Análisis Matemático I

Algunos ejercicios del Práctico 4

Eduardo G. Andreozzi*
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

19 de mayo de 2023

En lo que sigue se dan ayudas para casi todos los ejercicios del Práctico 3 debido al poco tiempo disponible para este práctico. Sólo se presentan en detalle los más complicados, según mi opinión y mi experiencia en las clases prácticas.

Ejercicio 1

En cada uno de los siguientes casos, para un $\varepsilon > 0$ dado, encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

(a) $f(x) = x^4$, $l = a^4$.

Fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Tratemos de acotar la expresión $|f(x) - l|$ de manera que un posible factor $|x - a|$ sea la única dependencia con x, para luego poder deducir un $\delta > 0$, dependiente de ε, que nos asegure que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que se cumpla que $0 < |x - a| < \delta$:

$$|x^4 - a^4| = |x^2 - a^2||x^2 + a^2| = |x - a||x + a|(x^2 + a^2). \tag{1}$$

Nos interesa controlar las expresiones $|x + a|$ y $(x^2 + a^2)$ por números dependientes sólo de a.

Veamos primero cómo acotar $|x + a|$. Primero nos restringimos (en x) a un intervalo «chico» alrededor de a, considerando un δ_1 auxiliar a conveniencia. Podemos tomar $\delta_1 = 1$ por ejemplo, es decir nos restringimos a valores de x tales que $0 < |x - a| < \delta_1 = 1$ (valores de x que distan de a en menos de 1). Entonces

$$|x + a| \leq |x| + |a| = |(x - a) + a| + |a| \leq (|x - a| + |a|) + |a| < 1 + 2|a|,$$

y también

$$x^2 + a^2 = |(x - a) + a|^2 + a^2 \leq (|x - a| + |a|)^2 + a^2 < (1 + |a|)^2 + a^2 = 1 + 2|a| + 2a^2.$$

Usamos las cotas anteriores y volvemos a (1) para escribir

$$|x^4 - a^4| = |x - a||x + a|(x^2 + a^2) < |x - a|(1 + 2|a|)(1 + 2|a| + 2a^2), \tag{2}$$

*Comisión 5 (Tarde)

recordando siempre que las cotas anteriores valen sólo cuando x satisface $0 < |x - a| < 1$.

Si queremos que el lado derecho de la desigualdad (2) sea menor que ε cuando $0 < |x - a| < \delta$, deducimos que debemos tomar

$$\delta := \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{(1+2|a|)(1+2|a|+2a^2)}\right\},$$

ya que entonces volvemos a (2) y obtenemos

$$\begin{aligned} |x^4 - a^4| &< |x-a|(1+2|a|)(1+2|a|+2a^2) \\ &< \delta(1+2|a|)(1+2|a|+2a^2) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(1+2|a|)(1+2|a|+2a^2)}(1+2|a|)(1+2|a|+2a^2) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ y $l = 1$.

Fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrariamente y tratemos de hacer lo mismo que antes:

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right| = \frac{|x-1|}{|x|}. \tag{3}$$

Nos interesa acotar la expresión $1/|x|$ por algún número. Siguiendo la misma filosofía de antes, tomemos $\delta_1 = 1/2$, es decir nos restringimos a valores de x tales que $0 < |x - 1| < \delta_1 = 1/2$ (valores de x que distan de 1 en menos de $1/2$). Una razón por la cual este δ_1 es bueno es que nos asegura que x no se acerque a 0, ya que $x \in (1/2, 3/2)$. De no ser así, acotar $1/|x|$ sería imposible porque esta función de x crece sin control cerca de 0, para x positivos.

El intervalo en donde vive x nos dice inmediatamente que $|x| > 1/2$, por lo que volviendo a (3) tenemos que

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|, \tag{4}$$

recordando siempre que la cota anterior vale sólo cuando x satisface $0 < |x - 1| < 1/2$.

Si queremos que el lado derecho de la desigualdad (4) sea menor que ε cuando $0 < |x - 1| < \delta$, deducimos que debemos tomar

$$\delta := \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

ya que entonces volvemos a (4) y obtenemos

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 2|x-1| < 2\delta \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

(c) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ y $l = 2$.

Ayuda: Notar que

$$\left|x^4 + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|(x^4 - 1) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\right| \leq |x^4 - 1| + \left|\frac{1}{x} - 1\right|.$$

Si para un $\varepsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que cada sumando del lado derecho de la desigualdad puede hacerse menor a $\varepsilon/2$, siempre que x satisfaga $0 < |x-1| < \delta$, tendríamos que el lado izquierdo de la desigualdad estaría acotado por ε como queremos.

