1 Teoria

- Que es una sucesion? : Una sucesion real es una funcion tal que mapea de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Limite - Convergencia: $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \text{si } n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
- Proposicion: considere $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} b_n = m$, $c \in \mathbb{R}$
  - $\lim_{n\to\infty} c a_n = cl$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = l + m$ (Demostrado con desigualdad triangular)
  - $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = lm$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$, $m \neq 0$
- Proposicion: El limite de una sucesion es unico.
- Proposicion: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, es decir el limite existe, entonces la sucecion $\{a_n\}$ esta acotada.
- Lema del Sandwich: Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, con $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} c_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = l$
- Limites utiles:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$
- Sucesion que tiende a Infinito: $\lim_{n\to\infty} a_n = \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \text{si } n > N \Rightarrow a_n > M$
- Proposicion: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = l \neq 0$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n + c_n = \infty$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \infty$ $(l > 0)$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
  - $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = -\infty$ $(l < 0)$
- Teorema: Toda sucesion creciente (No necesariamente Estricatamente creciente) y acotada superiormente tiene un limite. Esto implica:
  - $a_n \leqslant a_{n+1}$ $\forall n$
  - $a_n \leqslant M$ $\forall n$
  - Entonces: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n\}$
- Subsucesiones: Definicion: Una subsucesion b de una sucesion a , es una sucesion que cumple: $b(j) = a(n(j))$, es decir que b toma algunos elementos de a (No puede tomar otros elementos distintos que no esten en a). Tipicamente se escribe: a_{n_j}
- Proposicion: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_j} = l$, para cualquier subsucesion a_{n_j} de a.

- Afirmaciones utiles de Subsucesiones:

  - $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+n_0} = l$

  - $\lim_{n\to\infty} s_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n} = l y \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = l$

- Demostrar que una sucesion no converge: Si una sucesion a tiene 2 subsuceciones que convergen a limites distintos, entonces a_n no converge.

- Lema: Si $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una funcion estrictamente creciente, entonces $f(n) \geqslant n$

2 Practico

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8. Demostrar con subsucesiones que elsiguiente limite no existe: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+\pi} + \cos(n\pi)\right)$

   - Primero examine: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\pi} = 2$ (Facilmente demostrable)

   - Considere la subsucesion de terminos pares: $a_{2n} = \frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi)$

   - Calculemos el limite $\mathrm{im}_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi) = 2 + 1 = 3$

   - Si ahora consideramos la subsucesion de terminos impares: $a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi)$

   - Calculamos el limite: $\lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi) = 2 - 1 = 1$

   - Como ambas subsucesiones convergen a limites distintos , entonces la sucesion original no converge.

9. Considere $\{a_n\} / a_n \geqslant -10 \forall n$ considere $b_1 = a_5$, $b_2 = a_{25}$ y $b_3 = a_{125}$:

   a) Extender b_1, b_2, b_3 a una subsucesion: $b_j = a_{n_j}$ de $\{a_n\}$

      - Podemos considerar entonces: $b_j = a_{n(j)}$ con $n(j) = 5^j$, es decir: $b_j = a_{5^j}$ de esta forma por ejemplo: $b_1 = a_5, b_2 = a_{25}, b_3 = a_{125}$

   b) Si se cumpliera que: $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$, cuanto vale $\lim_{j\to\infty} \sqrt{10 + b_j}$?

      - Por la proposicion en verde, la subsucesion debe tender al mismo valor que la sucesion original: En consecuencia, $\lim_{j\to\infty} b_j = 6$

- Ahora tratemos de probar por definicion que esto existe y que es 4:

  $\left|\sqrt{10+b_j}-4\right|<\varepsilon$ si $j>N$

  $\left|\frac{10+b_j-16}{\sqrt{10+b_j}+4}\right|=\left|\frac{b_j-6}{\sqrt{10+b_j}+4}\right|$

  Aca usamos la hipotesis: $a_n \geqslant -10 \Rightarrow b_j \geqslant -10 \Leftrightarrow b_j+10 \geqslant 0$

  Entonces: $\sqrt{b_j+10}+4 \geqslant 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b_j+10}+4}<\frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{b_j-6}{\sqrt{b_j+10}+4}\right|<\frac{1}{4}|b_j-6|<|b_j-6|<\varepsilon$

