概率论笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 2 月 19 日

前言标题

前言内容

2025 年 2 月 19 日

目录

第一章　微分学

我们首先复习微分学中的重要概念和定理

1.1　Taylor 公式

定理 1.1.1: Taylor 公式

设函数 $f:(c,d)\to\mathbb{R}$，$f\in C^{(n)}(c,d)$，a,b 是 (c,d) 的内点。

那么 $\exists\theta\in(a,b)$, 使得：

$f(b)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i+\frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(b-a)^n$

于是立即有以下推论：

推论 1.1.2: 拉格朗日中值定理

设函数 $f:(c,d)\to\mathbb{R}$，f 可导，a,b 是 (c,d) 的内点。

那么 $\exists\theta\in(a,b)$，使得：

$f(b)-f(a)=f'(\theta)(b-a)$

推论 1.1.3

设函数 $f:(c,d)\to\mathbb{R}$，$f2$ 阶可导，a,b 是 (c,d) 的内点。

那么 $\exists\theta\in(a,b)$，使得：

$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\theta)(b-a)^2$

接下来讨论 Taylor 公式的积分余项。

定理 1.1.4: 带有累次积分余项的 Taylor 公式

设函数 $f:(c,d)\to\mathbb{R}$，$f\in C^{(n)}(c,d)$，a,b 是 (c,d) 的内点。

那么 $\exists\theta\in(a,b)$, 使得：

$f(b)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i+\int_a^b \mathrm{d}s_1\int_a^{s_1}\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\int_a^{s_{n-1}}f^{(n)}(s_n)\mathrm{d}s_n$

证明: 为了凑出累次积分，我们考虑利用 N-L 公式。

$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(s_1)\mathrm{d}s_1$

但是类似地，我们也知道，$f'(s_1)=f'(a)+\int_a^{s_1}f''(s_2)\mathrm{d}s_2$

所以有 $f(b)=f(a)+\int_a^b f'(s_1)\mathrm{d}s_1$

$=f(a)+\int_a^b\left(f'(a)+\int_a^{s_1}f''(s_2)\mathrm{d}s_2\right)\mathrm{d}s_1$

□

1.2 可测集和 Lebesgue 测度

1.3 可测函数

第二章　附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

2.1　原函数初等性的判定方法

2.1.1　切比雪夫定理

定理 2.1.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$，那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

初等的充要条件是：$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中至少有一个为整数

2.1.2　刘维尔定理

2.2　一些超越积分的特殊解法

2.2.1　Direchlet 积分