Usen los δ's de los incisos anteriores, reemplazando sus dependencias con ε por $\varepsilon/2$, y tomen el mínimo de estos δ's para definir el δ que hace falta en este inciso. Es decir, convénzanse de que deben tomar

$$\delta := \text{mín}\left\{\text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{30}\right\}, \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right\}$$

para este inciso.

Ejercicio 2

Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\text{lím}_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$.

Ayuda: Notar que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

¿Pueden seguir a partir de acá? □

(b) $\text{lím}_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$.

Ayuda: Notar que

$$\left|\frac{x^2 - a^2}{x-a} - 2a\right| = \left|\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} - 2a\right| = |(x+a) - 2a| = |x-a|, \quad \text{si } x \neq a.$$

¿Pueden seguir a partir de acá? □

(c) $\text{lím}_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Ayuda: Notar que

$$\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2.$$

¿Pueden seguir a partir de acá?

Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Ayuda: Evaluar en $x = 1$. $\square$

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4, \quad \text{si } x \neq 2.$$

¿A qué número tiende esta expresión cuando $x \to 2$? $\square$

(c) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ayuda: Usar la siguiente identidad:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k.$$

Esta identidad se puede probar directamente (distribuyendo el lado derecho y obteniendo el lado izquierdo) o por inducción. $\square$

(d) $\lim_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h\sqrt{1+h}} - \dfrac{1}{h}\right)$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{1}{h\sqrt{1+h}} - \frac{1}{h} = \frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}} = \frac{(1-\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}{h\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})} = \frac{-1}{\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})}, \quad \text{si } h \neq 0.$$

¿A qué número tiende esta expresión cuando $h \to 0$? $\square$

(e) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$, $a > 0$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}, \quad \text{si } h \neq 0.$$

¿A qué número tiende esta expresión cuando $h \to 0$? $\square$

(f) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$.

Notar que

$$\frac{9-t}{3-\sqrt{t}} = \frac{(3-\sqrt{t})(3+\sqrt{t})}{3-\sqrt{t}} = 3+\sqrt{t}, \quad \text{si } t \neq 9.$$

¿A qué número tiende esta expresión cuando $t \to 9$? $\square$

(g) $\lim_{x\to 2}(x^2 - \lfloor x \rfloor)$.

Ayuda: Considerar los límites laterales. $\square$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x\cos x}$.

Ayuda: Considerar los límites laterales.

Ejercicio 5

Demostrar por definición que no existen los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

Sea $\ell \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Vamos a probar que $\lim_{x\to 0} 1/x \neq \ell$ por definición, es decir vamos a negar la definición original de límite.

Debemos probar que existe $\varepsilon > 0$, posiblemente dependiente de ℓ, tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$, dependiente de δ y posiblemente de ε y ℓ, tal que $0 < |x_0| < \delta$ y $|1/x_0 - \ell| \geq \varepsilon$. Para esto, tomemos $\varepsilon = 1$ (convenientemente este ε, que no depende de ℓ, funciona sin problemas) y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Si pudiéramos asegurar que existe x_0 tal que

$$\frac{1}{|x_0|} - |\ell| = 1,$$

podríamos asegurar que

$$\left|\frac{1}{x_0} - \ell\right| \geq \left|\frac{1}{|x_0|} - |\ell|\right| \geq \frac{1}{|x_0|} - |\ell| = 1 = \varepsilon,$$

y sólo faltaría agregar la condición de que x_0 también debe satisfacer $0 < |x_0| < \delta$.

Sea entonces

$$x_0 := \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{1+|\ell|}\right\}.$$

Claramente $0 < |x_0| < \delta$, y como también se cumple que $0 < x_0 \leq 1/(1+|\ell|)$, tenemos que

$$\left|\frac{1}{x_0} - \ell\right| \geq \left|\frac{1}{|x_0|} - |\ell|\right| \geq \frac{1}{x_0} - |\ell| \geq (1+|\ell|) - |\ell| = 1 = \varepsilon.$$

Ahora que hemos probado que el límite en cuestión no puede ser un número real, nos queda verificar que tampoco puede ser $\pm\infty$.

Veamos que $\lim_{x\to 0} 1/x \neq \infty$. Debemos probar que existe $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$, dependiente de δ y posiblemente de M, tal que $0 < |x_0| < \delta$ y $1/x_0 \leq M$. Para esto, tomemos $M = 1$ y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Si $x_0 := -\delta/2$, claramente $0 < |x_0| < \delta$ y $1/x_0 = -2/\delta \leq 1 = M$.

