Practico 6

1 Repaso teoria

Definition 1. *Sea A un intervalo abierto que contiene al punto a. Se dice que la funcion* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *es derivable en a si existe:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El valor de este limite se denota como f'(a)

Definition 2. *Si la funcion f es derivable en a, la recta tangente al grafico de f por el punto (a,f(a)) es la dada por la funcion: y(x)=f'(a)(x-a)+f(a)*

Que determina la unica pendiente f'(a) que pasa por el punto (a,f(a)).

Definition 3. *Si la funcion f es derivable en todo punto de A (Abierto) decimos que f es derivable en el intervalo. Podemos definir entonces f' como la derivada de f en A.*

Theorem 4. *Si f es derivable en a entonces f es continua en a. (La reciproca es falsa).*

Theorem 5. *Derivada de la suma: (f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)*

Theorem 6. *Derivada del producto: f'(a)g(a)+f(a)g'(a)*

Corollary 7. *Derivada de funcion por constante: (cf)'(a)=cf'(a)*

Proposition 8. *Derivada (factor): Sea f(x)=*$x^n \Rightarrow$ *f'(x)=*$n x^{n-1}$

Theorem 9. *Si g es derivable en a y g(a)*$\neq 0$ *entonces la funcion* $\frac{1}{g}$ *es derivable en a y* $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

Faltan : Teorema derivada del cociente

Teorema derivada de la composicion: Chain rule.

Derivadas seno y cos

Teorema de la derivada de la inversa.

$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Teorema de la derivada de la raiz enesima.

2 Practico

1.

2.

3.

4. Calcular f' donde $f(x)$ viene dada por cada una de las siguientes expresiones.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h) $\cos\left(\sqrt{x^4+7}\right)$

- La derivada es la correspondiente a una composicion de funciones. Use la regla de la cadena:
- $[f(g)]' = f'(g(x)) = -\text{sen}\left(\sqrt{x^4+7}\right)\left(\frac{1}{2}(x^4+7)^{-1/2}4x^3\right)$

5.

a) Sea h una funcion tal que $|h(x)| \leqslant x^2$ para todo x. Demostrar que h es derivable en 0 y calcular $h'(0)$.

- Recuerde el lema del Sanwich: Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x entonces si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$
- En nuestro caso concreto: $-x^2 \leqslant h(x) \leqslant x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 0$
- Ademas: $-0 \leqslant h(0) \leqslant 0 \Rightarrow h(0) = 0$
- Para demostrar que h es derivalbe en 0 , tiene que existir este limite:

$$\lim_{k\to 0} \frac{h(0+k) - h(0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k}$$

- Por loa hipotesis de acotacion:

$$\lim_{k\to 0} -\frac{k^2}{k} \leqslant \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k} \leqslant \lim_{k\to 0} \frac{k^2}{k}$$

- De manera que: $0 \leqslant \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k} \leqslant 0 \Rightarrow \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k} = 0$

b) Considere la funcion $g(x) = \begin{cases} x^2\text{sen}(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ demostrar que es derivable en todo $\mathbb{R}$ pero que la derivada no es continua en 0.

- Si $x \neq 0$ la funcion es derivable. No voy a verificar eso, es simplemente calcular la derivada que va a existir.
- Calculamos la derivada en 0

$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\text{sen}(1/h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(1/h)}{1/h}$

- Normalmente uno llegaria hasta aca y no podria calcular (No puede utilizar limites notables)
- Es en este momento que se utiliza la hipotesis de $a)$, tenga en cuenta que:

  Si $x \neq 0$ luego $|g(x)| \leqslant x^2$ de manera que $\lim_{h\to 0} h^2\text{sen}(1/h)/h = 0$
- $g'(0) = 0$
- Para el resto de los puntos: $g'(x) = 2x\,\text{sen}(1/x) - x^2\cos(1/x)(-1/x^2)$

  $g'(x) = 2x\,\text{sen}(1/x) + \cos(1/x)$
- Cuando quiera tomar $x \to 0$ no podre calcular el limite de $\cos(1/x)$

