Practico 7

1 Teoria

Definition 1. ***Valor Maximo:*** *Sea f una funcion definida en un intervalo abierto A. Se dice que f alcanza el valor maximo en $a \in A$ si f(a)$\geqslant$f(x) $\forall x \in A$*

Definition 2. ***Punto de Maximo Local:*** *Sea f una funcion definida en un intervalo abierto A. Se dice que $a \in A$ es un punto de maximo local si $\exists \delta > 0$ tal que $f(a) \geqslant f(x)$ $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$*

Theorem 3. *Sea f una funcion definida en un intervalo abierto A. Sea a un punto de maximo o minimo local en A. Entonces, si f es derivable en a : f'(a)=0*

Notar que la hipotesis de la existencia de la derivada es fundamental. La funcion $f(x) = |x|$ alcanza su maximo local, en el cero, pero no es derivalbe en cero.

Notar que si $f'(a) = 0$ NO implica que el punto a sea un maximo o minimo (puede ser un punto silla), como ejemplo considere la funcion $f(x) = x^3$.

Theorem 4. *Teorema de Rolle: Sea f:[a,b]$\rightarrow$R una funcion continua tal que f(a)=f(b). Si f es derivable en el intervalo (a,b) entonces existe $t_0 \in (a,b)$ tal que f'(t_0)=0*

Theorem 5. *Teorema del valor medio: Sea f:[a,b]$\rightarrow$R, una funcion continua. Si f es derivable en (a,b) entonces exite $t_0 \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollary 6. *(Corolario del teorema del valor medio) Sea f:A$\rightarrow$R, una funcion derivable en el intervalo abierto A. Si f'(t)>0 para todo t$\in$A, entonces f es estrictamente creciente. Si f'(t)<0 en cambio la funcion es estrictamente decreciente.*

Concavidad y convexidad:

- Una funcion $f(x)$ se dice convexa si: $f'(x)$ es estrictamente creciente
- Una funcion $f(x)$ es dice concava si: $f'(x)$ es estrictamente creciente

Teorema:

Sea $f: A \rightarrow R$ una funcion definida en un intervalo abierto A tal que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces a es un punto de minimo local si $f''(a) < 0$, entonces a es un punto de maximo local.

1.1 Maximos y minimos globales de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

2 Practico

1. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existen, maximos, minimos locales y absolutos en el conjunto A.

   a) $f(x) = x^3 + x$, $A = [-1, 2]$

      – $f'(x) = 3x^2 + 1$

- Busco puntos criticos: $3x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1/3$

- Estos no existen. Pero la funcion aun puede tener maximo o minimo.

- Sin embargo observe que: $f'(x)>0$ (Corolario del teorema del valor intermedio) Esto significa que la funcion es estrictamente creciente.

- $f(-1)=-1-1=-2$, $f(2)=8+2=10$ son los valores de minimo y maximo globales respectivamente.

b) $f(x)=x^3-x^2-8x+1,\ A=[-2,2]$

- $f'(x)=3x^2-2x-8$

  $x^2-\frac{2}{3}x-8=0 \Rightarrow x=2, x=-\frac{4}{3}$

  $(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)=x^2+\frac{4}{3}x-2x-\frac{8}{3}=x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$

- Para saber si es maximo o minimo: $f\left(-\frac{4}{3}\right)=4.74$

  $f(2)=-16$

- Ahora antes de poder decir algo tenemos que analizar los intervalos:

  $\left[-2,-\frac{4}{3}\right),\left(-\frac{4}{3},2\right]$

- $f'(x)$ es una forma parabolica. Sus raices son las que encontramos. En el intervalo $\left[-2,-\frac{4}{3}\right)$ la parabola es positiva. Por lo tanto la funcion f es creciente alli pues la derivada es positiva. Por otro lado en el intervalo $\left(-\frac{4}{3},2\right]$ la parabola tiene valores negativos, por lo tanto la derivada tiene valor negativo, en consecuencia la funcion es decreciente en este intervalo.

- Como la funcion es creciente en $\left[-2,-\frac{4}{3}\right)$ es de esperar que el maximo este en $-\frac{4}{3}$, mientras que el minimo estaria en -2.

