Práctico 6

Parte I

En esta primera parte, cada vez que se pida determinar una derivada, es necesario usar la definición y no las reglas usuales de derivación.

1. (a) Demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ para $a \neq 0$.
(b) Demostrar que la recta tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a)$ no corta la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.
(c) Demostrar que si $g(x) = 1/x^2$, entonces $g'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.
(d) Demostrar que la tangente a la gráfica de g en $(a, 1/a^2)$ corta a la gráfica de g en otro punto.
(e) Demostrar que si $h(x) = \sqrt{x}$, entonces $h'(a) = a^{-1/2}/2$ para $a > 0$.
(f) Si $f(x) = [x]$, hallar f' donde sea posible.

2. Sea f una función derivable en el intervalo abierto (a, b) y $c \in \mathbb{R}$. En cada caso hallar g' en su respectivo dominio.

(a) $g(x) = f(x) + c$ (b) $g(x) = cf(x)$ (c) $g(x) = f(x + c)$
(d) $g(x) = f(cx)$ (e) $g(x) = f(x)^2$

3. Sea f una función derivable en a. Demostrar que $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Parte II

A partir de ahora sí es posible usar las reglas usuales, aunque en algunos casos será necesario usar también la definición.

4. Calcular f' en cada uno de los siguientes casos.

(a) Si $f(x) = x^3$, hallar $f'(5)$ y $f'(x^2)$.

(b) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - \pi x$ (c) $f(x) = (x^3 + 3)(2x^2 - 1)$ (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

(e) $f(x) = \tan(x)$ (f) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^8$ (g) $f(x) = x^2 \cos(1/x)$

(h) $f(x) = \big(\tan(4x^2 + 1)\big)^{\frac{4}{3}}$ (i) $f(x) = \cos(x \operatorname{sen}(x))$ (j) $f(x) = \cos(\sqrt{x^4 + 7})$

(k) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{\operatorname{sen}(3x)}}{1 - x + x^5}$ (l) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^7(x))}{x}$ (m) $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

5. En cada uno de los siguientes casos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto (x_0, y_0) indicado.

(a) $\begin{cases} y = 1 - 2x - 3x^2, \\ (x_0, y_0) = (-2, -7) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ (x_0, y_0) = (1, 1) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{1 - x}, \\ (x_0, y_0) = (0, 0) \end{cases}$

6. (a) Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Demostrar que f es derivable en 0 y calcular $f'(0)$.
(b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostrar que f es derivable en 0.

(c) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Probar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$. Calcular f' y probar que f' no es continua en 0.

7. Calcular $f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si:

(a) $f(x) = x^{10}$ (b) $f(x) = \cos(x)$ (c) $f(x) = 1/x$ (d) $f(z) = \sqrt{z}$

8. Encontrar un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

9. Decir en qué puntos es derivable la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } |x| < 1, \\ 2x+1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 7-x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

10. (a) Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

(b) Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0.

11. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $f + g$ es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.
(b) Si fg es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.
(c) Si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $|f|$ es derivable en a.
(d) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que no es derivable en una cantidad infinita de puntos.
(e) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que es derivable en 0 y no lo es en cualquier intervalo abierto que contiene al 0.
(f) Dados $a < b$, toda función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se extiende a una función derivable en todo $\mathbb{R}$.

12. Considerar la función biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6 - x - x^3$. Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $(-4, 2)$.

13. Determinar en los siguientes casos $(f^{-1})'(d)$.

(a) $f(x) = x^5 + 2, \quad d = 1.$
(b) $f(x) = \sqrt{4 - x}, \quad d = 3.$
(c) $f(x) = \tan(2x), \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad d = 1.$

14. (a) Se define la función $\operatorname{arcsen}(s) : [-1, 1] \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$ como la inversa de la función $\operatorname{sen}(x)$ restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Demuestre que

$$\operatorname{arcsen}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

(b) Análogamente se define $\arccos(s) : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$. Demuestre que

$$\arccos'(s) = \frac{-1}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

(c) Se define ahora $\operatorname{arctg}(s) : \mathbb{R} \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$ como la inversa de la función $\operatorname{tg}(x)$ restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Demuestre que

$$\operatorname{arctg}'(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

Parte III

En esta parte hay problemas que utiliza la derivada y su significado con aplicaciones a la física y la economía.

15. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$, en donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los tiempos $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El costo (en pesos) de producción de cierto artículo es $c(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$.

(a) Encuentre la razón de cambio medio de c respecto de x cuando el nivel de producción cambia

(i) de $x = 100$ a $x = 105$.

(ii) de $x = 100$ a $x = 101$.

(b) Encuentre la razón de cambio instantánea de c respecto de x cuando $x = 100$. (A esta razón se la llama costo marginal.)

17. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 pies/seg, entonces su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.

(a) ¿ Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

(b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando se encuentra a una altura de 96 pies sobre el nivel del suelo y se dirige hacia arriba? Idem si se dirige hacia abajo.

18. Una masa sujeta a un resorte tiene una función posición dada por $y(t) = A\operatorname{sen}(\omega t)$, en donde A es la amplitud de sus oscilaciones y ω es una constante.

(a) Encuentre la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

(b) Demuestre que la aceleración es proporcional al desplazamiento y.

(c) Demuestre que la rapidez máxima es cuando la aceleración es 0.

19. Una bola de nieve esférica se derrite de manera que su volumen disminuye a razón de 1cm/min., encuentre la velocidad a la que el diámetro disminuye cuando mide 10cm.

20. Un farol se encuentra en la parte superior de un poste de 18 pies de altura. Un hombre cuya estatura es de 6 pies camina alejándose del poste con una velocidad de 5 pies/seg. siguiendo una trayectoria rectilínea.

(a) ¿ Con qué rapidez se mueve la punta de la sombra del hombre cuando éste se encuentra a 40 pies del poste?

(b) ¿Con qué rapidez se alarga la sombra del hombre en ese punto?.

21. Un cometa que se encuentra a una altura de 100 pies sobre el nivel del suelo se mueve horizontalmente a una velocidad de 8 pies/seg. ¿Con qué rapidez disminuye el ángulo formado por la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 pies de cuerda?.