Práctico 5

1. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & x < 0, \\ x\,\mathrm{sen}(x) & x \geq 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(5x)}{x} & x < 0, \\ 5 & x = 0, \\ \dfrac{\sqrt{1+10x}-1}{x} & x > 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$.

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1, \\ 6 & x = -1. \end{cases}$

(f) $f(x) = x^2\,\mathrm{sen}(1/x)$.

2. (a) Probar que si $|f(x)| \leq |x|$, entonces f es continua en 0.

(b) Probar que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, g es continua en 0 y $g(0) = 0$, entonces f es continua en 0.

3. Determinar para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F, definida en toda la recta real, que extienda a f.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$.

(b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

(c) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$.

4. (a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que si $f|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$.

(b) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y coinciden en $\mathbb{Q}$, entonces son iguales.

5. (a) Mostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una extensión continua g definida en todo $\mathbb{R}$.

(b) Mostrar que la conclusión del punto anterior es falsa si cambiamos $[a, b]$ por (a, b).

6. Sean f continua en $[a, b]$ y g continua en $[b, c]$. Probar que si $f(b) = g(b)$, entonces la función $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, c]$, donde h está definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b], \\ g(x) & x \in [b, c]. \end{cases}$$

7. Para cada una de las siguientes funciones decir si están acotadas superior o inferiormente y si alcanzan sus valores máximos o mínimos.

(a) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.

(b) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x^4$ en $(-1, 2]$.

(d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en $[0, a]$, para algún $a > 0$.

(e) $f(x) = 2 + \mathrm{sen}(x)$ en $\big[k\pi, (k+1)\pi\big]$, con $k \in \mathbb{Z}$.

(f) $f(x) = 2 + \mathrm{sen}(x)$ en $\big(k\pi, (k+1)\pi\big)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

8. Sea $p(x) = x^5 + x + 1$.

(a) Demostrar que $\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ (Sugerencia: comparar $p(x)$ con la función x^5).

(b) Probar que $p(x)$ es suryectiva.

(c) Hallar un número natural n tal que $p(x) = 0$ para algún $x \in [-n, n]$.

9. Sea f una función continua y supongamos que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de f?

10. (a) Probar que si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un x_0 en (a, b) tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

(b) Graficar las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $x + 1$ en el mismo sistema de ejes coordenados. Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = x + 1$, tiene al menos una solución.

(c) Demostrar que existe un $x \in [0, \pi/2]$ tal que $x^3 \operatorname{sen}^7(x) = 2$

(d) Demostrar que en el plano, un círculo de radio 1 y un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ pueden intersecarse en una región cuya área sea exactamente 1,337.

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.

(a) Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}$ entonces f alcanza un mínimo.

(b) Si $|f|$ es continua en a entonces entonces f es continua en a.

(c) Existe un número que es exactamente una unidad mayor que su cubo.

12. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. Mostrar que si f es continua, entonces tiene un punto fijo, esto es, existe un a tal que $f(a) = a$. Interpretar gráficamente.

13. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 am y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las 7:00 pm. A la mañana siguiente baja de la cima a las 7:00 am, siguiendo el mismo camino, arriba al monasterio a las 7:00 pm. Con el teorema del valor intermedio, demuestre que hay un punto del camino por el cual el monje pasa exactamente a la misma hora de los dos días.

14. Sea f definida y continua en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que f es siempre positiva y que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

15. (a) Definir una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.

(b) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

(c) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

16. (a) ¿Cuántas funciones f continuas hay tales que $f(x)^2 = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$?

(b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si no exigimos continuidad?

(c) Si f y g son continuas con $g(x) \neq 0$ para todo x y si $f^2 = g^2$, probar que $f = g$ o $f = -g$.

(d) ¿Qué sucede si no suponemos g nunca nula en el inciso anterior?