Funciones continuas

Definición. Sea A un intervalo abierto que contiene al punto a. Se dice que la función $f : A \to \mathbb{R}$ es **continua en** a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Comentario. En este caso, la función está definida en a, y tomar límite es lo mismo que evaluar en a.

Ejemplos. 1) La función $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

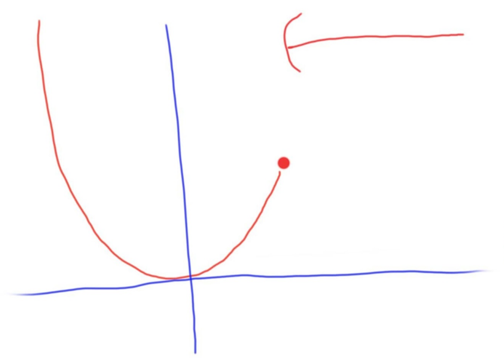
no es continua en $a = 1$, pues 1 no está en el dominio de f (en particular, $f(1)$ no existe), a pesar de que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 1.$$

2) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ 2 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

no es continua en $a = 1$.



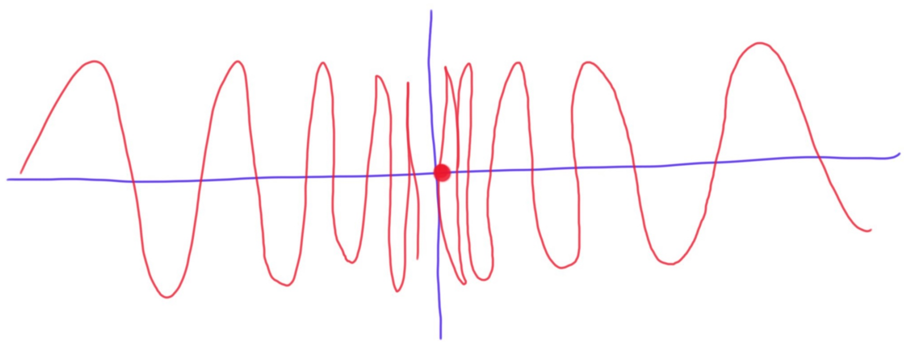
Si bien 1 está en el dominio de f, el límite de $f(x)$ para $x \to 1$ no existe, ya que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2 \neq 1.$$

3) La función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

está definida en toda la recta real, en particular, 0 está en el dominio de f, pero no es continua en $a = 0$ ya que vimos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.



4) Como sabemos que para todo $a > 0$ se cumple que

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a},$$

entonces la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, es continua en a para todo a en su dominio.

De la misma manera, la función sen es continua en todo $a \in \mathbb{R}$, pues $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$.

5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ b & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

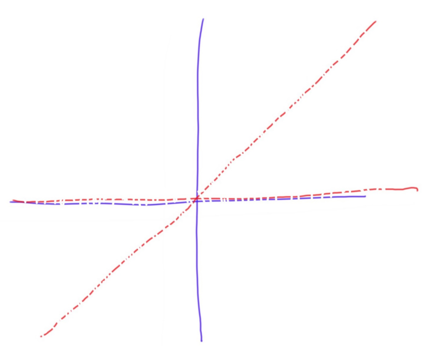
¿Cuánto debe valer b para que f sea continua en $a = 0$? Como $b = f(0)$, se debe cumplir

$$b = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = \lim_{y \to 0} 2 \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2.$$

6) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por ejemplo, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$, $f\left(\sqrt{2}\right) = 0$, $f(\pi) = 0$.



Indicar para cuáles $a \in \mathbb{R}$ la función es continua en a.

La función es continua en $a = 0$, pues

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Lo verificamos por definición. Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &< |x - 0| < \delta \implies |f(x) - 0| < \varepsilon, \\ \text{o sea, tal que } 0 &< |x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Pero $|f(x)| = |x|$ (si $x \in \mathbb{Q}$) o $|f(x)| = |0| = 0$ (si $x \notin \mathbb{Q}$). En ambos casos, $|f(x)| \leq |x|$. Así, podemos tomar $\delta = \varepsilon$.

Sea ahora $a \neq 0$. A continuación mostramos que f no es continua en a, pues en este caso $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe. Para verlo, recurrimos a la relación entre límite de funciones y límite de sucesiones.

Sea x_n una sucesión de números racionales que converge a a, con $x_n \neq a$ para todo n (tal sucesión existe pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). Luego

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

También vale que el conjunto de los números irracionales es denso en $\mathbb{R}$. Así, existe una sucesión y_n de números irracionales que converge a a, con $y_n \neq a$ para todo n, y se cumple

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \neq a.$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, pues de lo contrario, debería ser igual a a y también a cero. En consecuencia, f no es continua en a si $a \neq 0$.

