Análisis Matemático I

Algunos ejercicios del Práctico 7

Eduardo G. Andreozzi*
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

15 de junio de 2023

En lo que sigue se resuelve una gran parte del Práctico 7. Sólo se presentan en detalle los ejercicios más complicados e importantes, según mi opinión y mi experiencia en las clases prácticas.

Ejercicio 1

Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existen máximos y mínimos, relativos y absolutos, en el conjunto A.

(a) $f(x) = x^3 + x$, $A = [-1, 2]$.

Como f es derivable en $(-1, 2)$, comencemos encontrando los puntos críticos de f en este intervalo: si $x \in (-1, 2)$ satisface $f'(x) = 0$ entonces $3x^2 + 1 = 0$. Esta ecuación claramente no tiene solución, por lo que concluimos que no existen puntos de máximo o mínimo de ninguna índole en $(-1, 2)$.

Como f es continua en $[-1, 2]$, el *Tercer Teorema Fuerte* implica que f tiene puntos de máximo y mínimo absolutos en este intervalo, y por lo visto anteriormente, estos puntos sólo pueden ser los extremos de este intervalo. Como $f(-1) = -2$ y $f(2) = 10$, f tiene un mínimo absoluto en $x = -1$ y un máximo absoluto en $x = 2$. $\square$

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, $A = [-2, 2]$.

Como f es derivable en $(-2, 2)$, comencemos encontrando los puntos críticos de f en este intervalo: si $x \in (-2, 2)$ satisface $f'(x) = 0$ entonces $3x^2 - 2x - 8 = 0$. Hay dos soluciones a esta ecuación: $x_1 = 2$ y $x_2 = -4/3$.

Veamos qué tipo de punto es x_2 para f. Como $x_2 \in (-2, 2)$ y $f''(x_2) = 6x_2 - 2 = -10 < 0$, f tiene un máximo relativo en x_2, con valor máximo $f(x_2) = 203/27 \approx 7,52$.

Ahora veamos qué tipo de punto es x_1 para f. Como $x_1 \notin (-2, 2)$, ya que este punto es de hecho uno de los extremos del intervalo cerrado en donde estudiamos a f, técnicamente no

*Comisión 5 (Tarde)

es correcto considerarlo un punto crítico de f (no consideramos derivadas en los extremos de intervalos cerrados). Sin embargo, esto no es un problema. Simplemente anotamos el valor de f en este punto, $f(x_1) = -11$, y lo analizamos al final cuando veamos los valores de f en los extremos de $[-2, 2]$.

Como f es continua en $[-2, 2]$, nuevamente sabemos que f tiene puntos de máximo y mínimos absolutos en este intervalo. Ya vimos los puntos críticos, así que sólo falta ver los extremos del intervalo ya mencionado: $f(-2) = 5$ y $f(2) = -11$.

Como $f(x_2)$ resulta ser el valor más grande, f tiene un máximo absoluto en $x_2 = -4/3$, y como $f(x_1) = f(2)$ resulta ser el valor más chico, f tiene un mínimo absoluto en $x_1 = 2$.

Por último, nos falta encontrar los puntos de máximo o mínimo relativos no absolutos. Como tales puntos no están entre los puntos críticos de f por lo visto anteriormente, sólo queda revisar los extremos del intervalo $[-2, 2]$.

Ya vimos que $x_1 = 2$ es un punto de mínimo absoluto de f, así que nos concentramos en $x = -2$. Veamos el signo de f' en el intervalo $(-2, -4/3)$: como $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 3(x-2)(x+4/3)$, $f'(x) > 0$ para $x \in (-2, -4/3)$, lo que significa que f es estrictamente creciente en este intervalo. Luego $f(-2) < f(x)$ para todo x en el intervalo abierto ya mencionado (acá usamos la continuidad de f, ya que $-2 \notin (-2, -4/3)$), y entonces f tiene un mínimo relativo no absoluto en $x = -2$. □

(c) $f(x) = 2 - |\, x + 1\,|$, $A = (-2, 1]$.

La función f se puede reescribir como

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } -2 < x < -1 \\ -x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Como f no es derivable en $x = -1$, el dominio de f' es $(-2, -1) \cup (-1, 1)$, y es fácil ver que f' nunca se anula en este conjunto, por lo que f no tiene puntos críticos.

