Análisis Matemático I

Algunos ejercicios del Práctico 2

Eduardo G. Andreozzi*
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

12 de abril de 2023

En lo que sigue se resuelven algunos pocos ejercicios «importantes» del Práctico 2, a modo de ayuda para poder concretar algunas ideas necesarias justo antes de tener que enfocar la atención en el Práctico 3. Sólo se presentan en detalle aquellos que más han traído dificultades durante las clases prácticas, según mi experiencia.

Ejercicio 4

Encontrar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

Ayuda: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Ayuda: $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = (0, 1]$. ■

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

No es difícil convencerse de que $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

Para ver la imagen de h, conviene notar que el denominador de h cambia de signo a ambos lados de los puntos «problemáticos» 1 y -1. Entonces vamos a considerar la imagen de h viéndola por separado en las regiones $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.

*Comisión 5 (Tarde)

En la región $(-1,1)$ el denominador de h es negativo (¿por qué?), luego la imagen de h de esta región del dominio va a consistir en valores negativos. Por otro lado, como el denominador de h tiene valor absoluto menor o igual a 1 en esta región (¿por qué?), los valores (negativos) de la imagen de h van a tener valores absolutos mayores o iguales a 1. Entonces nos animamos a decir que h toma todos los valores $y \in (-\infty, -1]$ cuando $x \in (-1,1)$. Esto se confirma tomando $y < 0$ arbitrario, planteando $y = h(x)$ para $x \in (-1,1)$ y deduciendo que

$$y = \frac{1}{x^2-1} \quad \text{implica que} \quad x^2 - 1 = \frac{1}{y}, \quad \text{que a su vez implica que} \quad \frac{1}{y} \geq -1, \quad \text{es decir} \quad y \leq -1.$$

Hasta el momento tenemos que $(-\infty,-1] \subseteq \mathrm{Im}(h)$. Ahora analizamos a h en la región $(1,\infty)$. Como allí el denominador de h es positivo (¿por qué?), la imagen de h de esta región del dominio va a consistir en valores positivos. Como antes, nos animamos a decir que h toma todos los valores $y \in (0,\infty)$ cuando $x \in (1,\infty)$. Esto se confirma tomando $y > 0$ arbitrario, planteando $y = h(x)$ para $x \in (1,\infty)$ y deduciendo que

$$y = \frac{1}{x^2-1} \quad \text{implica que} \quad x^2 - 1 = \frac{1}{y}, \quad \text{es decir} \quad x = \sqrt{\frac{1}{y} + 1}.$$

Como para cada $y \in (0,\infty)$ encontramos un $x \in (1,\infty)$ tal que $h(x) = y$, podemos deducir que $(0,\infty) \subseteq \mathrm{Im}(h)$.

Finalmente, como el análisis de h en la región $(-\infty,-1)$ es idéntico al ya realizado para la región $(1,\infty)$ (esto se sigue de la dependencia de h con x^2, ¿se dan cuenta por qué?), ponemos todo junto para concluir que $\mathrm{Im}(h) = (-\infty,-1] \cup (0,\infty)$ (traten de graficar la función h para convencerse).

Ejercicio 7

(a) Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ definimos la función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Si A y B son dos subconjuntos arbitrarios de los números reales, encontrar expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}\smallsetminus A}$, en términos de C_A y C_B.

Una forma de hacer este ejercicio es por prueba y error. Como las expresiones a encontrar no son muy rebuscadas, el método de la «intuición» no está mal. Sin embargo, se puede «desarrollar» un método para guiar esa intuición.

Comencemos por encontrar $C_{A\cap B}$, en términos de C_A y C_B. Primero hay que recordar el siguiente resultado: $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$ (Práctico 1). Ahora vamos a intentar formular proposiciones equivalentes a «$C_{A\cap B}(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{R}$,» tratando de usar lo que conocemos de C_A y C_B. Recomiendo encarecidamente que se convenzan que efectivamente las siguientes proposiciones son equivalentes: para algún $x \in \mathbb{R}$ fijo se tiene que

$$\begin{aligned} [\, C_{A\cap B}(x) = 0 \,] &\Leftrightarrow [\, x \notin A \cap B \,] \\ &\Leftrightarrow [\, x \notin A \ \vee \ x \notin B \,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow [\, C_A(x) = 0 \ \vee \ C_B(x) = 0 \,] \\ &\Leftrightarrow [\, C_A(x) C_B(x) = 0 \,] \\ &\Leftrightarrow [\, (C_A C_B)(x) = 0 \,]. \end{aligned}$$

Lo anterior nos indica que las funciones $C_{A\cap B}$ y $C_A C_B$ se anulan en los mismos puntos, por lo que podríamos plantear por el momento que $C_{A\cap B} \stackrel{?}{=} C_A C_B$; recordar que la igualdad de funciones, con mismos dominios e imágenes, se da cuando estas coinciden punto a punto. Pero no es difícil verificar (ejercicio) que estas funciones ya mencionadas coinciden sobre toda la recta real. Entonces podemos afirmar con toda seguridad que $C_{A\cap B} = C_A C_B$.