Finalmente, veamos que $\lim_{x\to 0} 1/x \neq -\infty$. Debemos probar que existe $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$, dependiente de δ y posiblemente de M, tal que $0 < |x_0| < \delta$ y $1/x_0 \geq -M$. Para esto, tomemos $M = 1$ y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Si $x_0 := \delta/2$, claramente $0 < |x_0| < \delta$ y $1/x_0 = 2/\delta \geq -1 = -M$. $\square$

(b) $\lim_{x\searrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Sea $\ell \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Vamos a proceder igual que antes, es decir debemos probar que existe $\varepsilon > 0$, posiblemente dependiente de ℓ, tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$, dependiente de δ y posiblemente de ε y ℓ, tal que $0 < x_0 < \delta$ y $|\sin(1/x_0) - \ell| \geq \varepsilon$. Para esto, vamos a considerar los casos $|\ell| > 1$, $|\ell| = 1$ y $|\ell| < 1$.

Si $|\ell| > 1$, tomemos $\varepsilon = |\ell| - 1 > 0$ y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Si $x_0 := \delta/2$, claramente $0 < x_0 < \delta$ y

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x_0}\right) - \ell\right| \geq \left|\left|\sin\left(\frac{2}{\delta}\right)\right| - |\ell|\right| \geq |\ell| - \left|\sin\left(\frac{2}{\delta}\right)\right| \geq |\ell| - 1 = \varepsilon.$$

Si $|\ell| = 1$, tomemos $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Por la Arquimedianidad de $\mathbb{R}$ sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < 2\pi\delta,$$

por lo que definiendo

$$x_0 := \frac{1}{2\pi N}$$

claramente $0 < x_0 < \delta$ y

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x_0}\right) - \ell\right| \geq ||\sin(2\pi N)| - |\ell|| = |\ell| = 1 = \varepsilon.$$

Por último, si $|\ell| < 1$, tomemos $\varepsilon = 1 - |\ell|$ y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ igual que antes ($1/N < 2\pi\delta$). Notar que

$$\frac{1}{\pi/2 + 2\pi N} < \frac{1}{2\pi N} < \delta.$$

Entonces definiendo

$$x_0 := \frac{1}{\pi/2 + 2\pi N}$$

claramente $0 < x_0 < \delta$ y

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x_0}\right) - \ell\right| \geq \left|\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi N\right)\right| - |\ell|\right| \geq 1 - |\ell| = \varepsilon.$$

Ahora que hemos probado que el límite en cuestión no puede ser un número real, nos queda verificar que tampoco puede ser $\pm\infty$.

Veamos que $\lim_{x\searrow 0} \sin(1/x) \neq \infty$. Debemos probar que existe $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$, dependiente de δ y posiblemente de M, tal que $0 < x_0 < \delta$ y $\sin(1/x_0) \leq M$. Para esto, tomemos $M = 1$ y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Si $x_0 := \delta/2$, claramente $0 < x_0 < \delta$ y $\sin(1/x_0) = \sin(2/\delta) \leq 1 = M$.

Finalmente, veamos que $\lim_{x\searrow 0} \sin(1/x) \neq -\infty$. Debemos probar que existe $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$, dependiente de δ y posiblemente de M, tal que $0 < x_0 < \delta$ y $\sin(1/x_0) \geq -M$. Para esto, tomemos $M = 1$ y $\delta > 0$ arbitrario pero fijo. Si $x_0 := \delta/2$, claramente $0 < x_0 < \delta$ y $\sin(1/x_0) = \sin(2/\delta) \geq -1 = -M$.

Ejercicio 7

Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$, usando la definición de límite.

Debemos ver que para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $1/(x-3)^2 > M$. Para esto, sea $M > 0$ arbitrario pero fijo y sea $\delta := 1/\sqrt{M}$. Entonces si $0 < |x-3| < \delta$ se cumple que

$$\frac{1}{|x-3|^2} > \frac{1}{\delta^2} = M.$$

$\square$

(b) Si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

Definimos $\ell := \lim_{x\to 0} f(x)$. Queremos ver que $\lim_{x\to 0} f(x^3) = \ell$, es decir queremos ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$ entonces $|f(x^3) - \ell| < \varepsilon$.

Por otro lado, sabemos por hipótesis que para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta_1$ entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon_1$.

Considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo, tomemos $\varepsilon_1 = \varepsilon$ y definamos $\delta := \sqrt[3]{\delta_1}$. Con estas elecciones, si $0 < |x| < \delta$ entonces $0 < |x^3| < \delta^3 = \delta_1$ y por lo tanto $|f(x^3) - \ell| < \varepsilon_1 = \varepsilon$. $\square$

(c) Si $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existe, entonces no necesariamente existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ayuda: Considerar la función *signo de* x

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$\square$

(d) Si $\lim_{x\searrow 0} f(1/x)$ existe, entonces $\lim_{x\searrow 0} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Definimos $\ell := \lim_{x\searrow 0} f(1/x)$. Queremos ver que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$, es decir queremos ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Por otro lado, sabemos por hipótesis que para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < x < \delta_1$ entonces $|f(1/x) - \ell| < \varepsilon_1$.

Considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo, tomemos $\varepsilon_1 = \varepsilon$ y definamos $N := 1/\delta_1$. Con estas elecciones, si $x > N$ entonces $0 < 1/x < 1/N = \delta_1$ y por lo tanto $|f(x) - \ell| = |f(1/[1/x]) - \ell| < \varepsilon_1 = \varepsilon$. $\square$

(e) $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

($\Rightarrow$) Sabemos por hipótesis que para todo $M_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < x < \delta_1$ entonces $f(x) > M_1$.

Consideremos $M > 0$ arbitrario pero fijo y elijamos $M_1 = M$. Si definimos $N := 1/\delta_1$ entonces para los x que satisfacen $x > N$ se cumple que $0 < 1/x < 1/N = \delta_1$ y por lo tanto $f(1/x) > M_1 = M$. Esto prueba por definición que $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

($\Leftarrow$) Sabemos por hipótesis que para todo $M_1 > 0$ existe $N_1 > 0$ tal que si $x > N_1$ entonces $f(1/x) > M_1$.

Consideremos $M > 0$ arbitrario pero fijo y elijamos $M_1 = M$. Si definimos $\delta := 1/N_1$ entonces para los x que satisfacen $0 < x < \delta$ se cumple que $1/x > 1/\delta = N_1$ y por lo tanto $f(x) = f(1/[1/x]) > M_1 = M$. Esto prueba por definición que $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$. $\square$

(f) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe para todo $a \in \mathbb{R}$.

Ayuda: Considerar la *función característica de los números racionales*

$$C_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ejercicio 8

Calcular los siguientes límites. Recordar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Antes de empezar me parece oportuno hacer una aclaración y enunciar un resultado útil.

En este ejercicio aparecen varias veces límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)},$$

siendo f una función relativamente sencilla. Para el caso particular $f(x) = x$ y $a = 0$, sabemos que el límite anterior es igual a 1, y aunque tiene mucho sentido pensar que lo mismo debería seguir valiendo si tomamos, por ejemplo, $f(x) = 2x$, el caso es que este hecho requiere una justificación. Afortunadamente, este resultado vale con más generalidad para la función f y el punto a.

Ahora se enuncia y se prueba el resultado con el que se va a completar este ejercicio.

Lema. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y tal que existe un entorno de $x = a$ en donde f tiene a lo sumo un cero en $x = a$. Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1.$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $|f(x)| < \varepsilon_1$.

Por otro lado, como $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$, para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta_2$ entonces $|\sin(x)/x - 1| < \varepsilon_2$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo. Tomemos $\varepsilon_2 = \varepsilon$ y $\varepsilon_1 = \delta_2$. Si definimos $\delta := \delta_1$ entonces para los x que satisfacen $0 < |x - a| < \delta$ se cumple que $0 < |x - a| < \delta_1$ y por lo tanto $|f(x)| < \varepsilon_1 = \delta_2$. Achicando δ de ser necesario, para que f tenga a lo sumo un cero en $(a-\delta, a+\delta)$, siendo este posible cero $x = a$, si $0 < |x-a| < \delta$ se cumple que $0 < |f(x)| < \delta_2$, lo que implica que $|\sin(f(x))/f(x)-1| < \varepsilon_2 = \varepsilon$. Esto significa por definición que $\lim_{x\to 0} \sin(f(x))/f(x) = 1$. □

Ahora sí, volvamos al ejercicio.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin(3x)}$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{2x}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}\frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sin(3x)/3x}.$$

Usen el Lema anterior para calcular el límite. □

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{x}$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{\sin^2(2x)}{x} = 4x\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2, \quad \text{si } x \neq 0.$$

Usen el Lema anterior para calcular el límite. $\square$

(c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{\pi/2-x}{\cos x} = \frac{\pi/2-x}{\sin(\pi/2-x)} = \frac{1}{\sin(\pi/2-x)/(\pi/2-x)}.$$

Usen el Lema anterior para calcular el límite. $\square$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{x}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2, \quad \text{si } x \neq (2n-1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Usen el Lema anterior para calcular el límite. $\square$

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \frac{\sin(x^2-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = (x+1)\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}, \quad \text{si } x \neq -1.$$

Usen el lema anterior para calcular el límite.