1 Definiciones y teoremas

Definition 1. *Sea A un intervalo abierto que contiene al punto a. Se dice que la función* $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *es continua en a si* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Proposition 2. *Si f y g son continuas en a, entonces f+g, fg y f/g (g(a)≠0) son continuas en a. Si ademas g es continua en a y f es continua en g(a) entonces f(g(a)) es continua en a.*

Definition 3. *Sea A un intervalo abierto. La función f:A→R se dice continua en A si f es continua en a para todo* $a \in A$*.*

Lemma 4. *(acotación local de funciones continuas) Sea A un intervalo abierto que contiene el punto a y sea* $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *una funcion continua en a. Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que f esta acotada en un intervalo* $(a - \delta, a + \delta)$ *o sea existe m,M tales que* $m < f(x) < M$ *para todo* $x \in (a - \delta, a + \delta)$*, ademas si* $f(a) > 0$ *m puede tomarso positivo (o negativo si se cumple la relacion opuesta).*

Theorem 5. *Primer Teorema Fuerte. Sea f una función continua en el intervalo [a, b]. Si f(a) < 0 y f(b) > 0, entonces existe un número* $\alpha \in (a, b)$ *tal que* $f(\alpha) = 0$

Corollary 6. *Si la función g es continua en [a, b] y satisface g(a)>0 y g (b)<0 entonces existe a ∈ (a, b) tal que g (a) = 0.*

Corollary 7. *Si g : [a, b] → R es continua y g (a) < c < g (b), entonces existe a ∈ (a, b) tal que g (a) = c.*

Theorem 8. *Segundo Teorema Fuerte. Sea* $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *una funcion continua. Entonces f esta acotada superiormente, es decir existe M tal que* $f(x) < M$ *para todo* $x \in [a, b]$ *. Observacion: El teorema no vale si el dominio de f es un intervalo abierto.*

Theorem 9. *Tercer Teorema Fuerte. Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo. Más precisamente: Sea* $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *una funcion continua. Entonces existe* $\alpha \in [a, b]$ *tal que* $f(\alpha) \geqslant f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$*.*

Notas:

Claramente, si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva. ¿Vale la reciproca? No.

Theorem 10. *Sea A un intervalo y sea f : A → R una función inyectiva y continua. Entonces f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

Proposition 11. *Sea A un intervalo y sea f : A → R una función inyectiva y continua y sean a, b ∈ A con a < b y f (a) < f (b). Si a < c < b, entonces f (a) < f (c) < f (b).*

Theorem 12. *Sea A un intervalo, sea f : A → R una función inyectiva y continua. Entonces la imagen de f es un intervalo, digamos B, y la inversa* f^{-1} *:B → A es continua.*

2 Practico

1.

2. Determinar en que puntos son continuas las siguientes funciones:

   a) Esta funcion no es continua en 0

   b) Esta funcion no es continua en $k \in \mathbb{Z}$

      - $\lim_{x \to k^+} [x] = k$

      - $\lim_{x \to k^-} [x] = k - 1$

   c) Esta funcion ES continua en $x = 0$

   d)

   e)

   f) No esta defninido $f(0)$

3.

   a) $|f(x)| \leqslant |x|$

      - $-|x| \leqslant f(x) \leqslant |x|$

      - El lema del sandwich para limite de funciones dice que:

      - Si $f(x) < g(x) < h(x)$ y si $\lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{x \to a} h(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = l$

      - Si tomo el limite de estas funciones obtengo: $\lim_{x \to 0} - |x| \leqslant \lim_{x \to 0} f(x) \leqslant \lim_{x \to 0} |x|$

      - De manera que: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

      - Como $-|x| \leqslant f(x) \leqslant |x|$ $\forall x$ incluido el cero, si hago: $x = 0$: $0 \leqslant f(x) \leqslant 0$ por lo cual $f(x) = 0$.

