

1. Demostrar las siguientes igualdades usando la definición de límite.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{5n} = \frac{4}{5}. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{3n} = 0. \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0.$$

En (a) encontrar  $N$  para  $\varepsilon = 1/10$  y  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

2. Sea  $a_n$  una sucesión con  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . Demostrar que si  $\lim a_n = \ell$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\ell}$  (considerar por separado los casos  $\ell = 0$  y  $\ell > 0$ ).

3. Calcular los siguientes límites.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n^3 + 3}{3n^3 - 7n^2 + n + 2}. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 + 7n}{7n^8 - 2n^4 + 3n}. \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 1} - 3n). \\ (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1}}{n^3}. \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^3}{(n-1)^2} \right).$$

4. Usando el lema del sandwich, mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

(antes verificar por inducción que  $2^n \geq n^2$  para todo  $n > 3$ ).

5. Demostrar las siguientes igualdades usando la definición.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 3n^2}{3n^3 - n^2 - 1} = +\infty. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty.$$

6. Calcular

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n^2}{2n^3 - n - 1}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3n^3 + \frac{1}{4}n + \frac{7n^2 + 1}{3n^2 + n} \right)$$

7. Sea  $\{a_n\}$  la sucesión definida inductivamente mediante

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}.$$

Mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ . Sugerencia: demostrar que la sucesión es decreciente y acotada inferiormente.

8. Recurriendo a subsucesiones con límites distintos, mostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{n + \pi} + \cos(\pi n) \right).$$

9. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión,  $a_n \geq -10$  para todo  $n$ , y sean  $b_1 = a_5$ ,  $b_2 = a_{25}$  y  $b_3 = a_{125}$ .

(a) Extender  $b_1, b_2, b_3$  a una subsucesión  $b_j = a_{n(j)}$  de  $\{a_n\}$ .

(b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ , ¿cuánto vale  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{10 + b_j}$ ?

10. (a) Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales tal que  $a_n \in \mathbb{Z}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $\{a_n\}$  converge y  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_0$ ,  $a_n = l$ .

(b) Sea la sucesión  $\{a_n\}$  dada por  $a_n = (-1)^n$ .

(i) Dar tres subsucesiones convergentes de  $\{a_n\}$  distintas.

(ii) Probar que si  $\{a_{n_j}\}$  es una subsucesión convergente, entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = 1$  ó  $-1$ .

11. Probar que para todo número real  $\ell \in (0, 1)$ , existe una sucesión  $\{q_n\}$  de números racionales tal que  $q_n \in (0, 1)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \ell$ .
12. Decir en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.
- (a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  o  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .
  - (b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , entonces  $a_n$  es decreciente desde un  $n_o$  en adelante, o sea,  $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n > n_o$ .
13. (a) Definir sucesión de Cauchy.  
(b) Demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy.  
(c) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.  
(d) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente (convergen al mismo límite).
14. Para probar el siguiente ejercicio usaremos resultados que se deducen usando el binomio de Newton (se probará/prueba en Álgebra I)

(i)  $(1 + h)^n \geq 1 + nh$  para  $h > 0$ .

(ii)  $(1 + h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$  para  $h > 0$ .

- (a) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ , si  $a > 1$  (Sugerencia: expresar  $a = 1 + h$ , donde  $h > 0$ ).
- (b) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ , si  $0 < a < 1$ .
- (c) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , si  $a > 1$  (Sugerencia: expresar  $\sqrt[n]{a} = 1 + h$  y estimar  $h$ ).
- (d) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , si  $0 < a < 1$ .
- (e) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  (Sugerencia: usar (ii)).