Análisis Matemático I

Pedro Sánchez Terraf
Ana Andrés Martín Agustín Luciana José Luis

FaMAF, 13 de marzo de 2024

Información Básica

Página de refuerzo

https://sanchezterraf.com.ar/ ▶ ▶ Docencia

Tip: poner “`Pedro Sánchez Terraf famaf`” en cualquier buscador.
Luego Docencia y listo.

Contenidos estimados para hoy

1 Distancia y valor absoluto

2 Conjuntos de reales

3 Conjuntos acotados

4 El último axioma

5 Conclusión

Ahora sí, a medir

¿Cómo medimos la *distancia* entre dos puntos de la recta?

Ahora sí, a medir

¿Cómo medimos la *distancia* entre dos puntos de la recta?

Tenemos que definir la distancia $d(a, b)$ entre dos números reales a y b.

Ahora sí, a medir

¿Cómo medimos la *distancia* entre dos puntos de la recta?

Tenemos que definir la distancia $d(a, b)$ entre dos números reales a y b.

Ejemplo

Si $a = 5$ y $b = 8$, $d(a,b) = 3 = 8 - 5 = b - a$.

Ahora sí, a medir

¿Cómo medimos la *distancia* entre dos puntos de la recta?
Tenemos que definir la distancia $d(a, b)$ entre dos números reales a y b.

Ejemplo

Si $a = 5$ y $b = 8$, $d(a, b) = 3 = 8 - 5 = b - a$.

Aula Virtual ▶ Encuestas ▶ ¿Cual es la distancia (T. Mañana)?

1. ¿Cuánto vale $d(b, a)$?
2. Supongamos que $a < 0 < b$. ¿Cuánto vale la distancia entre a y b?

Ahora sí, a medir

¿Cómo medimos la *distancia* entre dos puntos de la recta?
Tenemos que definir la distancia $d(a,b)$ entre dos números reales a y b.

Ejemplo

Si $a = 5$ y $b = 8$, $d(a,b) = 3 = 8 - 5 = b - a$.

Aula Virtual ▶ Encuestas ▶ ¿Cual es la distancia (T. Mañana)?

1. ¿Cuánto vale $d(b,a)$?
2. Supongamos que $a < 0 < b$. ¿Cuánto vale la distancia entre a y b?

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. La **distancia** entre a y b es

$$d(a,b) := \begin{cases} b - a & a \leq b \\ a - b & b < a \end{cases}$$

Valor absoluto

$$d(a,b) := \begin{cases} b-a & a \leq b \\ a-b & b < a \end{cases}$$

Es muy importante el caso particular de la distancia de un punto a 0.

Valor absoluto

$$d(a,b) := \begin{cases} b-a & a \leq b \\ a-b & b < a \end{cases}$$

Es muy importante el caso particular de la distancia de un punto a 0.

Definición (Valor Absoluto o Módulo)

$$|b| := \begin{cases} b & 0 \leq b \\ -b & b < 0 \end{cases}$$

Valor absoluto

$$d(a,b) := \begin{cases} b-a & a \leq b \\ a-b & b < a \end{cases}$$

Es muy importante el caso particular de la distancia de un punto a 0.

Definición (Valor Absoluto o Módulo)

$$|b| := \begin{cases} b & 0 \leq b \\ -b & b < 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Probar que $d(b,a) = |b-a|$.

Valor absoluto

$$|b| := \begin{cases} b & 0 \leq b \\ -b & b < 0 \end{cases}$$

Valor absoluto

$$|b| := \begin{cases} b & 0 \leq b \\ -b & b < 0 \end{cases}$$

Lema (Práctico)

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

1. [P1E2c] $0 \leq x, y$ *implica* $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.
2. [P1E8b] $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Valor absoluto

$$|b| := \begin{cases} b & 0 \le b \\ -b & b < 0 \end{cases}$$

Lema (Práctico)

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

1. [P1E2c] $0 \le x, y$ *implica* $x \le y \iff x^2 \le y^2$.
2. [P1E8b] $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Lema

1. $x \le |x|$.
2. $|x|^2 = x^2$.