- Por otro lado, en $\left(-\frac{4}{3},2\right]$ f es decreciente, por lo cual el maximo, nuevamente estaria en $-\frac{4}{3}$ y el minimo en 2. Tiene pinta entonces de que $-\frac{4}{3}$ es el maximo global.

c) $f(x)=2+|x+1|$, $A=(-2,1]$

- $f(x)=\begin{cases} 2+x+1 & \text{si } x\geqslant -1 \\ 2-x-1 & \text{si } x<-1 \end{cases}$

- $f'(x)=\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

  No hay puntos criticos, pero la funcion es estrictamente creciente en el intervalo $(-2,-1]$ y es decreciente en el intervalo: $(-1,1]$

d)

e)

f) $f(x)=\mathrm{sen}(x)+\cos(x)$, $A=\left[0,\frac{7\pi}{15}\right]$

- $f'(x)=\cos(x)-\mathrm{sen}(x)$

- $f'(x) = 0$ si $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$
- Cuantos de los anteriores tengo en el intervalo?
- $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ pero $\frac{7\pi}{15} < \frac{3\pi}{4}$ por lo tanto solo tengo un solo punto critico.
- Para $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\cos(x) > \text{sen}(x)$, mientras que en $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ se cumple lo opuestro.
- Finalmente si $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ tendremos que $\cos(x) < 0$ y $-\text{sen}(x) < 0$ por lo cual tendremos que $f' < 0$.

2.

3. $p(x) = x^3 - 3x + m$, no posee dos raices distintas en el intervalo $[0, 1]$
   - $p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$
   - Tenemos dos puntos criticos en: $x = 1, x = -1$
   - En el intervalo $[0, 1]$ tenemos que $p'(x) < 0$ por lo cual la funcion sera decreciente.
   - $p(0) = m$, $p(1) = 1 - 3 + m = -2 + m$
   - Claramente: $p(0) > p(1)$
   - Como una de las raices esta en $x = 1$ tope del intervalo, y siendo la funcion polinomica estrictamente decreciente con $p(0) > p(1)$ no hay otra raiz en este intervalo.
4. Verificar el teorema del valor medio:
   a) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$
      - $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1} = -\frac{1}{2}$
      - $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
      - $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = x$
5. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$
   - No espere que el teorema del valor medio se cumpla en un intervalo donde esta funcion no es continua.
   - En particular si considera el intervalo $[0, 2]$ no se va a cumplir porque la funcion no es continua en 1. En particular, aqui tiene una asintota.
   - Si intenta calcular la derivada: $f' = \frac{-2}{(x - 1)^2}$ igualando en los puntos requeridos: $-\frac{2}{(x - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow -1 = (x - 1)^2$, no tiene solucion real.
6. Determinar, intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y puntos de inflexion de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = x^{2/3}$
      - $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

- $f'(x) > 0$ si $x > 0$ mientras que $f'(x) < 0$ si $x < 0$.

7. En cada uno de los siguientes casos encontrar la recta tangente al punto indicado.

8. Graficar las siguientes funciones:

   a)

   b)

   c)

   d)

   e) $f(x) = x^2(x-2)^2 = x^2(x^2 - 2x + 4) = x^4 - 2x^3 + 4x^2$

      - $x = 0$, $x = 2$ son raices de esta funcion.
      - Hay puntos criticos o puntos donde no exista la derviada?
      - $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f(0) = 0$
        $f'(x) = 2x(2x^2 - 3x + 4)$ Usar baskara y encontrar el otro
      - Esto nos divide el dominio varios intervalos donde tendremo ver en que lugares la derivada es creciente o decreciente. Despues hay que examinar los limites.

9.

   a)

   b)

   c)

   d)

   e)

   f) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{arcsen}(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{0}{0}$, puede aplicar l'Hopital

      - $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1$

10. Sean $f, g: I \to R$ funciones derivables en todo punto del intervalo I, sea $a \in I$.

    a) Si $f'(x) > g'(x)$ y $g(a) = f(a)$ demostrar que entonces $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$ y que $f(x) < g(x)$ para todo $x < a$.