La única posibilidad para puntos de máximo y mínimo de f son el extremo derecho de $(-2, 1]$ y el punto de no derivabilidad $x = -1$. Como $f(1) = 0$ y $f(-1) = 2$, f tiene un máximo, que resulta ser absoluto, en $x = -1$ y un mínimo, que también resulta ser absoluto, en $x = 1$.

Como último detalle, convénzanse de que f no tiene máximos o mínimos relativos no absolutos (¿Qué puntos serían candidatos?). □

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $A = (-1, 1)$.

Como f es derivable en $(-1, 1)$, comencemos encontrando los puntos críticos de f en este intervalo: si $x \in (-1, 1)$ satisface $f'(x) = 0$ entonces

$$\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0.$$

La única solución a esta ecuación es $x = 0$, que está efectivamente en el intervalo de definición de f' (el mismo que el de f). Podemos estudiar si $x = 0$ es un punto de máximo o mínimo de f de dos formas.

La primera es calcular f'' y ver el signo de $f''(0)$, si este número no es cero:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2}{(x^2-1)^2} + \frac{8x^2}{(x^2-1)^3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -2 < 0.$$

Concluimos entonces que $x = 0$ es un punto de máximo, a priori relativo, de f.

La segunda forma de estudiar $x = 0$ es notar que si $x \in (-1, 1)$ entonces $|x| < 1$, luego $x^2 - 1 < 0$. Con este resultado notamos que

$$x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \leq -1 = f(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(0).$$

El cálculo anterior implica inmediatamente que $x = 0$ es de hecho un punto de máximo absoluto de f.

Como ya estudiamos los puntos críticos de f, y su dominio de definición no tiene extremos ni puntos de no derivabilidad, concluimos que f no tiene puntos de mínimo de ninguna índole, ni puntos de máximos relativos no absolutos. $\square$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $A = \mathbb{R}$.

Como f ni siquiera está definida en $x = -1$, el dominio de f es $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$. Como f es derivable en todo su dominio, comenzamos estudiando sus puntos críticos: si $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$ satisface $f'(x) = 0$ entonces

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 0.$$

Como esta ecuación no tiene solución, f no tiene puntos críticos.

Como el dominio de f no tiene extremos ni puntos de no derivabilidad, con lo anterior deducimos que f no tiene puntos de máximo o mínimo de ninguna índole en ninguna parte. $\square$

(f) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $A = [0, 7\pi/15]$.

Como f es derivable en $(0, 7\pi/15)$, comencemos encontrando los puntos críticos de f en este intervalo: si $x \in (0, 7\pi/15)$ satisface $f'(x) = 0$ entonces $\cos x - \operatorname{sen} x = 0$. En general, las soluciones a la ecuación anterior son el conjunto de puntos

$$\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \text{(Ejercicio).}$$

Como el único punto de este conjunto que está en el intervalo $(0, 7\pi/15)$ corresponde a tomar $k = 0$, o sea $x = \pi/4$, este es el único punto crítico de f.

Para estudiar qué clase de punto es $x = \pi/4$, veamos el signo de $f''(\pi/4)$, si este número no es cero:

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f''(\pi/4) = -f(\pi/4) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} < 0.$$

Concluimos entonces que $x = \pi/4$ es un punto de máximo, a priori relativo, de f.

Como f es continua en $[0, 7\pi/15]$ y derivable $(0, 7\pi/15)$, existen puntos de máximo y mínimo absolutos de f, y para ver estos puntos sólo nos falta analizar además los extremos de $[0, 7\pi/15]$.

Como $f(0) = 1$, $f(7\pi/15) \approx 1,10$ y $f(\pi/4) = \sqrt{2} \approx 1,41$, concluimos que f tiene un máximo absoluto en $x = \pi/4$ y un mínimo absoluto en $x = 0$.

