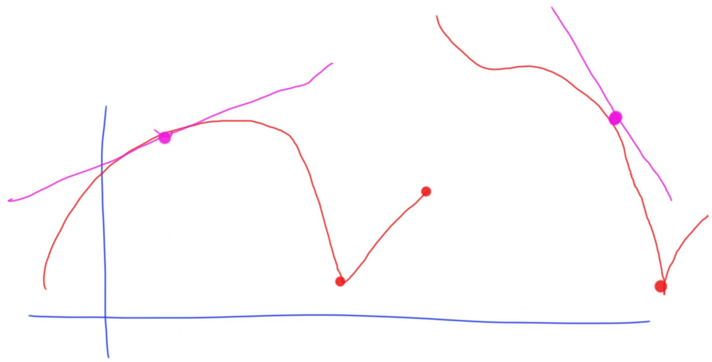
Derivadas

Vemos en el siguiente gráfico de una función que en algunos puntos podemo trazar "rectas tangentes" al gráfico y en otros no (marcados con rojo). ¿Cómo describimos esta situación con precisión?



Definición. Sea A un intervalo abierto que contiene al punto a. Se dice que la función $f : A \to \mathbb{R}$ es **derivable en** a si existe

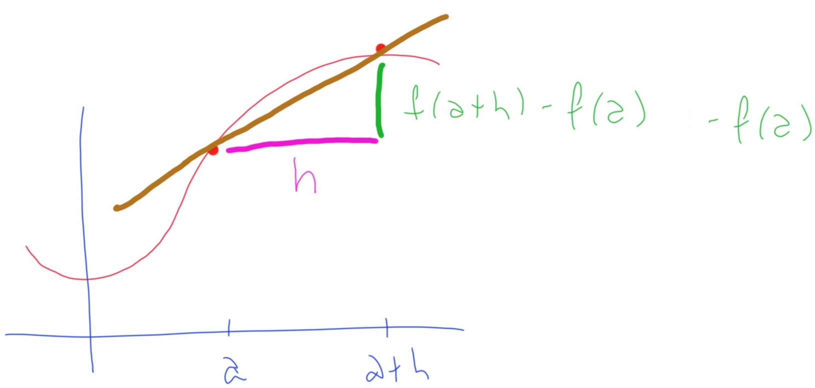
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, se denota por $f'(a)$ y se lee "la **derivada** de f en a".

Comentario. El cociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ de gráfico de f (una recta "secante" al gráfico de f).



El número $f'(a)$, si existe, se interpreta como la pendiente de la recta tangente al gráfico de f por el punto $(a, f(a))$.

Definición. Si la función f es derivable en a, la **recta tangente** al gráfico de f por el punto $(a, f(a))$ es la dada por la función

$$y(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

que determina la única recta con pendiente $f'(a)$ que pasa por el punto $(a, f(a))$ (pues $y(a) = f(a)$).

Ejemplo. Sea f una función constante, digamos, $f(x) = c$ para todo x. Dado a calculamos

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Ejemplo. Si $f(x) = x$ para todo x, entonces para todo a se cumple que

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Definición. Si la función f es derivable en todo punto de un intervalo abierto A, decimos que f es **derivable en el intervalo** A. En este caso tenemos una nueva función

$$f' : A \to \mathbb{R},$$

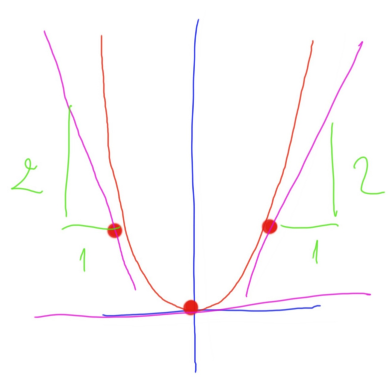
que se llama la **función derivada** de f.

Un ejemplo anterior indica entonces que si f es una función constante, entonces f' es la función constante igual a cero. Abreviamos diciendo que la derivada de una constante es cero.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2$. Veamos que $f'(x) = 2x$. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x. \end{aligned}$$

Por ejemplo, $f'(0) = 0$, $f'(-1) = -2$ y $f'(1) = 2$, como vemos en la figura.



Comentario. La **interpretación geométrica** de la derivada es a través de las rectas tangentes al gráfico. En particular, el gráfico de una función derivable es suave, no presenta aristas.

Para familiarizarse con el concepto, es muy útil considerar la **interpretación cinemática** de la derivada: Si p es la función posición de un punto que se mueve en la recta real, es decir, $p(t)$ es la posición del punto en el instante t, entonces $p'(t)$ se interpreta como la **velocidad instantánea** del móvil en el instante t. Si se trata de un punto de un auto en movimiento, la velocidad instantánea en cada instante es la que marca el velocímetro en ese momento.

