ANÁLISIS MATEMÁTICO I - FAMAF
Segundo cuatrimestre de 2022
Profesor encargado: Marcos Salvai

Números reales

Motivación. Nos planteamos las siguientes preguntas, de manera ingenua:

¿Por qué
$$x^3 + 1 = (x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)$$
se cumple para cualquier número x?

¿Por qué el resultado de sumar dos números no cambia si se cambia el orden al sumarlos?

El tema que nos ocupa es, en general y de manera informal, cuándo debemos esmerarnos en dar una respuesta explicada o, por el contrario, nos conformamos con responder simplemente "Porque sí". La última posibilidad la aceptaríamos solo para propiedades muy básicas. Pero, ¿cuáles serían las propiedades básicas?

Propiedades de cuerpo

Denotamos el conjunto de números reales por $\mathbb{R}$. Existen dos operaciones: suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$. Son **conmutativas** y **asociativas**:
$$\begin{array}{ll} a + b = b + a, & a \cdot b = b \cdot a, \\ (a + b) + c = a + (b + c)\,, & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{array}$$
para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Existe un **elemento neutro para la suma**: 0, que cumplea $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Existe un **elemento neutro para la multiplicación**: $1 \neq 0$, que cumple $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Todo número a tiene un **opuesto** $-a$, que cumple $a + (-a) = 0$.

Todo número $a \neq 0$ tiene su **inverso** a^{-1} que cumple $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

Propiedad **distributiva**:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Un sistema numérico con esas nueve propiedades se llama **cuerpo**.

En las siguientes dos proposiciones presentamos otras propiedades básicas de $\mathbb{R}$, que se pueden deducir de las anteriores.

Proposición. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que
$$a \cdot 0 = 0.$$

Prueba. Tenemos
$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0.$$
Sumamos miembro a miembro $-(a \cdot 0)$ y obtenemos
$$(a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) = a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))\,.$$

Equivalentemente, por la asociatividad y la definición de opuesto,

$$a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))) = 0.$$

Pero el primer término es igual a

$$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0.$$

Así, $a \cdot 0 = 0$, como queríamos.

Proposición. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$-(a \cdot b) = a \cdot (-b).$$

Prueba. Debemos mostrar que $a \cdot (-b)$ es el opuesto de $a \cdot b$. O sea, debemos verificar que

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = 0.$$

Desarrollando el miembro izquierdo obtenemos lo que buscábamos:

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

(la última igualdad se debe a la proposición anterior). □

Comentario. Hay sistemas numéricos bastante diferentes de $\mathbb{R}$ que tienen esas nueve propiedades. Por ejemplo, el conjunto $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ con las operaciones

$$\begin{array}{rclllll} \bar{0}+\bar{0} & = & \bar{0}, & \bar{0}+\bar{1}=\bar{1}, & \bar{1}+\bar{0}=\bar{1}, & \bar{1}+\bar{1}=\bar{0}, \\ \bar{0}\cdot\bar{0} & = & \bar{0}, & \bar{0}\cdot\bar{1}=\bar{0}, & \bar{1}\cdot\bar{0}=\bar{0}, & \bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}. \end{array}$$

es un cuerpo. Los elementos del conjunto son dos objetos matemáticos nuevos, que tienen nombres parecidos a nuestros conocidos 0 y 1 para resaltar la analogía (parcial) de las operaciones.

Veamos, por ejemplo, que se cumple un caso de la propiedad distributiva (usando la tabla). Verifiquemos que

$$\bar{1} \cdot (\bar{1} + \bar{1}) = \bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{1}.$$

En efecto, el primer miembro es igual a $\bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$ y el segundo es $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$, luego coinciden. □

Ejemplo. Repasamos cómo completar cuadrados.

$$x^2 + 14x + 4 = x^2 + 2 \cdot 7x + 4 = x^2 + 2 \cdot 7x + 7^2 - 7^2 + 4 = (x + 7)^2 - 45.$$

Propiedades de orden

Existe una relación $<$ que cumple cuatro propiedades:

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$, vale exactamente una de las siguientes propiedades

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a \qquad \text{(tricotomía)}$$

- Si a, b, c verifican $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$ (transitividad).

- Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces
$$a + c < b + c.$$
- Si $a < b$ y $\mathbf{0} < \mathbf{c}$, entonces
$$a \cdot c < b \cdot c.$$
También se define $a > b$ mediante $b < a$.

Un sistema numérico con las nueve propiedades de cuerpo y las cuatro de orden (trece propiedades) se llama **cuerpo ordenado.**

Ejemplo. Al multiplicar los miembros de una desigualdad por un número c, para que la desigualdad no cambie, es necesario que c sea positivo:

$3 < 7$, pero al multiplicar ambos miembros por $c = -2$ obtenemos $3{\cdot}(-2) = -6 > 7{\cdot}(-2) = -14$.

Ejemplo. La propiedad $1 > 0$ es "básica", pero no está entre las propiedades de cuerpo ordenado; se deduce de ellas. En efecto, sabemos que $1 \neq 0$. Por la propiedad de tricotomía, se cumple que $1 > 0$ o bien que $1 < 0$.

Suponemos que $1 < 0$. Podemos sumar el opuesto -1 miembro a miembro, y obtenemos
$$1 + (-1) < 0 + (-1)\,,$$
o sea,
$$0 < -1. \tag{1}$$
Luego, podemos multiplicar miembro a miembro la desigualdad $1 < 0$ por el número positivo -1, y se conserva la desigualdad:
$$1 \cdot (-1) < 0 \cdot (-1)\,.$$
De allí,
$$-(1 \cdot 1) < 0,$$
O sea, llegamos a que $-1 < 0$, lo que contradice (1) por tricotomía. El absurdo provino de suponer que $1 < 0$. En consecuencia, $1 > 0$.

Comentario. A partir de las 13 propiedades de cuerpo ordenado se pueden demostrar todas las propiedades "algebraicas" de los números reales, por ejemplo:
$$\begin{array}{l} a \cdot b = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0), \\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \\ \text{Si } a < b, \text{ entonces existe } c \text{ tal que } a < c < b. \end{array}$$

Ejemplo (una inecuación). Encontrar todos los números x tales que
$$\frac{2}{x-3} > 1.$$
Lo primero que observamos es que $x \neq 3$. La ecuación equivale a
$$(2 > x - 3 \quad \text{si } x - 3 > 0) \qquad \text{y} \qquad (2 < x - 3 \quad \text{si } x - 3 < 0),$$

o lo que es lo mismo,

$$(x < 5 \quad \text{si } x > 3) \qquad \text{y} \qquad (x > 5 \quad \text{si } x < 3).$$

Pero x no pueder ser mayor que 5 si es menor que 3. Luego, el conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$.

Nota. Si no tomamos en cuenta el signo del denominador al pasarlo multiplicando al otro miembro, obtenemos la inecuación $2 > x - 3$, o sea, $x < 5$. El conjunto de soluciones es el intervalo $(-\infty, 5)$, estrictamente más grande. En consecuencia, resolver la ecuación $2 > x - 3$ no es equivalente a resolver la ecuación original.

Valor absoluto

Definición. El valor absoluto de un número $a \in \mathbb{R}$ se define por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$, $|0| = 0$.
El número $|a|$ se interpreta geométricamente como la distancia del número a al cero.
En el práctico se ve que

$$|x| = |-x| \qquad \text{y} \qquad |xy| = |x|\,|y|\,.$$

Ejemplo. Mostrar que $b^2 = |b|^2$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
Para todo $b \in \mathbb{R}$ calculamos

$$|b|^2 = \begin{cases} b^2 & \text{si } b \geq 0, \\ (-b)^2 & \text{si } b < 0. \end{cases} = \begin{cases} b^2 & \text{si } b \geq 0, \\ b^2 & \text{si } b < 0. \end{cases} = b^2.$$

Ejemplo: Mostrar que $|b| \geq b$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
Si $b \geq 0$ tenemos que $|b| = b$, lo que implica que $|b| \geq b$.
Si $b < 0$, tenemos que $|b| = -b > 0 > b$. En ambos casos resulta $|b| \geq b$.

