Examen final

Nombre:
Carrera:
Condición: **Año y cuatrimestre de la regularidad:**

1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b	Pract.

5a	5b	5c	6	7	Teor.	Total	Nota

Indicaciones generales

Se deben aprobar ambas partes del examen. JUSTIFICAR debidamente cada respuesta. No está permitido el uso de aparatos electrónicos tales como calculadoras y teléfonos, ni ningún tipo de bibliografía. Enunciar con precisión los resultados que se usen.

Parte práctica

Para aprobar esta parte es necesario sumar por lo menos:

- Estudiantes regulares: 30 puntos.
- Estudiantes libres: 36 puntos.

Ejercicio 1: Límites y Sucesiones.

a. (10 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Determinar si existe el límite para x que tiende a cero, y de ser así, calcularlo.¿ Es f continua $x = 0$ ¿Y derivable en $x = 0$?

b. (6 puntos) Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$ tal que la subsucesión a_{2k} y la subsucesión a_{2k+1} ambas tienden a $+\infty$, mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Ejercicio 2: Teoremas Fuertes. (10 ptos)
Sea la función $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Sea $A = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$. Mostrar que A tiene ìnfimo y que si $\alpha = \text{Inf}A \in [a,b]$, $f(\alpha) = 0$.

Ejercicio 3: Significado de la derivada. Representación Gráfica.

Sea $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 5x + 1}{x - 2}$.

(a) (6 puntos) Determinar el dominio de f, calcular $f(0)$ y calcular los $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^\pm} f(x)$

(b) (6 puntos) Determinar los intervalos donde $f(x)$ es creciente ó decreciente. Encontar los puntos críticos y determinar si son máximos o mínimos locales o globales.

(c) (8 puntos) Analizar los intervalos de concavidad y convexidad, y determinar los puntos de inflexión.

(d) (4 puntos) Esbozar el gráfico de $f(x)$, indicando los puntos relevantes.

Ejercicio 4: Teorema del Valor medio. (10 puntos)
Un número a se llama *punto fijo* de una función f si $f(a) = a$. Sea una función f derivable con $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x. Demostrar que f tiene a lo sumo un punto fijo.

Parte Teórica

Para aprobar esta parte hay que sumar por lo menos 20 puntos, tanto para estudiantes regulares como libres. Además, la demostración de al menos uno de los teoremas que se pidan debe estar completa y detallada.

Ejercicio 5: Verdadero o Falso. Justifique sus repuestas

(a) (5 puntos) Si f es una función dos veces derivable, convexa en (a, b) y g un funcion derivable y decreciente en (a, b) entonces $f \circ g$ es decreciente.

(b) (5 puntos) Sean A y B dos subconjuntos de números reales tales que $A \subseteq B$ y A es denso en $\mathbb{R}$. Entonces B es denso en $\mathbb{R}$.

(c) (5 puntos) Toda sucesión acotada es de Cauchy.

Ejercicio 6: (12 puntos) Enunciar y demostrar con presición el teorema de la composición de funciones continuas.

Ejercicio 7: (13 puntos) (a) Dar la definición de funcion convexa en un intervalo I.
(b)Demostrar: Si f es derivable y f' es creciente en I, entonces f es convexa en I. .