Si p es la función posición de un punto que se mueve suavemente en la recta, dado un intervalo de tiempo $[t_o, t_1]$, la **velocidad media** en ese intervalo es

$$\frac{p(t_1) - p(t_o)}{t_1 - t_0},$$

es decir, la diferencia entre la posición final y la inicial, dividida por el tiempo empleado. Por ejemplo, si se recorren 18 km en 3 horas, la velocidad media será de $\frac{18 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Recordando la definición de derivada de la función p en el instante t_o, o sea,

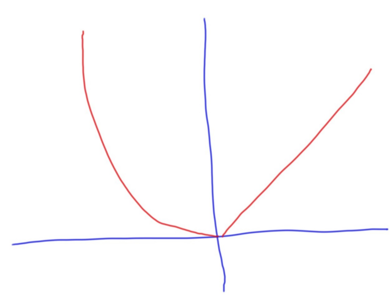
$$p'(t_o) = \lim_{h \to 0} \frac{p(t_o + h) - p(t_o)}{h},$$

y tomando en cuenta lo anterior, concluimos que la velocidad instantánea en t_o es el límite para $h \to 0$ de las velocidades medias del móvil en los intervalos de tiempo $[t_o, t_o + h]$.

Comentario. La derivada es una propiedad local. Más precisamente: Sean f y g son dos funciones definidas en un intervalo abierto A con $a \in A$ y coinciden en $(a - \delta, a + \delta)$ para cierto $\delta > 0$. Si $f'(a)$ existe, entonces $g'(a)$ existe y es igual a $f'(a)$. Se deduce de que el límite es una propiedad local, como ya vimos.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ x^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$



Indicar para cuáles x existe $f'(x)$ y en ese caso, dar el valor.

La función f coincide con $g(x) = x^2$ en el intervalo **abierto** $(-\infty, 0)$. Luego, $f'(x) = g'(x) = 1$ para $x < 0$.

De manera similar, $f'(x) = 1$ para $x > 0$.

Veamos ahora que $f'(0)$ no existe (como lo podíamos anticipar del gráfico de f, que tiene una arista en cero). Calculamos los límites laterales

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2-0}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0, \end{aligned}$$

que se denominan **derivadas laterales por derecha y por izquierda** de f en a.

Como son distintos, $f'(0)$ no existe. En particular, no existe la recta tangente al gráfico de f por el punto $(0,0)$.

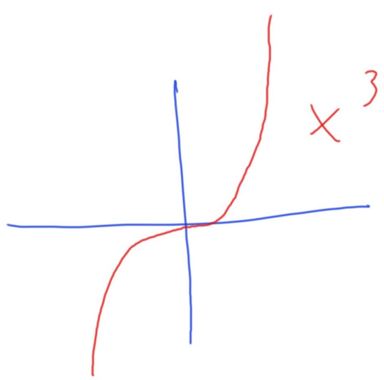
Nota. A pesar de que la f coincide con la función $g(x) = x^2$ en $x = 0$, y que $g'(0) = 0$, no se desprende de allí que $f'(0) = 0$. Se debe al requerimiento de intervalos **abiertos** en el enunciado de que la derivada es una propiedad local.

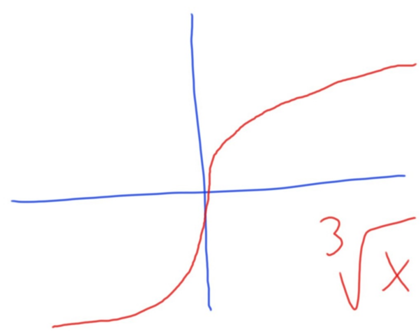
Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Mostrar que f no es derivable en cero.

Calculamos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty,$$

pues el denominador tiende a cero por valores positivos para h que tiende a cero.





Comentario. Como f es la inversa de la función g dada por $g(x) = x^3$, su gráfico está dado por la figura de la derecha. Observamos que el gráfico es tangente al eje y en el origen de coordenadas. Como ese eje no es el gráfico de una función (tiene "pendiente infinita"), no esperamos que f sea derivable en cero.

Teorema. Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

Nota. La recíproca **no es verdadera**. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en todo punto, pero no es derivable en 0.

