Practico 7

1 Teorico

Definition 1. *Sea f definida en un intervalo abierto A, se dice que f alcanza el maximo en $a \in A$ si f(a)$\geqslant f(x)$ $\forall x \in A$. En este caso a se denomina punto de Maximo - Tambien llamado punto de maximo global. No necesariamente puede ser unico. El valor del maximo es f(a).*

Definition 2. *Sea f definida en un intervalo abierto A, se dice que $a \in A$ es un punto de maximo locas si $\exists \delta > 0$ tal que $f(a) \geqslant f(x) \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$*

Theorem 3. *Sea f una funcion definida en un abierto A, y sea a un punto de maximo o minimo local. Si f es derivable en a entonces $f'(a) = 0$.*

Demostracion:

Supongamos que tenemos un maximo en a, como f es derivable, entonces:

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a) \leqslant 0$;$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a) \geqslant 0$ (esto porque h^- es negativo)

Como el limite existe: $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$, por lo cual la unica opcion es que: $f'(a) = 0$

1.1 Maximos y minimos globales de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

Primero recordemos los teoremas fuertes:

Theorem 4. *Primer Teorema Fuerte: Si f es una funcion continua en el intervalo [a,b]. Si f(a)<0 y f(b)>0 , entonces existe un numero $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Theorem 5. *Segundo Teorema Fuerte: Sea f:[a,b]$\to\mathbb{R}$ una funcion continua, entonces f esta acotada superiormente: $\exists M \in \mathbb{R} / f(x) \leqslant M, \forall x \in [a, b]$. (Si esta acotada superiormente, tambien debe estar acotada inferiormente).*

Theorem 6. *Tercer Teorema Fuerte: Toda funcion continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza un maximo (y un minimo). Es decir $f: [a, b] \to \mathbb{R} \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) \geqslant f(x) \forall x \in [a, b]$*

Habiendo revisado esto, vemos que segun el tercer teorema fuerte, una funcion continua siempre alcanza su maximo y tambien su minimo. El siguiente teorema nos indica donde buscar este maximo (o minimo):

Proposition 7. *Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, f una funcion continua. Entonces, el maximo de f en $[a, b]$, es el maximo entre los numeros $f(x)$ con x de la siguiente forma:*

1. *$x = a$ o $x = b$, es decir el maximo esta en los extremos del intervalo*
2. *$x \in (a, b)$ tal que $f'(x)$ no existe (Caso $f(x) = \pm|x|$)*
3. *$x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$*

Los puntos x que cumple 2 y 3 se denominan, ***puntos criticos*** *de f.*

Theorem 8. *Teorema de Rolle: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, una funcion continua, tal que $f(a) = f(b)$, si f es derivable en $(a, b) \Rightarrow \exists t_0 \in (a, b) / f'(t_0) = 0$*

Theorem 9. *Teorema del valor Medio: Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, una funcion continua. Si f es derivable en el intervalo (a,b) entonces existe $t_0 \in (a,b) \,/\, f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$*

Corollary 10. *Si f es una funcion derivable en el abierto A, entonces si $f'(t) = 0 \forall t \in A$, entonces, $f(t) = \text{cte}$. - Reciproca de: la derivada de una funcion constante es cero.*

Corollary 11. *Si $f'(x) = g'(x) \forall x \in A \Rightarrow f(x) = g(x) + c \forall x \in A$, donde nuevamente A es un intervalo abierto.*

Corollary 12. *Funcion Creciente: Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ cumple que $f'(x) > 0 \forall x \in A \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en A.*

Proposition 13. *Sea $f\colon (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$, si f es creciente en $(a-\delta, a)$ y f es decreciente en $(a, a+\delta)$ entonces a es un punto de maximo. Mismamente si en lugar de esto f es decreciente en $(a-\delta, a)$ y creciente en $(a, a+\delta)$ luego a es un punto de minimo.*

1.2 Concavidad y convexidad

Definition 14. *Una funcion derivable f definida en un intervalo abierto se dice convexa si f' es estrictamente creciente y se dice concava si f' es estrictamente decreciente. Veamos la imagen de abajo como referencia:*

Figure 1. Izquierda. Podemos ver como la pendiente de la recta tangente a cada punto va aumentando, pasando de valores negativos, a cero y posteriormente cada vez valores mas positivos. Para una funcion concava lo que tenemos es como la pendiente va disminuyendo el valor de la pendiente.

Nota: Es posible demostrar que si f'' existe y es positiva entonces , por lo visto anteriomente f' es estrictamente creciente (Corolario 12). Si esto sucede entonces la funcion es convexa. Por otro lado si demuestra que $f''<0$, puede por la misma razon demostrar que la funcion es concava.

Theorem 15. *Sea $f: A \to \mathbb{R}$ tal que $f'(a)=0$,* si $f''(a)>0$, entonces a es un minimo local, si $f''(a)<0$ el punto es de maximo local.

