1. Considerar la sucesión $\{a_n\}_n$ donde $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(a) Determinar si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe y calcular su valor L.

(b) Encontrar los a_n que se encuentran a una distancia de L mayor que ε, para cada uno de los siguientes valores de ε: $\varepsilon = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}1$ y $\varepsilon = 0{,}05$.

(c) Dibujar en la recta real los a_n que distan de L más que $\varepsilon = 0{,}1$.

2. Demostrar usando la definición los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0.$

3. Calcular los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5-2n}{3n-7}.$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^3}{(n-1)^2}.$ (e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+7n}{n-2}.$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n).$ (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1}.$

4. Demostrar usando la definición los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-100}{n} = +\infty.$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$

5. Probar que para todo número real $\ell \in (0,1)$, existe una sucesión $\{q_n\}_n$ de números racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = \ell$.

6. Sea $\{a_n\}_n$ la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$.

(a) Dar tres subsucesiones convergentes de $\{a_n\}_n$ distintas.

(b) Probar que si $\{a_{n_j}\}_j$ es una subsucesión convergente, entonces $\displaystyle\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = 1$ ó -1.

7. (a) Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de números reales tal que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = \ell$ para todo $n \geq n_0$.

(b) Determinar todas las subsucesiones convergentes (con su límite) de la sucesión

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

8. (a) Demostrar que si $0 < a < 2$ entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) Demostrar la convergencia de la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ \ldots$$

(c) Hallar el límite de la sucesión del ítem anterior. (Sugerencia: notar que si a_n denota al n-ésimo término de la sucesión, entonces $(a_{n+1})^2 = 2a_n$).

9. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $\{a_n\}_n$ converge a ℓ, entonces $\{a_{n_j}\}_j$ con $n_j = j+5$ también converge a ℓ.

(b) Si $\{a_n\}_n$ tiene dos subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces $\{a_n\}$ no converge.

(c) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ó $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

10. (a) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.

(b) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.