Problema 3)

Considere: $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ (Dato no menor)

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

a) Determinar Dominio e Imagen, despues decir si es sobreyectiva

- Dominio e Imagen:

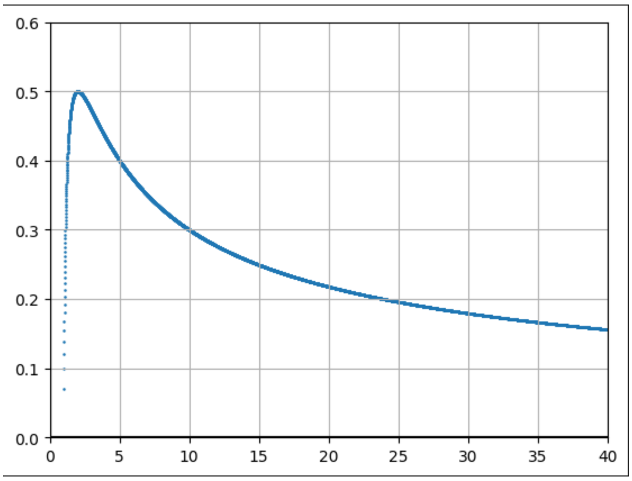
  Dom $f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\wedge x\geqslant 1\}=\mathbb{R}_{\geqslant 1}$

  Im $f=$ Es un poco mas complicado de determinar.

  - Claramente por la presencia de la raiz: $f\geqslant 0$, el 0 es un valor valido para la imagen pues si $x=1\Rightarrow f=0$.
  - Para seguir descubriendo mas de la imagen, recomiendo siempre "despejar" la y

    $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}\Leftrightarrow x^2y^2=x-1\Leftrightarrow y^2x^2-x+1=0$

    Resuelvo entonces la cuadratica:
  -
    $$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4y^2(1)}}{2y^2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y^2}$$
  - El discriminante me dice algo sobre la imagen: $1-4y^2\geqslant 0\Leftrightarrow\pm\frac{1}{2}\geqslant y$, recordar sin embargo que $y\geqslant 0$ por lo cual: $\frac{1}{2}\geqslant y$.
  - Juntando con lo anterior: $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$, es decir: im $f=\left\{y\in\mathbb{R}/0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$
  - Grafico de la funcion en cuestion:



  - Observe que $y\rightarrow 0$ cuando $x\rightarrow\infty$ (Proximos practicos)
  - Cuando $x=1, y=0$

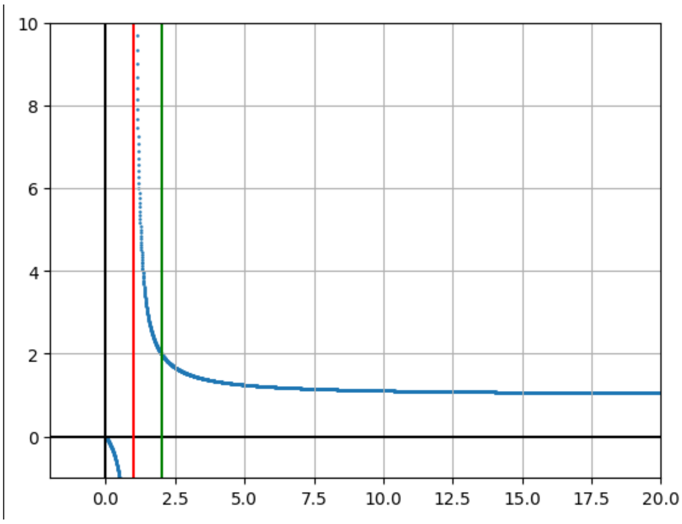
- Como se indica en el ejercicio: $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y como Im$f\subset\mathbb{R}$ pero Im $f\neq\mathbb{R}$ la conclusion es que la funcion no es sobreyectiva.

b) Mostrar que: $f\left(\frac{b}{b-1}\right) = f(b)\ b > 1$

- $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} \Rightarrow f\left(\frac{b}{b-1}\right) = \frac{\sqrt{\frac{b}{b-1} - 1}}{\frac{b}{b-1}} = \frac{\sqrt{\frac{b-b+1}{b-1}}}{b}(b-1) = \frac{\sqrt{b-1}}{b} = f(b)$

c) El la funcion inyectiva? Es posible encontrar f^{-1}?

- La respuesta sobre la inyectividad es no, y el porque esta en el ejercicio anterior: $f\left(\frac{b}{b-1}\right) = f(b)$
  - Si $b = 2$ tendremos que $\frac{b}{b-1} = b$
  - Si $b > 2$ luego $1 < \frac{b}{b-1} < 2$
  - Si $1 < b < 2$ luego $\frac{b}{b-1} > 2$
  - $\frac{b}{b-1} \rightarrow 1$ cuando $b \rightarrow \infty$
  - $\frac{b}{b-1}$ describe elementos en el dominio de f.



- Es posible encontrar la inversa si se restringe a alguno de estos dos intervalos:
  - $f\colon (1, 2] \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right]$
  - $f\colon [2, \infty) \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right]$
- No voy a incluir al 1 porque, aunque se que $f(1) = 0$, el 0 es un valor asintotico para la funcion inversa. Solamente en el limite, cuando $y \rightarrow 0$ obtengo $y = 1$

Extra:

La funcion inversa:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y^2}$$

Si tomo:

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}\Leftrightarrow y^2=\frac{x-1}{x^2}\Leftrightarrow 1-4y^2=1-4\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=\frac{x^2-4x+4}{x^2}=\frac{(x-2)^2}{x^2}$$

Entonces:

$$\sqrt{1-4y^2}=\frac{(x-2)}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\frac{x-2}{x}}{2\frac{x-1}{x^2}}=\frac{x^2\left(\frac{x\pm(x-2)}{x}\right)}{2(x-1)}=\frac{x(x\pm(x-2))}{2(x-1)}$$

Discriminamos:

$$\frac{x(x\pm(x-2))}{2(x-1)}=\begin{matrix}\text{si}+\Rightarrow\frac{x(2x-2)}{2(x-1)}=x\\ \text{si}-\Rightarrow\frac{2x}{2(x-1)}=\frac{x}{x-1}\end{matrix}$$

Recuerde que: $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=f(x)$ para $x>1$