Theorem 16. *Teoema del valor medio de Cauchy: Sean f,g dos funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b]$, siendo ambas derivables en $(a,b) \Rightarrow \exists t_0 \in (a,b)$ tal que:*

$$(g(b)-g(a))f'(t_0)=(f(b)-f(a))g'(t_0)$$

Theorem 17. *Teorema de L'Hopital: Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ entonces si $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ luego: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$*

Proposition 18. *Aplicacion de la regla de L'Hopital: Si existe $\lim_{x\to a} g'(x)=l$ entonces existe $g'(a)=l$*

1.3 Asintotas

Definition 19. *Se dice que una funcion f tiene una asintota vertical en a si:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty \, y \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$$

Definition 20. *Se dice que una funcion f tiene una asintota horizontal si:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$$

Definition 21. *Se dice que f tiene una asintota oblicua de pendiente l si:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=l$$

De forma similar se definen asintotals oblicuas cuando $x\to-\infty$

1.4 Graficos de funciones

Para realizar los graficos de una funcion, se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Conocer el dominio y la paridad de f
2. Puntos de interseccion de f con los ejes coordenados
3. Limites en los extremos de los intervalos
4. Asintotas verticales, horizontales y oblicuas
5. Puntos criticos y sus valores
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento junto a: maximos, minimos locales/globales

7. Intervalos de Concavidad/Convexidad y puntos de inflexion

2 Practico

1. Para cada una de las siguientes funciones determinar si existe maximos o minimos locales y globales en el conjunto A

   - Para conjuntos cerrados y acotados, sabemos que una funcion continua (Por el tercer teorema fuerte) va a alcanzar su maximo y su minimo. Estos puntos de maximo o minimo los podemos encontrar:

     – Pueden estar en los extremos del intervalo $[a, b]$

     – Pueden encontrarse en (a, b) donde $t \in (a, b)$ cumple que no existe f'

     – Pueden encontrarse en (a, b) donde $t \in (a, b)$ cumple que $f'(x) = 0$

   a)

   b)

   c)

   d)

   e)

   f) $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$ en $\left[0, \frac{7\pi}{15}\right]$; $\frac{7\pi}{15} = \frac{5\pi + 2\pi}{15} = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{15}\pi$

     – $f(0) = 1$; $f\left(\frac{7\pi}{15}\right) = \text{sen}\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right)$

     – La derivada de la funcion existe en todos los puntos.

     – $f'(x) = \cos(x) - \text{sen}(x)$

2.

3. Demostrar que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + m$ no posee dos raices distintas en el intervalo $[0, 1]$.

   – Veamos donde estan los maximos y los minimos de esta funcion:

   – $p(0) = m$; $p(1) = 1 - 3 += m - 2$: Esto nos dice que: $p(0) > p(1)$

   – $p'(x) = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$: Esto dice que hay 2 puntos criticos, uno de los cuales esta fuera del intervalo y el otro esta dentro del intervalo.

   – Lo anteriomente obtenido nos dice que $x = 1$ tiene un minimo.

   – Por otro lado, al derivada existe en todos los puntos del intervalo.

   – Observe ademas que: $p'(x) \leqslant 0 \forall x \in [0, 1]$ por lo cual tenemos una funcion dereciente, en el mismo.

   – La funcion no se dobla para volver a tocar el eje denuevo.

4. Para cada uno de las siguientes funciones verificar el Teorema del Valor Medio, encontrando explicitamente el valor de c.

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$

      – Recuerde que el teorema del valor medio nos dice que $\exists t_0 \in (a, b) / f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

      – $f(2) = \frac{1}{2}$; $f(1) = 1$ entonces: $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{-0.5}{1} = -0.5$

      – Por otro lado, en el intervalo: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

      – Resolvemos entonces: $-0.5 = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, donde solamente cumple estar en el intervalo: $x = \sqrt{2}$ siendo este el punto en cuestion.

5. Demostrar que si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ no hay un valor c tal que: $f(2) - f(0) = 2f'(c)$; Porque esto no contradice el teorema del valor medio?

   – Primero el problema sugiere aplicar el TVM en el intervalo $[0, 2]$, para que este se cumpla f debe ser derivable en $(0, 2)$ sin embargo, el punto $x = 1$ pertenece al intervalo y es un punto donde f no esta definida, por lo cual el teorema no puede aplicarse.

6. Para cada una de las siguientes funciones, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mınimos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión, asintotas horizontales y verticales y grafique.

   a)

   b)

   c)

   d)

   e)

   f)

   g)

   h)

   i) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 5}$

      – $x^2 + 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 5}}{2}$

      – El discriminante nos dice que tenemos, raices complejas, por lo tanto el denominador nunca se anula.

