

实分析笔记

副标题

Zhang Liang

2025 年 3 月 9 日

前言标题

前言内容

2025 年 3 月 9 日

目录

第一章 测度论	0
1.1 外测度	0
1.1.1 区间的体积	0
1.1.2 外测度的定义	1
1.1.3 外测度的性质	4
1.2 可测集和 Lebesgue 测度	4
1.3 可测函数	4
第二章 附录	5
2.1 原函数初等性的判定方法	5
2.1.1 切比雪夫定理	5
2.1.2 刘维尔定理	5
2.2 一些超越积分的特殊解法	5
2.2.1 Direchlet 积分	5

第一章 测度论

实分析中我们希望解决一个问题：如何扩展黎曼积分的定义，使得一些连续性不太好的函数也可积？

黎曼积分是基于“分割”的，强调的是在一个区间上的积分；我们尝试将其扩展到具有“长度”的集合上。

我们先讨论如何建立“长度”的精确定义

1.1 外测度

我们提出一些最为基础的想法：如果可以用一系列“盒子”覆盖一个集合，我们可以主观地认为，这个集合的体积小于这个“复合盒子”的大小。如果取这些大小的下确界，我们就可以将其视为这个集合的体积。因此我们提出外测度的概念。

1.1.1 区间的体积

首先我们先考察区间的体积如何定义。我们将在后续看到，为何不在此直接定义出区间的外测度。

先给出区间（矩形）、正方体的定义

定义 1.1.1: 区间、正方体

集合 $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, $a_i \leq b_i$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ 称为以 a, b 为端点的一个闭区间;

集合 $(a, b) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ 称为以 a, b 为端点的一个开区间;

如果 $[a, b]$ 有 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i - a_i$ 为定值, 那么称 $[a, b]$ 为一个正方体;

如果 (a, b) 有 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i - a_i$ 为定值, 那么称 (a, b) 为一个正方体;

闭区间和开区间统称为区间 (也称为矩形)。

并规定: 如果两个区间 A, B 仅在其边界 $\partial A, \partial B$ 上有公共点, 即 $(A \cap B) \subseteq (\partial A \cap \partial B)$, 那么称这两个区间几乎不相交。

接下来, 我们给出闭区间的体积的定义

定义 1.1.2: 闭区间的体积

们定义闭区间 $R = [a, b]$ 的体积

$$|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

1.1.2 外测度的定义

于是可以给出外侧度的定义:

定义 1.1.3: 外侧度

设集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 集合族 $\{Q_i\}$ 覆盖 E , 即 $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

我们定义:

$$m_*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|, \text{ 称为 } E \text{ 的外侧度}$$

在考察外侧度性质前, 我们先证明几个引理, 并考察几个比较平凡的集合的外侧度。

引理 1.1.1: 闭区间体积的有限可加性

设集合 R 是有限个几乎不相交的闭区间的并, 即 $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$

那么有: $|R| = \sum_{i=1}^n |R_i|$

证明: 延展这些区间 R_i , 一定会产生一系列网格, 以及 $1, \dots, M$ 的一个分割 J_1, \dots, J_N , 使得

$$R = \bigcup_{j=1}^M \tilde{R}_j, R_k = \bigcup_{j \in J_k} \tilde{R}_j, \text{ 并且 } \tilde{R}_j \text{ 几乎不相交}$$

实际上, 数字 $1, \dots, M$ 正标明了这些方格中包含 R 的那些方格, J_k 正是包含了 R_k 的那些序号的集合.

显然, 一定有 $|R| = \sum_{j=1}^M |\tilde{R}_j|$, 于是有

$$|R| = \sum_{j=1}^M |\tilde{R}_j| = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j \in J_k} |\tilde{R}_j| \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n |R_k|, \text{ 因为每一个小区间 } R_k \text{ 也是一系列区间的并}$$

□

那么我们如果取消上面的几乎不相交的条件, 那么重复这个过程就可以得到这个结论:

推论 1.1.2

设集合 R 包含于有限个闭区间的并, 即 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^n R_i$

那么有: $|R| \leq \sum_{i=1}^n |R_i|$

我们接下来转向不规则集合的外测度

定理 1.1.3

\mathbb{R} 的任意一个开子集 O 都可以唯一地写成可数个不相交开区间的并

证明: 取 $x \in O$, 接下来, 取

$$a_x = \inf\{a | a < x, (a, x) \subseteq O\}, b_x = \sup\{b | b > x, (x, b) \subseteq O\}$$

于是, $I_x = (a_x, b_x)$ 是包含 x 的最大的 O 的子区间, 因此有

$$O = \bigcup_{x \in O} I_x$$

我们接下来证明唯一性。只需要证明, 不同的这些 I_x 不相交即可。

取 I_x, I_y , 假设 $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, 那么又因为 I_x, I_y 分别是包含 x, y 的最大子区间, 于是一定

有

$(I_x \cap I_y) \subseteq I_x, (I_y \cap I_x) \subseteq I_y \Leftrightarrow I_x = I_y$, 这样这一部分就证明完毕了。

接下来证明这些区间的数量可数。由有理数的性质我们知道, 每个区间至少包含一个有理数, 又因为 \mathbb{Q} 可数, 这些区间的数量自然也是可数的。□

我们尝试将这个结果推广到 \mathbb{R}^d

定理 1.1.4

\mathbb{R}^d 中的每个开子集 O 都可以唯一地写成可数个几乎不相交的闭区间的并

证明: 我们将所有坐标为整数的点, 相互连接, 形成一个所有线段都平行于坐标轴的一系列网格。

随后, 我们按以下步骤重复操作:

