Práctico 4

1. Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$. (b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$. (c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

(d) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y}$. (e) $\lim_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h\sqrt{1+h}} - \dfrac{1}{h}\right)$. (f) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ $(a>0)$.

(g) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$. (h) $\lim_{x\to 2} \left(x^2-[x]\right)$. (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x\cos(x)}$.

2. Trazar la gráfica de la función

$$g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x < -1, \\ x+2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1, \\ 4 & \text{si} \quad x = 1, \\ 4-x & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Además, determinar el valor de los siguientes límites cuando existan.

(i) $\lim_{x\to -1^-} g(x)$. (ii) $\lim_{x\to -1^+} g(x)$. (iii) $\lim_{x\to -1} g(x)$. (iv) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$.

(v) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$. (vi) $\lim_{x\to 1} g(x)$. (vii) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$. (viii) $\lim_{x\to \infty} g(x)$.

3. En cada uno de los siguientes casos, para $\varepsilon > 0$ dado, encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x-a| < \delta$.

(a) $\begin{cases} f(x) = x^4, \\ l = a^4. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}, \\ a = 1,\ l = 1. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}, \\ a = 1,\ l = 2. \end{cases}$

4. Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$. (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = 2a$. (c) $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

(d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$.

5. Demostrar por definición que no existen los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$. (b) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

6. Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim_{y\to \infty} \dfrac{3y-4}{6y+1}$. (b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{5x^3-2x+7}{4x^2-1}$. (c) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3+7x}{x^4-2}$.

(d) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$. (e) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

7. Supongamos que f, g y h satisfacen $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo x y que $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$. Demostrar que $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

8. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

(b) Si $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existe, entonces no necesariamente existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Si $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to \infty} f(x)$.

(d) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.
(e) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe para todo $a \in \mathbb{R}$.

9. Calcular los siguientes límites. Recordar que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}$.
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$.
(c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\pi/2 - x}{\cos(x)}$.
(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.
(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$.

10. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar. Asumir que las funciones f y g están definidas en un abierto que contiene a a o a 0 según corresponda.
(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(-x)$.
(b) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ no existe.
(c) Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} g(x)\operatorname{sen}(1/x) = 0$.
(d) Si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
(e) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$.