1 Teoria

1.1 Propiedades de Cuerpo

En el conjunto de los numeros $\mathbb{R}$ existen dos operaciones: Suma y Multipliacion.

1. Conmutatividad de la Suma
2. Conmutatividad Multiplicacion
3. Asociatividad Suma
4. Asociatividad multiplicacion
5. Elemento Neutro para la suma: 0
6. Elemento neutro para la multiplicacion: 1
7. Opuesto para la suma: $a + (-a) = 0$
8. Inverso Multiplicativo: $a \cdot a^{-1} = 1$
9. Distributividad

Un conjunto con estas nueve propiedades se denomina cuerpo.

- A partir de las 13 propiedades de cuerpo ordenado no se puede demostrar que todo número positivo tiene una raiz cuadrada.

1.2 Propiedades de Orden

1. Tricotomia: $a = b$; $a < b$; $a > b$; solo se cumple una de estas tres.
2. Transitividad: $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$
3. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$
4. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Un cuerpo, mas estas cuatro propiedades se denomina: Cuerpo ordenado.

1.3 Valor absoluto

- $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Proposition 1. *Desigualdad triangular:* $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

La prueba de la proposicion es util. Algunas cosas a tener en cuenta, se puede demostrar:

- $|a|^2 = a^2$; $a < |a|$; $|a \cdot b| = |a|\,|b|$

Demostracion:
$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leqslant |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

1.4 Propiedad del Supremo / Infimo

Esta propiedad permite distinguir a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ (Que satisface las primeras 13 propiedades). Por otro lado permite representar a $\mathbb{R}$ como una recta llena.

Definition 2. *Sea un subconjunto A de $\mathbb{R}$. Un numero M es una* ***cota superior*** *de A si $a \leqslant M$ $\forall a \in A$. Todo numero M' $>$ M tambien es cota superior de A.*

Propiedad del supremo: Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$ no vacio y acotado superiormente, tiene una cota superior minima, que se llama supremo de A y se denota por supA. Tener en cuenta que esto significa dos cosas:

- Sup A es una cota superior

- Sup A es la menor de todas las cotas superiores.

Definition 3. *Maximo / Minimo: Si α es una cota superior de A, y ademas $\alpha \in A$, entonces α se denomina Maximo de A.*

Proposition 4. *Todo subconjunto No vacio acotado superiormente tiene supremo. De la misma forma, todo subconjunto no vacio acotado inferiormente tiene infimo.*

Proposition 5. *Propiedad Arquimediana de los numeros reales: El conjunto $\mathbb{N}$ de los numeros naturales no esta acotado superiormente.*

Proposition 6. *Para todo numero $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N} / \frac{1}{n} < \varepsilon$*

Definition 7. *Conjunto Denso: Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice denso en $\mathbb{R}$ si $\forall b, c / b < c$ existe un numero $a \in A /\ b < a < c$*

2 Problemas

1.

   a) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 o b = 0$

      - $ab = 0$; Por tricotomia podria tomar $a = 0$, con lo cual ya queda demostrado

      - Sin embargo suponga $a \neq 0$ $\Rightarrow \exists a^{-1} / a a^{-1} = 1$

      - $a^{-1} a b = a^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$

   b)

   c) $a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c)$

      - Aca tendria que usar que: $-a = (-1)\, a$

      - $0 = a + (-a) =$

2.

3.

4.

5.

a) Si $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 o a = -1$

- $a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1) = 0$ use 1a

b) $a^2 = b^2 \Rightarrow a^3 = b^3$

- $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \Rightarrow a = b o a = -b$
- Si $a = b$ la igualdad se da de forma inmediata
- Si $a = -b \Rightarrow a^2 a = b^2 a \Leftrightarrow a^3 = -b^3$ (FALSO)

c) $a < b$ y $c < d \Rightarrow a - c < b - d$

- $c < d \Rightarrow d - c \in P$
- De la misma forma: $b - a \in P$
- Entonces: $b - a + d - c \in P$ no parece que funcione, asi que buscamos un contraejemplo
- $-5 < -1$ y $1 < 5$ luego: $-5 - 1 < -1 - 5$

d) d falso

e)

6.

7.