Por último, nos queda analizar los puntos de máximo o mínimo relativos no absolutos de f, y $x = 7\pi/15$ es el único punto que falta estudiar. Veamos el signo de f' en el intervalo $(\pi/4, 7\pi/15)$: como $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} x > \cos x$ para $x \in (\pi/4, \pi/2)$, $f'(x) < 0$ para $x \in (\pi/4, 7\pi/15)$ (notar que $7\pi/15 < \pi/2$), lo que significa que f es estrictamente decreciente en este intervalo. Luego $f(7\pi/15) < f(x)$ para todo x en el intervalo ya mencionado, y entonces f tiene un mínimo relativo no absoluto en $x = 7\pi/15$.

Ejercicio 2

Determinar los pares de números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.

Ayuda: Queremos encontrar números $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 100$ y xy sea máximo. Como entonces $y = 100 - x$, consideren la función $f(x) := x(100 - x)$ y encuentren un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3

Demostrar que, para cualquier $m \in \mathbb{R}$, el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + m$ no posee dos raíces distintas en el intervalo $[0, 1]$.

No cualquier $m \in \mathbb{R}$ hace que p tenga al menos dos raíces distintas, pero para la siguiente prueba vamos a considerar números m para lo que esto sí ocurre; para todos los demás m no hay nada que probar.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ raíces distintas de p, con $\alpha < \beta$. Como p es continuo en $[\alpha, \beta]$ y derivable en (α, β), y $p(\alpha) = 0 = p(\beta)$, el *Teorema de Rolle* asegura que existe $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $p'(x_0) = 0$.

Como $p'(x) = 3x^2 - 3$, x_0 satisface la ecuación $3x_0^2 - 3 = 0$, con lo cual x_0 sólo puede ser 1 o -1.

Si $x_0 = 1$ tenemos que $\alpha < 1 < \beta$, lo que significa que $\beta \notin [0, 1]$, y si $x_0 = -1$ tenemos que $\alpha < -1 < \beta$, lo que significa que $\alpha \notin [0, 1]$. En cualquier caso, para cualquier par de raíces distintas de p, necesariamente una de ellas queda afuera de $[0, 1]$.

Ejercicio 4

Para cada una de las siguientes funciones verificar el Teorema del Valor Medio, encontrando explícitamente el valor de c.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$.

Ayuda: Planteen

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(c)$$

y despejen c, asegurándose que $c \in (1, 2)$. $\square$

(b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x + 1}$ en $[2, 9]$.

Ayuda: Verifiquen que la ecuación

$$\frac{f(9) - f(2)}{9 - 2} = f'(c)$$

es equivalente a

$$(c + 1)^2 = \frac{343}{27} \frac{1}{(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{3})^3}.$$

Hay dos posibles valores de c que resuelven la ecuación cuadrática anterior, y uno de ellos es negativo. Resolviendo explícitamente esta ecuación pueden encontrar el otro valor (positivo) de c que la satisface, pero probar que efectivamente esta solución c está en el intervalo $(2, 9)$ es muy complicado.

Acá va una alternativa. Llamando α al número espantoso del lado derecho de la ecuación anterior, y definiendo $f(x) := (x + 1)^2$ para $x \in [2, 9]$, demuestren la existencia de un valor $c \in (2, 9)$ tal que $f(c) = \alpha$ notando que $f(2) < \alpha$ y que $f(9) > \alpha$, y luego usando el *Teorema de los Valores Intermedios.*

Ejercicio 5

Sea $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$. Demostrar que no hay un valor de c tal que

$$f(2) - f(0) = 2f'(c).$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio?

Ayuda: Verifiquen que la ecuación

$$f(2) - f(0) = 2f'(c)$$

es equivalente a

$$(c-1)^2 = -1,$$

que claramente no tiene solución.

No hay contradicción con el *Teorema del Valor Medio* porque f no es continua en $[0,2]$ ni derivable en $(0,2)$ al no estar definida en $x = 1$.

Ejercicio 6

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mínimos, los intervalos de concavidad, y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y graficar.

Nota: El gráfico de las siguientes funciones queda para ustedes. Al final de cada análisis de las funciones dejo un resumen con toda la información pedida para graficarlas.

(a) $f(x) = x^{2/3}$.

Comencemos encontrando los puntos de máximo y mínimo de f, absolutos y relativos, si los hay.