Proposición. Si f y g son continuas en a, entonces $f + g$, fg y $\frac{f}{g}$ y son continuas en a (en el último caso, si $g(a) \neq 0$). Además, si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.

Prueba. Verificamos solo la afirmación para la suma de funciones (para las otras se procede análogamente): Para todo a se cumple que

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Ahora pasamos de continuidad en un punto a continuidad en un intervalo.

Definición. Sea A un intervalo abierto. La función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice **continua en** A si f es continua en a para todo $a \in A$.

Comentario. Imaginamos las funciones continuas como aquellas cuyo gráfico se puede trazar sin despegar el lápiz del papel (o la tiza del pizarrón).

Ejemplo. La función

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^5 - 3x + \pi}{x^2 - 1}\right) + \sqrt{1 + x^2}$$

es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.

Definición (continuidad en un intervalo cerrado y acotado). La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice **continua** si f es continua en c para todo $c \in (a, b)$ y además

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Ejemplo. Sea $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ 1 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

Tenemos que f no es continua en $[0, \pi]$ pues

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \pi = 0 \neq 1 = f(\pi).$$

Primer Teorema Fuerte. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe un número $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Damos la prueba más adelante.

A veces el teorema es útil para asegurar que una ecuación tiene solución.

Ejemplo. Mostrar que la ecuación

$$x^5 + 4x = 1$$

tiene al menos una solución. Notar que no es sencillo despejar x.

La ecuación dada tiene las mismas soluciones que $x^5 + 4x - 1 = 0$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 4x - 1$. La función es continua y satisface $f(0) = -1 < 0$ y $f(2) = 4 > 0$. Por el teorema, existe $\alpha \in [0, 2]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Este número α es solución de la ecuación.

Comentario. Con un programa ampliamente disponible uno tiene al instante que $0{,}249\,76$ es una solución aproximada de la ecuación. El teorema nos permite una apreciación más clara de las razones por las cuales la solución existe. Con él estamos más fuertes para abordar situaciones más complejas con un patrón similar, donde quizás la computación no resulte accesible. También, para detectar posibles errores en el ingreso de datos o en la interpretación de los resultados que da la computadora.

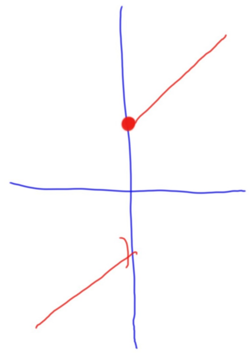
Ejemplo. El teorema no vale si quitamos la hipótesis de que f sea continua en $[a, b]$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

no es continua en $[-1, 1]$ (pues no es continua en $a = 0$) y satisface

$$f(-1) = -2 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 2 > 0,$$

pero sin embargo no existe $\alpha \in (-1, 1)$ tal que $f(\alpha) = 0$ (0 no está en la imagen de f).



Corolario del teorema. Si la función g es continua en $[a, b]$ y satisface $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $g(\alpha) = 0$.

Prueba. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -g(x)$. Como g es continua, f también lo es. Además,

$$f(a) = -g(a) < 0 \qquad \text{y} \qquad f(b) = -g(b) > 0.$$

Por el teorema, existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$. De allí, $g(a) = -f(\alpha) = 0$. $\square$

El siguiente corolario del teorema se llama **Teorema de los Valores Intermedios.** Es el enunciado más usado (el Primer Teorema Fuerte tiene hipótesis restrictivas solo para su prueba sea más sencilla).

Corolario. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $g(a) < c < g(b)$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $g(\alpha) = c$.

La prueba se deja como ejercicio. Sugerencia: Considerar la función f definida por $f(x) = g(x) - c$. Lo mismo vale si $g(b) < c < g(a)$.

Ejemplo. Mostrar que la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x},$$

es suryectiva.

Dado $c \in \mathbb{R}$, debemos mostrar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 + \sqrt[3]{x} = c$. Notar que no es sencillo despejar x en función de c.

Se cumple que

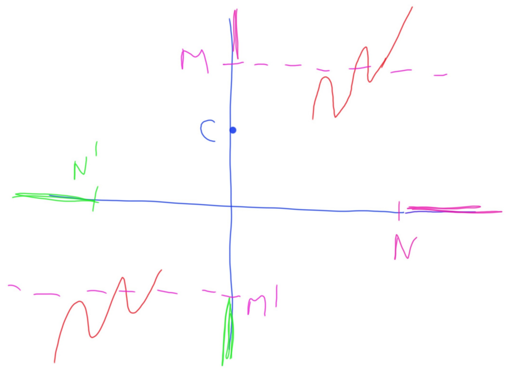
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

es decir, dado M, existe N tal que $(x > N \implies f(x) > M)$ y dado M' existe N' tal que $(x < N' \implies f(x) < M')$.

