出闭区间的体积的定义

定义 1.1.2: 闭区间的体积

们定义闭区间 $R=[a,b]$ 的体积

$|R|=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

1.1.2 外测度的定义

于是可以给出外侧度的定义：

定义 1.1.3: 外侧度

设集合 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，集合族 $\{Q_i\}$ 覆盖 E，即 $E\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Q_i$

我们定义：

$m_*(E)=inf\sum\limits_{i=1}^{\infty}|Q_i|$，称为 E 的外侧度

在考察外测度性质前，我们先证明几个引理，并考察几个比较平凡的集合的外测度。

引理 1.1.1: 闭区间体积的有限可加性

设集合 R 是有限个几乎不相交的闭区间的并，即 $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$

那么有：$|R| = \sum_{i=1}^{n} |R_i|$

证明: 延展这些区间 R_i，一定会产生一系列网格，以及 $1, \cdots, M$ 的一个分割 $J_1, \cdots, J_N$，使得

$R = \bigcup_{j=1}^{M} \tilde{R}_j, R_k = \bigcup_{j \in J_k} \tilde{R}_j$，并且 $\tilde{R}_j$ 几乎不相交

实际上，数字 $1, \cdots, M$ 正标明了这些方格中包含 R 的那些方格，J_k 正是包含了 R_k 的那些序号的集合.

显然，一定有 $|R| = \sum_{j=1}^{M} |\tilde{R}_j|$，于是有

$|R| = \sum_{j=1}^{M} |\tilde{R}_j| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j \in J_k} |\tilde{R}_j| \right)$

$= \sum_{k=1}^{n} |R_k|$，因为每一个小区间 R_k 也是一系列区间的并 □

那么我们如果取消上面的几乎不相交的条件，那么重复这个过程就可以得到这个结论：

推论 1.1.2

设集合 R 包含于有限个闭区间的并，即 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R_i$

那么有：$|R| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |R_i|$

我们接下来转向不规则集合的外测度

定理 1.1.3

$\mathbb{R}$ 的任意一个开子集 O 都可以唯一地写成可数个不相交开区间的并

证明: 取 $x \in O$，接下来，取

$a_x = inf\{a|a < x, (a, x) \subseteq O\}, b_x = sup\{b|b > x, (x, b) \subseteq O\}$

于是，$I_x = (a_x, b_x)$ 是包含 x 的最大的 O 的子区间，因此有

$O = \bigcup_{x \in O} I_x$

我们接下来证明唯一性。只需要证明，不同的这些 I_x 不相交即可。

取 I_x, I_y，假设 $I_x \cap I_y \neq \emptyset$，那么又因为 I_x, I_y 分别是包含 x, y 的最大子区间，于是一定

有

$(I_x \cap I_y) \subseteq I_x, (I_y \cap I_x) \subseteq I_y \Leftrightarrow I_x = I_y$，这样这一部分就证明完毕了。

接下来证明这些区间的数量可数。由有理数的性质我们知道，每个区间至少包含一个有理数，又因为 $\mathbb{Q}$ 可数，这些区间的数量自然也是可数的。 □

我们尝试将这个结果推广到 $\mathbb{R}^d$

定理 1.1.4

R^d 中的每个开子集 O 都可以唯一地写成可数个几乎不相交的闭区间的并

证明： 我们将所有坐标为整数的点，相互连接，形成一个所有线段都平行于坐标轴的一系列网格。

随后，我们按以下步骤重复操作：

首先选取完全包含于 O 的网格将其接受，完全不包含的则排除，剩余的保留下来。

接下来，将剩余的网格，全部按坐标的中心分割为 2^d 个相同的小区间。

最后，我们把这些小区间组成的一系列网格，重复上面的两步。

这个过程一定会构造一个 $O = \bigcup\limits_{s \in A} R_s$，其中 R_x 是这些小闭区间。因为，每一个 $x \in O$，都一定能找到一个小正方体包含它。

显然，A 一定至多可数，因为整个过程在可数步内完成，这意味着，一定有 $\mathrm{Card}A \leqslant \mathrm{Card}\mathbb{N}^d$。