Valor absoluto

$$|b| := \begin{cases} b & 0 \le b \\ -b & b < 0 \end{cases}$$

Lema (Práctico)

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

1. [P1E2c] $0 \le x, y$ *implica* $x \le y \iff x^2 \le y^2$.
2. [P1E8b] $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Lema

1. $x \le |x|$.
2. $|x|^2 = x^2$.

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a + b| \le |a| + |b|$.

¿Triángulos?

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a + b| \leq |a| + |b|.$

¿Triángulos?

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

Teorema (Desigualdad triangular, con d)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\quad d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

¿Triángulos?

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

Teorema (Desigualdad triangular, con d)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

Queda como **Ejercicio**.

¿Triángulos?

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a + b| \leq |a| + |b|.$

Teorema (Desigualdad triangular, con d)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b).$

Queda como **Ejercicio**.

Lema

Sea $b \geq 0$. *Luego*

- $|a| < b \iff -b < a < b$

¿Triángulos?

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a + b| \leq |a| + |b|.$

Teorema (Desigualdad triangular, con d)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b).$

Queda como **Ejercicio**.

Lema

Sea $b \geq 0$. *Luego*

- $|a| < b \iff -b < a < b \iff a \in (-b, b).$

¿Triángulos?

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a + b| \leq |a| + |b|$.

Teorema (Desigualdad triangular, con d)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Queda como **Ejercicio**.

Lema

Sea $b \geq 0$. *Luego*

- $|a| < b \iff -b < a < b \iff a \in (-b, b)$.
- $|a| \leq b \iff a \in [-b, b]$.

¿Triángulos?

Teorema (Desigualdad triangular)

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

Teorema (Desigualdad triangular, con d)

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

Queda como **Ejercicio**.

Lema

Sea $b \geq 0$. *Luego*

- $|a| < b \iff -b < a < b \iff a \in (-b, b)$.
- $|a| \leq b \iff a \in [-b, b]$.
- $|a| \geq b \iff a \notin (-b, b)$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$. ¿Cuál es su elemento más grande?

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0,1)$.
- $(-\infty,2]$.
- $\{-3,10,15,1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

Universidad Nacional de Córdoba

1613 - 2013 400 AÑOS

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0,1)$.
- $(-\infty,2]$.
- $\{-3,10,15,1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$.
- $\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n + 1)$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n + 1)$.

¿Cómo están distribuidos en la recta?

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n+1)$.

¿Cómo están distribuidos en la recta?

Definición

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n+1)$.

¿Cómo están distribuidos en la recta?

Definición

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.

Ejemplo

¿Cuál es el conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$?

Conjuntos de reales

Nombre su subconjunto de $\mathbb{R}$ favorito

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n + 1)$.

¿Cómo están distribuidos en la recta?

Definición

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.

Ejemplo

¿Cuál es el conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$?

Si $z \in A$, entonces z es el **máximo** de A.
Mutatis mutandis con y (el **mínimo** de A).

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Conjuntos acotados

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n + 1)$.

Conjuntos acotados

- $[0,1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n+1)$.

- z es cota superior (inferior) de A si $\forall a \in A, a \leq z$ ($\forall a \in A, y \leq a$).

Conjuntos acotados

- $[0,1)$.
- $(-\infty,2]$.
- $\{-3,10,15,1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n,-2n+1)$.

- z es cota superior (inferior) de A si $\forall a \in A, a \leq z$ ($\forall a \in A, y \leq a$).

Conjuntos acotados

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n + 1)$.

- z es cota superior (inferior) de A si $\forall a \in A, a \leq z$ ($\forall a \in A, y \leq a$).

Si A tiene cota superior (inferior), entonces no se “desborda” por la derecha (izquierda).

Conjuntos acotados

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n+1)$.

- z es cota superior (inferior) de A si $\forall a \in A, a \leq z$ ($\forall a \in A, y \leq a$).

Si A tiene cota superior (inferior), entonces no se “desborda” por la derecha (izquierda).

