1 Teoria

- Que es una sucesion? : Una sucesion real es una funcion tal que mapea de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$
- Limite - Convergencia: $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \text{si } n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
- Proposicion: considere $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l$, $\lim_{n\rightarrow\infty}b_n = m$, $c \in \mathbb{R}$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}c a_n = c l$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n + b_n = l + m$ (Demostrado con desigualdad triangular)
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n b_n = l m$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$, $m \neq 0$
- Proposicion: El limite de una sucesion es unico.
- Proposicion: Si $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l$, es decir el limite existe, entonces la sucecion $\{a_n\}$ esta acotada.
- Lema del Sandwich: Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, con $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l$, $\lim_{n\rightarrow\infty}c_n = l \Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty}b_n = l$
- Limites utiles:
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{10^n}{n!} = 0$
- Sucesion que tiende a Infinito: $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \text{si } n > N \Rightarrow a_n > M$
- Proposicion: Si $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = \infty$, $\lim_{n\rightarrow\infty}b_n = \infty$ y $\lim_{n\rightarrow\infty}c_n = l \neq 0$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n + b_n = \infty$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n + c_n = \infty$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n c_n = \infty$ $(l > 0)$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n b_n = \infty$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{a_n} = 0$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n c_n = -\infty$ $(l < 0)$
- Teorema: Toda sucesion creciente (No necesariamente Estricatamente creciente) y acotada superiormente tiene un limite. Esto implica:
  - $a_n \leqslant a_{n+1}$ $\forall n$
  - $a_n \leqslant M$ $\forall n$
  - Entonces: $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = \sup\{a_n\}$
- Subsucesiones: Definicion: Una subsucesion b de una sucesion a , es una sucesion que cumple: $b(j) = a(n(j))$, es decir que b toma algunos elementos de a (No puede tomar otros elementos distintos que no esten en a). Tipicamente se escribe: a_{n_j}
- Proposicion: Si $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l \Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty}a_{n_j} = l$, para cualquier subsucesion a_{n_j} de a.
- Afirmaciones utiles de Subsucesiones:
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}s_n = \lim_{n\rightarrow\infty}s_{n+n_0} = l$

- $\lim_{n\to\infty} s_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n} = l y \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = l$

- Demostrar que una sucesion no converge: Si una sucesion a tiene 2 subsuceciones que convergen a limites distintos, entonces a_n no converge.
- Lema: Si $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una funcion estrictamente creciente, entonces $f(n) \geqslant n$

2 Practico

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7. Esta sucesion esta definida inductivamente como:
8. Demostrar con subsucesiones que elsiguiente limite no existe: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+\pi} + \cos(n\pi)\right)$
   - Primero examine: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\pi} = 2$ (Facilmente demostrable)
   - Considere la subsucesion de terminos pares: $a_{2n} = \frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi)$
   - Calculemos el limite $\mathrm{im}_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi) = 2 + 1 = 3$
   - Si ahora consideramos la subsucesion de terminos impares: $a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi)$
   - Calculamos el limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi) = 2 - 1 = 1$
   - Como ambas subsucesiones convergen a limites distintos , entonces la sucesion original no converge.
9. Considere $\{a_n\} / a_n \geqslant -10 \forall n$ considere $b_1 = a_5$, $b_2 = a_{25}$ y $b_3 = a_{125}$:
   a) Extender b_1, b_2, b_3 a una subsucesion: $b_j = a_{n_j}$ de $\{a_n\}$
      - Podemos considerar entonces: $b_j = a_{n(j)}$ con $n(j) = 5^j$, es decir: $b_j = a_{5^j}$ de esta forma por ejemplo: $b_1 = a_5, b_2 = a_{25}, b_3 = a_{125}$
   b) Si se cumpliera que: $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$, cuanto vale $\lim_{j\to\infty} \sqrt{10 + b_j}$?
      - Por la proposicion en verde, la subsucesion debe tender al mismo valor que la sucesion original: En consecuencia, $\lim_{j\to\infty} b_j = 6$
      - Ahora tratemos de probar por definicion que esto existe y que es 4:

        $\left|\sqrt{10 + b_j} - 4\right| < \varepsilon$ si $j > N$

        $\left|\frac{10 + b_j - 16}{\sqrt{10 + b_j} + 4}\right| = \left|\frac{b_j - 6}{\sqrt{10 + b_j} + 4}\right|$

        Aca usamos la hipotesis: $a_n \geqslant -10 \Rightarrow b_j \geqslant -10 \Leftrightarrow b_j + 10 \geqslant 0$