唯一性由构造方式是显然的。 □

在考虑这些引理后，我们开始计算一些集合的测度。

例 1.1.1. *单点的外测度* $m_*(a) = 0, a \in \mathbb{R}^d$

证明： 其实，单个点也是一个区间，只不过它的任意方向的上下界都相等。那么，这个点就覆盖自己。

单点的体积 $|a| = 0$，因为外测度非负，所以只能有 $m_*(a) = 0$ □

例 1.1.2. *闭正方体的外测度就是它的体积，即* $m_*(R) = |R|$

值得注意的是，这个命题不能因为闭正方体覆盖自己而直接得证，因为与前面的单点不同，我们仅由这一点不能断定没有其他覆盖的体积小于 $|R|$

证明： 首先，闭正方体自己覆盖自己，所以一定有 $m_*(R) \leqslant |R|$，我们只需证明相反的不等式。

取 R 的一个覆盖 $R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$

取 $\varepsilon > 0$，于是对于每一个 R_i，一定可以找到一个开区间 $S_i, R_i \subseteq S_i, |S_i| \leqslant (1+\varepsilon)|R_i|$

于是，$\{S_i\}$ 也构成了 R 的一个覆盖 $R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$。

因为 R 是闭正方体，因此是紧集，于是一定能取一个有限覆盖 $R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$。

取 S_i 的闭包，那么也有 $R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$，那么利用前面的引理 1.1.2 得到：

$|R| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |S_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |S_i|$

于是有 $|R| \leqslant (1+\varepsilon) \sum\limits_{i=1}^{n} |R_i| \leqslant (1+\varepsilon) \sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i|$

但是 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} |R_i|$ 覆盖 R，ε 也是随意选区的，于是有 $|R| \leqslant m_*(R)$。那么命题得证。 □

例 1.1.3. 开正方体的外测度 $m_*(R) = |R|$

证明: 首先，R 覆盖 R，所以必须有 $m_*(R) \leqslant |R|$

我们证明相反的不等式。取一个闭正方体 $R_0 \subseteq R$，于是一定有 $m_*(R_0) \leqslant m_*(R)$，但是 R 也覆盖 R_0，于是 $|R_0| \leqslant m_*(R)$

但是，$|R_0|$ 可以无限接近于 R，于是一定有 $m_*(R) \leqslant |R|$，那么命题得证 □

例 1.1.4. 区间的外测度 $m_*(R) = |R|$

证明: 首先，显然有 $m_*(R) \leqslant |R|$

我们接下来证明相反的不等式。作一个 $\mathbb{R}^d$ 中边长为 $\frac{1}{k}$ 的网络，我们取那些包含在 R 中的网格，形成集合 J，并将那些与 R 相交的网格形成集合 K

那么 $R \subseteq \bigcup\limits_{Q \in (J \cup K)} Q$，并且有 $\sum\limits_{Q \in J} |Q| \leqslant |R|$

我们计算 K 中包含了 R 中某一部分的网格体积之和，显然有 $O(k^{d-1})$ 个这样的网格，每一个网格的体积为 $O(k^d)$，

那么总体积 $\sum\limits_{Q \in J} |Q| = O(\frac{1}{k})$

于是 $\sum\limits_{Q \in (J \cup K)} |Q| \leqslant |R| + O(\frac{1}{k})$，取 $k \to \infty$ 即有 $m_*(R) \leqslant |R|$ □

例 1.1.5. $m_*(\mathbb{R}^d) = +\infty$

证明: 显然，一个覆盖如果覆盖了 $\mathbb{R}^d$，那么它一定也覆盖了全部的区间，因为任意一个区间都是 $\mathbb{R}^d$ 的子集；

但是，区间的体积可以取得任意大，所以只能有 $m_*(\mathbb{R}^d) = +\infty$ □

例 1.1.6. 我们如下定义康托尔集：

我们先定义 $C_0 = [0, 1]$

随后定义：C_{n+1} 是 C_n 中将每一个 I_x 平分，并去除中间一段的开区间得到的集合。其中 I_x 是包含 x 的最大子区间

我们定义：$C = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} C_i$，称为康托尔集

$m_*(C) = 0$

证明： 由康托尔集的定义可知：$m_*(C_{n+1}) = \frac{2}{3} m_*(C_n)$

所以一定有 $m_*(C) = 0$ □

1.1.3 外测度的性质

这一段中我们假设所提及的集合都是可测的。

1. 单调性

   命题 1.1.1. 如果 $E \subseteq F$，那么 $m_*(E) \leqslant m_*(F)$

   证明： F 的覆盖一定也是 E 的覆盖，所以这个命题显然成立 □

2. 可数可加性

   命题 1.1.2. 如果 $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$，

   那么有 $m_*(E) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_*(E_i)$

   证明： 首先，如果有一个 $m_*(E_j) = \infty$，那么命题显然成立。我们接下来对有限外测度情形考虑。

   那么，$\forall \varepsilon > 0$，对于任意一个 E_i，一定能找到一个闭区间覆盖 $E_i \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} R_{i,j}$，其中 $R_{i,j}$ 是闭区间，并且有 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |R_{i,j}| \leqslant m_*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

   那么，$E \subseteq \bigcup\limits_{i=1,j=1}^{\infty} R_{i,j}$ 是 E 的一个覆盖。

   于是有 $m_*(E) \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |R_{i,j}| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |R_{i,j}| \right)$

   $\leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} (m_*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_*(E_i) + \varepsilon$。

   于是命题得证。 □

3.