Definición

- A está **acotado superiormente** $\iff$ $\exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está **acotado inferiormente** $\iff$ $\exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Conjuntos de cotas

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Conjuntos de cotas

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Trabalenguas en Aula Virtual

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ que tiene alguna cota. Sus cotas, ¿están acotadas?

Conjuntos de cotas

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Trabalenguas en Aula Virtual

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ que tiene alguna cota. Sus cotas, ¿están acotadas?

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente. ¿Está acotado su conjunto de cotas superiores?

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Conjuntos de cotas

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Trabalenguas en Aula Virtual

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ que tiene alguna cota. Sus cotas, ¿están acotadas?

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente. ¿Está acotado su conjunto de cotas superiores?

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** si $\exists z \in \mathbb{R},\ z$ es cota superior de A.
- A está **acotado inferiormente** si $\exists y \in \mathbb{R},\ y$ es cota inferior de A.

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente por cualquier elemento de A.

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente por cualquier elemento de A.
Mutatis mutandis con cotas inferiores.

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente por cualquier elemento de A.
Mutatis mutandis con cotas inferiores.

- $[0,1)$.
- $(-\infty,2]$.
- $\{-3,10,15,1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n,-2n+1)$.

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente por cualquier elemento de A.
Mutatis mutandis con cotas inferiores.

- $[0,1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n+1)$.

Si $A \neq \varnothing$ está acotado superiormente **siempre** existe el mínimo de las cotas superiores.

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente por cualquier elemento de A.
Mutatis mutandis con cotas inferiores.

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n+1)$.

Si $A \neq \varnothing$ está acotado superiormente **siempre** existe el mínimo de las cotas superiores.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \varnothing$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente por cualquier elemento de A.
Mutatis mutandis con cotas inferiores.

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-2n, -2n+1)$.

Si $A \neq \varnothing$ está acotado superiormente **siempre** existe el mínimo de las cotas superiores.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \varnothing$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Definición

Si $A \neq \varnothing$ es acotado superiormente, su **supremo**, $\sup A$, es el mínimo de sus cotas superiores.

Completitud de los reales

Si $A \neq \varnothing$ (¡ojo con el troll!) y acotado superiormente, el conjunto de cotas superiores está acotado inferiormente por cualquier elemento de A.
Mutatis mutandis con cotas inferiores.

- $[0, 1)$.
- $(-\infty, 2]$.
- $\{-3, 10, 15, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$.
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-2n, -2n + 1)$.

Si $A \neq \varnothing$ está acotado superiormente **siempre** existe el mínimo de las cotas superiores.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \varnothing$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Definición

Si $A \neq \varnothing$ es acotado superiormente, su **supremo**, $\sup A$, es el mínimo de sus cotas superiores. Análogamente con "inferiormente" e **ínfimo**, $\inf A$.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden hasta el Ejercicio 17 del P1.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden hasta el Ejercicio 17 del P1.

Ejercicios Extra

1. **Desde los axiomas.** Requieren más ingenio.
2. **Otros ejercicios.** Para reforzar los conceptos.

De estos últimos, pueden hacer todos con lo de las últimas clases.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden hasta el Ejercicio 17 del P1.

Ejercicios Extra

1. **Desde los axiomas.** Requieren más ingenio.
2. **Otros ejercicios.** Para reforzar los conceptos.

De estos últimos, pueden hacer todos con lo de las últimas clases.

Pregunta

Si partimos una recta en una "parte izquierda" y una "parte derecha", ¿cómo queda donde se partió? $\cdots$————?————$\cdots$

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, se pueden hasta el Ejercicio 17 del P1.

Ejercicios Extra

1. **Desde los axiomas.** Requieren más ingenio.
2. **Otros ejercicios.** Para reforzar los conceptos.

De estos últimos, pueden hacer todos con lo de las últimas clases.

Pregunta

Si partimos una recta en una “parte izquierda” y una “parte derecha”, ¿cómo queda donde se partió? $\cdots$ ———?——— $\cdots$

¿Hay dos “átomos” matemáticos en cada borde? ¿Astillas? ¿Médula ósea?