Práctico 6

Parte I

En esta primera parte, cada vez que se pida determinar una derivada, es necesario usar la definición y no las reglas usuales de derivación.

1. (a) Demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ para $a \neq 0$.

(b) Demostrar que la recta tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a)$ no corta la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.

(c) Demostrar que si $h(x) = \sqrt{x}$, entonces $h'(a) = a^{-1/2}/2$ para $a > 0$.

(d) Si $f(x) = \lfloor x \rfloor$, hallar f' donde sea posible.

2. Sea f una función derivable en el intervalo abierto (a, b) y $c \in \mathbb{R}$. En cada caso hallar g' en su respectivo dominio.

(a) $g(x) = f(x + c)$. (b) $g(x) = f(cx)$. (c) $g(x) = f(x)^2$.

3. Sea f una función derivable en a. Demostrar que $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Parte II

A partir de ahora sí es posible usar las reglas usuales, aunque en algunos casos será necesario usar también la definición.

4. Calcular f', donde $f(x)$ viene dada por cada una de las siguientes expresiones.

(a) $3x^4 + 5x^3 - \pi x$.
(b) $(x^3 + 3)(2x^2 - 1)$.
(c) $\dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.
(d) $\tan(x)$.
(e) $(x^3 - 2x + 1)^8$.
(f) $x^2 \cos(1/x)$.
(g) $\big(\tan(4x^2 + 1)\big)^{\frac{4}{3}}$.
(h) $\cos(x \operatorname{sen}(x))$.
(i) $\cos(\sqrt{x^4 + 7})$.
(j) $\dfrac{1 + \sqrt{\operatorname{sen}(3x)}}{1 - x + x^5}$.
(k) $\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^7(x))}{x}$.
(l) $\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

5. (a) Sea h una función tal que $|h(x)| \leq x^2$ para todo x. Demostrar que h es derivable en 0 y calcular $h'(0)$.

(b) Probar que la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, calcular g' y probar que no es continua en 0.

6. Calcular $f^{(n)}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^{10}$. (b) $f(x) = \cos(x)$. (c) $f(x) = 1/x$. (d) $f(z) = \sqrt{z}$.

7. En cada uno de los siguientes casos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto (x_0, y_0) indicado.

(a) $\begin{cases} y = 1 - 2x - 3x^2, \\ (x_0, y_0) = (-2, -7). \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ (x_0, y_0) = (1, 1). \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{1 - x}, \\ (x_0, y_0) = (0, 0). \end{cases}$

8. Decir en qué puntos es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 & \text{si } |x| < 1, \\ 2x+1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 7-x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

9. (a) Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

(b) Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0.

10. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $f + g$ es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.

(b) Si fg es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.

(c) Si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $|f|$ es derivable en a.

(d) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que no es derivable en una cantidad infinita de puntos.

(e) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que es derivable en 0 y no lo es en cualquier intervalo abierto que contiene al 0.

(f) Dados $a < b$, toda función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se extiende a una función derivable en todo $\mathbb{R}$. (Para este ítem, considere continuidad lateral en los bordes, i.e. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = f(b)$).

11. Determinar $(f^{-1})'(d)$ en los siguientes casos.

(a) $f(x) = x^5 + 2, \quad d = 1.$

(b) $f(x) = \sqrt{4-x}, \quad d = 3.$

(c) $f(x) = \tan(2x), \quad -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}, \quad d = 1.$

12. (a) Se define la función $\operatorname{arcsen}(s) : [-1, 1] \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$ como la inversa de la función $\operatorname{sen}(x)$ restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Demuestre que $\operatorname{arcsen}'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$.

(b) Análogamente se define $\arccos(s) : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$. Demuestre que $\arccos'(s) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-s^2}}$.

(c) Se define ahora $\arctan(s) : \mathbb{R} \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$ como la inversa de la función $\tan(x)$ restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Demuestre que $\arctan'(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$.

PARTE III

En esta parte hay problemas que utiliza la derivada y su significado con aplicaciones a la física y la economía.

13. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$, en donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los tiempos $t = a,\ t = 1,\ t = 2$ y $t = 3$.

14. El costo (en pesos) de producción de cierto artículo es $c(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$.

(a) Encuentre la razón de cambio medio de c respecto de x cuando el nivel de producción cambia de la siguiente manera:

(I) de $x = 100$ a $x = 105$.

(II) de $x = 100$ a $x = 101$.

(b) Encuentre la razón de cambio instantánea de c respecto de x cuando $x = 100$. (A esta razón se la llama costo marginal.)

15. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 metros/seg, entonces su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.

(a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

(b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando se encuentra a una altura de 96 metros sobre el nivel del suelo y se dirige hacia arriba? Idem si se dirige hacia abajo.

PARTE IV: EJERCICIOS EXTRA

16. (a) Demostrar usando la definición de derivada que si $g(x) = 1/x^2$, entonces $g'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.

(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de g en $(a, 1/a^2)$ corta a la gráfica de g en otro punto.

17. Encontrar un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

18. Considerar la función biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6 - x - x^3$. Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $(-4, 2)$.