Primero notemos que f es continua en $\mathbb{R}$. La derivada de f está dada por

$$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \qquad \text{si } x \neq 0,$$

y no está definida en $x = 0$. Como f' nunca se anula, no hay puntos críticos. Como hay sólo un punto de no derivabilidad, $x = 0$, y $f(0) = 0 \leq x^{2/3} = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ es un punto de mínimo absoluto de f, con valor mínimo $f(0) = 0$. No hay puntos de mínimo relativos no absolutos, ni puntos de máximo de ninguna índole.

Ahora veamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Como $f' > 0$ en $(0, \infty)$, f es estrictamente creciente en este intervalo, y como $f' < 0$ en $(-\infty, 0)$, f es estrictamente decreciente en este intervalo.

Por último, veamos los puntos de inflexión de f, si los hay, y los intervalos de concavidad.

La segunda derivada de f está dada por

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \qquad \text{si } x \neq 0,$$

y está definida en el mismo dominio que f'. Como $f'' < 0$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, y como no hay puntos de cambio en la concavidad de f, no hay puntos de inflexión.

Resumen

- f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable dos veces en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\nearrow 0} f'(x) = -\infty$ y $\lim_{x\searrow 0} f'(x) = \infty$;

- $x = 0$ es un punto de mínimo absoluto, con valor $f(0) = 0$. No hay puntos de mínimo relativos no absolutos ni puntos de máximo de ninguna índole;
- f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, \infty)$;
- f es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. No hay puntos de inflexión.

$\square$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Comencemos encontrando los puntos de máximo y mínimo de f, absolutos y relativos, si los hay.

Primero notemos que f es continua y dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. La derivada de f está dada por

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Los puntos críticos de f son aquellos x tal que $f'(x) = 3x(x-2) = 0$, y estos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Para analizarlos, primero calculamos la segunda derivada de f:

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Como $f''(0) = -6 < 0$ y $f''(2) = 6 > 0$, $x_1 = 0$ es un punto de máximo relativo de f, con valor máximo $f(0) = 3$, y $x_2 = 2$ es un punto de mínimo relativo de f, con valor mínimo $f(2) = -1$. Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, no hay puntos de máximo o mínimo absolutos.

Ahora veamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Como $f' > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, f es estrictamente creciente en esta región, y como $f' < 0$ en $(0, 2)$, f es estrictamente decreciente en este intervalo.

Por último, veamos los puntos de inflexión de f, si los hay, y los intervalos de concavidad.

Los puntos de inflexión de f son aquellos en donde cambia la concavidad de la función, es decir, son puntos en donde cambia el signo de f''. En este caso, estos puntos pertenecen al conjunto de puntos críticos de f', es decir, satisfacen la ecuación $f''(x) = 0$, aunque no todas las soluciones a esta ecuación son puntos de inflexión. Como $x = 1$ es el único punto que satisface $f''(x) = 0$, $f'' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y $f'' > 0$ en $(1, \infty)$, $x = 1$ es el único punto de inflexión de f, con valor $f(1) = 1$, y f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$.

Resumen

- f es continua y dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $x_1 = 0$ es un punto de máximo relativo no absoluto, con valor $f(0) = 3$, y $x_2 = 2$ es un punto de mínimo relativo no absoluto, con valor $f(2) = -1$. No hay puntos de máximo o mínimo absolutos;
- f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2)$;
- $x = 1$ es el único punto de inflexión, con valor $f(1) = 1$. f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$.

$\square$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

Comencemos encontrando los puntos de máximo y mínimo de f, absolutos y relativos, si los hay.

Primero notemos que f no está definida en $x = 1$, y es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La derivada de f está dada por

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3}, \qquad \text{si } x \neq 1,$$

y está definida en el mismo dominio que f. Como f' sólo se anula en $x = -1$, este es el único punto crítico. Para analizarlo, primero calculamos la segunda derivada de f:

$$f''(x) = -\frac{(x-1)^3 - 3(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(x+2)}{(x-1)^4}, \qquad \text{si } x \neq 1.$$

Notar que f'' está definida en el mismo dominio que f' y por ende f. Como $f''(-1) = 1/8 > 0$, $x = -1$ es un punto de mínimo, que resulta ser absoluto, de f, con valor mínimo $f(-1) = -1/4$. No hay puntos de mínimo relativos no absolutos ni puntos de máximo de ninguna índole. Notar que $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Ahora veamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Como $f' > 0$ en $(-1, 1)$, f es estrictamente creciente en este intervalo, y como $f' < 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, f es estrictamente decreciente en esta región.