命题 1.1.3. 设 $E \subseteq R^d$，那么有 $m_*(E) = inf\, m_*(O)$，其中 O 是开集。

证明: 首先，$m_*(E) \leqslant \inf m_*(O)$ 显然成立。我们接下来证明相反的不等式

$\forall \varepsilon > 0$，取一个闭区间覆盖 $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$，并且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i| \leqslant m_*(E) + \frac{\varepsilon}{2}$

对于每一个 R_i，可以选取一个开区间 R_i^0，使得 $R_i \subseteq R_i^0, |R_i^0| \leqslant |R_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$

那么按照开集的性质，$O = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i^0$ 也是开集。此时我们利用前面的命题得到：

$m_*(O) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_*(R_i^0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i^0|$

$\leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(|R_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$

$= \sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m_*(E) + \varepsilon$

于是我们证明了相反的不等式 $m_*(O) \leqslant m_*(E)$，那么命题得证。 □

4.

命题 1.1.4. 如果 $E = E_1 \cup E_2$，$d(E_1, E_2) > 0$

那么 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$

证明: 首先，一定有 $m_*(E) \leqslant m_*(E_1) + m_*(E_2)$，我们接下来证明相反的不等式。

首先，一定有 $\delta, d(E_1, E_2) > \delta > 0$

那么我们选取一个 $\varepsilon > 0$ 和一个闭区间覆盖 $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i| \leqslant m_*(E) + \varepsilon$

我们不失一般性地认为，R_i 在各个方向的边长小于 δ，因为我们可以进一步分割这些闭区间来达到这一点。

那么，每一个 R_i 至多与 E_1, E_2 之一相交。于是，可以将 $\mathbb{N}$ 分割为 $\mathbb{N} = J_1 \cup J_2$，分别为与 E_1 和 E_2 相交的闭区间的下标的集合。

也就是有：$E_1 \subseteq \bigcup\limits_{i \in J_1} R_i, E_2 \subseteq \bigcup\limits_{j \in J_2} R_j$

于是，$m_*(E_1) + m_*(E_2) \leqslant \sum\limits_{i \in J_1} |R_i| + \sum\limits_{j \in J_2} |R_j|$

$\leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i| \leqslant m_*(E) + \varepsilon$

因为 ε 是任意选取的，那么 $m_*(E_1) + m_*(E_2) \leqslant m_*(E)$，于是命题得证。 □

命题 1.1.5. 如果 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$，其中 R_i 是几乎不相交的闭区间。

那么 $m_*(E) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |R_i|$

证明: 对于每一个 R_i，选取一个闭区间 $Q_i \subseteq R_i, |R_i| \leqslant |Q_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}$

那么 Q_i 互不相交，于是对于每一个 $N \in \mathbb{N}_+$，有：

$m_*(\bigcup_{i=1}^{N} Q_i) = \sum_{i=1}^{N} |Q_i| \geqslant \sum_{i=1}^{N} (|R_i| - \frac{\varepsilon}{2^i})$

但是，$\bigcup_{i=1}^{N} Q_i \subseteq E$，于是有 $m_*(E) \geqslant \sum_{i=1}^{N} |R_i| - \varepsilon$

取 $N \to \infty$，那么 $\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| \leqslant m_*(E) + \varepsilon$，那么命题得证。 □

1.2 可测集和 Lebesgue 测度

定义 1.2.1: 勒贝格可测集

设 $E \subseteq R^d$，如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开集 O，$O \subset E, m_*(O - E) < \varepsilon$

那么我们称 E 勒贝格可测，并称 E 的勒贝格测度 $m(E) = m_*(E)$

1.3 可测函数

第二章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

2.1　原函数初等性的判定方法

2.1.1　切比雪夫定理

定理 2.1.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

初等的充要条件是：$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中至少有一个为整数

2.1.2　刘维尔定理

2.2　一些超越积分的特殊解法

2.2.1　Direchlet 积分