Análisis Matemático I

Algunos ejercicios del Práctico 5

Eduardo G. Andreozzi*
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

27 de mayo de 2023

En lo que sigue se dan ayudas para los ejercicios de la segunda página del Práctico 5, ya sea por su dificultad o por su importancia. Sólo se presentan en detalle los más complicados, según mi opinión y mi experiencia en las clases prácticas.

Ejercicio 9

Sea f una función continua y supongamos que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de f?

Pensando gráficamente, es imposible trazar el gráfico de f continuamente y al mismo tiempo esquivar a todos los números irracionales en el camino, a menos que el gráfico de f sea una línea horizontal sobre algún número racional, es decir, a menos que f sea una constante racional.

Probemos entonces que f debe ser constante (esta constante debe ser obviamente racional). Razonando por absurdo, supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, tal que $f(a) \neq f(b)$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $f(a) < f(b)$; el caso $f(a) > f(b)$ se trata análogamente.

Por la *Densidad de los Números Irracionales*, existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $f(a) < \alpha < f(b)$.

Como f es continua en $[a, b]$, $f(a) < \alpha$ y $f(b) > \alpha$, por el *Teorema de los Valores Intermedios* existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \alpha$. Pero esto contradice la hipótesis de que f toma sólo valores racionales. Concluimos entonces que f es constante.

Ejercicio 10

(a) Probar que si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

Ayuda: Considerar la función continua $h := g - f$ en $[a, b]$. Observando sus valores en los extremos

*Comisión 5 (Tarde)

del intervalo $[a, b]$, ¿recuerdan algún teorema importante pertinente? $\square$

(b) Graficar las funciones $\operatorname{sen} x$ y $x + 1$ en el mismo sistema de ejes coordenados. Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen} x = x + 1$ tiene al menos una solución.

Ayuda: Usen el gráfico de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x + 1$ para localizar una solución a la ecuación $\operatorname{sen} x = x + 1$ dentro de algún intervalo cerrado conveniente. Después usen el inciso **(a)** anterior para justificar apropiadamente la existencia de esta solución. $\square$

(c) Demostrar que existe un $x \in [0, \pi/2]$ tal que $x^3 \operatorname{sen}^7(x) = 2$.

Ayuda: Consideren las funciones $f(x) = 2$ y $g(x) = x^3 \operatorname{sen}^7(x)$ en $[0, \pi/2]$ y usen el inciso **(a)** anterior. $\square$

(d) Demostrar que en el plano, un círculo de radio 1 y un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ pueden intersecarse en una región cuya área sea exactamente $1,337$.

Primero vamos a considerar una construcción geométrica específica para luego definir una función continua en base a ella.

1. Consideramos el plano cartesiano xy y denotamos como O al origen de coordenadas, es decir $O = (0, 0)$.

2. Graficamos un círculo de centro O y radio 1.

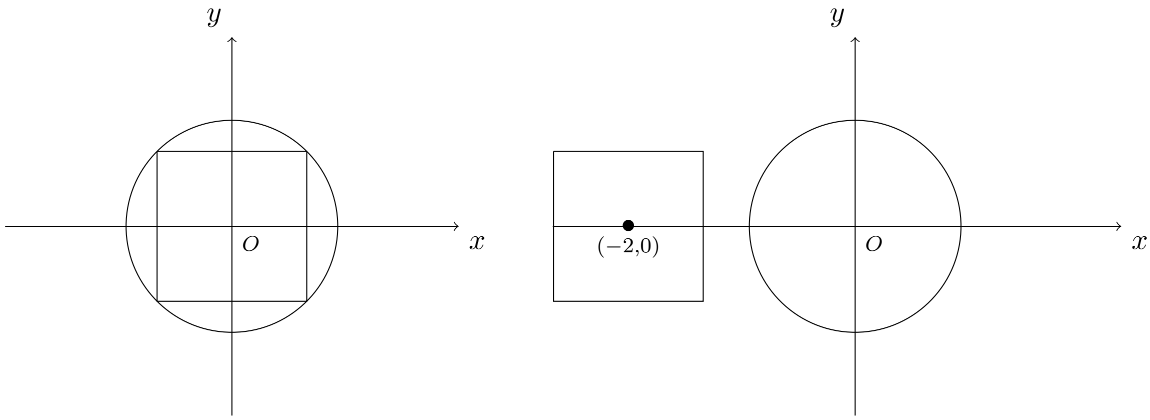
3. Graficamos un cuadrado con centro O y con lados paralelos a los ejes cartesianos y de longitud $\sqrt{2}$.

