Guia 2

1. $P = 20 = 2a + 2b \Leftrightarrow a = 10 - b$, $A = ba \Rightarrow A = b(10 - b) = 10b - b^2$
   $A = 10b - b^2$

2. $A = 6a^2$, $V = a^3 \Leftrightarrow a = V^{1/3} \Rightarrow A = 6V^{2/3}$

3. (**Problema 1**)Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

   a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, Dom $f = \{x / x \in \mathbb{R}, 1 - x^2 \geqslant 0\}$

   Usamos que: $\sqrt{x^2} = |x|$

   $1 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \geqslant x^2 \Rightarrow 1 \geqslant |x| \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$

   Dom $f = \{x / x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

   b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

   - Resolver de adentro hacia afuera:
   - $\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$, en ese rango ya la funcion tendra solucion.
   - Dom $f = \{x / x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

   c) $f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = \frac{x - 2 + x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)}$

   - Claramente el principal punto de importancia es cuando el denominador es cero.
   - $(x - 1)(x - 2) = 0$ si $x = 1$ o $x = 2$, el resto de los puntos son validos
   - Dom $f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

   d) $f(x) = (\sqrt{x})^2$

   - Claramente es necesario que: $x \geqslant 0$
   - Dom $f = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 0\}$

   e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \Rightarrow x < -1, x > 1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } |x| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

   - Dom $f = \mathbb{R}$

4. (**Problema 2**)Encontrar el Dominio e imagen de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{1}{x + 3}$

   - Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$
   - Para buscar la imagen utilizo el siguiente lema:

     Para toda funcion Im $f = \{f(x) / x \in \text{Dom } f\}$
   - Es decir que puedo intentar invertir la relacion entre y, x para buscar esta imagen conociendo el dominio.
   - $y = \frac{1}{x + 3} \Leftrightarrow x + 3 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} - 3$
   - $y \neq 0$, Despues el resto de los valores son validos.

- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Esta funcion es super enganiosa: Imaginemos que $x = -3 + \frac{1}{100}$ luego: $x + 3 = \frac{1}{100}$ entonces: $f = 100$.

b) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

- $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$
- Para buscar la imagen nuevamente invertimos la relacion:
- $g = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{g} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\left(\frac{1}{g} - 1\right)} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{g} - 1\right)}$
- El dominio de esta funcion no incluye $0, \frac{1}{g} < 1 \Leftrightarrow g \geqslant 1$
- $\operatorname{Im} g = \{g \in \mathbb{R} / 0 < g \leqslant 1\}$
- Observacion: $\frac{1}{x^2+1}$ nunca nos va a dar un numero mayor a 1. por ejemplo:

  $x^2 + 1 = \frac{1}{1000} + 1 = \frac{1001}{1000} > 1$, en consecuencia: $\frac{1}{x^2+1} < 1$
- La diferencia con el otro problema: $f(x) = \frac{1}{x+3}$ es que a traves de la resta ibamos a poder tener numeros mas chicos que 1.

c) $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

- Se descartan del dominio los valores tales que: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = 1$
- $|x| = 1 \Rightarrow x = 1\, o\, x = -1$
- $\operatorname{Dom} g = \{x \in \mathbb{R}\} - \{-1, 1\}$
- Def Im g := $\{g \in \mathbb{R} / \exists x \in \operatorname{Dom} g / g = g(x)\}$
- $g = \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{g} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{g} + 1 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{g} + 1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{g} + 1}$
- $g \neq 0,\ \frac{1}{g} \geqslant -1 \Leftrightarrow \begin{cases} g > 0 \Rightarrow 1 \geqslant -g \quad -1 \leqslant g \quad g > 0 \\ g < 0 \Rightarrow 1 \leqslant -g \quad -1 \geqslant g \quad -1 \geqslant g \end{cases}$
- $\operatorname{Im} g = \{g \in \mathbb{R} / g > 0, g \leqslant -1\} = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

5. (**Problema 3**)Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interprete los siguiente:

a) $f(f(x))$ Para cuales x tiene sentido?

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- $f(f(x)) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}$
- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$
- Notar que si al principio no excluyo $x = -1$ la expresion queda indefinida. Por lo cual para seguir operando tengo que primero excluir el caso $x = -1$ para luego encontrar que $x = -2$ tampoco puede estar en la solucion.

b) $f(1/x)$

- $f(1/x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}}$, $x \neq 0$

- $f(1/x) = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$
- Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

c) $f(cx) = \frac{1}{1+cx}$

- $1 + cx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{c}$
- Dom $f = \mathbb{R} - \{-1/c\}$

6. (**Problema 4**)Sean $C(x) = x^2$, $H(x) = \frac{1}{x}$, $S(x) = \operatorname{sen}(x)$

a) Determinar: $(C \circ H)(y)$

- $(C \circ H)(y) = \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2}$

b) Determinar: $(C \circ H \circ S)(t) + (S \circ H)(t)$

- $(C \circ H \circ S)(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} t}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$
- $(S \circ H)(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$
- $(C \circ H \circ S)(t) + (S \circ H)(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$

7.

a) Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos la funcion C_A como siguie:

$$C_J = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in J \\ 0 & \text{si}\, x \notin J \end{cases}$$

Encontrar expresiones para:

i. $C_{A \cap B}$

- Hay dos opciones $C_{A \cap B} = \emptyset$ o $C_{A \cap B} \neq \emptyset$
- Supongamos que: $C_{A \cap B} \neq \emptyset$
-

