1 Problemas

1.

2.

3.

4.

5.

   a) Si $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 o a = -1$

      – $a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1) = 0$ use 1a

   b) $a^2 = b^2 \Rightarrow a^3 = b^3$

      – $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \Rightarrow a = b o a = -b$

      – Si $a = b$ la igualdad se da de forma inmediata

      – Si $a = -b \Rightarrow a^2 a = b^2 a \Leftrightarrow a^3 = -b^3$ (FALSO)

   c) $a < b$ y $c < d \Rightarrow a - c < b - d$

      – $c < d \Rightarrow d - c \in P$

      – De la misma forma: $b - a \in P$

      – Entonces: $b - a + d - c \in P$ no parece que funcione, asi que buscamos un contraejemplo

      – $-5 < -1$ y $1 < 5$ luego: $-5 - 1 < -1 - 5$

   d) d falso

   e)

6.

7.

8.

   a) Probar que si $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$

      – $x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant xy$

      – $x \leqslant y \Rightarrow xy \leqslant y^2$

      – Transitividad: $x^2 \leqslant xy \leqslant y^2 \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$

   b) Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Cuando vale la igualdad?

      – Tenga en cuenta que $(a-b)^2 \geqslant 0$

- Entonces: $(a-b)^2+4ab \geqslant 4ab$

- Pero esto da: $(a+b)^2 \geqslant 4ab \Leftrightarrow \sqrt{(a+b)^2} \geqslant 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow |a+b| \geqslant 2\sqrt{ab}$

- Como $a, b > 0 \Rightarrow a+b > 0 \Rightarrow |a+b| = a+b$

- Consecuencia final: $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{ab}$

- La igualdad se da cuando: $a=b$, examinar esto aqui: $(a+b)^2 \geqslant 4ab$

9.

a) Probar que si $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

- Por tricotomia: $a > 1, a = 1 o a < 1$

- Si $a > 1$ entonces:

- Entonces: $a > 1 \Leftrightarrow a^2 > a > 1 \Rightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a^3 > a > 1 \Rightarrow a^3 > 1$

- Si $a = 1 \Rightarrow a^3 = 1$ (Caso trivial)

- Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

- Sabemos que: $(-a) > 0 \Rightarrow (-a)^2 > 0$ productos positivos. De la misma forma: $(-a)^3 > 0$

- $(-a)^3 = ([-1]a)^3 = ([-1]a)([-1]a)([-1]a) = [-1]\cdot[-1]\cdot[-1]\, a\cdot a\cdot a$

- $[-1]a^3 = -a^3 > 0$

- Si $-a^3 > 0 \Rightarrow a^3 < 0 \Rightarrow a^3 \neq 1$

- Falta un ultimo caso: $0 < a < 1$

- Como $a < 1 \Leftrightarrow a^2 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1 \Leftrightarrow a^3 < a < 1 \Rightarrow a^3 < 1$

b) Demostrar que $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ usando el inciso anterior:

- $a^3 = b^3$, considere 3 casos (tricotomia)

- $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (Caso trivial)

- $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \Rightarrow b^3(a^{-1})^3 = (ba^{-1})^3 = 1$

- Con esto recaemos en el caso anterior, entonces: $ba^{-1} = 1$, por unicidad del inverso, $a = b$.

10.

a) $|x| = |-x|$

- Si $x = 0 \Rightarrow -x = -0 = (-1)\cdot 0 = 0 \Rightarrow |0| = 0 = |-0| = 0$

- Si $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ por otro lado: $-x < 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = (-1)(-x) = 1\cdot x = x$

- Si $x < 0$ la prueba es similar.

b) $|xy| = |x|\,|y|$

- Si $x = 0$ o $y = 0$ el caso es trivial
- Considere $x \neq 0$ y $y \neq 0$
- Si $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy = |x|\,|y| = xy$
- Si $x < 0$ y $y > 0 \Rightarrow xy < 0 \Rightarrow |xy| = -xy = (-x)y = |x|\,|y|$
- La prueba para ambos menores a cero es similar.

c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

- $|x^{\,-1}\,x| = 1$

  $|x^{-1}\,x| = |x^{-1}|\,|x| = 1 = |x|^{-1}|x|$
- Esto signfica que $|x|^{-1} = |x^{-1}|$

11.

a) $|(|x| - 1)| = \begin{cases} -(|x| - 1)\,\text{si}\,|x| - 1 < 0 \begin{cases} -(-x - 1)\,\text{si}\,|x| < 1\,y x < 0 & 1 \\ -(x - 1)\,\text{si}\,|x| < 1\,y x > 0 & 2 \end{cases} \\ (|x| - 1)\,\text{si}\,|x| - 1 > 0 \begin{cases} (-x - 1)\,\text{si}\,|x| > 1\,y x < 0 & 3 \\ (x - 1)\,\text{si}\,|x| > 1\,y x > 0 & 4 \end{cases} \end{cases}$

1. $-1 < x < 1\,y x < 0 \Rightarrow (-1, 0)$
2. $-1 < x < 1\,y x > 0 \Rightarrow (0, 1)$
3. $x < -1$ or $x > 1$ y $x < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1)$
4. $x < -1$ or $x > 1$ y $x > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow (1, \infty)$

12.

a) $|x - 3| < 8$

b) $|x - 3| \geqslant 8$

- $\begin{cases} x - 3 \geqslant 8\,\text{si}\,x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) \geqslant 8\,\text{si}\,x - 3 < 0 \Leftrightarrow (x - 3) \leqslant -8\,\text{si}\,x - 3 < 0 \end{cases}$

13.

a)

b)

c) $|x - 1| + |x + 2| = 3$

- $\begin{cases} x - 1 + x + 2 = 3 & \text{si}\,x - 1 \geqslant 0\,y x + 2 \geqslant 0 & x \geqslant 1\,y x > -2 \Rightarrow [1, \infty) & 1 \\ x - 1 - (x + 2) = 3 & \text{si}\,x - 1 \geqslant 0\,y x + 2 < 0 & x \geqslant 1\,y x < -2 \Rightarrow \text{vacio} & 2 \\ -(x - 1) + (x + 2) = 3 & \text{si}\,x - 1 < 0\,y x + 2 \geqslant 0 & x < 1\,y x \geqslant -2 \Rightarrow [-2, 1) & 3 \\ -(x - 1) - (x + 2) = 3 & \text{si}\,x - 1 < 0\,y x + 2 < 0 & x < 1\,y x < -2 \Rightarrow (-\infty, -2) & 4 \end{cases}$

- Solucion: $\begin{cases} 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \,\text{en}\, [1, \infty) \Rightarrow x = 1 \,\text{solucion} \\ \text{No hay solucion} \\ 3 = 3, x \,\text{es sol}\, \forall x \in [-2, 1] \\ 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \text{no hay solucion} \end{cases}$

14.

15.

a) $[3, 8)$

- Para el caso del 3 como es una cota inferior y esta en el conjunto, entonces directamente ya es el minimo.

- Para el caso del 8, suponga que el 8 no es el supremo, entonces $\exists \alpha / \alpha$ es la cota superior minima. Si α es el supremo: $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / \alpha - \varepsilon < a < \alpha$. Ademas como α es el supremo, luego $3 < \alpha < 8$.

- Considere: $3 < \alpha < \frac{\alpha + 8}{2} < 8 \Rightarrow \frac{\alpha + 8}{2} \in A$, luego α no es cota superior.