Prueba del teorema. Sabemos que existe

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para ver que f es continua en a, basta verificar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, o equivalentemente, que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a). \tag{1}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} h = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(a)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Así, (1) es válido, como queríamos. □

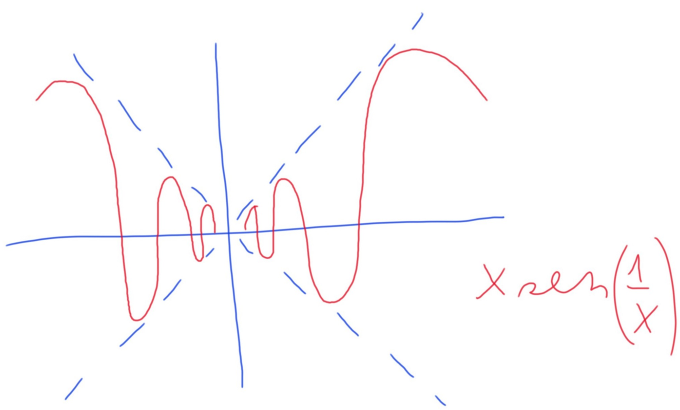
Ejemplo. Decidir si la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es derivable en 0. Calculamos

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

que ya sabemos que no existe. Luego, f no es derivable en 0.



Reglas de derivación

Teorema (derivada de la suma). Sean f y g dos funciones derivables en a. Entonces la función $f+g$ es derivable en a y vale

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Prueba. Calculamos

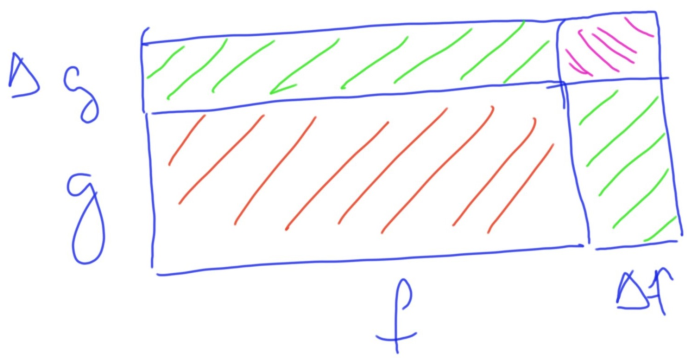
$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a)+g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a) + g'(a),
\end{aligned}$$

pues el límite de la suma es la suma de los límites. $\square$

Antes de enunciar la regla para derivar el producto de funciones, consideramos la motivación siguiente.

Comentario. El producto de dos números f y g se representa geométricamente como el área de un rectángulo de lados f y g. Si el lado f varía en Δf y el lado g varía en Δg, la nueva área sería

$$fg + (\Delta f)\, g + f\,(\Delta g) + (\Delta f)\,(\Delta g)\,.$$



La diferencia con el área original es

$$(\Delta f)\, g + f\,(\Delta g) + (\Delta f)\,(\Delta g)\,.$$

Notar que el último término es "de un orden distinto" que el primero y el segundo. Por decir, si $\Delta f = \Delta g = 10^{-3}$, entonces $(\Delta f)\,(\Delta g) = 10^{-6}$. Como la derivada es una aproximación "de primer orden", el último término no se verá reflejado en la fórmula para la derivada del producto del teorema siguiente.

Teorema (derivada del producto). Si f y g son dos funciones derivables en a, entonces la función producto fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)\,.$$

Prueba. Sabemos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{y} \qquad g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Calculamos

$$
\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)\,g(a+h)-f(a)\,g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)\,g(a+h)-f(a)\,g(a+h)+f(a)\,g(a+h)-f(a)\,g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h)-f(a))\,g(a+h)+f(a)\,(g(a+h)-g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h)+f(a)\,\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)\,g(a)+f(a)\,g'(a).
\end{aligned}
$$

En la última igualdad hemos usado que g es contina en a (pues es derivable en a). □

Comentario. En la tercera igualdad hemos sumado y restado un término para que nos aparecieran las hipótesis, para poder usarlas.

Corolario. Si g es una función derivable en a y c es una constante, entonces la función $h(x) = cg(x)$ es derivable en a y $h'(a) = cg'(a)$.

Prueba. Resulta de apalicar el teorema anterior al caso en que $f(x) = c$ para todo x. Así

$$(cg)' = c'g + cg' = 0g + cg' = cg'.$$

Proposición. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f(x) = x^n$. Entonces,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Por ejemplo, $(x^8)' = 8x^7$.

Notación. La expresión $(x^8)'$ representa un abuso de notación, ya que son las funciones las que se derivan, pero, en principio, x^8 es no es una función, sino el valor en x de la función $x \mapsto x^8$. Otra forma de escribir la derivada de esta función en x es

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) = 8x^7, \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dx^8}{dx} = 8x^7.$$

Prueba de la proposición. La hacemos por inducción. Para $n = 1$ tenemos $f'(x) = 1x^0 = 1$, que ya conocíamos.