首先选取完全包含于 O 的网格将其接受, 完全不包含的则排除, 剩余的保留下来。

接下来, 将剩余的网格, 全部按坐标的中心分割为 2^d 个相同的小区间。

最后, 我们把这些小区间组成的一系列网格, 重复上面的两步。

这个过程一定会构造一个 $O = \bigcup_{s \in A} R_s$, 其中 R_s 是这些小闭区间。因为, 每一个 $x \in O$, 都一定能找到一个小正方体包含它。

显然, A 一定至多可数, 因为整个过程在可数步内完成, 这意味着, 一定有 $\text{Card} A \leq \text{Card} \mathbb{N}^d$ 。

唯一性由构造方式是显然的。□

在考虑这些引理后, 我们开始计算一些集合的测度。

例 1.1.1. 单点的外测度 $m_*(a) = 0, a \in \mathbb{R}^d$

证明: 其实, 单个点也是一个区间, 只不过它的任意方向的上下界都相等。那么, 这个点就覆盖自己。

单点的体积 $|a| = 0$, 因为外测度非负, 所以只能有 $m_*(a) = 0$ □

例 1.1.2. 闭正方体的外测度就是它的体积, 即 $m_*(R) = |R|$

值得注意的是, 这个命题不能因为闭正方体覆盖自己而直接得证, 因为与前面的单点不同, 我们仅由这一点不能断定没有其他覆盖的体积小于 $|R|$

证明: 首先, 闭正方体自己覆盖自己, 所以一定有 $m_*(R) \leq |R|$, 我们只需证明相反的不等式。

取 R 的一个覆盖 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$

取 $\varepsilon > 0$, 于是对于每一个 R_i , 一定可以找到一个开区间 $S_i, R_i \subseteq S_i, |S_i| \leq (1 + \varepsilon)|R_i|$

于是, $\{S_i\}$ 也构成了 R 的一个覆盖 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 。

因为 R 是闭正方体, 因此是紧集, 于是一定能取一个有限覆盖 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_i$ 。

取 S_i 的闭包, 那么也有 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_i$, 那么利用前面的引理 1.1.2 得到:

$$|R| \leq \sum_{i=1}^n |S_i| = \sum_{i=1}^n |S_i|$$

$$\text{于是有 } |R| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n |R_i| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} |R_i|$$

但是 $\bigcup_{i=1}^n |R_i|$ 覆盖 R , ε 也是随意选区的, 于是有 $|R| \leq m_*(R)$ 。那么命题得证。 \square

例 1.1.3. 开正方体的外测度 $m_*(R) = |R|$

证明: 首先, R 覆盖 R , 所以必须有 $m_*(R) \leq |R|$

我们证明相反的不等式。取一个闭正方体 $R_0 \subseteq R$, 于是一定有 $m_*(R_0) \leq m_*(R)$, 但是 R 也覆盖 R_0 , 于是 $|R_0| \leq m_*(R)$

但是, $|R_0|$ 可以无限接近于 R , 于是一定有 $m_*(R) \leq |R|$, 那么命题得证 \square

例 1.1.4. 区间的外测度 $m_*(R) = |R|$

证明: 首先, 显然有 $m_*(R) \leq |R|$

我们接下来证明相反的不等式。作一个 \mathbb{R}^d 中边长为 $\frac{1}{k}$ 的网络, 我们取那些包含在 R 中的网格, 形成集合 J , 并将那些与 R 相交的网格形成集合 K

$$\text{那么 } R \subseteq \bigcup_{Q \in (J \cup K)} Q, \text{ 并且有 } \sum_{Q \in J} |Q| \leq |R|$$

我们计算 K 中包含了 R 中某一部分的网格体积之和, 显然有 $O(k^{d-1})$ 个这样的网格, 每一个网格的体积为 $O(k^{-d})$,

$$\text{那么总体积 } \sum_{Q \in J} |Q| = O(\frac{1}{k})$$

$$\text{于是 } \sum_{Q \in (J \cup K)} |Q| \leq |R| + O(\frac{1}{k}), \text{ 取 } k \rightarrow \infty \text{ 即有 } m_*(R) \leq |R|$$

\square

例 1.1.5. $m_*(\mathbb{R}^d) = +\infty$

证明: 显然, 一个覆盖如果覆盖了 \mathbb{R}^d , 那么它一定也覆盖了全部的区间, 因为任意一个区间都是 \mathbb{R}^d 的子集;

但是, 区间的体积可以取得任意大, 所以只能有 $m_*(\mathbb{R}^d) = +\infty$ \square

例 1.1.6. 我们如下定义康托尔集：

我们先定义 $C_0 = [0, 1]$

随后定义： C_{n+1} 是 C_n 中将每一个 I_x 平分，并去除中间一段的开区间得到的集合。其中 I_x 是包含 x 的最大子区间

我们定义： $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$ ，称为康托尔集

$$m_*(C) = 0$$

证明： 由康托尔集的定义可知： $m_*(C_{n+1}) = \frac{2}{3}m_*(C_n)$

所以一定有 $m_*(C) = 0$

□

1.1.3 外测度的性质

1.2 可测集和 Lebesgue 测度

1.3 可测函数

第二章 附录

这一部分中，对于正文中因为逻辑结构无法提及的部分，进行补充。包括特殊函数，有趣的数学概念，一些命题的全新解法，以及难以推导的公式证明可能使用复分析、实分析、泛函等超纲内容

2.1 原函数初等性的判定方法

2.1.1 切比雪夫定理

定理 2.1.1: 切比雪夫定理

设 $m, n, p \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ，那么以下积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (2.1)$$

初等的充要条件是： $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中至少有一个为整数

2.1.2 刘维尔定理

2.2 一些超越积分的特殊解法

2.2.1 Direchlet 积分