        Entonces: $\sqrt{b_j + 10} + 4 \geqslant 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b_j + 10} + 4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{b_j - 6}{\sqrt{b_j + 10} + 4}\right| < \frac{1}{4}|b_j - 6| < |b_j - 6| < \varepsilon$

- Quedando demostrado el limite. Basta proporcionar el valor de j tal que cuando $j > N$ se cumple $|b_j - 6| < \varepsilon$

-

10. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{Z}$, probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / a_n = l \forall n > n_0$

    - Esto implica mostrar que la funcion es identicamente constante dadas las hipotesis a partir de cierto punto.
    - **Primera parte:**
    - Por la definicion: si $n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
    - En particular si $m > n > N \Rightarrow |a_m - l| < \varepsilon$
    - Como $a_n, a_m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_m = a_n + Z\ ,\ Z \in \mathbb{Z}$
    - Es decir: $|a_m - l| = |a_n + Z - l| \leqslant |a_n - l| + |Z| < \varepsilon + |Z|$
    - Sin embargo como $|a_m - l| < \varepsilon$ (Para el mismo N), la unica opcion viable es que: $|Z| = 0$, es decir: $Z = 0$
    - Hemos demostrado que $a_n = a_m\ \forall m > n$
    - **Segunda Parte:**
    - Si $n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$, donde como vimos, siempre tenemos el mismo valor, que por hipotesis es un entero, asi que para visibilizar esto escribo: $|z - l| < \varepsilon$ si $n > N$
    - Por tricotomia: $z > l, z < l, z = l$
    - Si considera los casos: $z > l$ or $z < l \Rightarrow |z - l| > 0$ seria un valor fijo, y por lo tanto no puede cumplirse que $\forall \varepsilon > 0\ |z - l| < \varepsilon$
    - Como unica posibilidad se debe cumplir que: $z = l$ (que es lo que se queria demostrar)

11. Probar que para todo $l \in \mathbb{R} / l \in (0, 1)$ existe una sucesion: $\{q_n\}$ de numeros racionales tal que $q_n \in (0, 1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = l$.

    - La sucesion tiene que ser de numeros racionales: $q = \frac{m}{n}$
    - Lo que se plantea es que la sucesion sea: $q_n = \frac{[nl]}{n}$, donde $[nl]$ es la parte entera. (Nos da el numero entero menor mas cercano a nl)
    - Lo anterior significa que: $nl - 1 < [nl] < nl \Leftrightarrow \frac{nl - 1}{n} < \frac{[nl]}{n} < l$
    - Es decir: $l - \frac{1}{n} < \frac{[nl]}{n} < l$
    - En consecuencia como: $\lim_{n\to\infty} l - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} l = l$ puede utilizar el lema del Sandwich de las sucesiones, en consecuencia: $\lim_{n\to\infty} \frac{[nl]}{n} = l$
    - Observe que como $l \in (0, 1)$ luego: $0 < l < 1 \Rightarrow 0 < \frac{[nl]}{n} < 1$
    - Esto demuestra lo propuesto.

12. Decidir en cada caso si la afirmacion es verdadera o falsa:

    a) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ or $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

    - Falso

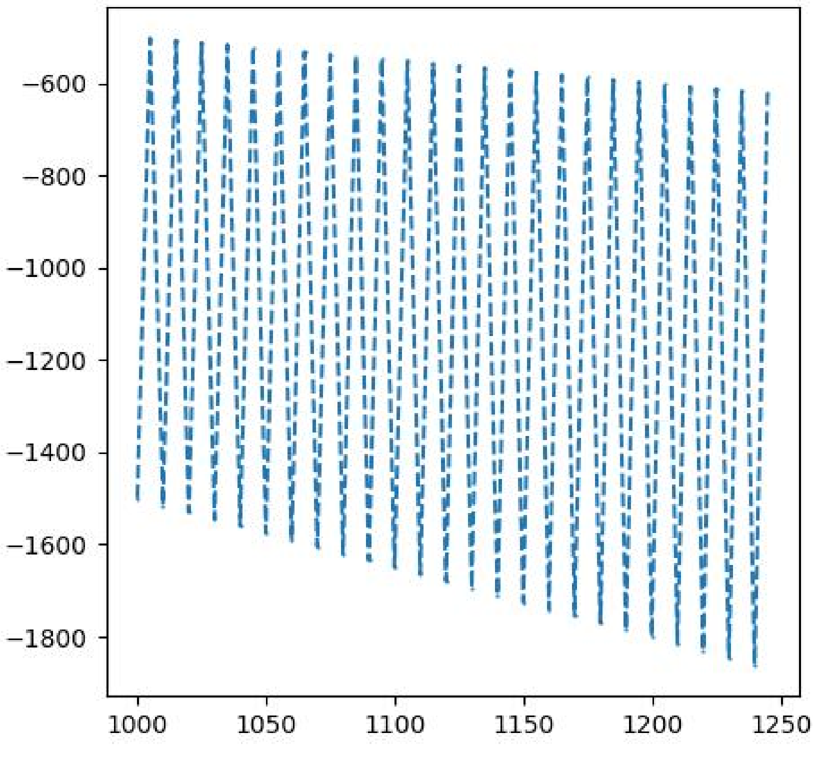
- Considere: $a_n=(-1)^n n$, cumplee que: $|a_n|=n$, luego: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$
- Sin embargo claramente: $\lim_{n\to\infty}a_n$ no existe, pues si tomo subsucesiones de terminos pares y otra de impares ambas convergen a limites distintos.