      - Juntando todo tengo que la funcion es continua.

   b) Lo demostramos por definicion:

      - $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$

      - $|g(x) - g(0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - 0| < \delta$

      - $|f(x) - 0| = |f(x)| \leqslant |g(x)| < \varepsilon \Rightarrow |x - 0| < \delta$

      - Basta tomar $\varepsilon = \delta$, con esto demuestra que: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

      - Nuevamente: $|f(x)| \leqslant |g(x)| \Rightarrow -|g(x)| \leqslant f(x) \leqslant |g(x)|$, en particular para $x = 0$: $-|g(x)| \leqslant f(x) \leqslant |g(x)| \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(0) = 0$

      - Juntando todo, tenemos la continuidad de f en cero.

4. Determinar para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F ,definida en toda la recta real, que extienda a f .

   a) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

      - La funcion es continua en todos los puntos excepto en: $x = 1, -1$

- Para encontrar el valor que se necesita para redefinirla, tome el limite a estos valores:

- $\lim_{x\to\pm 1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = \mathrm{im}_{x\to\pm 1}\frac{x^2+1}{1} = 2$

- Por lo tanto redefina: $F(x) = \begin{cases} f(x)\,\mathrm{si}\,x \neq 1,-1 \\ 2\,\mathrm{si}\,x = 1,-1 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

- La funcion es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$

- El limite no existe, por lo tanto , no se puede extender en a una funcion continua.

c) $f(x) = x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

- La funcion no es continua en cero.

- $\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

- Re-definimos: $F(x) = \begin{cases} f(x)\,x \neq 0 \\ 0\,\mathrm{si}\,x = 0 \end{cases}$

5. Probar lo siguiente:

a) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, probar que si $f(\mathbb{Q}) = 0$ entonces: $f(x) = 0$

- Se indica que la funcion f es continua en $\mathbb{R}$, pero que $f(\mathbb{Q}) = 0$. Como es continua en $\mathbb{R}$ entonces, para un numero racional a_Q se tendria:

  $\lim_{x\to a_Q} f(x) = f(a_Q) = 0$ (Esto vale porque dijimos que f era continua)

- Recordando el teorema de limites y sucesiones:

  - $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(k_n) = l$ para TODA sucesion tal que: $\lim_{n\to\infty} k_n = a$

- Considere una sucesion infinita de numeros racionales (Esto puede definirse porque los numeros racionales son densos): q_n

- Considere $\lim_{n\to\infty} q_n = a$, aqui a puede ser $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$

- $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = ?$

- Tenga en cuenta que $f(q_n) = 0\ \forall n$. Esto nos dice que: $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = 0$

- Pero como la funcion es continua: $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(a) = 0$

- Observacion: Tenga en cuenta que fue clave utilizar el teorema de sucesiones y limites porque de otra forma no habriamos podido plantear el hecho clave de que $f(q_n) = 0\forall n$. De todas maneras hay otras demostraciones posibles.

b) Probar que si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y coinciden en $\mathbb{Q}$ entonces estas funciones son iguales.

- Configure una funcion $h(x) = f(x) - g(x)$
- Ahora $h(x_q) = 0$ con lo cual recaemos en el problema anterior.

6. Considere $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Continua en (a, b)

a) Mostrar que si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ entonces existe una extencion de f que es continua en todo $\mathbb{R}$

- Si bien hay varias formas, puede elegir la mas trivial, que es una extension constante:

  $$F(x) = \begin{cases} f(a) \text{ si } x < a \\ f(x) \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ f(b) \text{ si } x > b \end{cases}$$

- Si usted omite alguno de los limites laterales, entonces considere por ejemplo la funcion $f(x) = 1/x$ la cual es continua en $(0, 1)$ sin embargo es IMPOSIBLE de extender dado que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

7. Para cada una de las siguientes funciones decir si estan acotadas superior o inferiormente y si alcanzan sus valores maximos y minimos.

a) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$

- Si bien esta funcion es continua en el intervalo abieto, como no tenemos intervalo cerrado no podemos asegurar que esta funcion este acotada ni mucho menos alcance algun maximo y minimo.
- Empiece describiendo la imagen: $\mathrm{Imf} = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leqslant y < 1\}$
- La funcion si esta acotada superiormente en el intervalo, por ejemplo una cota superior es 2 (ver imagen)
- El supremo de este conjunto es: 1 mientras que el infimo es 0.
- El maximo: no lo tiene, puede demostrar por el absurdo que no lo tiene: Suponga $a = \sup \mathrm{Imf} \Rightarrow f(x) \leqslant a < 1$ entonces:

  $0 \leqslant f(x) \leqslant a < 1 \quad -1 < -a < f(x) < a < 1$

  $f(x) - 1 < a - 1 < 0 \Rightarrow f(x) - 2 < f(x) - 1 < a$

- $-a + 1 < f(x) - 1 \qquad f(x) - 1 > a - 1$
- $|x| > a \Rightarrow x > a y x < -a$

b) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$

- Nuevamente no tenemos intervalo cerrado.
- $\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leqslant x\}$

- Tenemos cota inferior y minimo
- No tenemos cota superior ni maximo

c) $f(x) = x^4$ en $(-1, 2]$

- Imf $= \{x \in \mathbb{R} / 0 \leqslant x \leqslant 2\}$
- La funcion esta acotada por arriba y por abajo y ademas tiene maximo y minimo.

d) Funcion parte entera (baja) , basicamente si tenes 1.45 te da 1. Esta definida en $[0, a]$ con $a > 0$

- Aunque esta definida en un intervalo cerrado ya sabemos que esta funcion no es continua. Por lo cual no podemos utilizar los teoremas fuertes.
- La imagen de esta funcion es Imf $= \{0, 1, \ldots, a - 1\}$ si $a \in N$ o bien Imf $= \{0, 1, \ldots, a\}$
- Es una funcion acotada clareamente
- Tiene infimo y supremo tambien.

e) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$ en $[k\pi, (k+1)\pi]$ con $k \in \mathbb{Z}$

- Hay que analizar 2 casos, si k es par o si k es impar:
- Imf $= \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 3 \text{ si } k = 2n & 0 \leqslant \operatorname{sen}(y) \leqslant 1 \quad \text{si } 2n\pi \leqslant y \leqslant (2n+1)\pi \quad [0, \pi] \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ si } k = 2n+1 & -1 \leqslant \operatorname{sen}(y) \leqslant 0 \quad [\pi, 2\pi] \end{cases}$
- Para cada uno de los casos, tiene supremo, infimo, maximo y minimo
- Por otro lado $\operatorname{sen}(x)$ es continua y tenemos un intervalo cerrado, los teoremas fuertes nos aseguran que este acotada y que tenga supremo e infimo.

f) Es el mismo caso, pero no tenemos un intervalo cerrado. Si bien estara acotada no tendra infimo (aunque si supremo) para el caso par.

Por otro lado, para el caso impar, no va a tener supremo, pero si infimo.

Un metodo grafico hace que sea mas facil la explicacion.

8. $f(x) = x^5 + x + 1 = x^5\left(1 + \frac{x}{x^5} + \frac{1}{x^5}\right) = x^5\left(1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)$

a) $x^5 \to \infty$ cuando $x \to \infty$, de la misma forma $x^5 \to -\infty$ cuando: $x \to -\infty$

b) Quiero ver si el valor $l \in$ Imf

- Considere $M_1 < l < M_2$
- Segun lo visto en a, por definicion: Si $x > N_1 \Rightarrow f(x) > M_1$ y por otro lado: si $x < N_2 \Rightarrow f(x) < M_2$
- Esto me sirve para decir que: $M_1 < f(x) < M_2$ cuando $N_1 < x < N_2$

- Debo considerar el intervalo $[N_1, N_2]$, los numeros x en este intervalo cumplen que: $M_1 < f(x) < M_2$

- El corolario entonces es aplicable y nos asegura que existe $\alpha \in (N_1, N_2)$ tal que $f(\alpha) = l$.