8.

a) Probar que si $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$

- $x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant x y$
- $x \leqslant y \Rightarrow x y \leqslant y^2$
- Transitividad: $x^2 \leqslant x y \leqslant y^2 \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$

b) Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{a b} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Cuando vale la igualdad?

- Tenga en cuenta que $(a-b)^2 \geqslant 0$
- Entonces: $(a-b)^2 + 4 a b \geqslant 4 a b$
- Pero esto da: $(a+b)^2 \geqslant 4 a b \Leftrightarrow \sqrt{(a+b)^2} \geqslant 2 \sqrt{a b} \Leftrightarrow |a+b| \geqslant 2 \sqrt{a b}$
- Como $a, b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \Rightarrow |a+b| = a + b$
- Consecuencia final: $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{a b}$
- La igualdad se da cuando: $a = b$, examinar esto aqui: $(a+b)^2 \geqslant 4 a b$

9.

a) Probar que si $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

- Por tricotomia: $a > 1, a = 1 o a < 1$

- Si $a > 1$ entonces:
- Entonces: $a > 1 \Leftrightarrow a^2 > a > 1 \Rightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a^3 > a > 1 \Rightarrow a^3 > 1$
- Si $a = 1 \Rightarrow a^3 = 1$ (Caso trivial)
- Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$
- Sabemos que: $(-a) > 0 \Rightarrow (-a)^2 > 0$ productos positivos. De la misma forma: $(-a)^3 > 0$
- $(-a)^3 = ([-1]a)^3 = ([-1]a)([-1]a)([-1]a) = [-1]\cdot[-1]\cdot[-1]\, a\cdot a\cdot a$
- $[-1]a^3 = -a^3 > 0$
- Si $-a^3 > 0 \Rightarrow a^3 < 0 \Rightarrow a^3 \neq 1$
- Falta un ultimo caso: $0 < a < 1$
- Como $a < 1 \Leftrightarrow a^2 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1 \Leftrightarrow a^3 < a < 1 \Rightarrow a^3 < 1$

b) Demostrar que $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ usando el inciso anterior:

- $a^3 = b^3$, considere 3 casos (tricotomia)
- $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (Caso trivial)
- $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \Rightarrow b^3(a^{-1})^3 = (ba^{-1})^3 = 1$
- Con esto recaemos en el caso anterior, entonces: $ba^{-1} = 1$, por unicidad del inverso, $a = b$.

10.

a) $|x| = |-x|$

- Si $x = 0 \Rightarrow -x = -0 = (-1)\cdot 0 = 0 \Rightarrow |0| = 0 = |-0| = 0$
- Si $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ por otro lado: $-x < 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = (-1)(-x) = 1\cdot x = x$
- Si $x < 0$ la prueba es similar.

b) $|xy| = |x|\,|y|$

- Si $x = 0$ o $y = 0$ el caso es trivial
- Considere $x \neq 0$ y $y \neq 0$
- Si $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy = |x|\,|y| = xy$
- Si $x < 0$ y $y > 0 \Rightarrow xy < 0 \Rightarrow |xy| = -xy = (-x)y = |x|\,|y|$
- La prueba para ambos menores a cero es similar.

c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

- $|x^{-1}x| = 1$

  $|x^{-1}x| = |x^{-1}|\,|x| = 1 = |x|^{-1}|x|$

- Esto signfica que $|x|^{-1} = |x^{-1}|$

11.

a) $$|(|x|-1)| = \begin{cases} -(|x|-1) \,\mathrm{si}\, |x|-1<0 \begin{cases} -(-x-1) \,\mathrm{si}\, |x|<1\, y x<0 & 1 \\ -(x-1) \,\mathrm{si}\, |x|<1\, y x>0 & 2 \end{cases} \\ (|x|-1) \,\mathrm{si}\, |x|-1>0 \begin{cases} (-x-1) \,\mathrm{si}\, |x|>1\, y x<0 & 3 \\ (x-1) \,\mathrm{si}\, |x|>1\, y x>0 & 4 \end{cases} \end{cases}$$

1. $-1<x<1\, y x<0 \Rightarrow (-1,0)$
2. $-1<x<1\, y x>0 \Rightarrow (0,1)$
3. $x<-1$ or $x>1$ y $x<0 \Rightarrow x<-1 \Rightarrow (-\infty,-1)$
4. $x<-1$ or $x>1$ y $x>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow (1,\infty)$