- Quedando demostrado el limite. Basta proporcionar el valor de j tal que cuando $j>N$ se cumple $|b_j-6|<\varepsilon$

-

10. Sea $\{a_n\}\subset\mathbb{Z}$, probar que si $\lim_{n\to\infty}a_n=l \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}/a_n=l\forall n>n_0$

  - Esto implica mostrar que la funcion es identicamente constante dadas las hipotesis a partir de cierto punto.
  - **Primera parte:**
  - Por la definicion: si $n>N \Rightarrow |a_n-l|<\varepsilon$
  - En particular si $m>n>N \Rightarrow |a_m-l|<\varepsilon$
  - Como $a_n, a_m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_m=a_n+Z$, $Z\in\mathbb{Z}$
  - Es decir: $|a_m-l|=|a_n+Z-l|\leqslant|a_n-l|+|Z|<\varepsilon+|Z|$
  - Sin embargo como $|a_m-l|<\varepsilon$ (Para el mismo N), la unica opcion viable es que: $|Z|=0$, es decir: $Z=0$
  - Hemos demostrado que $a_n=a_m$ $\forall m>n$
  - **Segunda Parte:**
  - Si $n>N \Rightarrow |a_n-l|<\varepsilon$, donde como vimos, siempre tenemos el mismo valor, que por hipotesis es un entero, asi que para visibilizar esto escribo: $|z-l|<\varepsilon$ si $n>N$
  - Por tricotomia: $z>l, z<l, z=l$
  - Si considera los casos: $z>l$ or $z<l \Rightarrow |z-l|>0$ seria un valor fijo, y por lo tanto no puede cumplirse que $\forall\varepsilon>0$ $|z-l|<\varepsilon$
  - Como unica posibilidad se debe cumplir que: $z=l$ (que es lo que se queria demostrar)

11. Probar que para todo $l\in\mathbb{R}/l\in(0,1)$ existe una sucesion: $\{q_n\}$ de numeros racionales tal que $q_n\in(0,1)$ y $\lim_{n\to\infty}q_n=l$.

  - La sucesion tiene que ser de numeros racionales: $q=\frac{m}{n}$
  - Lo que se plantea es que la sucesion sea: $q_n=\frac{[nl]}{n}$, donde $[nl]$ es la parte entera. (Nos da el numero entero menor mas cercano a nl)

- Lo anterior significa que: $nl-1<[nl]<nl \Leftrightarrow \frac{nl-1}{n}<\frac{[nl]}{n}<l$
- Es decir: $l-\frac{1}{n}<\frac{[nl]}{n}<l$
- En consecuencia como: $\lim_{n\to\infty} l-\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} l=l$ puede utilizar el lema del Sandwich de las sucesiones, en consecuencia: $\lim_{n\to\infty}\frac{[nl]}{n}=l$
- Observe que como $l\in(0,1)$ luego: $0<l<1\Rightarrow 0<\frac{[nl]}{n}<1$
- Esto demuestra lo propuesto.

12. Decidir en cada caso si la afirmacion es verdadera o falsa:

    a) Si $\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\infty \text{ or } \lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

    - Falso
    - Considere: $a_n=(-1)^n n$, cumplee que: $|a_n|=n$, luego: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$
    - Sin embargo claramente: $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, pues si tomo subsucesiones de terminos pares y otra de impares ambas convergen a limites distintos.

    b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ entonces a_n es decreciente desde un n_0 en adelante, es decir , $\exists n_0/\text{si } n>n_0 \Rightarrow a_{n+1}<a_n$

    - $\forall M\in\mathbb{R}\,\exists N\in\mathbb{N}/\text{si } n>N\Rightarrow a_n<M$
    - Considere $M=a_N$, entonces: $a_n<a_N$ para $n>N$, entonces como $N+1>N$ luego debe cumplirse: $a_{N+1}<a_N$
    - Nota: Este ejercicio se trata de entender bien la definicion. No se trata de que para todo elemento de la sucesion se cumpla lo anterior, si no de que para un M dado se pueda encontrar el elemento N que hace que todos los elementos de la sucesion sean mas chicos.
    - Si la sucesion es $a_n=-(n-5)^2$, para $M=-8$, se cumple $a_n<M$ para $n>8$