Si tomamos $M' < c < M$ y $[a, b] = [N' - 1, N + 1]$, tendremos

$$f(a) < M' < c < M < f(b).$$

Como f es continua, por el Teorema de los valores intermedios exists $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = c$.



Antes de demostrar el Primer Teorema Fuerte presentamos el siguiente lema.

Lema (acotación *local* de funciones continuas). Sea A un intervalo abierto que contiene el punto a y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en a. Entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, o sea, existen m y M tales que

$$m < f(x) < M \qquad \text{para todo } x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Además, si $f(a) > 0$, m puede tomarse positivo (y negativo si $f(a) < 0$).

Prueba. Como $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$ (notar que podemos omitir la condición $0 < |x - a|$). O sea,

$$-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon,$$

o equivalentemente

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

si $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Así, para la primera afirmación podemos tomar $\varepsilon > 0$ cualquiera (por ejemplo $\varepsilon = 1$), $m = f(a) - 1$ y $M = f(a) + 1$.

Para la segunda afrimación, en el caso de $f(a) > 0$, podemos tomar $\varepsilon = f(a)/2$ y en consecuencia, $m = f(a) - f(a)/2 = f(a)/2$. El caso en que $f(a) < 0$ es similar. □

Notas. 1) El lema vale también si f es continua en a solo por derecha o izquierda.

2) Hemos usado una afirmación muy parecida a la segunda del lema anterior cuando demostramos que si $\lim_{x\to a} g(x) = m > 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.

Antes de demostrar el Primer Teorema Fuerte recordamos su enunciado.

Primer Teorema Fuerte. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe un número $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Prueba. Sea

$$A = \{x \in [a, b] \mid f \text{ es negativa en } [a, x]\}.$$

El conjunto A no es vacío, pues $a \in A$, ya que $f(a) < 0$. También, A está acotado superiormente, ya que b es una cota superior. Luego A tiene supremo, lo llamamos α.

Se tiene que $\alpha < b$. En efecto, como $f(b) > 0$, por el lema de acotación local para funciones continuas, existe $\delta > 0$ tal que f es positiva en $(b - \delta, b]$. De manera similar se ve que $\alpha > a$.

A continuación mostramos que $f(\alpha) = 0$. Supongamos que $f(\alpha) > 0$. Como f es continua, por la segunda afirmación del lema de acotación local, existe $\delta > 0$ tal que f es positiva en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Por otro lado, como α es el supremo de A, existe $y \in A$ con $\alpha - \delta \leq y \leq \alpha$ (si no, $\alpha - \delta$ sería una cota superior de A menor que α). Luego f es negativa en $[a, y]$. En particular, f es negativa y también positiva en el intervalo $(a - \delta, y)$. Llegamos a una contradicción. De forma similar se descarta $f(\alpha) < 0$. En consecuencia, $f(\alpha) = 0$, como queríamos. $\square$

Segundo Teorema Fuerte. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f está acotada superiormente, es decir, existe M tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

No lo demostramos. Solo comentamos la idea. Hay que mostrar que

$$\sup \{x \in [a, b] \mid f \text{ está acotada superiormente en } [a, x]\} = b,$$

el extremo derecho del intervalo de definición. Esto se logra suponiendo que el supremo es un número $\alpha < b$, y llegando a una contradicción debido a la acotación local de f en α.

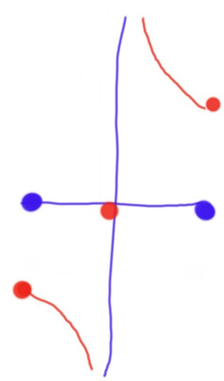
Ejemplo. El teorema no vale si el dominio fuera el intervalo abierto (a, b) en vez de $[a, b]$: Sea

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Si bien f es continua, no está acotada, pues $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$.

Ejemplo. El teorema no vale si quitamos la hipótesis de que f sea continua: Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



La función está definida en todo el intervalo cerrado y acotado $[-1, 1]$, pero no es acortada, pues

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

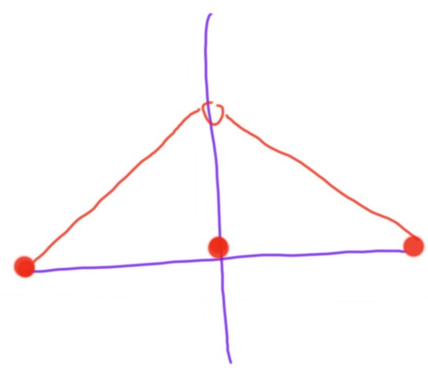
Tercer Teorema Fuerte. Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo. Más precisamente: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Notación. Si f y α son como en el teorema, se dice que α es un **punto de máximo** de f y que $f(\alpha)$ es un **valor máximo** de f.

