Aclaración. Recordamos que las siguientes notaciones son equivalentes:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x) \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\nearrow a} f(x)$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\searrow -\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\nearrow \infty} f(x)$$

1. En cada uno de los siguientes casos, para un $\varepsilon > 0$ dado, encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

(a) $\begin{cases} f(x) = x^4, \\ l = a^4. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}, \\ a = 1,\ l = 1. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}, \\ a = 1,\ l = 2. \end{cases}$

2. Demostrar por definición los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a},\ a > 0.$

(b) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a.$

(c) $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

3. Calcular los siguientes límites en caso de existir. Justificar.

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}.$

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}.$

(c) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}.$

(d) $\lim_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h\sqrt{1+h}} - \dfrac{1}{h}\right).$

(e) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \quad (a > 0).$

(f) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}.$

(g) $\lim_{x\to 2} (x^2 - \lfloor x \rfloor).$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x\cos x}.$

4. Trazar el gráfico de la función

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1, \\ x + 2 & \text{si } -1 \le x < 1, \\ 4 & \text{si } x = 1, \\ 4 - x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Además, determinar el valor de los siguientes límites cuando existan.

(a) $\lim_{x\searrow -1} g(x).$

(b) $\lim_{x\nearrow -1} g(x).$

(c) $\lim_{x\to -1} g(x).$

(d) $\lim_{x\searrow 1} g(x).$

(e) $\lim_{x\nearrow 1} g(x).$

(f) $\lim_{x\to 1} g(x).$

(g) $\lim_{x\searrow -\infty} g(x).$

(h) $\lim_{x\nearrow \infty} g(x).$

5. Demostrar por definición que no existen los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}.$

(b) $\lim_{x\searrow 0} \operatorname{sen}(1/x).$

6. Calcular los siguientes límites en caso de existir o ser $\pm\infty$. Justificar.

(a) $\displaystyle\lim_{y\nearrow\infty} \frac{3y-4}{6y+1}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\searrow-\infty} \frac{5x^3-2x+7}{4x^2-1}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\nearrow\infty} \frac{x^3+7x}{x^4-2}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\nearrow\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\nearrow\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

7. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$, usando la definición de límite.

(b) Si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

(c) Si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existe, entonces no necesariamente existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

(d) Si $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} f(1/x)$ existe, entonces $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} f(1/x) = \lim_{x\nearrow\infty} f(x)$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ si y sólo si $\displaystyle\lim_{x\nearrow\infty} f(1/x) = \infty$.

(f) Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ no existe para todo $a \in \mathbb{R}$.

8. Calcular los siguientes límites. Recordar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos(x)}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$.

9. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar. Asumir que las funciones f y g están definidas en un entorno de a o de 0 según corresponda.

(a) $\displaystyle\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} f(-x)$.

(b) Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ no existe.

(c) Si $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)\operatorname{sen}(\tfrac{1}{x}) = 0$.

(d) Si $\displaystyle\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$.