12.

a) $|x-3|<8$

b) $|x-3| \geqslant 8$

- $$\begin{cases} x-3 \geqslant 8 \,\mathrm{si}\, x-3 \geqslant 0 \\ -(x-3) \geqslant 8 \,\mathrm{si}\, x-3<0 \Leftrightarrow (x-3) \leqslant -8 \,\mathrm{si}\, x-3<0 \end{cases}$$

13.

a) $|x-3| = c$

- Si $c<0$ luego $|x-3| = c$ da a lugar al conjunto vacio.
- $c=0$ nos da como resultado: $x=3$ solamente.
- Si $c>0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=c & \mathrm{si} \quad x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3 \\ -x+3=c & \mathrm{si}\, x-3<0 \Leftrightarrow x<3 \end{cases}$
- $x-3=c \Leftrightarrow x=c-3$; como $x \geqslant 3$ esto tiene solucion solamente si, $c-3 \geqslant 3$ (Por ejemplo)

b)

c) $|x-1| + |x+2| = 3$

- $$\begin{cases} x-1+x+2=3 & \mathrm{si}\, x-1 \geqslant 0\, y x+2 \geqslant 0 & x \geqslant 1\, y x>-2 \Rightarrow [1,\infty) & 1 \\ x-1-(x+2)=3 & \mathrm{si}\, x-1 \geqslant 0\, y x+2<0 & x \geqslant 1\, y x<-2 \Rightarrow \mathrm{vacio} & 2 \\ -(x-1)+(x+2)=3 & \mathrm{si}\, x-1<0\, y x+2 \geqslant 0 & x<1\, y x \geqslant -2 \Rightarrow [-2,1) & 3 \\ -(x-1)-(x+2)=3 & \mathrm{si}\, x-1<0\, y x+2<0 & x<1\, y x<-2 \Rightarrow (-\infty,-2) & 4 \end{cases}$$
- Solucion: $\begin{cases} 2x=2 \Leftrightarrow x=1 \,\mathrm{en}\, [1,\infty) \Rightarrow x=1 \,\mathrm{solucion} \\ \mathrm{No\, hay\, solucion} \\ 3=3, x \,\mathrm{es\, sol}\, \forall x \in [-2,1] \\ 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow \mathrm{no\, hay\, solucion} \end{cases}$

14.

a) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$

- $|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x| + |(-y)| = |x| + |y|$

b) $|x|-|y|\leqslant|x-y|$

- $|x|=|x+(-y+y)|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|\Leftrightarrow|x|-|y|\leqslant|x-y|$

c) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$

- Siguiendo el metodo hecho en b uno puede demostrar que:
- $|x|-|y|\leqslant|x-y|$; $|y|-|x|\leqslant|y-x|=|x-y|$ esto dice que: $|x|-|y|\geqslant-|x-y|$
- Es decir: $-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|\Leftrightarrow||x|-|y||\leqslant|x-y|$

15. Para hacer estos ejercicios utilizar:

- Si A esta acotado superiormente entonces es no vacio $\Rightarrow\exists\alpha=\max A$ que es una cota superior, es decir $a\leqslant\alpha\forall a\in A$ y ademas α cumple ser la menor de las cotas superiores. α es unico
- Si A esta acotado inferiormente entonces $\exists\beta=\min A$, que cumple: $\beta\leqslant a,\forall a\in A$. Y ademas cumple que: $\beta=\max(\text{cotas Inf } A)$. β es unico
- Lema Util:
- α es supremo de $A\Leftrightarrow\alpha$ es cota superior de A y $\forall\varepsilon>0\exists x\in A/\alpha-\varepsilon<x$
- β es el infimo de $A\Leftrightarrow\beta$ es cota inferior de A y $\forall\varepsilon>0\exists x\in A/\beta+\varepsilon>x$
- Corolario: Si α es cota superior y $\alpha\in A\Rightarrow\alpha=\max A$

  Demostracion: Si α no es el maximo, $\Rightarrow\exists\alpha_2/\alpha_2<\alpha$, pero como $\alpha\in A$, luego α_2 no puede ser cota superior. Entonces α debe ser el supremo de A. Como ademas $\alpha\in A$, luego α debe ser el MAXIMO.
- Corolario 2: Si β es cota inferior y $\beta\in A\Rightarrow\beta=\min A$
- Nota 1: Si el conjunto es real, y $\alpha\notin A$, pero se presupone $\alpha=\max A$, entonces siempre puede encontrar un elemento de A con la media aritmetica. Por ejemplo, considere el conjunto: $(k,l)\subset\mathbb{R}$.