- Como esto sucede para todo l la funcion es suryectiva.

c) Hallar algun numero natural tal que: $p(x) = 0$ para $x \in [-n, n]$

- Asegure su existencia: si $p(n) > 0$ y luego $p(-n) < 0$ la existencia de este numero estara asegurada. Aqui $n = 5$ por ejemplo seria una opcion.

- Los teoremas fuertes nos aseguran esto ya que f es continua en $[-5, 5]$ y ademas $f(5) > 0$ y $f(-5) < 0$

9. Sea f una funcion continua y supongase que f siempre es racional, que se puede decir de f?

- Que f es una funcion constante.

- Si f no fuera constante entonces: $f(x_1) < f(x_2)$ para algun x_1, x_2 bajo alguna relacion de tricotomia excepto la igualdad. Por ejemplo suponga $x_1 < x_2$.

- Como f es continua debe tomar todos los valores entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ los cuales pertenecen a elementos del dominio en $[x_1, x_2]$.

- Sea $l_{\mathbb{I}}$ un numero irracional tal que $f(x_1) < l_{\mathbb{I}} < f(x_2)$, por la continuidad sabemos que existe $x \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x) = l_{\mathbb{I}}$

- Esto nos da un absurdo.

10.

a) f, g son continuas en $[a, b]$, $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$ entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$

- Considere: $h(x) = f(x) - g(x)$ luego $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$

- h es una funcion continua en $[a, b]$ pues f y g lo son.

- Utilice el teorema 5 para encontrar $\alpha \in (a, b)$ tal que $h(\alpha) = 0$

- En consecuencia: $f(\alpha) = g(\alpha)$

b) Graficar y demostrar que las ec $\operatorname{sen}(x) = x + 1$ tiene solucion.

- Considere el intervalo $[-\pi, \pi]$ entonces la funcion $h(x) = x + 1 - \operatorname{sen}(x)$ tiene valores $h(-\pi) = -\pi + 1 < 0$ minetras que $h(\pi) > 0$

- Utilizando el corolario 6 puede verse que $\exists \alpha \in (-\pi, \pi)$ tal que $h(\alpha) = 0$

- En consecuencia: $\operatorname{sen}(\alpha) = \alpha + 1$, la ecuacion queda resuelta.

c) Demostrar que: $\exists x \in [0, \pi/2]$ tal que: $x^3 \operatorname{sen}^7(x) = 2$

- $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^7(x)$ cumple: $f(x = 0) = 0$ mientras que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 3.9$

- Utilice el corolario 7 para encontrar que en efecto, existe $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(\alpha) = 2$.

d) Demostrar que en el plano, el area de interseccion entre el area del circulo y la del cuadrado es 1.337

- El area del cuadrado $A_{\text{sq}} = x^2$
- El areaa del circulo:$A_c = \pi r^2 = \pi \sqrt{x^2 + y^2}$
- Funcion interseccion: $F = \pi \sqrt{x^2 + y^2} - k^2$

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}$ entonces alcanza un minimo.

- Falso, no se olvide de la funcion $f = 1/x$
- Para que esto se cumpla se requiere un intervalo cerrado.

b) Si $|f|$ es continua en a entonces f es continua en a

- Falso, considere la funcion escalon: $f(x) = \begin{cases} -1 \,\text{si}\, x \leqslant 0 \\ 1 \,\text{si}\, x > 0 \end{cases}$
- Claramente $|f|$ es continua , pero f no es continua en 0

c) Existe $x = x^3 + 1$

- Esto lo llevamos a la funcion $h(x) = x^3 - x + 1$
- Considere ahora el intervalo $[-1, 1]$, $h(-1) = -3$ mientras que $h(1) = 1$
- Como la funcion es una funcion continua (polinomio) Utilizando el corolario 6 podemos ver que el resultado de esto es: **Vedadero** puesto que puede encontrar $\alpha \in (-1, 1)$ tal que $f(\alpha) = 0$

