Análisis Matemático I

ALGUNOS EJERCICIOS DEL PRÁCTICO 3

Eduardo G. Andreozzi*
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

3 de mayo de 2023

En lo que sigue se resuelven algunos ejercicios «importantes» del Práctico 3, a modo de ayuda para poder solidificar conceptos esenciales. Sólo se presentan en detalle aquellos que más han traído dificultades durante las clases prácticas, según mi experiencia.

Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-2n}{3n-7}$.

Ayuda: Sacar factor común $-2n$ en el numerador y $3n$ en el denominador.
Siguiendo la misma receta y sin hacer ninguna cuenta, ¿cuánto vale el siguiente límite?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an+b}{cn+d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

$\square$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+7n}{n-2}$.

Ayuda: Sacar factor común n^3 en el numerador y n en el denominador. $\square$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n+1)^2}{n} - \dfrac{n^3}{(n-1)^2}\right)$.

Ayuda: Sacar denominador común y luego factor común como corresponda. $\square$

---

*Comisión 5 (Tarde)

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

Ayuda: Notar que

$$0 < \sqrt{n^2+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n}.$$

Razonen cuál podría ser el límite y usen lo anterior para demostrarlo. □

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+1/n^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$$

y que

$$\frac{1}{1+1/n^2} < \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} < 1, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ (Verificar).}$$

Una vez que se convencieron de cuál podría ser el límite, usen lo anterior junto con el Lema del Sandwich.

Una forma alternativa es probar directamente que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Para esto, notar que

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+1/n^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+1/n^2} + 1\right)}{\left(\sqrt{1+1/n^2} + 1\right)}\right| = \frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+1/n^2}+1\right)} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

A partir de acá se puede terminar el argumento por definición o por el Lema del Sandwich. □

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1}$.

La forma de calcular este límite es usar el Lema del Sandwich.

Primero hay que notar la siguiente propiedad de las raíces n-ésimas: si $0 \leq a < b$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$; queda de ejercicio verificar esto (razonen por absurdo). Por otro lado, se cumple que

$$n^3 < n^3 + 1 \leq 2n^3, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

por lo que usando la propiedad anterior llegamos a que

$$\sqrt[n]{n^3} < \sqrt[n]{n^3+1} \leq \sqrt[n]{2n^3} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^3},$$

o equivalentemente

$$(\sqrt[n]{n})^3 < \sqrt[n]{n^3+1} \leq \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^3$$

Ahora probamos el siguiente resultado clave para este ejercicio.

Lema. *Si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de números reales tal que* $a_n \geq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Demostración. Definamos la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como $b_n := \sqrt[n]{a_n} - 1$. Como $a_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ y por lo tanto $b_n = \sqrt[n]{a_n} - 1 \geq 0$.

Ahora consideremos $n \geq 2$ fijo y escribamos

$$a_n = (\sqrt[n]{a_n})^n = (b_n+1)^n.$$

Notar que $(b_n+1)^n = (b_n+1)\dots(b_n+1)$ es un producto de n factores que puede distribuirse en una suma de términos mayores o iguales que 0, por lo que todo este producto es mayor o igual a cualquiera de estos sumandos. Vamos a considerar los sumandos iguales a b_n^2: tomando el primer b_n del primer paréntesis, hay $n-1$ paréntesis de adonde sacar el otro factor b_n; considerando luego el b_n del segundo paréntesis, hay $n-2$ paréntesis de adonde sacar el otro factor b_n; siguiendo este razonamiento podemos ver que la cantidad de sumandos iguales a b_n^2 es

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2},$$

lo que implica que

$$a_n = (b_n+1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2.$$

De lo anterior deducimos que

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{\frac{2a_n}{n(n-1)}} \leq \frac{\sqrt{a_n}}{n}\sqrt{\frac{2}{1-1/n}}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}/n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2/(1-\frac{1}{n})} = \sqrt{2}$, el Lema del Sandwich aplicado a la desigualdad anterior implica que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Finalmente, como $\sqrt[n]{a_n} = b_n + 1$, deducimos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. □

Usando el Lema anterior podemos ver rápidamente que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \text{y también} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

por lo que volviendo a la desigualdad

$$(\sqrt[n]{n})^3 < \sqrt[n]{n^3+1} \leq \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^3,$$

y usando el Lema del Sandwich, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1} = 1.$$

Ejercicio 4

Demostrar usando la definición los siguientes límites.

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-100}{n} = \infty$.

Ayuda: Notar que

$$\frac{n^2-100}{n} = n - \frac{100}{n} \geq n - 100, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

¿Pueden continuar a partir de esto? □

(b) $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Ayuda: Usar que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (esto se puede probar por inducción). □

Ejercicio 5

Probar que para todo número real $\ell \in (0,1)$, existe una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = \ell$.

No se presenta una solución, sólo unos comentarios a modo de ayuda.

Para este ejercicio es muy útil recordar la Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y las nociones de supremos e ínfimos para conjuntos acotados.

Se pueden usar dos ideas para construir la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

La primera idea es usar la densidad de los números racionales para encontrar números racionales cada vez más cerca de ℓ. Por ejemplo, tomando una sucesión de intervalos abiertos centrados en ℓ, contenidos en $(0,1)$ y cuya longitud se reduce a la mitad en cada paso, se puede obtener una sucesión de números racionales tal que $|q_n - \ell| < c/2^n$ para alguna constante positiva c. A partir de ahí se puede terminar la prueba de la convergencia por definición o usando el Lema del Sandwich.

