Práctico 7

1. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existen, máximos y mínimos, locales y globales, en el conjunto A.

(a) $f(x) = x^3 + x,\quad A = [-1, 2].$

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1,\quad A = [-2, 2].$

(c) $f(x) = 2 - |x + 1|,\quad A = (-2, 1].$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1},\quad A = (-1, 1).$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1},\quad A = [0, \infty).$

(f) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x),\quad A = [0, \frac{7\pi}{15}].$

2. (a) Determinar los pares de números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.

(b) Demostrar que entre todos los rectángulos que tienen determinado perímetro, el cuadrado tiene área máxima.

(c) Encontrar las dimensiones de un triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio r.

3. Demostrar que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + m$ no posee dos raíces distintas en el intervalo $[0, 1]$.

4. Para cada uno de las siguientes funciones verificar el Teorema del Valor Medio, encontrando explícitamente el valor de c.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$.

(b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x + 1}$ en $[2, 9]$.

5. Sea $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$. Demostrar que no hay un valor c tal que

$$f(2) - f(0) = 2f'(c).$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio?

6. Para cada una de las siguientes funciones, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mínimos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión, asíntotas horizontales y verticales y grafique.

(a) $f(x) = x^{2/3}$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$

(d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x + 5}}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{3 + x^2}$

(h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 5}$

(j) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(k) $f(x) = x^2(x - 2)^2$

7. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las siguientes condiciones:

- $f'(-1) = 0$; f no es derivable en $x = 1$; y $f'(x) < 0$ para $|x| < 1$.
- $f'(x) > 0$ para $|x| > 1$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < 0$; y $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

8. Determinar los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$. (b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$. (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$. (d) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)x^{-3}$.

(e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$. (f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x}$. (g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$. (h) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2-x}{x^3-1}$.

9. Probar que $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a-b|$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Deducir que $\operatorname{sen}(x) < x$, si $x > 0$.

10. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivables en todo punto del intervalo abierto I.

(a) Si $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in I$, y $f(a) = g(a)$, demostrar que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

(b) Demostrar que no se cumple lo enunciado en (a) si no se supone $f(a) = g(a)$.

(c) Demostrar que $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ cuando $x > 1$.

11. Sea f una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demostrar que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y > 0$ (Sugerencia: Calcular $g'(x)$ para $g(x) = f(xy)$).

12. Dado $p(x)$ un polinomio se dice que a es *raíz de orden n de* $p(x)$ si $p(x) = (x-a)^n q(x)$ para $q(x)$ algún polinomio con $q(a) \neq 0$.

(a) Probar que a es raíz de orden 2 de $p(x)$ si y sólo si $p(a) = p'(a) = 0$ y $p''(a) \neq 0$. Enuncie una generalización para raíces de orden n arbitrario.

(b) Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ¿cuándo $p(x)$ tiene una raíz doble?

13. Si $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $(n > 1)$, hallar el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$.

14. Sea f una función n-veces derivable en todo $\mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n+1}) = 0$ para $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$. Demostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.

Más ejercicios

15. ¿Para qué valores de c tiene $p(x) = x^4 + cx^3 + x^2$, dos puntos de inflexión, uno y ninguno? Ilustre graficando $p(x)$ con varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando disminuye c?

16. Sean f y g dos veces derivables. Probar que si f es creciente y f y g son convexas, entonces $f \circ g$ es convexa.

17. Para cada una de las siguientes funciones, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mínimos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión, asíntotas horizontales y verticales y grafique.

(a) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$ (b) $y = (x^2-1)^3$ (c) $y = x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}$

(d) $y = x^4 - x^3$ (e) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ (f) $y = x\sqrt{x^2-9}$

(g) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-5}}$ (d) $y = x + 3x^{\frac{2}{3}}$ (h) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$