Practico 4

1 Definiciones

- Definicion de Funciones:

  $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2 Ejercicios

1.

2. $|x| < \delta$, $\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, entonces $f+g$ esta definida en $|x| < \delta$

   Si los dominios de f, g son distintos entonces tenes que computar antes la interseccion de los dominios.

3.

   a) $\lim_{x\to a} x^4 = a^4$

   $|x^4 - a^4| = |(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)| = |(x-a)(x+a)(x^2+a^2)| = |x-a|\,|x+a|\,|x^2+a^2|$

   $|x| - |a| < |x - a| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 + |a|$

   $|x + a| \leqslant |x| + |a| < 1 + 2|a|$

   Teniendo en cuenta lo anterior:

   $|x^2 + a^2| \leqslant |x|^2 + |a|^2 < (1 + |a|^2 + a^2)$

   Todo esto para escribir lo siguiente:

   $|x^4 - a^4| < |x - a|(1 + 2|a|)((1 + |a|)^2 + a^2) < \varepsilon$

   Con esto ya puedo buscar la δ

   $$\delta = \frac{\varepsilon}{(1 + 2|a|)((1 + |a|)^2 + a^2)}$$

   b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

   Aca utiliza el concepto de entorno, si me restrinjo a $|x - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

   $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 > \frac{1}{x} > \frac{2}{3}$

   $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \left|\frac{1-x}{x}\right| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$

   c) $\lim_{x\to 1} x^4 + \frac{1}{x} = 2$

   $\left|x^4 + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|x^4 - 1 + \frac{1}{x} - 1\right| \leqslant |x^4 - 1| + \left|\frac{1}{x} - 1\right| = |(x-1)(x+1)(x^2+1^2)| + \left|\frac{1}{x} - 1\right|$

   $|(x^2 + 1^2)| < 3$, $|x + 1| < 3$

   $< |x - 1| 6 + \left|\frac{1}{x} - 1\right| < |x - 1| 6 + 2|x - 1| = 8|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{8} = \delta$