      – Pasos para el grafico:

         1. Dom f = $\mathbb{R}$

         2. Saber si es par: $f(-x) = f(x)$ (Lo cual no sucede) ; Tampoco es impar.

         3. No hay puntos de interseccion con los ejes coordenados

4. Asintotas: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+3x+5} = 0$ (Asintota Horizontal) ; Para la asintota oblicua hacemos: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+3+5/x} = 0$ (asintota de pendiente $m=0$)

- Puntos Criticos: Puntos donde la derivada existe o no existe.

  $f'(x) = (x^2+3x+5)^{-1} = -(x^2+3x+5)^{-2}(2x+3)$; Esta derivada existe para todo x en su dominio. Ya sabemos que el denominador no se anula. Entonces, todo depende del numerador: $2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

- Fijarse que el denominador tiene siempre signo positivo. Pero el numerado es : $-(2x+3)$ cambia de signo en $x=-\frac{3}{2}$, si $x < -\frac{3}{2}$ el numerador es positivo, caso contrar io es negativo. Como la derivada es positiva en: $(-\infty, -3/2)$ entonces f es creciente, mientras que es negativa en el otro intervalo: $(-3/2, \infty)$ por lo tanto f es decreciente (estricto). Esto sugiere que f tiene un **maximo** en $x = -\frac{3}{2}$.

- Seguro este punto es concavo. Deben existir ademas puntos de inflexion. Para buscarlos puedo utilizar la derivada segunda (Mucho ojo, que si la derivada segunda es nula, no es necesariamente ese un punto de inflexion)

- $f''(x) = 2(x^2+3x+5)^{-3}(2x+3)^2 - (x^2+3x+5)^{-2}(2)$

- $f''(x) = 2(x^2+3x+5)^{-2}[(x^2+3x+5)^{-1}(2x+3)^2 - 1]$

- Si todo esta bien, solo tendria que analizar el signo de lo que esta en corchete. Solo tendria que ver donde se anula el corchete y este se anula en:

- $4x^2+12x+9-x^2-3x-5 = 3x^2+9x+4 = 0$

  $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-4(3)(4)}}{6}$; aca hay dos raices reales distintas y esos serian los puntos de inflexion.

j)

k)

7.

8.

9. Probar que $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a-b|$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Deducir que $\operatorname{sen}(x) < x$;

- Si consideramos el intervalo $[a,b]$ veremos que la funcion sen(x) es continua alli y aun mas es derivable en el abierto (a,b). Entonces puede utilizar el teorema del valor medio:

$$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{a-b} = \cos(c)$$

- Donde $a < c < b$. Si ahora despejamos y tomamos el modulo:

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| = |a-b|\,|\cos(c)| \leqslant |a-b|$$

- Donde con este ultimo resultado ya hemos probado lo que se queria. Si consideramos $b=0$ por ejemplo tendriamos:

$|\operatorname{sen} a| \leqslant |a|$

- Si en particular $a > 0$ luego tendremos que: $\operatorname{sen} a \leqslant |\operatorname{sen} a| \leqslant a$ que es lo ultimo que queriamos demostrar.

10. Sean $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en todo punto del intervalo abierto I.

    a) Si $f'(x) > g'(x) \forall x \in I \wedge f(a) = g(a) \Rightarrow f(x) > g(x)$ si $x > a$ y $f(x) < g(x)$ si $x < a$.

    - $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h(x)$ es derivable en I ; $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$
    - Si esto sucede, $h(x)$ es creciente.
    - Como $h(a) = 0$ luego $h(x) > 0$ $\forall x > a \Rightarrow f(x) > g(x) \forall x > a / x \in I$
    -

    b) Demostrar que no se cumple lo anterior si no se supone que $f(a) = g(a)$

    - Si lo anterior no sucede, entonces tiene que considerar tricotomia:

      $h(a) > 0$ o bien $h(a) < 0$
    - Contraejemplos $f(x) = 0$ y $g(x) = -x$. Claramente $f'(x) > g'(x)$, en consecuencia si estamos considerando un

11. Sea $f(x)$ una funcion tal que $f'(x) = \frac{1}{x} \forall x > 0$ y $f(1) = 0$. Demostrar que $f(xy) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y > 0$ (Esto es basicamente la propiedad del logaritmo)

    - Como dice la sugerencia, usar la derivada de $g'(x) = f'(xy)$ hacemos ese calculo:
    - $g(x) = f(xy) \Rightarrow g'(x) = f'(xy)\, y = \frac{1}{xy} y = \frac{1}{x}$, esto basicamente nos dice que tenemos dos funciones f, g tales que cumplen: $f'(x) = g'(x)$ por lo cual sabemos que las mismas difieren en una constante: $f(x) = g(x) + c$
    - $f(x) = f(xy) + c$
    - Para conocer el valor de c , simplemente hacemos $x = 1$ $(f(1) = 0) \Rightarrow 0 = f(y) + c$
    - Es decir que $c = -f(y) \Rightarrow f(xy) = f(x) + f(y)$

12.