       - Considere $h(x) = f'(x) - g'(x)$
       - $h'(x) > 0$ Por hipotesis , entonces h es estrictamente creciente.
       - Observar que: $h(a) = 0$ y como es estrictamente creciente entonces $h(x) < 0$ para $x < a$ mientras que $h(x) > 0$ para $x > a$

- En consecuencia: $f(x) > g(x)$ si $x > a$, mientras que $f(x) < g(x)$ si $x < a$

b) No se cumple sin la hipotesis $g(a) = f(a)$

- Basicamente lo que estamos viendo aca es una interseccion de rectas tangentes a las funciones.
- $f'(a) > g'(a)$ ahora calculamos las rectas tangentes:
- $t_f = f'(a)(x-a) + f(a)$, $t_g = g'(a)(x-a) + g(a)$
- La unica manera de que las rectas no se corten es que sean paralelas y para ello necesitariamos que $f'(a) = g'(a)$ y esto contradice la hipotesis.
- Por lo tanto deben tocarse en algun punto. Puede dar tambien un contraejemplo.

c) Demostrar que: $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ cuando $x > 1$

- $f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{-1/2} = x^{-1/2}$
- $g(x) = 3 - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = x^{-2}$
- Ambas funciones son positivas en el dominio de los reales positivos almenos.
- En particular $f'(1) = g'(1)$ con lo cual recaemos en el caso del problema a)

11. Aca basicamente estamos hablando del logartimo. Hipotesis: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ y $f(1) = 0$

- Consideramos como en la sugerencia que: $f(xy) = g(x)$
- Tambien es cierto que puede considerar: $f(xy) = g(x) + c$
- $g'(x) = f'(xy)y = \frac{1}{xy}\, y = \frac{1}{x}$
- Literalmente estoy diciendo que $f'(x) = g'(x) = f'(xy)$
- Esto significa que: $g(x) = f(xy) + k = f(x) + c$
- $g(x=1) = f(y) + k = 0 + c \Leftrightarrow f(y) = c - k$

12. a Es raiz de orden n si: $p(x) = (x-a)^n q(x)$

a) Probar que a es raiz de orden 2 si y solo si: $p(a) = p'(a) = 0$ y $p''(a) \neq 0$

- Ida: Si a es raiz de orden 2 entonces: $p(a) = p'(a) = 0$ y $p''(a) \neq 0$
    - Como a es raiz de orden 2: $p(x) = (x-a)^2 q(x)$, $q(a) \neq 0$
    - $p'(x) = 2(x-a)q(x) + (x-a)^2 q'(x)$
    - $p''(x) = 2q(x) + 2(x-a)q'(x) + 2(x-a)q'(x) + (x-a)^2 q''(x)$
    - Evaluamos: $p(a) = p'(a) = 0$ y $p''(a) = 2q(a) \neq 0$

- Vuelta: Si $p(a)=p'(a)=0$ y $p''(a)\neq 0$ entonces a es una raiz de orden 2:

  - $p(x)=(x-a)^n q(x)$, suponemos que a es una raiz de orden n

  - $p'(x)=n(x-a)^{n-1}q(x)+(x-a)^n q'(x)$

  - $p''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}q(x)+n(x-a)^{n-1}q'(x)+n(x-a)^{n-1}q'(x)+(x-a)^n q''(x)$

  - Ahora evaluemos en a

  - $p(a)=0=(x-a)^n q(a)$ Esta ecuacion me dice: o bien $(x-a)^n=0$, para lo cual requiere que: $n>0$ o bien $q(a)=0$ (Puede ocurrir los dos), si $q(a)=0$ entonces es porque $q(x)=(x-a)k(x)$. Esto va en contradiccion de suponer que a es una raiz de orden n. $q(a)\neq 0$

  - $p'(a)=0=n(x-a)^{n-1}q(a)+(x-a)^n q'(a)$, Esta condicion requiere que: $n(x-a)^{n-1}=0$ lo cual implica que $n\geqslant 2$. $(x-a)^n q'(a)=0$ Porque a es una raiz de orden n.