12. $f\colon [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mostrar que si f es continua, entonces $\exists a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = a$

- Si se sucede $f(0) = 0$ o bien $f(1) = 1$ esto queda probado
- Entones suponemos $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$ podemos suponer lo puesto tambien.
- Si define la funcion $h(x) = x - f(x)$ observe que:

  $h(0) = 0 - f(0) < 0$

  $h(1) = 1 - f(1) > 0$
- Use el corolario 6 para decir que existe $\alpha / h(\alpha) = 0 = \alpha - f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = f(\alpha)$

13. El monje sale y regresa a la misma hora todos los dias, ese lapso donde camina lo voy a representar como el intervalo $[7, 19]$

- El monje hace dos caminos, uno desde un punto bajo h_1, partiendo a las 7 y luego llega un punto alto h_2 a las 19. $h_2 > h_1$

- Considero dos funciones: $f(7)=h_1$ y luego $f(19)=h_2$
- Por otro lado $g(7)=h_2$ y $g(19)=h_1$
- Ambas funciones son continuas, pues la trayectoria que hace el monje es continua.
- Considere ahora $h(x)=g(x)-f(x)$
- $h(7)=h_2-h_1>0$ mientras que $h\,(19)=h_1-h_2<0$
- Utilizamos el corolario 6: $\exists\alpha\in(7,19)$ tal que $h(\alpha)=0$
- En consecuencia: $f(\alpha)=g(\alpha)$, a la misma hora α entre las 7 y las 19 pasa por el mismo punto: $f(\alpha)=g(\alpha)$

14. Sea f definida y continua en todo $\mathbb{R}$, supongamos que f es siempre positiva y que $\lim_{x\to\infty^-}f(x)=0=\lim_{x\to-\infty^+}f(x)$, entonces existe x_0 tal que $f(x_0)\geqslant f(x)\,\forall x$

    - El problema nos esta hablando de una funcion que alcanza un valor maximo.
    - Por definicion de limite infinito: si $N_1<x\Rightarrow|f(x)-0|<\varepsilon_1$
    - De la misma forma: si $x<N_2\Rightarrow|f(x)-0|<\varepsilon_2$
    - Sea $\varepsilon=\max\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ esto nos asegura que: si $N_1<x\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$ y si $x<N_2\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$
    - Como f es continua en $\mathbb{R}$, $\exists\alpha/\,f(\alpha)=\varepsilon$.
    - De manera que puede decir que: $f(x)\leqslant|f(x)|<f(\alpha)$ tanto, en el intervalo: $(-\infty,N_2)$ y en el intervalo (N_1,∞)
    - Falta ver nada mas que sucede en el intervalo: $[N_2,N_1]$ (Podria ser que se encuentra algun valor mayor)
    - Segun el teorema 9 (Tercer teorema fuerte) , en un intervalo cerrado donde la funcion f es continua, esta alcanza un maximo. De manera que $\exists f(\beta)\geqslant f(x)\forall x\in[N_2,N_1]$
    - Entonces basta tomar el mas grande entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$

15.

    a) Defina una funcion f que no sea continua en ningun punto pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

        - Considere: $f=\begin{cases}1\,\text{si}\,x\in\mathbb{Q}\\-1\,\text{si}\,x\in\mathbb{I}\end{cases}$
        - Claramente f no es continua en NINGUN Punto
        - Sin embargo $|f|$ es continua en todos los puntos.

    b) Definir una funcion que no sea continua en ningun punto de la forma: $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ etc. Pero que sea continua en todos los demas puntos.

        - $f(x)=\begin{cases}2\,\text{si}\,x<0\\2-\frac{1}{n}\,\text{si}\,\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}\\0\,\text{si}\,x>1\end{cases}$

- Es esta funcion discontinua en 1? $f(1)=1$ $\lim_{x\to 1+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$

- Otra opcion:

- $f(x)=\begin{cases} 1/[1/x]_{\text{inf}} & 0<x\leqslant 1 \\ 1 & x>1 \\ 0 & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$

c) Definir una funcion con las mismas caracteristicas pero que ademas se discontinua en cero.