6. Calcular $f^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

   a) $f(x) = x^{10}$

   - Empieze calculando algunas derivadas:
   - $f'(x) = 10x^9$, $f''(x) = 10{\cdot}9{\cdot}10^8$
   - $f^n(x) = \frac{10!}{(10-n)!}x^{10-n}$

   b) $f(x) = \cos(x)$

   - $f'(x) = -\text{sen}(x)$, $f''(x) = -\cos(x), f'''(x) = \text{sen}(x), f''''(x) = \cos(x)$
   - $\frac{d^{4n}f(x)}{dx^{4n}} = \cos(x)$

   c) $f(x) = \frac{1}{x}$

   - $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f^n(x) = (-1)^n n!\,x^{-n-1}$

   d)

7. En cada uno de los siguientes casos encontrar la ecuacion de la recta tangente a la curva en un dado punto (x_0, y_0)

   a) $f(x) = 1 - 2x - 3x^2$ en $(-2, -7)$

   - $f'(x) = -2 - 6x \Rightarrow f'(-2) = -2 + 12 = 10$
   - Construya la ecuacion de la recta tangente:

     $y = f'(-2)(x - (-2)) + (-7)$

   b) Similar

   c) Similar

8. Decir en que puntos es derivable la funcion:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant -1\\ x^2 & |x|<1\\ 2x+1 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 7-x & x>2\end{cases}$$

- En terminos del una respuesta para el parcial, usted tendria que decir porque cada funcion es continua en cada uno de los intervalos.

- Examinamos solamente los puntos de las intersecciones.

- Una herramienta que puede utilizar es tener en cuenta que si la funcion no es continua entonces no es derivable. Primero entonces verifique la continuidad de la funcion:

  - Si $x=-1\Rightarrow f(-1)=0$, $\lim_{x\to -1^-}f(x)=0$ $\lim_{x\to -1^+}f(x)=(-1)^2=1$

    Conclusion: La funcion no es derivable en $x=-1$ porque no es continua en ese punto.

  - Si $x=1\Rightarrow f(1)=3$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+}f(x)=3$

    Conclusion: La funcion tampoco es derivable en estepunto porque no es continua.

  - Si $x=2\Rightarrow f(2)=5$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=5$, $\lim_{x\to 1^-}f(x)=5$

    Claramente la funcion es continua. Ahora hay que verificar la derivada.

  - $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{7-(2+h)-5}{h}=-1$

  - $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2(2+h)+1-5}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4+2h-4}{h}=2$

    La conclusion es que a pesar de todo, la derivada no existe.

9.

   a) Supongamos que $f(x)=x\,g(x)$ para alguna funcion g que es continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0 y hallar $f'(0)$ en terminos de g.

      - Quiere probar: $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)g(0+h)-0\,g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\,g(h)}{h}=\lim_{h\to 0}g(h)=g(0)$

      - La conclusion es que: $f'(0)=g(0)$

   b) Supongamos que f es derivable en 0 y que $f(0)=0$. Demostrar que $f(x)=x\,g(x)$ para alguna funcion g continua en 0.

      - $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

      - Podemos decir:

        $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-f'(0)=0\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}f(h)-f(0)-h\,f'(0)=0$

      - Entonces:

        $\lim_{h\to 0}f(h)-h\,f'(0)=f(0)$

10. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $f+g$ son derivables en a entonces f, g son derivables en a. FALSO

- Considere: $f(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) + h(x) = 0 \Longleftarrow$ Es diferenciable en 0, pero sus partes no.

b) Si fg es derivable en a entonces f, g son derivables en a. FALSO

- Considere: $f(x) = |x|$ y $g(x) = -1/|x|$
- $fg = -1$, diferenciable en 0 pero g no.

c) Si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $|f|$ es derivable en a. VERDADERO

- Usaremos la regla de la cadena: $|f| = \sqrt{f^2}$
- $\frac{d|f|}{dx} = \frac{1}{2}(f^2)^{-1/2} 2ff'$

d) Si: $f(x) = [x]$ (baja o superior).