

Practico 2

1 Teoria

Definition 1. Sea $f:A \rightarrow B$, el conjunto A se denomina Dominio mientras que B se denomina conjunto de llegada.

Definition 2. Una funcion $f:A \rightarrow B$ se dice inyectiva si $\forall x, y \in A$, con $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$. Otra forma de verlo es que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Definition 3. Sea $f:A \rightarrow B$, la imagen de f es: $\{y \in B / \exists x \in A / f(x) = y\}$

Definition 4. Una funcion se dice suryectiva si la imagen de f es igual a B .

2 Practico

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

7. $C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$, A, B subconjuntos de numeros Reales

a) Expresiones para: $C_{A \cap B}$, $C_{A \cup B}$, $C_{\mathbb{R} - A}$

– $C_{A \cap B} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \end{cases}$

– Es decir que esto puede escribirse como: $C_{A \cap B} = C_A \cdot C_B$

– Comprobacion:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$C_{A \cap B}$	$C_A \cdot C_B$
V	V	V	1	1
F	V	F	0	0
V	F	F	0	0
F	F	F	0	0

– $C_{A \cup B} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \end{cases}$

– Puede escribirse pensando en: $C_{A \cup B} = C_A + C_B - C_A \cdot C_B$

– Comprobacion:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$C_{A \cup B}$	$C_A + C_B - C_A \cdot C_B$
V	V	V	1	1
V	F	V	1	1
F	V	V	1	1
F	F	F	0	0

$$- C_{\mathbb{R}-A} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

– Puede escribirse como: $C_{\mathbb{R}-A} = 1 - C_A$

– Comprobacion:

$x \in A$	$x \in \mathbb{R} - A$	$C_{\mathbb{R}-A}$	$1 - C_A$
V	F	0	0
F	V	1	1

b) f solo puede tomar 2 valores: 0 o 1. Por ejemplo, $f(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$, de manera que si $x \notin \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$. De la misma forma seria para $f(x) = 0$. Claramente $f = C_{\mathbb{R}}$. Si solo se cumple para un subconjunto A , tendremos lo mismo.

c)

i. Si $f = f^2 \Rightarrow f = C_A$

$$- f(x) = f^2(x) \forall x \in A \Leftrightarrow 0 = f(x)[f(x) - 1]$$

$$- \text{Si } x \in A \Rightarrow f(x)[f(x) - 1] = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \text{ o } f(x) = 0$$

– Segun b) luego $f = C_A$

ii. Si $f = C_A \Rightarrow f = f^2$

$$- C_A \cdot C_A = 1 \text{ si } x \in A, 0 \text{ si } x \notin A, \text{ es decir } C_{A \cap A} = C_A$$

8.

a) Verdadero: $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

b) Falso: $f(x) = x^2, g(x) = x \Rightarrow (f + g)(-x) = x^2 - x \neq -(f + g)(x) = -(x^2 + x)$

c) Verdadero: $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)(-g(x))] = f(x)g(x) = (fg)(x)$

d) Falso: $f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x))$

e) Falso: $|2x + 1|$ no es par: si $x = 1 \Rightarrow |2x + 1| = 3$ si $x = -1 \Rightarrow |2x + 1| = 1$

f) Verdadero: $f(|-x|) = f(|x|)$

g) Falso: $f(x) = x^2, g(x) = -x, h(x) = x \Rightarrow [x - x]^2 = 0 \neq x^2 + x^2 \forall x \neq 0$

h) Pregunta no trivial. La composicion de Funciones ES asociativa, por lo cual el enunciado es verdadero.

$$- \text{Dom } f \circ g = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \text{Dom } f\}$$

- $\text{Dom } k \circ f = \{g \in \text{Dom } f / f(g) \in \text{Dom } k\}$
- $\text{Dom } (k \circ f) \circ g = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \text{Dom } k \circ f\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \text{Dom } f / f(g) \in \text{Dom } k\}$
- $\text{Dom } k \circ (f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \text{Dom } f / f(g) \in \text{Dom } k\}$

9.

