Práctico 2

1. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

2. Dar el área de la superficie de un cubo como función de su volumen.

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

(d) $f(x) = (\sqrt{x})^2$.

(e) $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1. \end{cases}$

4. Encontrar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

5. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Dar el dominio de las siguientes funciones y determinar la expresión de cada una de ellas:
(a) $P(x) = f(f(x))$.
(b) $Q(x) = f(1/x)$.
(c) $R(x) = f(cx)$.

6. Sean $C(x) = x^2$, $P(x) = \dfrac{1}{x}$ y $S(x) = \operatorname{sen}(x)$.

(i) Dar el dominio de las siguientes funciones y determinar la expresión de cada una de ellas:

(a) $(C \circ P)(y)$. (b) $(C \circ P \circ S)(t) + (S \circ P)(t)$.

(ii) Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de C, P, S.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x^2)}$. (b) $f(t) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))$. (c) $f(u) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{u}\right)$.

7. (a) Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definimos la función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Si A y B son dos subconjuntos arbitrarios de los números reales, encontrar expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}\setminus A}$, en términos de C_A y C_B.

(b) Probar que si f es una función tal que $f(x) = 0$ ó 1 para todo x, entonces existe un conjunto A tal que $f = C_A$.

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A.

8. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, donde f, g y h son funciones definidas en todo $\mathbb{R}$.
(a) Si f y g son pares, entonces $f+g$ es par.
(b) Si f es par y g es impar, entonces $f+g$ es impar.
(c) Si f y g son impares, entonces fg es par.
(d) Si f y g son impares, entonces $f \circ g$ es par.
(e) La función $|f|$ es par.
(f) La función $f(|x|)$ es par.

(g) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
(h) $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g$.

9. (a) Sea $f(x) = x + 1$. ¿Existe una función g tal que $f \circ g = g \circ f$?
(b) Sea f una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple $f \circ g = g \circ f$?
(c) Supongamos que f es una función tal que $f \circ g = g \circ f$ para toda función g. Demostrar que f es la función identidad.

10. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 \leq x < 1, \\ -x + 3 & 1 \leq x < 4, \\ \frac{1}{2}x - 3 & 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Graficar la función g donde:

(a) $g(x) = f(x)$. (b) $g(x) = f(x) - 1$. (c) $g(x) = f(x + 2)$.
(d) $g(x) = 2f(x)$. (e) $g(x) = -f(x)$. (f) $g(x) = f(2x)$.
(g) $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$. (h) $g(x) = f(-x)$. (i) $g(x) = |f(x)|$.

11. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones, dar su dominio e imagen, y analizar si son inyectivas.

(a) $a(t) = 5t - 2$. (b) $b(x) = 3x^2 + 2x - 1$. (c) $c(t) = -t^2 + 1$.
(d) $d(t) = |t - 3|$. (e) $X(t) = \frac{t}{|t|}$. (f) $V(x) = |\operatorname{sen}(x)|$.
(g) $W(t) = \operatorname{sen}^2(t)$. (h) $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

12. Hallar f^{-1} para cada una de las siguientes funciones, e indicar su dominio.

(a) $f(x) = x^3 + 1$. (b) $f(x) = (x - 1)^3$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2, \\ 0 & \text{si } x = 2. \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 1 - x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

13. Para cada una de las siguientes funciones, escoger un intervalo cerrado $[a, b]$ de tal manera que la función restringida a tal intervalo es inyectiva. Dar en cada caso la función inversa restringida a la imagen.

(a) $f(x) = -x^2$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.