Nota: Observar que el cuadrado en el paso **3** queda *inscripto* en el círculo del paso **2**. Queda como ejercicio verificar esto.

4. Desplazamos el cuadrado hacia la izquierda sobre el eje x, sin rotar, hasta que su centro esté en el punto $(-2, 0)$. Vamos a usar el eje x como riel para el cuadrado, intersecándolo con el círculo a conveniencia. En este paso todavía no hay intersección, a diferencia del paso **3** en donde la intersección era máxima.

En la Figura 1 se muestra una representación gráfica simple para entender mejor los pasos anteriores.

Ahora vamos a definir la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue: para cada $x \in \mathbb{R}$ desplazamos el cuadrado, de manera similar al paso **4**, hasta que su centro coincida con el punto $(x, 0)$. Luego calculamos el área de la intersección entre el círculo y el cuadrado, y definimos $F(x)$ como el valor de esta área. Ver la Figura 2 para un ejemplo.



(a) Gráfico hasta el paso **3**.

(b) Gráfico hasta el paso **4**.

Figura 1: Como el cuadrado está inscripto en el círculo, a la izquierda se ve el caso de mayor intersección y a la derecha uno de los casos de mínima intersección.

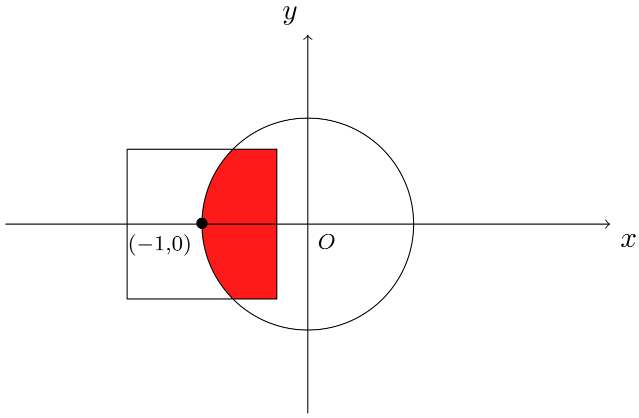


Figura 2: En rojo se muestra la intersección entre el círculo y el cuadrado cuando el centro de este último es el punto $(-1, 0)$. El área de está región roja es, por definición, $F(-1)$.

Ahora notamos algunas cosas sobre la función F.

- F es siempre mayor o igual a 0;
- F está acotada superiormente por el área del cuadrado ($F \leq 2$), ya que esta es la intersección de mayor área posible;
- $\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = 0$. Más aún, para $x_0 := 1 + \sqrt{2}/2$ se cumple que $F(x) = 0$ si $|x| \geq x_0$;
- F es continua. Esto se puede «intuir» de la definición de F en términos de áreas: a medida que desplazamos el cuadrado contra el círculo, el área de la intersección cambia continuamente, y esto se traslada directamente al comportamiento de F en función de x. Es posible

escribir una fórmula para F y probar explícitamente su continuidad, pero esto excede los contenidos de esta materia. Nos conformamos con nuestra intuición.

Después de toda esta construcción, lo que queda es sencillo: como F es continua en $\mathbb{R}$, $F(-x_0) = 0 < 1,337$ y $F(0) = 2 > 1,337$, el *Teorema de los Valores Intermedios* asegura que existe $y \in (-x_0, 0)$ tal que $F(y) = 1,337$. Esto significa que el área de la intersección entre el círculo y el cuadrado, cuando este último tiene su centro en $(y, 0)$, es exactamente $1,337$.

Ejercicio 12

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$. Mostrar que si f es continua, entonces tiene un punto fijo, esto es, existe un a tal que $f(a) = a$. Interpretar gráficamente.

Como $0 \leq f \leq 1$, si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$ no hay más nada que probar.

Si ahora $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$, tenemos que $g(x) := x - f(x)$ satisface $g(0) < 0$ y $g(1) > 0$. Como g es continua en $[0,1]$, por el *Primer Teorema Fuerte* existe $a \in (0,1)$ tal que $g(a) = 0$, es decir $f(a) = a$.

La interpretación gráfica es sencilla: dado un cuadrado de lado 1, es imposible trazar continuamente una línea partiendo desde un lado y llegando al lado opuesto sin cruzar una de sus diagonales. Más aún, cambiando $[0,1]$ por $[0,L]$ para $L > 0$, el resultado del ejercicio sigue valiendo; esta imposibilidad geométrica es independiente de la longitud de los lados del cuadrado.

