PRÁCTICO 1

1. Demostrar las siguientes afirmaciones. Justificar todos los pasos, indicando las propiedades usadas.
(a) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.
(b) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.
(c) $a(b - c) = ab - ac$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.
(d) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
(e) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ ó $x = -y$.
(f) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $ab \neq 0$.
(g) $(-a)(-b) = ab$, para todo par de números reales a, b.

2. Sean a, b, c números reales. Demostrar las siguientes afirmaciones:
(a) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
(b) Si $a > 1$, entonces $a < a^2$. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
(c) $ab > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0)$ ó $(a < 0 \text{ y } b < 0)$.
(d) Si $a^2 < b^2$ y $a > 0$, entonces $b > a$ ó $b < -a$.

3. Para cada una de las siguientes desigualdades, hallar el conjunto de todos los números reales x que las satisfacen y graficar el resultado en la recta real.

(a) $4 - x < 3 - 3x$, (b) $(x - 1)(x - 3) > 0$, (c) $x^2 > 9$,

(d) $5 - x^2 < 8$, (e) $x^2 - x + 10 > 16$, (f) $x + 1 > x$,

(g) $x - 1 > x$, (h) $-3/x > 1$, (i) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 - x} > 0$.

4. El área de un rectángulo es de $4\,\mathrm{m}^2$. Determinar las dimensiones del rectángulo, sabiendo que si a la longitud de la base la incrementamos en una unidad y a la altura la disminuimos en dos unidades, entonces el área del nuevo rectángulo sigue siendo de $4\,\mathrm{m}^2$.

5. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.
(a) Si $a^2 = 1$, entonces $a = 1$ o $a = -1$.
(b) Si $a^2 = b^2$, entonces $a^3 = b^3$.
(c) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a - c < b - d$.
(d) Si $a < b$ y c no es negativo, entonces $ac < bc$.
(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} \mid x + y < 0$.
(f) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} \mid xy > 0$.

6. ¿Dónde está el error en el siguiente desarrollo?
Supongamos que $x = y$. Entonces:

$$\begin{aligned}
x^2 &= xy, \\
x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\
(x + y)(x - y) &= y(x - y), \\
x + y &= y, \\
2y &= y, \\
2 &= 1.
\end{aligned}$$

7. Probar que si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sugerencia: completar cuadrados.

8. (a) Probar que si $0 \leq x \leq y$, entonces $x^2 \leq y^2$.
(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Probar que $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$. ¿Cuándo vale la igualdad? *Nota:* El número $\sqrt{ab}$ se denomina la *media geométrica* entre a y b, mientras que $(a+b)/2$ se denomina la *media aritmética o promedio* entre a y b.

9. (a) Probar que si $a^3 = 1$, entonces $a = 1$.
(b) Usar el inciso anterior para deducir que si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$.

10. Demostrar las siguientes afirmaciones:
(a) $|x| = |-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
(c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

11. Escribir las siguientes expresiones prescindiendo de las barras de valor absoluto, considerando por separado distintos casos cuando sea necesario.
(a) $|(|x| - 1)|$,
(b) $a - |(a - |a|)|$.

12. Resolver las siguientes desigualdades, interpretarlas en términos de distancias, y graficar en cada caso el conjunto de soluciones en la recta real.

(a) $|x-3| < 8$, (b) $|x-3| \geq 8$, (c) $|x-3| < 0$, (d) $|2x-3| > 1$.

13. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $|x-3| = c \quad (c \in \mathbb{R})$, (b) $|x-1||x+2| = 3$, (c) $|x-1| + |x+2| = 3$.

14. Probar que se cumplen las siguientes desigualdades para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $|x-y| \leq |x| + |y|$, (b) $|x-y| \geq |x| - |y|$, (c) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

15. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos de números reales tiene supremo, ínfimo, máximo o mínimo.

(a) $[3, 8)$, (b) $(-\infty, \pi)$, (c) $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
(d) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, (e) $\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, (f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 0\}$,
(g) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$, (h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$, (i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

16. Probar que si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, entonces $A \cup B$ es acotado superiormente.

17. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $x \leq y$ para todo $x \in A$, $y \in B$. Demostrar que:
(a) $\sup A \leq y$ para todo $y \in B$.
(b) $\sup A \leq \inf B$.

18. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son densos.

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 100\}$, (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (c) $\mathbb{R} \setminus (0, 10^{-5})$, (d) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

19. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.
(a) Si $\sup A \leq \inf B$, entonces $A \cap B = \emptyset$.
(b) $\max\{x, -x\} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(c) Un conjunto formado por todos los números reales salvo un número finito de ellos es denso.