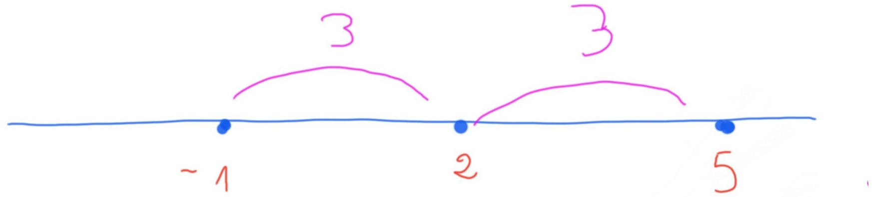
Ejemplo. Hallar los números x tales que $|x - 2| = 3$
Esa condición equivale a que

$$\begin{aligned} x - 2 &= 3 \quad \text{si} \quad x - 2 \geq 0 \\ \text{y} \quad -(x - 2) &= 3 \quad \text{si} \quad x - 2 < 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$x = 5 \quad \text{si} \quad x \geq 2 \qquad \text{y} \qquad x = -1 \quad \text{si} \quad x < 2.$$

O sea, el conjunto solución es $\{-1, 5\}$.



El problema se interpreta geométricamente como buscar los x cuya distancia a 2 sea igual a 3.

Ejemplo. La interpretación geométrica de la ecuación $|x+5|=4$ se facilita si la escribimos (de manera equivalente) como

$$|x-(-5)|=4.$$

Entonces el conjunto solución consiste en los puntos cuya distancia a -5 es igual 4, y es el conjunto $\{-1,-9\}$

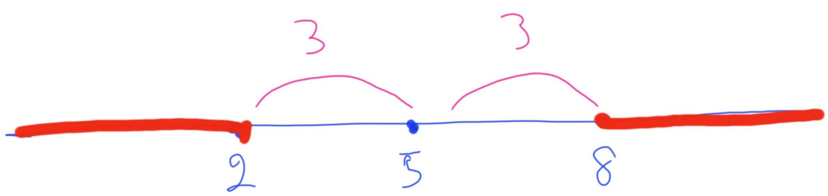
Ejemplo. Hallar los x tales que $|x-5|\geq 3$.

$$\begin{aligned} |x-5| &= \begin{cases} x-5\geq 3 & \text{si } x-5\geq 0, \\ -(x-5)\geq 3 & \text{si } x-5<0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-5\geq 3 & \text{si } x\geq 5, \\ -x+5\geq 3 & \text{si } x<5. \end{cases} \end{aligned}$$

O sea, los x tales que

$$x\geq 8 \quad \text{si} \quad x\geq 5 \qquad \text{o} \qquad x\leq 2 \quad \text{si} \quad x<5.$$

Pero $x\geq 5$ es una condición vacía para $x\geq 8$ (lo mismo, $x<5$ para $x\leq 2$). Así el conjunto solución es $(-\infty,2]\cup[8,\infty)$.



Ejemplo. Hallar expresiones equivalentes a

$$|2-|x||,$$

sin barras de valor absoluto.

$$\begin{aligned} |2-|x|| &= \begin{cases} 2-|x| & \text{si } 2-|x|\geq 0, \\ -(2-|x|) & \text{si } 2-|x|<0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2-|x| & \text{si } |x|\leq 2, \\ -2+|x| & \text{si } |x|>2, \end{cases} \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} |x| &\leq 2 \quad \text{si y solo si} \quad -2\leq x\leq 2, \\ |x| &> 2 \quad \text{si y solo si} \quad (x>2 \quad \text{o} \quad x<-2). \end{aligned}$$

Luego,

$$|2-|x|| = \begin{cases} 2-x & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ 2-(-x) = 2+x & \text{si } -2 \le x < 0, \\ -2+x & \text{si } x > 2, \\ -2-x & \text{si } x < -2. \end{cases}$$

Proposición (la desigualdad triangular). Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

Nota. A veces la desigualdad es estricta, por ejemplo, para $x = 5$, $y = -3$.

Antes de la prueba damos el siguiente ejercicio: Mostrar que si $a \ge 0$, $b \ge 0$ y $a^2 \le b^2$, entonces $a \le b$.