Ejercicio 13

Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 am y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las 7:00 pm. A la mañana siguiente baja de la cima a las 7:00 am, siguiendo el mismo camino, y arriba al monasterio a las 7:00 pm. Con el teorema del valor intermedio, demuestre que hay un punto del camino por el cual el monje para exactamente a la misma hora de los dos días.

Imaginemos que cubrimos el camino exacto del monje con una cinta métrica, con el 0 en el monasterio. Si denotamos como $d > 0$ la distancia total del monasterio a la cima de la montaña, la cinta métrica marcará d justo ahí.

Con respecto al tiempo, el horario exacto de salida del monasterio y llegada a la cima de la montaña no es relevante, simplemente debe repetirse el día siguiente para el regreso. Vamos a medir el tiempo con un reloj que empieza en 0 cuando el monje empieza a caminar cada día, y marca $T > 0$ cuando este termina su caminata.

Definimos ahora dos funciones $f, g : [0, T] \to [0, d]$ como sigue: para cada $t \in [0, T]$, $f(t)$ es la posición del monje en su camino a tiempo t en su primer día (desde el monasterio hasta la cima de la montaña), medida respecto de la cinta métrica imaginaria que cubre su camino, y $g(t)$ se define análogamente pero en su segundo día (desde la cima de la montaña hasta el monasterio). Se cumple entonces que $f(0) = g(T) = 0$ y $f(T) = g(0) = d$.

La suposición clave de esta construcción es que tanto f como g son continuas. Esto no se demuestra, pero es evidente de la física del problema y nuestro modelo: cualquier discontinuidad en f o en g implica una teletransportación del monje en algún momento de su camino, un escenario físicamente imposible (¡Al menos nadie lo vió todavía!).

Finalmente, considerando la función continua $h := f - g$ en $[0, T]$, vemos que $h(0) = -d < 0$ y $h(T) = d > 0$, luego por el *Primer Teorema Fuerte* (o el *Teorema de los Valores Intermedios* si se quiere) existe $t_0 \in (0, T)$ tal que $h(t_0) = 0$. Como entonces $f(t_0) = g(t_0)$, cada día el monje pasa exactamente por un mismo punto de su camino a la misma hora.

Ejercicio 14

Sea f definida y continua en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que f es siempre positiva y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nota: Antes de empezar, me parece importante agregar que el resultado de este ejercicio es válido con hipótesis menos restrictivas sobre f: es suficiente con suponer que existe al menos un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) > 0$, es decir, basta con tener la positividad de f en un sólo punto. Como la prueba del ejercicio bajo esta hipótesis más laxa es básicamente la misma que asumiendo la positividad de f en todo $\mathbb{R}$, opto por probar el resultado más general. $\square$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) > 0$. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, tomando $\varepsilon = f(\alpha)$ en la definición de este límite, existe $N_1 > 0$ tal que si $x > N_1$ entonces $f(x) \leq |f(x)| < f(\alpha)$.

Por otro lado, como también $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, tomando nuevamente $\varepsilon = f(\alpha)$ en la definición de este límite, existe $N_2 > 0$ tal que si $x < -N_2$ entonces $f(x) \leq |f(x)| < f(\alpha)$.

Juntando lo anterior concluimos que si $x > N_1$ o $x < -N_2$ entonces $f(x) < f(\alpha)$, es decir $f(\alpha)$ acota superiormente a la función f en la región $(-\infty, -N_2) \cup (N_1, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-N_2, N_1]$. Por el momento, α es un candidato al x_0 pedido por el ejercicio.

Nos queda estudiar a f en el intervalo cerrado $[-N_2, N_1]$. Pero esto es rápido: como f es continua en este intervalo, el *Tercer Teorema Fuerte* asegura que existe $y \in [-N_2, N_1]$ tal que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x \in [-N_2, N_1]$. Este número y también es un candidato al x_0 pedido por el ejercicio.

¿Cómo debemos tomar x_0 entonces? Si resulta que $f(\alpha) \geq f(y)$, para $x_0 := \alpha$ tenemos que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si en vez de esto ocurre que $f(\alpha) < f(y)$, para $x_0 := y$ tenemos lo mismo que antes.

Ejercicio 15

(a) Definir una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.

Ayuda: Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$\square$

(b) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

Ayuda: Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - \dfrac{1}{n} & \text{si } \dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$\square$

(c) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

Ayuda: Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lfloor 1/x \rfloor & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 16

(a) ¿Cuántas funciones f continuas hay tales que $f(x)^2 = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$?

