

Análisis Matemático I

Pedro Sánchez Terraf

Ana Andrés Martín Agustín Luciana José Luis

FaMAF, 18 de marzo de 2024



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba



Cambio fecha de parcial

- Primer parcial: **22 de abril.**

Contenidos estimados para hoy

- 1 Repaso
- 2 Caracterizaciones de supremo e ínfimo
- 3 Arquimedianidad
- 4 Relación entre supremo y máximo
- 5 Ínfimos y ejemplos
- 6 Densidad
- 7 Conclusión

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff \exists z \in \mathbb{R}, z$ es cota superior de A .
- A está **acotado inferiormente** $\iff \exists y \in \mathbb{R}, y$ es cota inferior de A .

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff \exists z \in \mathbb{R}, z$ es cota superior de A .
- A está **acotado inferiormente** $\iff \exists y \in \mathbb{R}, y$ es cota inferior de A .

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff \exists z \in \mathbb{R}, z$ es cota superior de A .
- A está **acotado inferiormente** $\iff \exists y \in \mathbb{R}, y$ es cota inferior de A .

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \emptyset$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff \exists z \in \mathbb{R}, z$ es cota superior de A .
- A está **acotado inferiormente** $\iff \exists y \in \mathbb{R}, y$ es cota inferior de A .

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \emptyset$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Definición

Si $A \neq \emptyset$ es acotado superiormente, su **supremo**, $\sup A$, es el mínimo de sus cotas superiores.

Cotas, acotado, supremo e ínfimo

- z es **cota superior** de A si $\forall a \in A, a \leq z$.
- y es **cota inferior** de A si $\forall a \in A, y \leq a$.
- A está **acotado superiormente** $\iff \exists z \in \mathbb{R}, z$ es cota superior de A .
- A está **acotado inferiormente** $\iff \exists y \in \mathbb{R}, y$ es cota inferior de A .

Ejemplo

El conjunto de cotas superiores de $[0, 1)$ es $[1, \infty)$.

Axioma del Supremo

P13 Todo conjunto $\neq \emptyset$ acotado superiormente tiene cota superior mínima.

Definición

Si $A \neq \emptyset$ es acotado superiormente, su **supremo**, $\sup A$, es el mínimo de sus cotas superiores. Análogamente con “inferiormente” e **ínfimo**, $\inf A$.

■ $\sup A$ es la mínima cota superior de A .

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A .
- s es el mínimo de $C \iff$

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A .
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C, s \leq c$.

Caracterizaciones

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A .
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C, s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A , entonces $s \leq c$.



Universidad
Nacional
de Córdoba



- $\sup A$ es la mínima cota superior de A .
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C, s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A , entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

- 1 $s = \sup A$;
- 2 s es cota superior de A y $\forall t < s, \exists a \in A, t < a$; (Demostramos)

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A .
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C, s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A , entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

- 1 $s = \sup A$;
- 2 s es cota superior de A y $\forall t < s, \exists a \in A, t < a$; (Demostramos)
- 3 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$; (Ejercicio)

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A .
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C, s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A , entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

- 1 $s = \sup A$;
- 2 s es cota superior de A y $\forall t < s, \exists a \in A, t < a$; (Demostramos)
- 3 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$; (Ejercicio)
- 4 s es cota superior de A y $\forall t < s, \exists a \in A, t < a$; (Apunte)

- $\sup A$ es la mínima cota superior de A .
- s es el mínimo de $C \iff s \in C$ y $\forall c \in C, s \leq c$.

Luego, $s = \sup A$ equivale a que s sea cota de A y si c es cualquier cota superior de A , entonces $s \leq c$.

Caracterización del supremo

Son equivalentes:

- 1 $s = \sup A$;
- 2 s es cota superior de A y $\forall t < s, \exists a \in A, t < a$; (Demostramos)
- 3 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$; (Ejercicio)
- 4 s es cota superior de A y $\forall t < s, \exists a \in A, t < a$; (Apunte)
- 5 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$. (Ídem)

Son equivalentes:

1 $s = \sup A$;

2 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$.

Arquimedianidad

Son equivalentes:

1 $s = \sup A$;

2 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$.

Teorema (\mathbb{R} es arquimediano)

\mathbb{N} *no está acotado superiormente.*

Arquimedeanidad

Son equivalentes:

1 $s = \sup A$;

2 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$.

Teorema (\mathbb{R} es arquimediano)

\mathbb{N} no está acotado superiormente.

Corolario

1 Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

2 \mathbb{Z} no está acotado superior ni inferiormente.

Arquimedianidad

Son equivalentes:

- 1 $s = \sup A$;
- 2 s es cota superior de A y $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a$.

Teorema (\mathbb{R} es arquimediano)

\mathbb{N} *no está acotado superiormente.*

Corolario

- 1 *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*
- 2 \mathbb{Z} *no está acotado superior ni inferiormente.*

Ejercicio

Si $N \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}$ y Z está acotado superiormente, entonces N está acotado superiormente.