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$C_{A \cap B}(x)$	$C_A(x)C_B(x)$
1	1	1	1	$1 \cdot 1$
0	0	0	0	$0 \cdot 0$
1	0	0	0	$1 \cdot 0$
0	1	0	0	$0 \cdot 1$

- Conclusion: $C_{A \cap B}(x) = C_A(x)C_B(x)$

ii. $C_{A \cap B}$

- $A \cup B = A + B - A \cap B$

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B = A + B - A \cap B$	$C_{A \cup B}(x)$	$C_A(x) + C_B(x) - C_A(x)C_B(x)$
1	1	1	1	$1 + 1 - 1.1$
0	0	0	0	$0 + 0 - 0 \cdot 0$
1	0	1	1	$1 + 0 - 1 \cdot 0$
0	1	1	1	$0 + 1 - 0 \cdot 1$

8. (**Problema 5**) V o F. Es par si $f(x)=f(-x)$, Es impar si: $f(-x)=-f(x)$

   a) $f(x)=x^2$ es par

      – $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, Es par, V

   b) $f(x)=x^3$ es impar

      – $f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)^2=(-x)x^2=-x^3=-f(x)$, Es impar , V

   c) Si f no es impar entonces f es par: Esto es falso

      – $f(x)=x+1$, $f(-x)=-x+1$, Esto no es ni par ni impar

   d) Si f,g son pares , entonces: $f+g$ es par: Verdadero

      – $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

      – $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$

9. (Problema 6)

   $f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\leqslant x<1 \\ -x+3 & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ \frac{1}{2}x-3 & 4\leqslant x\leqslant 6 \end{cases}$, Graficar la funcion g donde:

   a) $g(x)=f(x)$

   b) $g(x)=f(x)-1$

c) $g(x) = f(x+2)$

d) $g(x) = 2\,f(x)$

e) $g(x) = -f(x)$

f) $g(x) = f(2x)$

g) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

h) $g(x) = f(-x)$

i) $g(x) = |f(x)|$

10. (Problema 7) Grafica, Dominio, Inyectiva, Suryectiva

    a) $a(t) = 5t - 2$

       - Dom $a = \mathbb{R}$
       - $a(t_1) = a(t_2) \Rightarrow 5t_1 - 2 = 5t_2 - 2 \Rightarrow t_1 = t_2$
       - La funcion es Suryectiva

    b)

11. (Problema 8) Si la funcion es biyectiva (inyectiva y suryectiva) tiene inversa.

    Un funcion es suryectiva si no hay valores prohibidos de y para la funcion.

    a) $f(x) = -x^2$

       - $y = -x^2 \Rightarrow \pm\sqrt{-y} = x$
       - Dom $f = \mathbb{R}$
       - Lo anterior nos dice que: $\mathrm{Im} f = \{y \leqslant 0\}$
       - Si me restrinjo al intervalo $[0, 1]$ por ejempolo, tendre que la funcion es inyectiva y suryectiva (Pues toma todos los elementos de la imagen en ese intervalo)

    b) $f(x) = \frac{1}{x}$

       - $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$
       - Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. $\mathrm{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$
       - En este caso la funcion es claramente inyectiva
       - Puedo definir nuevamente $[1/4, 1]$

12. (Problema 9) Hallar la inversa e indicar su dominio

    a)

b)

c) $f(x) = \begin{cases} x \,\text{si}\, x \in \mathbb{Q} \\ -x \,\text{si}\, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} y \,\text{si}\, y \in \mathbb{Q} \\ -y \,\text{si}\, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \,\text{si}\, x < 0 \\ 2x \,\text{si}\, x \geqslant 0 \end{cases}$

- Primero, saca la imagen de y en cada intervalo:
- $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2y$, como $x < 0$ luego Im f= $\{y / y < 0\}$
- $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y$, Como $x \geqslant 0 \Rightarrow \text{Im}\, f = \{y \geqslant 0\}$
- $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y \,\text{si}\, y \geqslant 0 \\ 2y \,\text{si}\, y < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} \,\text{si}\, x \neq 2 \\ 0 \,\text{si}\, x = 2 \end{cases}$

- $y = -\frac{1}{x-2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{y} + 2$, $\text{Im}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$
- $y = 0 \Rightarrow \text{Im}\, f = 0$
- $f^{-1}(y) = \begin{cases} -\frac{1}{y} + 2, \,\text{si}\, y \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 2 \,\text{si}\, y = 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 \,\text{si}\, x \geqslant 0 \\ 1 - x^3 \,\text{si}\, x < 0 \end{cases}$

- $y = -x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-y} \Rightarrow Im f = \mathbb{R}_{\leqslant 0}$ (Hay que elegir un signo si no, esto no funciona) $x = \sqrt{-y}$
- $y = 1 - x^3 \Leftrightarrow x = (1-y)^{1/3} \Rightarrow Im f = \mathbb{R}$
- Como $1 - x^3$ es impar, para $x < 0$ tendriamos que: $1 - x^3 > 0$, entonces: $\text{Im}\, f = \mathbb{R}_{>1}$
- $f^{-1} = \begin{cases} \sqrt{-y} \,\text{si}\, y \leqslant 0 \\ (1-y)^{1/3} \,\text{si}\, y > 1 \end{cases}$

13. $f(x) < f(x+1) \Rightarrow$ Supongamos que existe