Por último, veamos los puntos de inflexión de f, si los hay, y los intervalos de concavidad.

Como f'' sólo se anula en $x = -2$, $f'' < 0$ en $(-\infty, -2)$ y $f'' > 0$ en $(-2, 1) \cup (1, \infty)$, $x = -2$ es el único punto de inflexión, con valor $f(-2) = -2/9$, y f es cóncava en $(-\infty, -2)$ y convexa en $(-2, 1) \cup (1, \infty)$.

Resumen:

- f es continua y derivable dos veces en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Se cumple que $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;
- $x = -1$ es un punto de mínimo absoluto, con valor $f(-1) = -1/4$. No hay puntos de mínimo relativos no absolutos ni puntos de máximo de ninguna índole;
- f es estrictamente creciente en $(-1, 1)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;
- $x = -2$ es el único punto de inflexión, con valor $f(-2) = -2/9$. f es cóncava en $(-\infty, -2)$ y convexa en $(-2, 1) \cup (1, \infty)$.

$\square$

(d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

Comencemos encontrando los puntos de máximo y mínimo de f, absolutos y relativos, si los hay.

Primero notemos que f no está definida en $x = 0$, y es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La derivada de f está dada por

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, \qquad \text{si } x \neq 0,$$

y está definida en el mismo dominio que f. Como f' nunca se anula, no hay puntos críticos. No hay puntos de máximo o mínimo de ninguna índole. Notar que $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Ahora veamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Como $f' > 0$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f es estrictamente creciente en todo su dominio.

Por último, veamos los puntos de inflexión de f, si los hay, y sus intervalos de concavidad.

Como

$$f''(x) = \frac{-2}{x^3}, \qquad \text{si } x \neq 0,$$

f'' nunca se anula y no hay puntos de inflexión. Igualmente, como $f'' > 0$ en $(-\infty, 0)$, f es convexa en este intervalo, y como $f'' < 0$ en $(0, \infty)$, f es cóncava en este intervalo.

Resumen:

- f es continua y derivable dos veces en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se cumple que $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
- No hay puntos de máximo o mínimo de ninguna índole;
- f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
- No hay puntos de inflexión. f es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, \infty)$.

$\square$

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+5}}$.

Ayuda: No se presenta solución. La ayuda es que repitan el análisis sistemático de los primeros cuatro incisos. $\square$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

Ayuda: No se presenta solución. La ayuda es que repitan el análisis sistemático de los primeros cuatro incisos.

Ejercicio 10

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivables en todo punto del intervalo abierto I, y sea $a \in I$.

(a) Si $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in I$, y $f(a) = g(a)$, demostrar que $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$ y que $f(x) < g(x)$ para todo $x < a$.

Definiendo la función $h : I \to \mathbb{R}$ como $h := f - g$, tenemos que $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Esto significa que h es estrictamente creciente en I, y como $h(a) = f(a) - g(a) = 0$, $h(x) > 0$ para todo $x > a$ y $h(x) < 0$ para todo $x < a$. Esto equivale a que $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para todo $x < a$. $\square$

(b) Demostrar que no se cumple lo enunciado en **(a)** si no se supone $f(a) = g(a)$.

Ayuda: Un ejemplo sencillo para ver que el resultado del inciso **(a)** anterior no es cierto si no se supone $f(a) = g(a)$ es considerar $f(x) = x$, $g(x) = 0$, $I = (0, 1)$ y $a = 1/2$. Completen ustedes los detalles. $\square$

(c) Demostrar que $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ cuando $x > 1$.

Ayuda: Consideren $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = 3 - 1/x$, $I = (0, \infty)$ y $a = 1$, y usen el inciso **(a)** anterior.

Ejercicio 11

Sea f una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demostrar que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y > 0$ (Sugerencia: Calcular $g'(x)$ para $g(x) = f(xy)$).

