

1. Decir en qué puntos son continuas las siguientes funciones y justificar.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & x < 0; \\ x \operatorname{sen}(x), & x \geq 0. \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}, & x < 0; \\ 5, & x = 0; \\ \frac{\sqrt{1+10x}-1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1; \\ 6, & x = -1. \end{cases} \quad (d) f(x) = [x] \quad (e) f(x) = [1/x]$$

2. (a) Probar que si $|f(x)| \leq |x|$, entonces f es continua en 0.
 (b) Probar que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, g es continua en 0 y $g(0) = 0$, entonces f es continua en 0.
3. Determinar para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F , definida en toda la recta real, que extienda a f .

$$(a) f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1} \quad (b) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (c) f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$$

4. (a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que si $f|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$.
 (b) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y coinciden en \mathbb{Q} , entonces son iguales.
5. (a) Mostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una extensión continua g definida en todo \mathbb{R} .
 (b) Mostrar que la conclusión del punto anterior es falsa si cambiamos $[a, b]$ por (a, b) .
 (c) Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y que g es continua en $[b, c]$. Probar que si $f(b) = g(b)$, entonces la función $h : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, c]$, donde h está definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ g(x), & x \in [b, c]. \end{cases}$$

6. Para cada una de las siguientes funciones decir si están acotadas superior o inferiormente y si alcanzan sus valores máximos o mínimos.
 (a) $f(x) = x^2$ en: (i) $(-1, 1)$; (ii) \mathbb{R} ; (iii) $[0, \infty)$; (iv) $(-1, 2]$.
 (b) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.
 (c) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$ en: (i) $[k\pi, (k+1)\pi]$, k entero; (ii) $(k\pi, (k+1)\pi)$, k entero.

7. Sea $p(x) = x^5 + x + 1$.

- (a) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ (Sugerencia: comparar p con la función x^5).
 (b) Probar que p es suryectiva sobre \mathbb{R} .
 (c) Hallar un número natural n tal que $p(x) = 0$ para algún $x \in [-n, n]$.

8. Sea f una función continua y supongamos que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de f ?

9. (a) Probar que si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un x_0 en (a, b) tal que $f(x_0) = g(x_0)$.
(b) Mostrar que la ecuación $\sin(x) = x + 1$, tiene al menos una solución. Graficar las funciones $\sin(x)$ y $x + 1$ en el mismo sistema de ejes coordenados.
(c) Mostrar que existe un $x \in [0, \pi/2]$ tal que $x^3 \sin^7(x) = 2$
(d) Mostrar que en el plano, un círculo de radio 1 y un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ pueden intersectarse en una región cuya área sea exactamente 1.337..
10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.
(a) Si f es continua y acotada en \mathbb{R} entonces f alcanza un mínimo.
(b) Si $|f|$ es continua en a entonces f es continua en a .
(c) Existe un número que es exactamente una unidad mayor que su cubo.
11. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Mostrar que si f es continua, entonces tiene un punto fijo, esto es, existe un x_0 tal que $f(x_0) = x_0$. Interpretar gráficamente.
12. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 am y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las 7:00 pm. A la mañana siguiente baja de la cima a las 7:00 am, siguiendo el mismo camino, arriba al monasterio a las 7:00 pm. Con el teorema del valor intermedio, demuestre que hay un punto del camino por el cual el monje pasa exactamente a la misma hora de los dos días.
13. Sea f definida y continua en todo \mathbb{R} . Supongamos que f es siempre positiva y que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
14. (a) Definir una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.
(b) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, pero continua en todos los demás puntos.
(c) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.
15. (a) ¿Cuántas funciones f continuas hay tales que $f(x)^2 = x^2$ para todo x en \mathbb{R} ?
(b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si no exigimos continuidad?
(c) Si f y g son continuas con $g(x) \neq 0$ para todo x y si $f^2 = g^2$, probar que $f = g$ o $f = -g$.
(d) ¿Qué sucede si no suponemos g nunca nula en el inciso anterior?