b) Si $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ entonces a_n es decreciente desde un n_0 en adelante, es decir , $\exists n_0/\,\mathrm{si}\, n>n_0 \Rightarrow a_{n+1}<a_n$

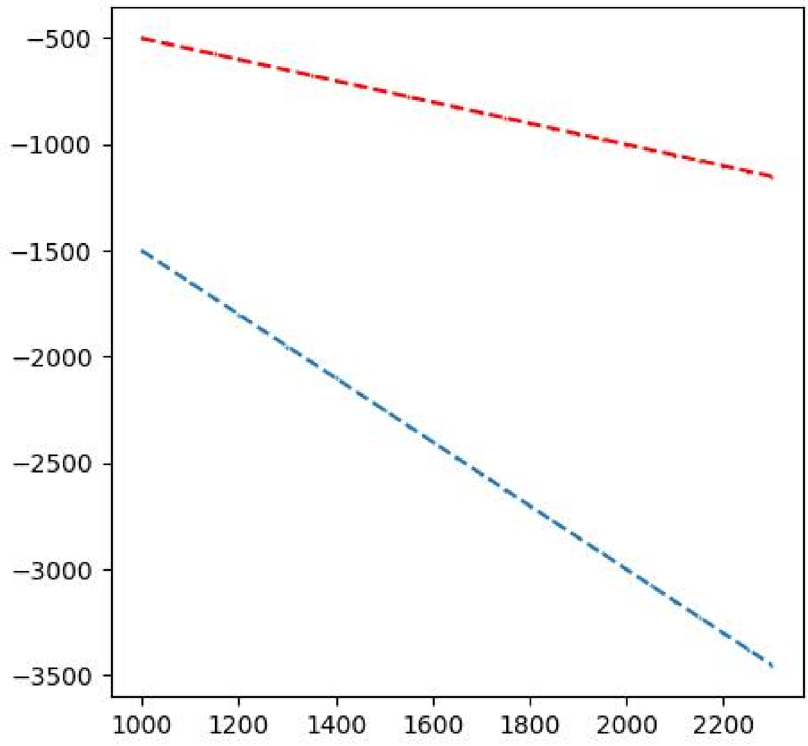
- Si esto es verdad entonces, la existencia de dicho limite implica que $\{a_n\}$ es eventualmente decreciente
- Considere la sucesion: $a_n=-n\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right)$
- Esta sucesion cumple que: $\frac{-3n}{2}\leqslant -n\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right)\leqslant -\frac{n}{2}$, que si n es par luego sen $\left(n\frac{\pi}{2}\right)=0$ mientras que si n es impar entonces el termino entre parentesis toma valores $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$.
- Esto lo que produce es una sucesion "oscilante" decreciente:

  Si $m=\mathrm{par}\Rightarrow a_m=-m$, luego $m+1=\mathrm{impar}$ tal que $a_{m+1}=-(m+1)\frac{1}{2}$

  $-m<-(m+1)\frac{1}{2}=-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}$ si m es lo suficientemente grande
- Entoncse la sucesion no puede ser nunca decreciente o estrictamente decreciente.
- Pero cumple esta sucesion que tiende a $-\infty$?
- Como: $-n\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\leqslant -\frac{n}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}$, luego para dado M si tomo $N/\frac{-n}{2}<M$, en consecuencia para ese mismo N: $-n\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\leqslant -\frac{n}{2}<M$
- Plots de la funcion:



– Observe la tendencia decreciente (aunque oscilatoria)



–

– En rojo tenemos la funcion $-n/2$