  - $p''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}q(x)+n(x-a)^{n-1}q'(x)+n(x-a)^{n-1}q'(x)+(x-a)^n q''(x)$. Los terminos $(x-a)^{n-1}$ y $(x-a)^n$ se anulan por lo dicho anteriormente cuando $x=a$

  - $p''(a)=n(n-1)(a-a)^{n-2}q(a)$, como este termino no es nulo y ademas $q(a)\neq 0$ luego debe suceder que: $n-2=0\Rightarrow n=2$

b) Enunciar una generalizacion para el resultado de a.

- Lo que se requiere es que $q(a)\neq 0$, que $p^k(a)\neq 0$ y que $\frac{d}{dx}p(a)=,\ldots,\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}p(a)=0$

c) Cuando el polinomio $p(x)=ax^2+bx+c$ tiene una raiz doble?

- Cuando: $p(a)=p'(a)=0$ y $p''(a)\neq 0$

- $p(a)=a^3+ba+c=0\Leftrightarrow c=-a(a^2+b)$

- $p'(a)=2aa+b\Leftrightarrow 2a^2+b=0\Leftrightarrow b=-2a^2$

- $p''(a)=2a\neq 0$

- Juntando todo: $ax^2-2a^2x+a^3$

- Si calcularamos el discriminante veriamos que este da cero: $4a^4-4a^4$

13. Si $a_1<\cdots<a_n$ probar que $f(x)=\sum_i (x-a_i)^2$ tiene valor minimo y hallarlo.

- $\frac{d}{dx}f(x)=\sum_i 2(x-a_i)=0\Leftrightarrow \sum_i 2x-\sum_i 2a_i=2xn-2\sum_i a_i=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{n}\sum_i a_i$

- Este valor es de punto critico y es el minimo, porque lo que tenemos son sumas de parabolas:

  $f(x)=\sum_i x^2-2xa_i+a_i^2=nx^2-2\left(\sum_i a_i\right)x+\left(\sum_i a_i^2\right)$

- La cual es la formula de una cuadratica.

14. Sea f una funcion $n-$veces derivable con $f(x_1)=\cdots=f(x_{n+1})$ demostrar que existe $y_0\in\mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(y_0)=0$.

   - Si aplico el teorema de Rolle con estas hipotesis encuentro que:

     $f'(t_i)=0$ para $x_i<t_i<x_{i+1}$, con $i=1,n$,

     Tenga en cuenta que, antes tenia $[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ valores. Ahora solo tiene: $[t_1,\ldots,t_n]$

   - Si ahora examino la segunda derivada, tambien puedo volver a aplicar el Teorema de Rolle (Porque f es n veces derivable, si no lo fuera no puedo aplicar el Teorema). Entonces podria decir:

     $f''(k_i)=0$ para $t_i<k_i<t_{i+1}$

   - Una propuesta es calcularlo inductivamente:

     Suponga lo anterior para $f^k(x)$, $f^k(x_1)=\cdots=f^k(x_{n-k})$

   - Siendo $k\leqslant n$ puedo derivar nuevamente, ademas de que cumplen las hipotesis del teorema de rolle.

   - Cuando tengamos $k=n$ tendremos solo un valor $f^n(x_0)=0$

15. Sean f , g dos funciones derivables. Probar que si f es creciente y f,g son convexas (maximo) , entones $f(g(x))$ es convexa.

   - Primero defina $h(x)=f(g(x))$

   - Para que $h(x)$ sea convexa, esta, debe ser creciente

   - Tenga en cuenta que si $h'(x)>0$ entonces $h(x)$ es creciente.

   - Tiene sentido entonces demostrar que si $h''(x)>0$ entonces $h'(x)$ es creciente y por lo tanto h seria convexa.

   - $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

   - $h''(x)=f''(g(x))[g'(x)]^2+f'(g(x))g''(x)$

   - Como f,g son convexas, entonces tiene sentido que para que sus derivadas sean crecientes: $f''(x), g''(x)>0$

   - Por otro lado, como f es creciente, entonces $f'>0$

   - Juntando todo, tendremos que $h''(x)$ es convexa.