Prueba de la proposición. Como $|x| \ge 0$ y $|y| \ge 0$, por el ejercicio basta verificar que

$$(|x+y|)^2 \le (|x| + |y|)^2.$$

Como sabemos que

$$|a|^2 = a^2, \ \ a \le |a| \qquad \text{y} \qquad |ab| = |a|\,|b|,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (|x+y|)^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ &\le |x|^2 + 2\,|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

como deseábamos. $\square$

Comentario. A partir de las 13 propiedades de cuerpo ordenado no se puede demostrar que todo número positivo tiene una raíz cuadrada.

De hecho,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\} = \{\text{números racionales}\}$$

satisface las 13 propiedades, pero en Álgebra I se ve que no existe ningún número racional que elevado al cuadrado sea igual a $2 = \frac{2}{1} \in \mathbb{Q}$.

En efecto, si $m, n \in \mathbb{N}$ satisfacen $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, entonces $n^2 = 2m^2$. Escribiendo m y n como producto de números primos, se obtiene que 2 aparece una cantidad par de veces en n^2 y una cantidad impar en $2m^2$. Lo cual es absurdo, pues la descomposición en primos es única salvo el orden.

Existe un número **real** positivo que elevado al cuadrado da 2. Se lo llama $\sqrt{2}$. Nos gustaría deducir su existencia de propiedades generales de los números reales (mejor que simplemente decretar que existe él en particular). Esto motiva la introducción de una nueva propiedad de $\mathbb{R}$.

La propiedad del supremo

Presentamos una nueva propiedad de $\mathbb{R}$ (la número 14), que lo distinguirá de $\mathbb{Q}$ (que satisface las 13 primeras) y además, geométricamente, permitirá representar a $\mathbb{R}$ como la recta llena.

Definición. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un número M es una **cota superior** de A si $a \leq M$ para todo $a \in A$.

Si A posee una cota superior, se dice que A **está acotado superiormente**.

Nota. Si M es una cota superior de un subconjunto A, entonces todo número $M' \geq M$ también es cota superior de A.

Antes de presentar la propiedad del supremo, nos preguntamos: ¿Existe el mayor de todos los números menores que 1?

La respuesta es NO. Dado cualquier $x < 1$ existe otro número a menor que 1 y mayor que x.

Propiedad del supremo. Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene una **cota superior mínima**, que se llama el **supremo** de A y se denota por $\sup(A)$.

Nota. Que el número s sea una cota superior mínima de A significa que

i) s es cota superior, y

ii) si t es una cota superior de A, entonces $s \leq t$.

Ejemplo. Hallar el supremo de $A = [0, 6) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 6\}$.

Veamos que $\sup(A) = 6$.

Por definición del conjunto A, 6 es cota superior de A. Debemos mostrar que 6 es la menor de las cotas superiores.

Si no lo fuera, existiría una cota superior s de A con $s < 6$. Se cumple que $s \geq 0$, pues $0 \in A$. Ahora tomamos un número t tal que $s < t < 6$, por ejemplo, $t = (s + 6)/2$, el promedio entre s y 6. Tenemos que $t \in [0, 6) = A$, con lo cual s no es cota superior de A, una contradicción. En consecuencia, s es la menor de las cotas superiores de A.

Ejemplo. Si un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tiene máximo b, o sea,

$$\mathbf{b} \in \mathbf{A} \qquad \text{y} \qquad b \geq a \quad \text{para todo } a \in A,$$

entonces $b = \sup(A)$. En el ejemplo anterior vimos que $\sup(A)$ no necesariamente pertence a A.

Comentario. Las propiedades de cuerpo ordenado, junto con la propiedad del supremo, caracterizan a los números reales: Hay esencialmente un único sistema numérico que satisface esas 14 propiedades, $\mathbb{R}$.

Comentario. Usando la propiedad del supremo se puede juestificar que todo número $a > 0$ tiene raíz cuadrada. Por ejemplo, para $a = 2$, se ve que

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\right\}$$

está acotado superiormente y es no vacío. Luego tiene supremo. Se verifica que $(\sup(A))^2 = 2$. Volveremos a este tema de manera más rigurosa y general (existencia de raíces n-ésimas de números positivos).