Tomando raíces cuadradas en $f(x)^2 = x^2$ tenemos que $|f(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De acá sabemos que el conjunto de funciones continuas pedidas contiene al menos el conjunto de funciones $\{f(x) = x, f(x) = -x, f(x) = |x|, f(x) = -|x|\}$. Probemos que estas son realmente todas.

Sea f una función continua tal que $f(x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta ecuación para f deducimos que f sólo se anula en $x = 0$.

Ahora afirmamos que f sólo toma valores del mismo signo en la semirrecta real positiva, y lo mismo pasa en la semirrecta real negativa (los signos de los valores de f en semirrectas distintas no son necesariamente los mismos). Para probar lo primero, razonando por absurdo, supongamos que existen $x_1, x_2 > 0$ tales que $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$. Como f es continua, por el *Primer Teorema Fuerte* existe $x_0 > 0$ en (x_1, x_2) o (x_2, x_1) tal que $f(x_0) = 0$. Esto contradice el hecho que f sólo se anula en $x = 0$. Sobre la semirrecta real negativa se puede razonar de la misma forma.

Con lo anterior, y volviendo a la ecuación $|f(x)| = |x|$ que satisface f para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que para todo $x > 0$ se cumple que $|f(x)| = x$. Si f toma valores positivos en la semirrecta real positiva, la ecuación anterior se reduce a $f(x) = x$ para $x > 0$, y si toma valores negativos entonces $f(x) = -x$.

En el primer caso, es decir cuando $f(x) = x$ para $x > 0$, tenemos dos subcasos: si f toma valores positivos en la semirrecta real negativa entonces la ecuación $|f(x)| = |x|$ se reduce a $f(x) = -x$ para $x < 0$, y si toma valores negativos entonces $f(x) = x$. En el primer subcaso, como $f(x) = x$ para $x > 0$ y $f(x) = -x$ para $x < 0$, deducimos que $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En el segundo subcaso, como $f(x) = x$ para $x > 0$ y $f(x) = x$ para $x < 0$, deducimos que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De forma similar se puede tratar el segundo caso, es decir cuando $f(x) = -x$ para $x > 0$, y se llega a las funciones $f(x) = -x$ y $f(x) = -|x|$.

El razonamiento anterior agota todas las posibilidades para la función f, luego las cuatro funciones mencionadas al principio son todas las posibles. $\square$

(b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si no exigimos continuidad?

Sin pedir continuidad, el conjunto de funciones que satisfacen $f(x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es infinito, un infinito *enorme*: para cada subconjunto de números reales A podemos definir

$$f_A(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ -x & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Claramente $f_A(x)^2 = x^2$, y eligiendo los subconjuntos A apropiadamente, podemos construir todo tipo de funciones discontinuas. $\square$

(c) Si f y g son continuas con $g(x) \neq 0$ para todo x y si $f^2 = g^2$, probar que $f = g$ o $f = -g$.

Definiendo la función $h(x) := xf(x)/g(x)$ vemos dos cosas: h es continua ya que g nunca se anula, y $h^2(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando entonces el inciso **(a)** anterior deducimos que h sólo puede ser alguna de las siguientes cuatro funciones: $h(x) = x$, $h(x) = -x$, $h(x) = |x|$ o $h(x) = -|x|$.

Si $h(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $xf(x) = xg(x)$, luego $f(x) = g(x)$ para $x \neq 0$, y también $f(0) = g(0)$ por continuidad. Deducimos de este caso que $f = g$.

Si $h(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $xf(x) = -xg(x)$, luego $f(x) = -g(x)$ para $x \neq 0$, y también $f(0) = -g(0)$ por continuidad. Deducimos de este caso que $f = -g$.

Si $h(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $f(x)/g(x) = |x|/x$ para $x \neq 0$. Pero la función $|x|/x$ no tiene límite en $x = 0$, lo que consecuentemente contradice la continuidad de f/g. Esto significa que este caso no era posible.

Si $h(x) = -|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos razonar igual que antes para llegar a una contradicción, lo que significa que este caso tampoco era posible.

Juntando todo, hemos visto que, bajo las hipótesis del enunciado, se cumple que $f = g$ o $f = -g$. $\square$

(d) ¿Qué sucede si no suponemos g nunca nula en el inciso anterior?

Un ejemplo de este caso está dado por el inciso **(a)** anterior, tomando $g(x) = x$. Vimos que entonces había cuatro posibilidades para la función f, más que sólo las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = -x$ que deberíamos tener si el inciso **(c)** anterior fuera cierto aún cuando g se anula en algún punto. Concluimos entonces que el resultado anterior deja de valer.