■ s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A, s \leq a$;

- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A, s \leq a$; equivalentemente,
- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y s es cota superior de A .

- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A, s \leq a$; equivalentemente,
- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y s es cota superior de A .

Lema

- Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \text{máx} A$.
- Si A tiene máximo, entonces $\text{máx} A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$.

- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y $\forall a \in A, s \leq a$; equivalentemente,
- s es el máximo de $A \iff s \in A$ y s es cota superior de A .

Lema

- Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \text{máx} A$.
- Si A tiene máximo, entonces $\text{máx} A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$. Luego,
- si $\sup A \notin A$, entonces A no tiene máximo.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x, \exists a \in A, t < a$.
- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x, \exists a \in A, t \leq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$.
- Si A tiene máximo, entonces $\max A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$.
- ...etcétera.

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t > a$.
- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\inf A \in A$, entonces $\inf A = \min A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\min A = \inf A$ y luego $\inf A \in A$.
- ...etcétera.

Ínfimos y ejemplos

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t > a$.
- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\inf A \in A$, entonces $\inf A = \min A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\min A = \inf A$ y luego $\inf A \in A$.
- ...etcétera.

Análisis de $A := (0, 1)$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\inf A$, y si existe $\min A$ y/o $\max A$.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x, \exists a \in A, t < a$.
- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x, \exists a \in A, t \leq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$.
- Si A tiene máximo, entonces $\max A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$.
- ...etcétera.

Análisis de $A := (0, 1)$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\inf A$, y si existe $\min A$ y/o $\max A$.

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t > a$.
- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\inf A \in A$, entonces $\inf A = \min A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\min A = \inf A$ y luego $\inf A \in A$.
- ...etcétera.

Análisis de $A := (0, 1)$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\inf A$, y si existe $\min A$ y/o $\max A$.

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t > a$.
- $x = \inf A \iff x$ es cota inferior de A y $\forall t > x, \exists a \in A, t \geq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente y $\inf A \in A$, entonces $\inf A = \min A$.
- Si A tiene mínimo, entonces $\min A = \inf A$ y luego $\inf A \in A$.
- ...etcétera.

Análisis de $A := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\inf A$, y si existe $\min A$ y/o $\max A$.

Todo lo dicho vale **dualmente** para ínfimos.

- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x, \exists a \in A, t < a$.
- $x = \sup A \iff x$ es cota superior de A y $\forall t < x, \exists a \in A, t \leq a$.
- Si $A \neq \emptyset$ está acotado superiormente y $\sup A \in A$, entonces $\sup A = \max A$.
- Si A tiene máximo, entonces $\max A = \sup A$ y luego $\sup A \in A$.
- ...etcétera.

Análisis de $A := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

Determinar si es acotado inferior y/o superiormente, en cada caso determinar $\sup A$ y/o $\inf A$, y si existe $\min A$ y/o $\max A$.

Definición

$D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.

Definición

$D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.

Aula Virtual ► Encuestas ► Densidad (T. Mañana)

- ¿Es \mathbb{R} denso? ¿Lo es \mathbb{Z} ?
- Si D es denso, ¿es $D = \mathbb{R}$?

Definición

$D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.

Aula Virtual ► Encuestas ► Densidad (T. Mañana)

- ¿Es \mathbb{R} denso? ¿Lo es \mathbb{Z} ?
- Si D es denso, ¿es $D = \mathbb{R}$?

Teorema

\mathbb{Q} es denso.

Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.
- \mathbb{Q} es denso.

Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.
- \mathbb{Q} es denso.

Teorema

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. *En particular, existe un irracional h entre 0 y 1.*



Universidad
Nacional
de Córdoba



Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.
- \mathbb{Q} es denso.

Teorema

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. En particular, existe un irracional h entre 0 y 1.

Lema

Para todos los $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$, existe $j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $r < j < s$.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Densidad de los irracionales

- $D \subseteq \mathbb{R}$ es **denso** si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists d \in D, x < d < y$.
- \mathbb{Q} es denso.

Teorema

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. En particular, existe un irracional h entre 0 y 1.

Lema

Para todos los $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r < s$, existe $j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $r < j < s$.

Teorema

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P1.

Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P1.

Pregunta

Si partimos una recta en una “parte izquierda” y una “parte derecha”, ¿cómo queda donde se partió? $\dots \text{---} ? \text{---} \dots$



Universidad
Nacional
de Córdoba



Ejercicios para hoy

Con lo visto esta clase, pueden terminar el P1.

Pregunta

Si partimos una recta en una “parte izquierda” y una “parte derecha”, ¿cómo queda donde se partió? $\dots \text{-----} ? \text{-----} \dots$

Respuesta

Toda partición $\mathbb{R} = I \cup D$ tal que $\forall r \in I, s \in D, r < s$ está determinada por un punto $a \in \mathbb{R}$, de manera que se da exactamente una de las siguientes:

- $I = (-\infty, a)$ y $D = [a, \infty)$, o bien.
- $I = (-\infty, a]$ y $D = (a, \infty)$.



Universidad
Nacional
de Córdoba