Comentario. Una sucesión infinita de números enteros entre 0 y 9 define un número real a través del desarrollo decimal. Por ejemplo, para $7, 2, 3, 0, 2, \dots$ (con periodicidad de algún tipo o no), se considera el conjunto

$$A = \{0{,}7;\ \ 0{,}72;\ \ 0{,}723;\ \ 0{,}7230;\ \ 0{,}72302; \dots\}.$$

Como $A \neq \emptyset$ y está acotado superiormente (por ejemplo, 0,8 es una cota superior de A), resulta que existe $\sup(A)$, que se denota por $0{,}72302\dots$

En Análisis Matemático II se trata este tema de manera rigurosa.

Definición. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un número m es una **cota inferior** de A si $m \leq a$ para todo $a \in A$.

Si A posee una cota inferior, se dice que A **está acotado inferiormente**.

Si $A \neq \emptyset$ y está acotado inferiormente, un número s se llama el **ínfimo** de A (y se denota $\operatorname{ínf}(A)$) si es la **mayor de las cotas inferiores** de A.

No necesitamos poner como axioma la existencia de ínfimo de subconjuntos acotados inferiormente, pues se deduce de la existencia de supremo:

Proposición. Todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

Prueba. Sea $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Se cumple que $-A \neq \emptyset$ pues A es no vacío.

El conjunto $-A$ está acotado superiormente, pues si m es una cota inferior de A (que existe, por hipótesis), entonces se verifica que $-m$ es una cota superior de $-A$. Por la propiedad del supremo, existe $\sup(-A)$. No es difícil demostrar que

$$\operatorname{ínf}(A) = -\sup(-A)$$

(no lo hacemos). $\square$

Proposición (la propiedad arquimediana de los números reales). El conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales no está acotado superiormente.

Prueba. Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como $1 \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N} \neq \emptyset$ y por lo tanto, existiría $s = \sup(\mathbb{N})$. O sea, s sería la menor de las cotas superiores de $\mathbb{N}$.

Se tendría en particular que $n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en particular, $n + 1 \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Eso implicaría que $n \leq s - 1 < s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $s - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ estrictamente menor que s. Una contradicción con lo que habíamos supuesto, que s era la menor de las cotas superiores.

En consecuencia, $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente. $\square$

Proposición. Para todo número $\varepsilon > 0$ (por más pequeño que sea) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Prueba. Como $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente (por la proposión anterior), tenemos que $\frac{1}{\varepsilon}$ no es cota superior de $\mathbb{N}$. Luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Eso implica que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ¿Dónde se usa que $\varepsilon > 0$? $\square$

Comentario. Existe un cuerpo ordenado (o sea, un sistema numérico que cumple las 13 primeras propiedades de los números reales) para el cual el subconjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ **está acotado superiormente.** Por ejemplo, el conjunto $\mathcal{R}$ de las funciones racionales,

$$\mathcal{R} = \{\text{cocientes de polinomios}\} = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x) \text{ y } q(x) \text{ son polinomios, } q(x) \neq 0 \right\},$$

con la suma y multiplicación de fracciones usuales y un orden definido a partir de los grados de los polinomios del numerador y del denominador (y de sus coeficientes principales). Por ejemplo,

$$\frac{3x^6 - x}{x^2 + 2} < \frac{5x^9 + x^7}{x^4 + 3x}$$

pues $6 - 2 < 9 - 4$.

Sin embargo, $\mathbb{N}$ (los números naturales se piensan como polinomios constantes) está acotado superiormente. Por ejemplo, $x = \frac{x}{1} \in \mathcal{R}$ es una cota superior de $\mathbb{N}$: $1, 2, 3, 4, \cdots \leq x$.

Definición. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice **denso** en $\mathbb{R}$ si para todo par de números reales $b < c$ existe un número $a \in A$ tal que $b < a < c$.

Comentario. Se cumple que $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, es denso. Esbozamos la idea de la justificación: Supongamos que $b > 0$ (si no, el argumento es parecido). Por una proposición anterior, tomando $\varepsilon = b - c > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - c$. Ahora consideramos los números racionales $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \cdots$. Como en cada paso avanzamos hacia la derecha $\frac{1}{n}$, al superar eventualmente a b, alguna fracción de la forma $\frac{m}{n}$ debe caer en el intervalo (b, c), pues este tiene longitud mayor que $\frac{1}{n}$.