1 Teoria

- Que es una sucesion? : Una sucesion real es una funcion tal que mapea de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Limite - Convergencia: $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \text{si}\, n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
- Proposicion: considere $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} b_n = m$, $c \in \mathbb{R}$
  - $\lim_{n\to\infty} c a_n = cl$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = l + m$ (Demostrado con desigualdad triangular)
  - $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = lm$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$, $m \neq 0$
- Proposicion: El limite de una sucesion es unico.
- Proposicion: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, es decir el limite existe, entonces la sucecion $\{a_n\}$ esta acotada.
- Lema del Sandwich: Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, con $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} c_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = l$
- Limites utiles:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$
- Sucesion que tiende a Infinito: $\lim_{n\to\infty} a_n = \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \text{si}\, n > N \Rightarrow a_n > M$
- Proposicion: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = l \neq 0$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n + c_n = \infty$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \infty$ $(l > 0)$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = -\infty$ $(l < 0)$
- Teorema: Toda sucesion creciente (No necesariamente Estricatamente creciente) y acotada superiormente tiene un limite. Esto implica:
  - $a_n \leqslant a_{n+1}$ $\forall n$
  - $a_n \leqslant M$ $\forall n$
  - Entonces: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n\}$
- Subsucesiones: Definicion: Una subsucesion b de una sucesion a , es una sucesion que cumple: $b(j) = a(n(j))$, es decir que b toma algunos elementos de a (No puede tomar otros elementos distintos que no esten en a). Tipicamente se escribe: a_{n_j}

- Proposicion: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_j} = l$, para cualquier subsucesion a_{n_j} de a.
- Afirmaciones utiles de Subsucesiones:
  - $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+n_0} = l$
  - $\lim_{n\to\infty} s_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n} = l y \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = l$
- Demostrar que una sucesion no converge: Si una sucesion a tiene 2 subsuceciones que convergen a limites distintos, entonces a_n no converge.
- Lema: Si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una funcion estrictamente creciente, entonces $f(n) \geqslant n$

2 Practico

1.
2. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$
   - Si $n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
   - Partimos de $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}\right| = \left|\frac{a_n - l}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}}\right|$
   - Si $l > 0 \Rightarrow \sqrt{a_n} + \sqrt{l} \geqslant \sqrt{l} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{l}}$
   - $\left|\frac{a_n - l}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}}\right| \leqslant \frac{|a_n - l|}{\sqrt{l}} < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - l| = \sqrt{l}\,\varepsilon = \varepsilon'$
   - De manera que para $l > 0$ aun se sigue cumpliendo el limite.
   - Si $l = 0$
   - $|\sqrt{a_n}| \leqslant \sqrt{|a_n|} < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| < \varepsilon^2 = \varepsilon'$
3.
4.
5.
6.
7. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ show that: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$; suggestion: show that the sequence is decreasing and bounded below.
   - $a_1 = 3$ como $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > 0 \forall n$
   - Si $a_n \geqslant 2 \Rightarrow 2 \cdot a_n \geqslant 2 \cdot 2 \Rightarrow \sqrt{2a_n} \geqslant 2$ de manera que $\forall n, a_n > 2$
   - Queremos probar que: $a_{n+1} \leqslant a_n$ esto se cumple si y solo si: $\sqrt{2a_n} \leqslant a_n \Leftrightarrow 2a_n \leqslant a_n^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2a_n - a_n^2 \Leftrightarrow a_n(2 - a_n)$ lo cual se cumple pues $a_n > 2$
   - Como la sucesion es monotona decreciente, entonces: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
   - Por la recurrencia tenemos: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2L}$

- En consecuencia: $L = \sqrt{2L} \Leftrightarrow L^2 - 2L = 0 \Leftrightarrow L(L-2) \Rightarrow L = 0$ o $L = 2$

- Sin embargo $a_n \geqslant 2$ entonces el limite es 2.

8. Demostrar con subsucesiones que elsiguiente limite no existe: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+\pi} + \cos(n\pi)\right)$

   - Primero examine: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+\pi} = 2$ (Facilmente demostrable)

   - Considere la subsucesion de terminos pares: $a_{2n} = \frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi)$

   - Calculemos el limite $\mathrm{im}_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi) = 2 + 1 = 3$

   - Si ahora consideramos la subsucesion de terminos impares: $a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi)$

   - Calculamos el limite: $\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi) = 2 - 1 = 1$

   - Como ambas subsucesiones convergen a limites distintos , entonces la sucesion original no converge.

9. Considere $\{a_n\}/a_n \geqslant -10 \forall n$ considere $b_1 = a_5$, $b_2 = a_{25}$ y $b_3 = a_{125}$:

   a) Extender b_1, b_2, b_3 a una subsucesion: $b_j = a_{n_j}$ de $\{a_n\}$

      - Podemos considerar entonces: $b_j = a_{n(j)}$ con $n(j) = 5^j$, es decir: $b_j = a_{5^j}$ de esta forma por ejemplo: $b_1 = a_5, b_2 = a_{25}, b_3 = a_{125}$

   b) Si se cumpliera que: $\lim_{n\to\infty}a_n = 6$, cuanto vale $\lim_{j\to\infty}\sqrt{10 + b_j}$?