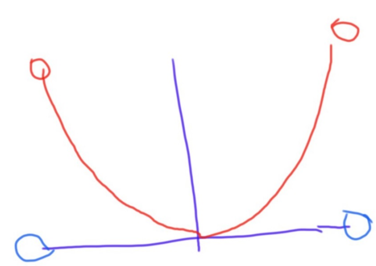
Ejemplo. El teorema no vale si se quita la hipótesis de que f sea continua: Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 + x & \text{si } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

La función f no alcanza máximo, pues su imagen es intervalo $[0, 1)$.



Ejemplo. El teorema no vale si el dominio de f es un intervalo abierto: Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. La imagen de f es intervalo $[0, 1)$, que no tiene máximo.



Prueba del Tercer Teorema Fuerte. Como f está acotada (por el Segundo Teorema Fuerte), su imagen tiene supremo, lo llamamos β. Así,

$$\beta = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}.$$

Veremos que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = \beta$.

Supongamos que esto no ocurre. Entonces, $f(x) < \beta$ para todo x, tenemos que $\beta - f(x) > 0$ para todo x. Luego está bien definida la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{\beta - f(x)},$$

que es continua pues f lo es y el denominador nunca es cero.

Por otro lado, como β es el supremo de la imagen de f, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in [a,b]$ tal que

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x) \leq \beta,$$

o equivalentemente,

$$0 \leq \beta - f(x) < \frac{1}{n}.$$

En consecuencia, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in [a,b]$ tal que

$$g(x) = \frac{1}{\beta - f(x)} > n.$$

Llegamos a un absurdo, pues por el Segundo Teorema Fuerte, la función g, al ser continua, está acotada. Así, existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = \beta$. $\square$

Volvemos al Teorema de los Valores Intermedios con una aplicación.

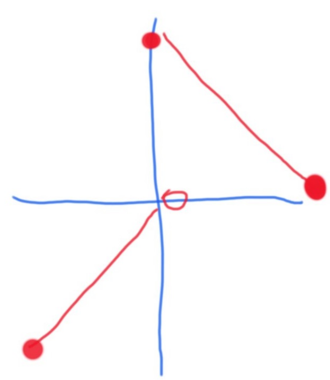
Relación entre continuidad e inyectividad de funciones

Sea A un intervalo. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice estrictamente creciente si para todo $x, y \in A$ con $x < y$ se cumple que $f(x) < f(y)$. De la manera obvia se define que f sea estrictemente decreciente.

Claramente, si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva. ¿Vale la recíproca? No. Por ejemplo, la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

es inyectiva, pero no estrictamente creciente ni estrictamente decreciente. Queda como ejercicio verificar esta afirmación.



Teorema. Sea A un intervalo y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y **continua**. Entonces f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Es suficiente verificar que se cumple la siguiente proposición (u otras similares).

Proposición. Sea A un intervalo y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y **continua** y sean $a, b \in A$ con $a < b$ y $f(a) < f(b)$. Si $a < c < b$, entonces $f(a) < f(c) < f(b)$.

Prueba. Como f es inyectiva, $f(c) \neq f(a)$ y $f(c) \neq f(b)$. Luego vale una de las siguientes posibilidades:

$$1)\ f(a) < f(c) < f(b), \qquad 2)\ f(c) > f(b), \qquad 3)\ f(c) < f(a).$$

Supongamos que (2) es verdadera, o sea, $f(c) > f(b)$. Como por hipótesis $f(a) < f(b)$, resulta que $f(a) < f(b) < f(c)$. Ahora aplicamos el Teorema de los Valores Intermedios a f en el intervalo $[a, c]$. Tenemos que existe $\alpha \in (a, c)$ tal que $f(\alpha) = f(b)$. Pero $\alpha < c < b$ contradice que f sea inyectiva. Así, (2) queda descartado. De la misma manera se ve que (3) no puede ocurrir. En consecuencia, vale (1), como queríamos. $\square$

Teorema (continuidad de la inversa). Sea A un intervalo, sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y continua. Entonces la imagen de f es un intervalo, digamos B, y la inversa $f^{-1} : B \to A$ es continua.

No lo demostramos. Solo comentamos que B es un intervalo por el Teorema de los Valores Intermedios. De manera ingenua, comentamos que si el gráfico de una función no presenta saltos, tampoco los tendrá el gráfico reflejado respecto de la diagonal principal.

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad f(x) = x^n,$$

que es una biyección. Entonces

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad f(x) = \sqrt[n]{x},$$

es continua.

De manera similar, arcsen y arccos son continuas en sus dominios.