Práctico 1

1. Demostrar las siguientes afirmaciones. Justificar **todos** los pasos, indicando las propiedades usadas.

(a) (*Propiedad Cancelativa de* $+$) Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

(b) (*Unicidad del inverso*) Probar que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, cumplen que $a \cdot b = 1$ y $a \cdot c = 1$, entonces $b = c$.

(c) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.

(d) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

(e) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$. ¿Cómo debería ser si $\cdot$ no fuera conmutativo?

(f) Probar que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

(g) Probar que $(-1)a = -a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(h) Probar que $(-1)(-1) = 1$.

2. Demostrar las siguientes afirmaciones. Justificar todos los pasos usando los axiomas y las propiedades probadas en el Ejercicio 1.

(a) $a(b - c) = ab - ac$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(c) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ ó $x = -y$.

(d) $(-a)(-b) = ab$, para todo par de números reales a, b.

3. ¿Dónde está el error de la siguiente "demostración"?[1]
Supongamos $x = y$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x^2 &= xy, \\
x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\
(x + y)(x - y) &= y(x - y), \\
x + y &= y, \\
2y &= y, \\
2 &= 1.
\end{aligned}$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones completando cuadrados.

(a) $x^2 - 10x + 25 = 0$.

(b) $2x^2 + x - 6 = 30$.

(c) $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. ¿Le es familiar el resultado obtenido?

5. (a) Probar que si $a^3 = 1$, entonces $a = 1$.

(b) Usar el inciso anterior para deducir que si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$.

6. Sean a, b, c números reales. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

(b) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

(c) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

(d) Si $a > 1$, entonces $a < a^2$.

[1] El primero: ¡no justificó qué hizo en cada paso!

(e) $ab > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0)$ ó $(a < 0 \text{ y } b < 0)$.

(f) Si $a^2 < b^2$ y $a > 0$, entonces $b > a$ ó $b < -a$.

7. Para cada una de las siguientes desigualdades, hallar el conjunto de todos los números reales x que las satisfacen y graficar el resultado en la recta real.

(a) $4 - x < 3 - 3x$.

(b) $5 - x^2 < 8$.

(c) $x^2 > 9$.

(d) $x^2 - 4x + 3 > 0$.

(e) $x + 1 > x$.

(f) $x - 1 > x$.

(g) $-\frac{3}{x} > 1$.

(h) $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

(i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$.

8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

(a) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a - c < b - d$.

(b) Si $a < b$ y c no es negativo, entonces $ac < bc$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y < 0$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ xy > 0$.

9. Expresar lo siguiente prescindiendo de las barras de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.

(a) $|(|x| - 1)|$.

(b) $a - |(a - |a|)|$.

10. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $|x| = |-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

11. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $|x - 3| = c \quad (c \in \mathbb{R})$.

(b) $|x - 1||x + 2| = 3$.

(c) $|x - 1| + |x + 2| = 3$.

12. Resolver las siguientes desigualdades, interpretarlas en términos de distancias, y graficar en cada caso el conjunto de soluciones en la recta real.

(a) $|x - 3| < 8$.

(b) $|x - 3| \geq 8$.

(c) $|x - 3| < 0$.

(d) $|2x - 3| > 1$.

13. Probar que se cumplen las siguientes desigualdades para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $|x - y| \leq |x| + |y|$.

(b) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

(c) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

14. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de números reales tiene supremo, ínfimo, máximo o mínimo. Justificar con demostraciones.

(a) $[3, 8)$.

(b) $(-\infty, \pi)$.

(c) $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$.

(e) $\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 0\}$.

(g) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$.

(h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$.

(i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

15. Probar que si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, entonces $A \cup B$ es acotado superiormente.

16. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $x \leq y$ para todo $x \in A$, $y \in B$. Demostrar que:

(a) $\sup A \leq y$ para todo $y \in B$.

(b) $\sup A \leq \inf B$.

17. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son densos (Aquí, $X \setminus Y$ denota la resta de conjuntos).

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 100\}$.

(b) $\mathbb{R} \setminus (0, 2]$.

(c) $\mathbb{R} \setminus (0, 10^{-5})$.

(d) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

18. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

(a) Si $\sup A \leq \inf B$, entonces $A \cap B = \emptyset$.

(b) Un conjunto formado por todos los números reales salvo un número finito de ellos es denso.

Ejercicios Extra

19. Enunciar y probar una Propiedad Cancelativa para el producto.

20. Escribir todas las versiones del Ejercicio 6 (b) que valen cambiando algunos (o todos) los $<$ por $\leq$.

21. Determinar cuáles $a \in \mathbb{R}$ son mayores, iguales o menores a su cuadrado. (Ayuda: usar el Ejercicio 6 (d)).

22. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

(a) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ cumplen que $a \cdot b = a \cdot c = 1$ entonces $b = c$. (Comparar con el Ejercicio 1 (b)).

(b) Si $a^2 = 1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

(c) Si $a^2 = b^2$, entonces $a^3 = b^3$.

(d) $\max\{x, -x\} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

23. Sea $P := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$, el conjunto de los números positivos.

(a) Probar que P satisface las siguientes propiedades:

(P10') Para todos los reales a, una y sólo una de las siguientes se cumple:

- $a = 0$;
- $a \in P$;
- $-a \in P$.

(P11') P es *cerrado bajo* $+$: para todos $a, b \in P$, $a + b \in P$. P es cerrado por

(P12') P cerrado bajo el producto: para todos $a, b \in P$, $a \cdot b \in P$.

(b) Recíprocamente, a partir de los axiomas (P1)–(P9) junto a la afirmación de que existe un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}$ que satisface (P10')–(P12') y **definiendo** "$a < b$" como "$b - a \in P$", entonces se pueden demostrar los axiomas originales (P10)–(P12).