Ahora vamos a encontrar una expresión similar para $C_{A\cup B}$. El siguiente resultado que vamos a usar es similar al anterior: si $a, b \geq 0$ entonces $a + b = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$. Nuevamente pido que se convenzan de que las siguientes proposiciones son equivalentes: para algún $x \in \mathbb{R}$ fijo se tiene que

$$\begin{aligned} [\, C_{A\cup B}(x) = 0 \,] &\Leftrightarrow [\, x \notin A \cup B \,] \\ &\Leftrightarrow [\, x \notin A \ \wedge \ x \notin B \,] \\ &\Leftrightarrow [\, C_A(x) = 0 \ \wedge \ C_B(x) = 0 \,] \\ &\Leftrightarrow [\, C_A(x) + C_B(x) = 0 \,] \\ &\Leftrightarrow [\, (C_A + C_B)(x) = 0 \,]. \end{aligned}$$

Lo anterior nos indica que las funciones $C_{A\cup B}$ y $C_A + C_B$ se anulan en los mismos puntos, por lo que podríamos nuevamente plantear por el momento que $C_{A\cup B} \stackrel{?}{=} C_A + C_B$. Pero esta vez hay un problema: si x está tanto en A como en B, $C_{A\cup B}(x) = 1$ pero $(C_A + C_B)(x) = 2$, lo que nos impide concluir que son iguales. Pero que x esté en ambos conjuntos significa que x está en su intersección, que ya vimos antes. Entonces podemos intentar «corregir» nuestra igualdad entre funciones como $C_{A\cup B} \stackrel{?}{=} C_A + C_B - C_{A\cap B}$. No es difícil verificar (ejercicio) que ahora sí estas funciones coinciden sobre toda la recta real. Finalmente, usando la expresión para $C_{A\cap B}$ deducida antes, concluímos que $C_{A\cup B} = C_A + C_B - C_A C_B$.

Para terminar, veamos una expresión similar para $C_{\mathbb{R}\setminus A}$. Como $A \cup (\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R}$ y $A \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \emptyset$, podemos usar el resultado anterior para escribir $C_A + C_{\mathbb{R}\setminus A} = 1$ (para esto hace falta convencerse de que $C_\emptyset = 0$ y $C_\mathbb{R} = 1$, y esto también queda de ejercicio). Entonces inmediatamente llegamos a que $C_{\mathbb{R}\setminus A} = 1 - C_A$. ■

(b) Probar que si f es una función tal que $f(x) = 0$ ó 1 para todo x, entonces existe un conjunto A tal que $f = C_A$.

Definamos el conjunto $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$. Entonces no es difícil verificar (ejercicio) que $f = C_A$. (*Ayuda:* ¿Cuánto vale f afuera de A?) ■

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A.

Veamos primero la implicación $(\Rightarrow)$. Si $f = f^2$ entonces $f(x)[1 - f(x)] = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que f es una función tal que $f(x) = 0$ ó $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (¿por qué?). Usando el inciso **(b)** anterior concluímos que existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f = C_A$.

Ahora veamos la implicación ($\Leftarrow$). Si $f = C_A$ para algún conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, y usando el inciso **(a)** anterior, tenemos que

$$f(x)[1-f(x)] = C_A(x)[1-C_A(x)] = C_A(x)C_{\mathbb{R}\smallsetminus A}(x) = C_{A\cap(\mathbb{R}\smallsetminus A)}(x) = C_{\emptyset}(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

De lo anterior se deduce que $f(x) = f(x)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir $f = f^2$.

Ejercicio 9

(a) Sea $f(x) = x + 1$. ¿Existe una función g tal que $f \circ g = g \circ f$?

Ayuda: ¿Cuál es la función no constante más simple que se les ocurre? ■

(b) Sea f una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple que $f \circ g = g \circ f$?

Si $f = a$ para algún $a \in \mathbb{R}$, la condición $g \circ f = f \circ g$ sobre alguna función g es equivalente a que $g(a) = a$. Dicho un poco más desarrollado: si $f = a$ para algún $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de funciones g tales que $f \circ g = g \circ f$ es exactamente el conjunto de funciones g que *fija* al punto a, es decir $g(a) = a$. ■

(c) Supongamos que f es una función tal que $f \circ g = g \circ f$ para toda función g. Demostrar que f es la función identidad.

Probar que f es la función identidad significa probar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea ahora un punto $a \in \mathbb{R}$ elegido arbitrariamente. Tomando $g = a$, la hipótesis $f \circ g = g \circ f$ es equivalente a que $f(a) = a$. Pero como esto vale para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.