- a) Si: $f(x) = x + 1$, busque la inversa: $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$, luego: $[x - 1] + 1 = x = [x + 1] - 1$
- b) Si $f(x) = c$ No tiene inversa porque no es uno a uno. La unica funcion que cumpliria que $f(g) = g(f)$ es ella misma o la identidad.

c)

- La funcion identidad cumple: $I(x) = x$, en particular: $I(g(x)) = g(x) \forall g$
- Por otro lado: $g(I(x)) = g(x)$
- Juntando ambas afirmaciones queda demostrado.

10.

11.

12.

a) $f(x) = x^3 + 1 \Leftrightarrow y = x^3 + 1 \Leftrightarrow x = (y - 1)^{1/3}$, $\text{dom } f^{-1} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (x - 1)^3 \Leftrightarrow y^{1/3} + 1 = x$, $\text{dom } f^{-1} = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2}y & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$

Nota: La imagen de $f(x)$ para $x < 0$ son los $\mathbb{R}_{<0}$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}$ para el otro caso.

e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{y} & \text{si } y \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

$\text{Im } \frac{-1}{x-2} = \mathbb{R} - \{0\}$ Este es el dominio de la inversa para ese caso.

f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ 1 - x^3 & x < 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{Im } -x^2 = \mathbb{R}_{\leq 0} \\ \text{Im } 1 - x^3 = \mathbb{R}_{>1} \end{matrix} \Rightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{-y} & \text{si } y \leq 0 \\ (1 - y)^{1/3} & \text{si } y > 1 \end{cases}$

13.

a) $f(x) = -x^2$, restrinja el dominio a $\mathbb{R}_{\geq 0}$, por ejemplo: $[0, 10]$, $\text{Im } f = \mathbb{R}_{\leq 0}$, en ese caso: $\sqrt{-y} = x$ con dominio: $[-100, 0]$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, igual que arriba solo que debe excluir el 0 del dominio.

14. El cubo tiene 6 caras, si el lado mide l entonces, cada cara tiene un area de l^2 , Por lo cual la superficie del cubo es: $s(l) = 6l^2$. El volumen de un cubo es: $V(l) = l^3 \Leftrightarrow l = (V)^{1/3}$, Entonces: $s(V) = 6(V)^{2/3}$

15.

a)

b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

– $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{1 - x^2}$

– Por otro lado: $\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow 1 \geq |x|$

– Por lo cual el dominio seria: $-1 \leq x \leq 1$

– Si $-1 \leq x \leq 1$ es el dominio de la funcion $\sqrt{1 - x^2}$, ahora la imagen de esta funcion es: $[0, 1]$. Esto puede obtenerse sabiendo que $y = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$ y que $-1 \leq y \leq 1$, haciendo la interseccion obtenemos: $0 \leq y \leq 1$.

– Si esto sucede entonces la funcion $\sqrt{1 - y}$ es valida para todo valor de y en ese rango.

16. Encontrar dominio e imagen:

17. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, Dar expresion y dominio.

a)

b) $g(x) = f(1/x)$

– Expresion: $g(x) = f(1/x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

– Dominio: $h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \text{Dom } h = \mathbb{R} - \{0\}$

– Dominio: $f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

– Como $x = -1 \Rightarrow h(-1) = -1 \Rightarrow$ pedimos que: $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

18. $C(x) = x^2$, $P(x) = \frac{1}{x}$, $S(x) = \text{sen}(x)$

i.

ii. Expresar cada una de estas funciones en terminos de C,P,S

a) $f(x) = \frac{1}{\text{sen}(x^2)} = P(S(C(x)))$

b)

19.

20. Verdadero o Falso

a) Si f, g son pares, entonces $f + g$ es par.

- Par significa que: $f(-x) = f(x)$
- Sea $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$
- Verdadero

b)

c)

d)

e)

f)

g) $f(g + h) = f(g) + f(h)$

- Falso, suponga $f(x) = 1/x^2$, suponga que $g(x) = x$ y que $h(x) = -x$
- Luego $f(g + h)$ no esta definida para todo \mathbb{R}
- pero $f(g) + f(h) = \frac{2}{x^2}$

h) $\frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{f}(g(x))$

- Considere: $h(x) = 1/x$
- Entonces: $\frac{1}{f(g(x))} = h(f(g(x)))$
- Luego $\frac{1}{f} = h(f(x)) \Rightarrow \frac{1}{f}(g(x)) = h(f(g(x)))$
- Verdadero.