

# 实分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 3 月 6 日

# 前言标题

前言内容

2025 年 3 月 6 日

# 目录

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| 第一章 测度论                        | 0 |
| 1.1 外测度 . . . . .              | 0 |
| 1.1.1 区间的体积 . . . . .          | 0 |
| 1.1.2 外测度的定义 . . . . .         | 1 |
| 1.1.3 外测度的性质 . . . . .         | 3 |
| 1.2 可测集和 Lebesgue 测度 . . . . . | 3 |
| 1.3 可测函数 . . . . .             | 3 |
| 第二章 附录                         | 4 |
| 2.1 原函数初等性的判定方法 . . . . .      | 4 |
| 2.1.1 切比雪夫定理 . . . . .         | 4 |
| 2.1.2 刘维尔定理 . . . . .          | 4 |
| 2.2 一些超越积分的特殊解法 . . . . .      | 4 |
| 2.2.1 Direchlet 积分 . . . . .   | 4 |

# 第一章 测度论

实分析中我们希望解决一个问题：如何扩展黎曼积分的定义，使得一些连续性不太好的函数也可积？

黎曼积分是基于“分割”的，强调的是在一个区间上的积分；我们尝试将其扩展到具有“长度”的集合上。

我们先讨论如何建立“长度”的精确定义

## 1.1 外测度

我们提出一些最为基础的想法：如果可以用一系列“盒子”覆盖一个集合，我们可以主观地认为，这个集合的体积小于这个“复合盒子”的大小。如果取这些大小的下确界，我们就可以将其视为这个集合的体积。因此我们提出外测度的概念。

### 1.1.1 区间的体积

首先我们先考察区间的体积如何定义。我们将在后续看到，为何不在此直接定义出区间的外测度。

先给出区间（矩形）、正方体的定义

**定义 1.1.1: 区间、正方体**

集合  $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a_i \leq b_i$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  称为以  $a, b$  为端点的一个闭区间;

集合  $(a, b) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  称为以  $a, b$  为端点的一个开区间;

如果  $[a, b]$  有  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b_i - a_i$  为定值, 那么称  $[a, b]$  为一个正方体;

如果  $(a, b)$  有  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b_i - a_i$  为定值, 那么称  $(a, b)$  为一个正方体;

闭区间和开区间统称为区间 (也称为矩形)。

并规定: 如果两个区间  $A, B$  仅在其边界  $\partial A, \partial B$  上有公共点, 即  $(A \cap B) \subseteq (\partial A \cap \partial B)$ , 那么称这两个区间几乎不相交。

接下来, 我们给出闭区间的体积的定义

**定义 1.1.2: 闭区间的体积**

们定义闭区间  $R = [a, b]$  的体积

$$|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

**1.1.2 外测度的定义**

于是可以给出外侧度的定义:

**定义 1.1.3: 外侧度**

设集合  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , 集合族  $\{Q_i\}$  覆盖  $E$ , 即  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

我们定义:

$$m_*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|, \text{ 称为 } E \text{ 的外侧度}$$

在考察外侧度性质前, 我们先证明几个引理, 并考察几个比较平凡的集合的外侧度。

## 引理 1.1.1: 闭区间体积的有限可加性

设集合  $R$  是有限个几乎不相交的闭区间的并, 即  $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$

那么有:  $|R| = \sum_{i=1}^n |R_i|$

**证明:** 延展这些区间  $R_i$ , 一定会产生一系列网格, 以及  $1, \dots, M$  的一个分割  $J_1, \dots, J_N$ , 使得

$$R = \bigcup_{j=1}^M \tilde{R}_j, R_k = \bigcup_{j \in J_k} \tilde{R}_j, \text{ 并且 } \tilde{R}_j \text{ 几乎不相交}$$

实际上, 数字  $1, \dots, M$  正标明了这些方格中包含  $R$  的那些方格,  $J_k$  正是包含了  $R_k$  的那些序号的集合.

显然, 一定有  $|R| = \sum_{j=1}^M |\tilde{R}_j|$ , 于是有

$$|R| = \sum_{j=1}^M |\tilde{R}_j| = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j \in J_k} |\tilde{R}_j| \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n |R_k|, \text{ 因为每一个小区间 } R_k \text{ 也是一系列区间的并}$$

□

那么我们如果取消上面的几乎不相交的条件, 那么重复这个过程就可以得到这个结论:

## 推论 1.1.2

设集合  $R$  包含于有限个闭区间的并, 即  $R \subseteq \bigcup_{i=1}^n R_i$

那么有:  $|R| \leq \sum_{i=1}^n |R_i|$

我们接下来转向不规则集合的外测度

## 定理 1.1.3

$\mathbb{R}$  的任意一个开子集  $O$  都可以唯一地写成可数个不相交开区间的并

**证明:** 取  $x \in O$ , 接下来, 取

$$a_x = \inf\{a | a < x, (a, x) \subseteq O\}, b_x = \sup\{b | b > x, (x, b) \subseteq O\}$$

于是,  $I_x = (a_x, b_x)$  是包含  $x$  的最大的  $O$  的子区间, 因此有

$$O = \bigcup_{x \in O} I_x$$

我们接下来证明唯一性。只需要证明, 不同的这些  $I_x$  不相交即可。

取  $I_x, I_y$ , 假设  $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ , 那么又因为  $I_x, I_y$  分别是包含  $x, y$  的最大子区间, 于是一定

有

$(I_x \cap I_y) \subseteq I_x, (I_y \cap I_x) \subseteq I_y \Leftrightarrow I_x = I_y$ , 这样这一部分就证明完毕了。

接下来证明这些区间的数量可数。由有理数的性质我们知道, 每个区间至少包含一个有理数, 又因为  $\mathbb{Q}$  可数, 这些区间的数量自然也是可数的。□

我们尝试将这个结果推广到  $\mathbb{R}^d$

#### 定理 1.1.4

$\mathbb{R}^d$  中的每个开子集  $O$  都可以唯一地写成可数个几乎不相交的闭区间的并

**证明:** 我们将所有坐标为整数的点, 相互连接, 形成一个所有线段都平行于坐标轴的一系列网格。

随后, 我们按以下步骤重复操作:

首先选取完全包含于  $O$  的网格将其接受, 完全不包含的则排除, 剩余的保留下来。

接下来, 将剩余的网格, 全部按坐标的中心分割为  $2^d$  个相同的小区间。

最后, 我们把这些小区间组成的一系列网格, 重复上面的两步。

这个过程一定会构造一个  $O = \bigcup_{s \in A} R_s$ , 其中  $R_s$  是这些小闭区间。因为, 每一个  $x \in O$ , 都一定能找到一个小正方体包含它。

显然,  $A$  一定至多可数, 因为整个过程在可数步内完成, 这意味着, 一定有  $\text{Card} A \leq \text{Card} \mathbb{N}^d$ 。

唯一性由构造方式是显然的。□

### 1.1.3 外测度的性质

## 1.2 可测集和 Lebesgue 测度

### 1.3 可测函数

## 第二章 附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

### 2.1 原函数初等性的判定方法

#### 2.1.1 切比雪夫定理

定理 2.1.1: 切比雪夫定理

设  $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ，那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (2.1)$$

初等的充要条件是： $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$  中至少有一个为整数

#### 2.1.2 刘维尔定理

### 2.2 一些超越积分的特殊解法

#### 2.2.1 Direchlet 积分