      - Por la proposicion en verde, la subsucesion debe tender al mismo valor que la sucesion original: En consecuencia, $\lim_{j\to\infty}b_j = 6$

      - Ahora tratemos de probar por definicion que esto existe y que es 4:

        $\left|\sqrt{10 + b_j} - 4\right| < \varepsilon$ si $j > N$

        $\left|\frac{10 + b_j - 16}{\sqrt{10 + b_j} + 4}\right| = \left|\frac{b_j - 6}{\sqrt{10 + b_j} + 4}\right|$

        Aca usamos la hipotesis: $a_n \geqslant -10 \Rightarrow b_j \geqslant -10 \Leftrightarrow b_j + 10 \geqslant 0$

        Entonces: $\sqrt{b_j + 10} + 4 \geqslant 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b_j + 10} + 4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{b_j - 6}{\sqrt{b_j + 10} + 4}\right| < \frac{1}{4}|b_j - 6| < |b_j - 6| < \varepsilon$

      - Quedando demostrado el limite. Basta proporcionar el valor de j tal que cuando $j > N$ se cumple $|b_j - 6| < \varepsilon$

      -

10. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{Z}$, probar que si $\lim_{n\to\infty}a_n = l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}/a_n = l \forall n > n_0$

    - Esto implica mostrar que la funcion es identicamente constante dadas las hipotesis a partir de cierto punto.

    - **Primera parte:**

- Por la definicion: si $n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

- En particular si $m > n > N \Rightarrow |a_m - l| < \varepsilon$

- Como $a_n, a_m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_m = a_n + Z$, $Z \in \mathbb{Z}$

- Es decir: $|a_m - l| = |a_n + Z - l| \leqslant |a_n - l| + |Z| < \varepsilon + |Z|$

- Sin embargo como $|a_m - l| < \varepsilon$ (Para el mismo N), la unica opcion viable es que: $|Z| = 0$, es decir: $Z = 0$

- Hemos demostrado que $a_n = a_m \ \forall m > n$

- **Segunda Parte:**

- Si $n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$, donde como vimos, siempre tenemos el mismo valor, que por hipotesis es un entero, asi que para visibilizar esto escribo: $|z - l| < \varepsilon$ si $n > N$

- Por tricotomia: $z > l, z < l, z = l$

- Si considera los casos: $z > l$ or $z < l \Rightarrow |z - l| > 0$ seria un valor fijo, y por lo tanto no puede cumplirse que $\forall \varepsilon > 0 \ |z - l| < \varepsilon$

- Como unica posibilidad se debe cumplir que: $z = l$ (que es lo que se queria demostrar)

11. Probar que para todo $l \in \mathbb{R} / l \in (0,1)$ existe una sucesion: $\{q_n\}$ de numeros racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = l$.

   - La sucesion tiene que ser de numeros racionales: $q = \frac{m}{n}$

   - Lo que se plantea es que la sucesion sea: $q_n = \frac{[nl]}{n}$, donde $[nl]$ es la parte entera. (Nos da el numero entero menor mas cercano a nl)

   - Lo anterior significa que: $nl - 1 < [nl] < nl \Leftrightarrow \frac{nl - 1}{n} < \frac{[nl]}{n} < l$

   - Es decir: $l - \frac{1}{n} < \frac{[nl]}{n} < l$

   - En consecuencia como: $\lim_{n\to\infty} l - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} l = l$ puede utilizar el lema del Sandwich de las sucesiones, en consecuencia: $\lim_{n\to\infty} \frac{[nl]}{n} = l$

   - Observe que como $l \in (0,1)$ luego: $0 < l < 1 \Rightarrow 0 < \frac{[nl]}{n} < 1$

   - Esto demuestra lo propuesto.

12. Decidir en cada caso si la afirmacion es verdadera o falsa:

   a) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ or $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

      - Falso

      - Considere: $a_n = (-1)^n n$, cumplee que: $|a_n| = n$, luego: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

      - Sin embargo claramente: $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, pues si tomo subsucesiones de terminos pares y otra de impares ambas convergen a limites distintos.

b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ entonces a_n es decreciente desde un n_0 en adelante, es decir , $\exists n_0 / \text{si}\, n > n_0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

- Si esto es verdad entonces, la existencia de dicho limite implica que $\{a_n\}$ es eventualmente decreciente

- Considere la sucesion: $a_n = -n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right)$

- Esta sucesion cumple que: $\frac{-3n}{2} \leqslant -n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right) \leqslant -\frac{n}{2}$, que si n es par luego sen $\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) = 0$ mientras que si n es impar entonces el termino entre parentesis toma valores $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