La segunda idea es considerar el conjunto $(0,\ell)\cap\mathbb{Q}$ (que nunca es vacío justamente por la densidad de los racionales), notar que ℓ es su supremo y usar convenientemente el Lema Útil para supremos para encontrar números racionales entre 0 y ℓ que tiendan a ℓ por el Lema del Sandwich. También se podría considerar el conjunto $(\ell,1)\cap\mathbb{Q}$ y seguir los pasos anteriores usando el Lema Útil para ínfimos.

Hay más de una variante de estas ideas para construir la sucesión pedida, y no quiero privilegiar una por encima de las otras, así que termino mis comentarios remarcando que la hipótesis $\ell \in (0,1)$ es irrelevante, ℓ podría ser cualquier número real y este resultado valdría igual, con la misma prueba.

Ejercicio 7

(a) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = \ell$ para todo $n \geq n_0$.

Como $\{a_n\}_n$ converge a ℓ, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Primero veamos que $\ell \in \mathbb{Z}$. Razonando por absurdo, si ℓ no fuera un número entero, existiría $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\ell \in (k, k+1)$. A su vez, existiría un número real $\varepsilon > 0$ tal que $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subseteq (k, k+1)$ (¿se dan cuenta por qué?). Entonces usando este ε para la definición de convergencia de $\{a_n\}_n$ tendríamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$, lo que es absurdo: habríamos encontrado al menos un número entero (el a_{N+1} por ejemplo) en el intervalo $(k, k+1)$, que claramente no contiene números enteros. Concluimos entonces que $\ell \in \mathbb{Z}$.

Para terminar el ejercicio, consideremos $\varepsilon = 1$ para la definición de convergencia de $\{a_n\}_n$. Tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $-1 < a_n - \ell < 1$. Pero $a_n - \ell$ es un número entero por lo visto anteriormente, y el único número entero en el intervalo $(-1, 1)$ es el 0. Esto significa que $a_n = \ell$ para todo $n > n_0$. $\square$

(b) Determinar todas las subsucesiones convergentes (con su límite) de la sucesión

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

Ayuda: No hace falta escribir explícitamente todas las subsucesiones convergentes, hay infinitas de ellas (¿se dan cuenta?). Usen el inciso **(a)** anterior para caracterizarlas. $\square$

Ejercicio 10

(a) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente a ℓ. Queremos ver que $\{a_n\}_n$ también converge a ℓ.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $\{a_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N_1$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$.

Por otro lado, como $\{a_{n_j}\}_j$ es una subsucesión convergente a ℓ, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $j > N_2$ entonces $|a_{n_j} - \ell| < \varepsilon/2$. A su vez, como la sucesión $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, es posible encontrar un $j > N_2$ tal que $n_j > N_1$ (¿se dan cuenta cómo?).

Fijando un $j > N_2$ tal que $n_j > N_1$, si $n > N_1$ se cumple entonces que

$$|a_n - \ell| = |(a_n - a_{n_j}) + (a_{n_j} - \ell)| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que por definición significa que $\{a_n\}_n$ converge a ℓ. $\square$

(b) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a ℓ y $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ una subsucesión. Queremos ver que $\{a_{n_j}\}_j$ también converge a ℓ.

Como $\{a_n\}_n$ converge a ℓ, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Por otro lado, razonando por el absurdo, si $\{a_{n_j}\}_j$ no convergiera a ℓ existiría un $\eta > 0$ tal que para todo $M \in \mathbb{N}$ se cumpliría que $|a_{n_j} - \ell| \geq \eta$ para algún $j > M$.

Pero entonces tomando $\varepsilon = \eta$ y $M = N$, sería posible encontrar un $j > M$ tal que $n_j > N$, y para este j se cumpliría que

$$\varepsilon = \eta \leq |a_{n_j} - \ell| < \varepsilon,$$

lo que es absurdo (no es posible que $\varepsilon < \varepsilon$). Concluimos entonces que $\{a_{n_j}\}_j$ converge a ℓ. $\square$

BONUS: El Ejercicio **10.b** muestra que la convergencia de una sucesión implica necesariamente la convergencia de cualquier subsucesión. Por otro lado, es cierto que si al menos una subsucesión no converge o al menos dos subsucesiones convergen a límites distintos, la sucesión original no puede converger; lo primero se puede probar por absurdo (y es una buena práctica para aprender a negar la definición de convergencia) y lo segundo es una generalización directa del Ejercicio **9.b**.

En general, las subsucesiones pueden determinar rápidamente que la sucesión original no converge, pero casi nunca es posible asegurar la convergencia de una sucesión estudiando sus subsucesiones. Sin embargo, el siguiente resultado muestra la existencia de un par de subsucesiones especiales que sí determinan la convergencia de la sucesión original.

Definición. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Las subsucesiones $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se denominan, respectivamente, *las subsucesiones par e impar* de $\{a_n\}_n$.

$\square$

Las subsucesiones definidas arriba no son más que aquellas que consisten en los índices pares e impares de la sucesión original.

Proposición. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si las subsucesiones par e impar de $\{a_n\}_n$ convergen a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $\{a_n\}_n$ converge a ℓ.*

$\square$

La proposición anterior es uno de los pocos resultados «sencillos» que asegura la convergencia de una sucesión en base a la convergencia (al mismo límite) de un par de subsucesiones. Este resultado no va a tener mucha relevancia durante el dictado de este curso, pero su demostración es sencilla y es una buena práctica a cambio de una interesante herramienta.