Siguiendo la sugerencia, tomamos $y > 0$ arbitrario pero fijo y definimos $g(x) := f(xy)$ para $x > 0$. Entonces

$$g'(x) = [f(xy)]' = f'(xy)\, y = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = f'(x), \qquad \text{para todo } x > 0.$$

Lo anterior implica que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x > 0$. Evaluando en $x = 1$ obtenemos

$$0 = f(1) = g(1) - c = f(y) - c,$$

con lo cual deducimos que $c = f(y)$. Entonces

$$f(xy) = g(x) = f(x) + c = f(x) + f(y), \qquad \text{para todo } x, y > 0.$$

Ejercicio 12

Dado $p(x)$ un polinomio se dice que a es *raíz de orden* n si $p(x) = (x-a)^n q(x)$ para $q(x)$ algún polinomio con $q(a) \neq 0$.

(a) Probar que a es raíz de orden 2 de $p(x)$ si y sólo si $p(a) = p'(a) = 0$ y $p''(a) \neq 0$.

($\Rightarrow$) Si $a \in \mathbb{R}$ es una raíz de orden 2 de p, existe un polinomio q tal que $p(x) = (x-a)^2 q(x)$ y $q(a) \neq 0$. Como

$$p'(x) = 2(x-a)q(x) + (x-a)^2 q'(x) = (x-a)[2q(x) + (x-a)q'(x)]$$

y también

$$p''(x) = 2q(x) + 4(x-a)q'(x) + (x-a)^2 q''(x) = 2q(x) + (x-a)[4q'(x) + (x-a)q''(x)],$$

es claro que $p(a) = p'(a) = 0$ y $p''(a) = 2q(a) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Si $p(a) = p'(a) = 0$ entonces existen polinomios q_1 y q_2 tales que $p(x) = (x-a)q_1(x)$ y $p'(x) = (x-a)q_2(x)$.

Derivando la expresión para p e igualando a la expresión para p' obtenemos

$$q_1(x) + (x-a)q_1'(x) = p'(x) = (x-a)q_2(x) \quad \Rightarrow \quad q_1(x) = (x-a)(q_2(x) - q_1'(x)).$$

Con lo anterior, y definiendo el polinomio $q := q_2 - q_1'$, tenemos que $p(x) = (x-a)q_1(x) = (x-a)^2 q(x)$. Ahora, derivando esta expresión para p dos veces obtenemos

$$p''(x) = [2(x-a)q(x) + (x-a)^2 q'(x)]' = 2q(x) + (x-a)[4q'(x) + (x-a)q''(x)],$$

y evaluando en $x = a$ tenemos finalmente que $p''(a) = 2q(a)$, por lo que $q(a) \neq 0$. □

(b) Enunciar una generalización del resultado en **(a)** para raíces de orden n arbitrario.

La generalización pedida es:

Si p es un polinomio de grado $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n \leq m$, $a \in \mathbb{R}$ es una raíz de orden n de p si y sólo si $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(n-1)}(a) = 0$ y $p^{(n)}(a) \neq 0$. □

(c) ¿Cuándo $p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una raíz doble, para $a \neq 0$?

Escribiendo a p como $p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ las raíces (no necesariamente distintas) de p, la Fórmula de Bhaskara da expresiones explícitas para α_1 y α_2 en términos de a,

b y c. Entonces es inmediato que p tiene una raíz doble (una raíz de orden 2) si y sólo si $\alpha_1 = \alpha_2$, y usando las expresiones ya mencionadas para α_1 y α_2, es también inmediato que lo anterior ocurre si y sólo si el discriminante de p, $\Delta := b^2 - 4ac$, es nulo.

Ejercicio 13

Si $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ $(n > 1)$, probar que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$ tiene un valor mínimo y hallarlo.

Notar que f es un polinomio cuadrático con coeficiente principal igual a n (f es una parábola con las ramas hacia arriba), por lo que debería estar claro a esta altura que f tiene exactamente un punto crítico $x_0 \in \mathbb{R}$, y corresponde a un punto de mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

Derivamos f e igualamos a cero para encontrar este punto de mínimo absoluto x_0:

$$0 = f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} 2(x_0 - a_i) = 2\left(nx_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Ejercicio 14

Sea f una función n-veces derivable en todo $\mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n+1}) = 0$ para $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$. Demostrar que existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(y_0) = 0$.