- Esto lo que produce es una sucesion "oscilante" decreciente:

  Si $m = \text{par} \Rightarrow a_m = -m$, luego $m + 1 = \text{impar}$ tal que $a_{m+1} = -(m+1)\frac{1}{2}$

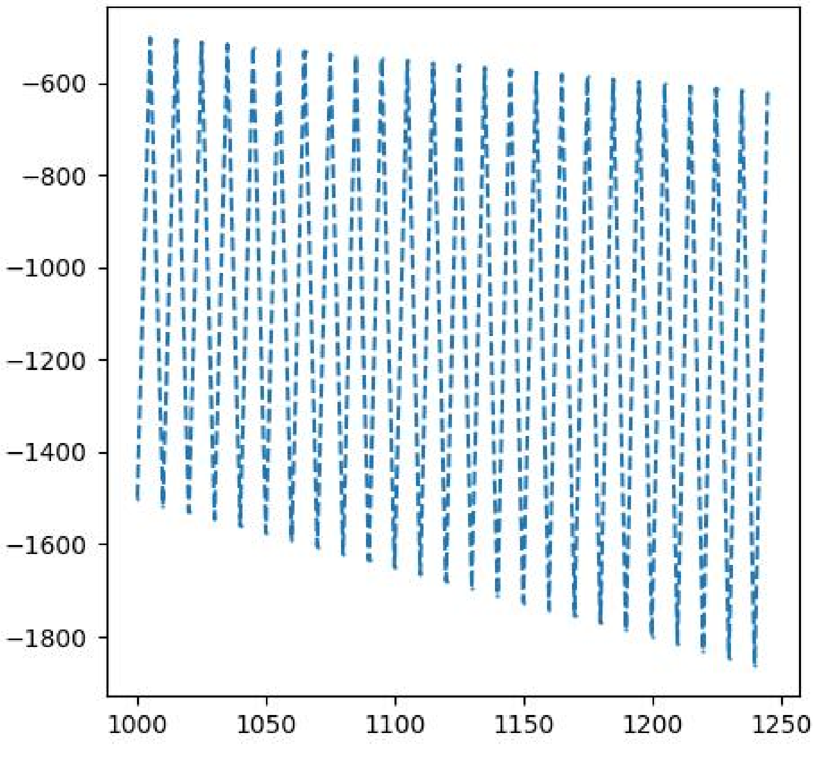
  $-m < -(m+1)\frac{1}{2} = -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ si m es lo suficientemente grande

- Entoncse la sucesion no puede ser nunca decreciente o estrictamente decreciente.

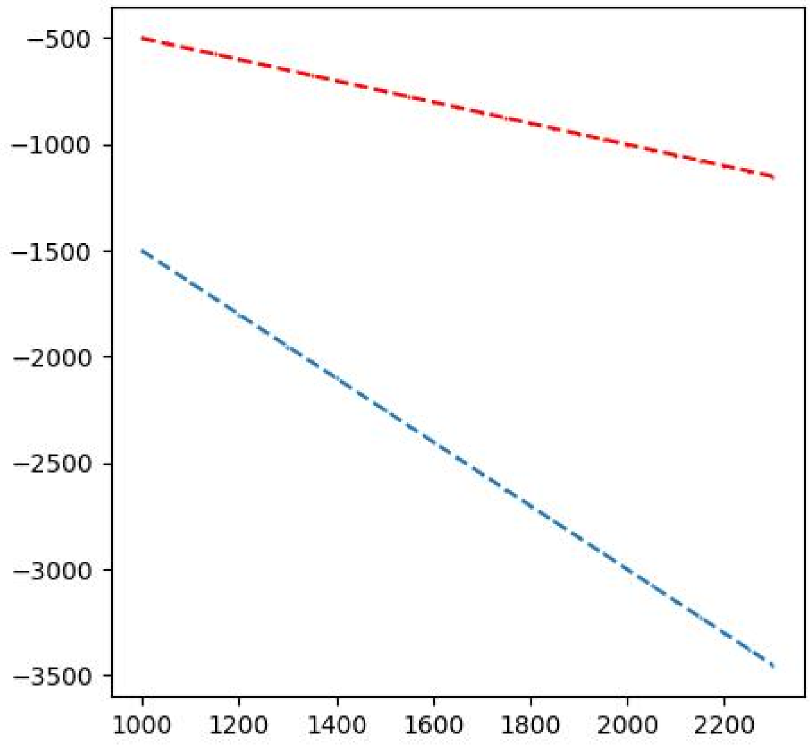
- Pero cumple esta sucesion que tiende a $-\infty$?

- Como: $-n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)\right) \leqslant -\frac{n}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$, luego para dado M si tomo $N / \frac{-n}{2} < M$, en consecuencia para ese mismo N: $-n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)\right) \leqslant -\frac{n}{2} < M$

- Plots de la funcion:



– Observe la tendencia decreciente (aunque oscilatoria)



–

– En rojo tenemos la funcion $-n/2$