  Luego, usando el lema util, $\forall\varepsilon>0$ deberia poder encontrar: $l-\varepsilon<a$ con $a\in A$. Si utilizo la media aritmetica: $k<l-\varepsilon<\frac{l-\varepsilon+l}{2}<l$, de manera que $\frac{2l-\varepsilon}{2}$ pertenece al conjunto por la definicion del mismo: $x\in\mathbb{R}/k<x<l$.

a) $[3,8)$

- Para el caso del 3 como es una cota inferior y esta en el conjunto, entonces directamente ya es el minimo.
- Para el caso del 8, suponga que el 8 no es el supremo, entonces $\exists\alpha/\alpha$ es la cota superior minima. Si α es el supremo: $\forall\varepsilon>0,\exists a\in A/\alpha-\varepsilon<a<\alpha$. Ademas como α es el supremo, luego $3<\alpha<8$.
- Considere: $3<\alpha<\frac{\alpha+8}{2}<8\Rightarrow\frac{\alpha+8}{2}\in A$, luego α no es cota superior.

b) $(-\infty,\pi)$

- No esta acotado inferiormente. Demostracion: $\mathbb{N}$ no esta acotado superiormente, luego $-\mathbb{N}$ no esta acotado inferiormente. Como $-\mathbb{N}\subset(-\infty,\pi)$ luego el mismo no puede estar acotado inferiormente.

- La cota superior es π, pues si no lo fuera entonces $\exists \alpha < \pi$ cota superior. Luego: $\alpha < \frac{\alpha+\pi}{2} < \pi$ luego $\frac{\alpha+\pi}{2} \in (-\infty, \pi)$ incurriendo en un absurdo.

c) $\{6k / k \in \mathbb{Z}\}$

- No esta acotado ni inferior ni superiormente. Examine el caso de la cota superior. Si $\alpha \in A$ luego $\alpha = 6K$, sin embargo como $K \in \mathbb{Z}$, luego $K+1 \in \mathbb{Z}$, de manera que $6(K+1) \in A$, lo cual es un absurdo. Si $\alpha \notin A$, luego $\exists K / 6K < \alpha$ y $\alpha - 6K < 6 \Leftrightarrow \alpha < 6(K+1) \in A$ lo cual es un absurdo.

d) $\left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$

- La propuesta es que: $-1 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$
- Como $1 \in A$ a la vez que 1 es cota superior entonces 1 es el maximo.
- Por otro lado sabemos que -1 seria el minimo (mismo argumento)
- Otro tipo de demostracion se puede hacer de la siguiente forma, y es utilizando el lema util:
- Si $\alpha = \sup A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / \alpha - \varepsilon < a \leqslant \alpha$
- Observemos que por arquimenidad: $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{n}$ luego: $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$, la pregunta que resta responder es si $1 - \frac{1}{n} \in A$, esto significa poder expresar a este numero como $\frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{Z}$.
- $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, bueno en este caso, en mi opinion no puede asegurarse que $\frac{n-1}{n}$ no es de la forma $\frac{1}{n}$, pues esto implicaria: $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}}$ lo cual implica asumir que $m = \frac{n}{n-1} \in \mathbb{Z}$. Es decir: $n = m(n-1) \Leftrightarrow n(1-m) - m = 0$

e) $A = \left\{3 - \frac{1}{n}, n \in N\right\}$

- Para este conjunto tenemos que si $a \in A$: $2 < a \leqslant 3$
- 3 es el maximo.
- Pero es 2 el infimo?

16. Probar que si A,B son dos subconjuntos acotados superiormente, entonces, AUB esta acotado superiormente.

–