- $f(x)=\begin{cases} [1/x]_{\text{inf}} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$

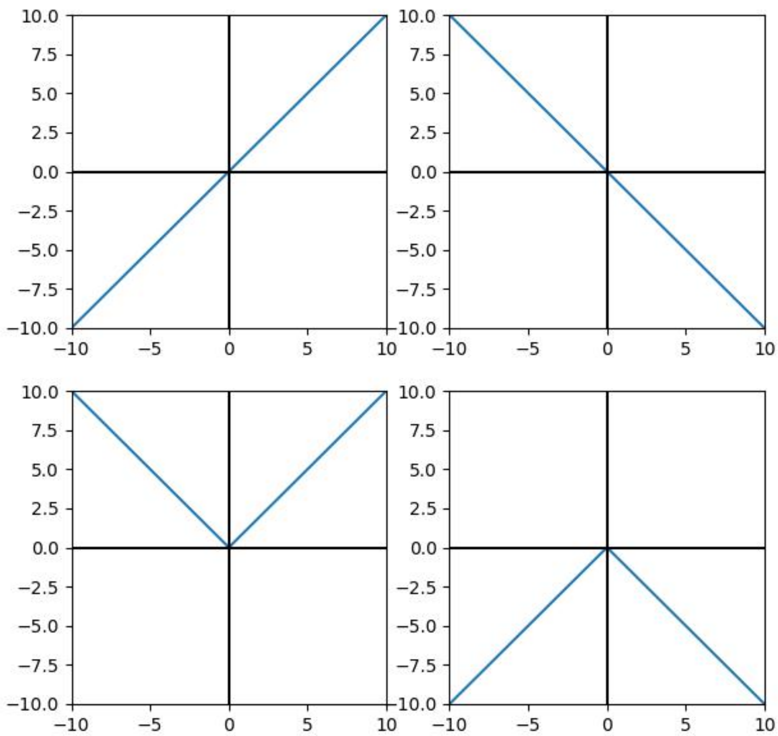
16.

a) Cuantas funciones continuas hay tal que: $(f(x))^2=x^2$

- Esto implica: $|f(x)|=|x|$

- $f(x)=x$, $f(x)=-x$, $f(x)=|x|$ y $f(x)=-|x|$

- Como sabe que son todas? La mejor manera es pensarlo graficamente.



b) Si no exigimos continuidad entonces hay infinitas funciones:

- $f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[a,b] \\ -x \text{ si } x\notin[a,b] \end{cases}$

- La unica regla es que a intervalos tengamos alguna de estas funciones.

c) Si f, g son funciones continuas con $g(x) \neq 0\ \forall x$ y si $f^2 = g^2$, probar que $f = g$ o $f = -g$

- Defina $h(x) = x\frac{f(x)}{g(x)}$

- Las funciones f, g satisfacen las condiciones del inciso a. Tambien de hecho h lo hace y esto es lo mas importante:

  $h^2(x) = x^2$, debido a que $f^2 = g^2$

- Como $h^2 = x^2$ recaemos en a por lo cual ya sabemos que h vale una de 4 opciones:

  $h = x, h = -x, h = -|x|, h = |x|$

- Ahora tenemos que examinar cada uno de estos casos:

  $h = x \Rightarrow f / g = 1 \Rightarrow f = g$

  $h = -x \Rightarrow f / g = -1 \Rightarrow f = -g$

  $h = |x| \Rightarrow |x| = x f / g \Leftrightarrow |x| / x = f / g$ de manera que f / g no es continua en $x = 0$ lo cual contradice la hipotesis [$f / g\,\mathrm{es\,continua}\,\forall x$, porque $g(x) \neq 0 \forall x\, y\, f$, $g\,\mathrm{son\,continuas}$]

  Lo mismo sucede si $h = -|x|$