Usando el *Teorema de Rolle* para f en los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, para $1 \leq i \leq n$, obtenemos una lista de n números $x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \cdots < x_n^{(1)}$ tales que $x_i^{(1)} \in (x_i, x_{i+1})$ y $f'(x_i^{(1)}) = 0$.

Razonando inductivamente, si $1 \leq k \leq n$, podemos repetir el proceso anterior k veces para obtener una lista de $n - k + 1$ números $x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \cdots < x_{n-k+1}^{(k)}$ tales que $f^{(k)}(x_i^{(k)}) = 0$, para $1 \leq i \leq n - k + 1$.

Finalmente, considerando $k = n$ en el resultado anterior, deducimos que existe un número, que llamamos y_0, tal que $f^{(n)}(y_0) = 0$.

Ejercicio 15

Sean f y g dos veces derivables. Probar que si f es creciente y f y g son convexas, entonces $f \circ g$ es convexa.

Como f y g son dos veces derivables, $f \circ g$ también lo es (vía la *Regla de la Cadena*), y entonces basta con probar que $(f \circ g)'' > 0$ en un apropiado dominio D del que no nos preocupamos en especificar: si $x \in D$ entonces

$$(f \circ g)''(x) = [f(g(x))']' = [f'(g(x))\, g'(x)]' = f''(g(x))\, g'(x)^2 + f'(g(x))\, g''(x) > 0.$$

En el cálculo anterior se usó que $f''(g(x)), g''(x) > 0$ por la convexidad de f y g, $f'(g(x)) > 0$ por el crecimiento de f, y $g'(x)^2 \geq 0$ por lo obvio.

Ejercicio 16

(a) Demostrar que entre todos los rectángulos que tienen determinado perímetro, el cuadrado tiene área máxima.

Ayuda: Si $x, y > 0$ son los lados de un rectángulo arbitrario, y $P := 2(x + y)$ es su perímetro, entonces $y = P/2 - x$. Como queremos área máxima a perímetro P fijo, y el área de este rectángulo es xy, consideren la función $f(x) := x(P/2 - x)$ y encuentren un máximo absoluto en $(0, \infty)$. □

(b) Encontrar las dimensiones de un triángulo isósceles de área maximal que se pueda inscribir en un círculo de radio r.

Ayuda: Si $y > 0$ es la longitud de los dos lados iguales del triángulo isósceles, y $x > 0$ es la longitud del tercer lado (su base), entonces $y > x/2$ (esto es la desigualdad triangular) y el área de este triángulo es

$$\frac{x\sqrt{y^2 - (x/2)^2}}{2},$$

donde $\sqrt{y^2 - (x/2)^2}$ es su altura.

Para poner a y, o directamente a la altura del triángulo, en función de x recordamos que nuestro triángulo está inscrito en un círculo de radio $r > 0$.

Primero, convénzanse gráficamente que para que el área del triángulo sea máxima, necesariamente su altura debe ser mayor o igual a r. Esto implica que el centro del círculo está en el interior del triángulo o justo sobre su base.

Segundo, grafiquen el segmento que representa la altura del triángulo, llamen h a esta altura, y noten que $h = r + z$, con $z \geq 0$ la diferencia entre la altura real del triángulo y el radio del círculo; $z = 0$ si y sólo si el centro del círculo está justo sobre la base del triángulo.

Tercero, grafiquen el triángulo rectángulo de altura z, cateto adyacente $x/2$ e hipotenusa r, y noten entonces que $z = \sqrt{r^2 - (x/2)^2}$.

Por último, ahora que escribieron a $h = r + z$ en términos de x, vuelvan a la expresión del área del triángulo y reemplacen la expresión de su altura en función de y por la expresión recién encontrada. Definan la función

$$f(x) := \frac{x(r + \sqrt{r^2 - (x/2)^2})}{2},$$

y encuentren un máximo absoluto en $(0, 2r]$.