# Practico 2

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. $C_A(x) = \begin{cases} 1 \,\text{si}\, x \in A \\ 0 \,\text{si}\, x \notin A \end{cases}$, $A, B$ subconjuntos de numeros Reales

   a) Expresiones para: $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$, $C_{\mathbb{R}-A}$

      – $C_{A\cap B} = \begin{cases} 1 \,\text{si}\, x \in A\cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ 0 \,\text{si}\, x \notin A\cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \end{cases}$

      – Es decir que esto puede escribirse como: $C_{A\cap B} = C_A \cdot C_B$

      – Comprobacion:

| $x \in A$ | $x \in B$ | $x \in A\cap B$ | $C_{A\cap B}$ | $C_A \cdot C_B$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | 1 | 1 |
| $F$ | $V$ | $F$ | 0 | 0 |
| $V$ | $F$ | $F$ | 0 | 0 |
| $F$ | $F$ | $F$ | 0 | 0 |

      – $C_{A\cup B} = \begin{cases} 1 \,\text{si}\, x \in A\cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\ 0 \,\text{si}\, x \notin A\cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \end{cases}$

      – Puede escribirse pensando en: $C_{A\cup B} = C_A + C_B - C_A \cdot C_B$

      – Comprobacion:

| $x \in A$ | $x \in B$ | $x \in A\cup B$ | $C_{A\cup B}$ | $C_A + C_B - C_A \cdot C_B$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | 1 | 1 |
| $V$ | $F$ | $V$ | 1 | 1 |
| $F$ | $V$ | $V$ | 1 | 1 |
| $F$ | $F$ | $F$ | 0 | 0 |

      – $C_{\mathbb{R}-A} = \begin{cases} 1 \,\text{si}\, x \notin A \\ 0 \,\text{si}\, x \in A \end{cases}$

      – Puede escribirse como: $C_{\mathbb{R}-A} = 1 - C_A$

      – Comprobacion:

| $x \in A$ | $x \in \mathbb{R}-A$ | $C_{\mathbb{R}-A}$ | $1 - C_A$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $F$ | 0 | 0 |
| $F$ | $V$ | 1 | 1 |

b) $f$ solo puede tomar 2 valores: 0 o 1. Por ejemplo, $f(x)=1 \forall x \in \mathbb{R}$ , de manera que si $x \notin \mathbb{R} \Rightarrow f(x)=0$. De la misma forma seria para $f(x)=0$. Claramente $f=C_{\mathbb{R}}$. Si solo se cumple para un subconjunto $A$, tendremos lo mismo.

c)

i. Si $f=f^2 \Rightarrow f=C_A$

- $f(x)=f^2(x) \, \forall x \in A \Leftrightarrow 0=f(x)[f(x)-1]$
- Si $x \in A \Rightarrow f(x)[f(x)-1]=0 \Rightarrow f(x)=1$ o $f(x)=0$
- Segun b) luego $f=C_A$

ii. Si $f=C_A \Rightarrow f=f^2$

- $C_A{\cdot}C_A=1$ si $x \in A$ , 0 Si $x \notin A$ , es decir $C_{A\cap A}=C_A$

8.

a) Verdadero: $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$

b) Falso: $f(x)=x^2$, $g(x)=x \Rightarrow (f+g)(-x)=x^2-x \neq -(f+g)(x)=-(x^2+x)$

c) Verdadero: $(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)(-g(x))]=f(x)g(x)=(fg)(x)$

d) Falso: $f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))$

e) Falso: $|2x+1|$ no es par: si $x=1 \Rightarrow |2x+1|=3$ si $x=-1 \Rightarrow |2x+1|=1$

f) Verdadero: $f(|-x|)=f(|x|)$

g) Falso: $f(x)=x^2$ , $g(x)=-x$, $h(x)=x \Rightarrow [x-x]^2=0 \neq x^2+x^2 \forall x \neq 0$

h) Pregunta no trivial. La composicion de Funciones ES asociativa, por lo cual el enunciado es verdadero.

- $\mathrm{Dom}\, f \circ g=\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \in \mathrm{Dom}\, f\}$
- $\mathrm{Dom}\, k \circ f=\{g \in \mathrm{Dom}\, f \,/\, f(g) \in \mathrm{Dom}\, k\}$
- $\mathrm{Dom}\, (k \circ f) \circ g=\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \in \mathrm{Dom}\, k \circ f\}$
  $=\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \in \mathrm{Dom}\, f \,/\, f(g) \in \mathrm{Dom}\, k\}$
- $\mathrm{Dom}\, k \circ (f \circ g)=\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \in \mathrm{Dom}\, f \,/\, f(g) \in \mathrm{Dom}\, k\}$

9.

a) Si: $f(x)=x+1$, busque la inversa: $y=x+1 \Leftrightarrow x=y-1$ , luego: $[x-1]+1=x=[x+1]-1$

b) Si $f(x)=c$ No tiene inversa porque no es uno a uno. La unica funcion que cumpliria que $f(g)=g(f)$ es ella misma o la identidad.

c)

- La funcion identidad cumple: $I(x)=x$, en particular: $I(g(x))=g(x) \ \forall g$

- Por otro lado: $g\left(I(x)\right) = g(x)$
- Juntando ambas afirmaciones queda demostrado.

10.

11.

12.

a) $f(x) = x^3 + 1 \Leftrightarrow y = x^3 + 1 \Leftrightarrow x = (x-1)^{1/3}$ , $\operatorname{dom} f^{-1} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (x-1)^3 \Leftrightarrow y^{1/3} + 1 = x$ , $\operatorname{dom}\, f^{-1} = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 0 \\ 2x & x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2}y & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$

Nota: La imagen de $f(x)$ para $x < 0$ son los $\mathbb{R}_{<0}$ y $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ para el otro caso.

e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{y} & \text{si } y \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Im} \frac{-1}{x-2} = \mathbb{R} - \{0\}$ Este es el dominio de la inversa para ese caso.

f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \;\; \operatorname{Im} - x^2 = \mathbb{R}_{\leqslant 0} \\ 1 - x^3 & x < 0 \;\; \operatorname{Im} 1 - x^3 = \mathbb{R}_{>1} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{-y} & \text{si } y \leqslant 0 \\ (1-y)^{1/3} & \text{si } y > 1 \end{cases}$

13.

a) $f(x) = -x^2$, restrinja el domino a $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, por ejemplo: $[0, 10]$, Im $f = \mathbb{R}_{\leqslant 0}$, en ese caso: $\sqrt{-y} = x$ con dominio: $[-100, 0]$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , igual que arriba solo que debe excluir el 0 del dominio.