Suponemos ahora que para $f(x) = x^k$ vale $f'(x) = kx^{k-1}$, y queremos deducir de allí que si $g(x) = x^{k+1}$, entonces $g'(x) = (k+1)\,x^k$. Escribimos

$$x^{k+1} = x^k x$$

y aplicamos la regla para derivar el producto:

$$g'(x) = \left(x^k\right)' x + x^k\,(x)' = kx^{k-1}x + x^k 1 = (k+1)\,x^k.$$

Ejemplo. Si $f(x) = x^6 + 2x^4 + \pi$, entonces $f'(x) = 6x^5 + 8x^3$.

Ejemplo. Calcular la derivada de $g(x) = (x^5+1)(x^2-3)$.

$$g'(x) = 5x^4\left(x^2-3\right) + \left(x^5+1\right)2x^2 = 7x^6 - 15x^4 + 2x.$$

Teorema. Si g es derivable en a y $g(a) \neq 0$, entonces la función $\frac{1}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Ejemplo. Hallar la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$. Calculamos

$$f'(x) = -\frac{4x^3}{\left(x^4+1\right)^2}.$$

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$? La pendiente buscada es

$$f'(1) = -\frac{4}{(1+1)^2} = -1.$$

Ejemplo. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular la derivada de

$$f(x) = \frac{1}{x^m}.$$

Tenemos que

$$f'(x) = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}}.$$

Comentario. Observamos que lo anterior equivale a

$$f(x) = x^{-m} \qquad \text{con} \qquad f'(x) = -mx^{-m-1},$$

que es una extensión a exponentes enteros de la fórmula que conocíamos para exponentes naturales.

Prueba del teorema. Como g es derivable en a, entonces g es continua en a. Por el el lema de acotación local de las funciones continuas, existe $\delta > 0$ tal que $g(a+h) \neq 0$ si $|h| < \delta$. Así que para esos h podemos dividir por $g(a+h)$.

Calculamos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)\,g(a)} \\
&= -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que g es continua en a, por ser derivable en a. □

Teorema (derivada del cociente). Si f y g son dos funciones derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en a y se cumple que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f'(a)\,g(a)}{g(a)^2}.$$

Prueba. Escribimos $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$. Así,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

como queríamos. □

Ejemplo. Si $h(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, entonces

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x^3)'(x^2+1) - (x^2+1)'x^3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^2+1) - 2xx^3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Proposición (derivadas de las funciones sen, cos y tan). Se tiene que

$$\operatorname{sen}' = \cos, \qquad \cos' = -\operatorname{sen} \qquad \text{y} \qquad \tan' = \frac{1}{\cos^2}.$$

Prueba. Calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Hemos usado el límite notable $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ y el ejercicio 9 (d) del práctico 4.
La verificación de la segunda afirmación queda como ejercicio.
Finalmente,

$$\tan' = \left(\frac{\operatorname{sen}}{\cos}\right)' = \frac{\cos\cos - (-\operatorname{sen})\operatorname{sen}}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \operatorname{sen}^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2},$$

como queríamos.

Teorema (regla de la cadena, derivada de la composición). Si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a y vale

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\, g'(a).$$

Ejemplo. Hallar $h'(x)$, donde $h(x) = (x^5+1)^8$.

Sean $g(x) = x^5 + 1$ y $f(y) = y^8$. Tenemos que $h = f \circ g$ y sabemos que $g'(x) = 5x^4$ y $f'(y) = 8y^7$. Luego

$$h'(x) = 8\left(x^5+1\right)^7 5x^4 = 40x^4\left(x^5+1\right)^7.$$

Ejemplo. Hallar la derivada de

$$h(x) = \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Escribimos h como composici'on de tres funciones:

$$x \mapsto \frac{1}{x^4}, \qquad y \mapsto \operatorname{sen} y, \qquad z \mapsto z^3.$$

Recordamos que

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = \left(x^{-4}\right)' = -4x^{-4-1} = -\frac{4}{x^5}.$$

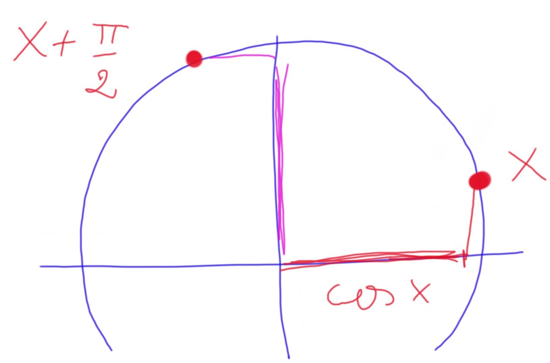
Aplicando la regla de la cadena reiteradas veces tenemos

$$h'(x) = 3\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x^4}\right)\cos\left(\frac{1}{x^4}\right)\left(-\frac{4}{x^5}\right).$$

Ejemplo. Usando la regla de la cadena tenemos otra forma de mostrar que $\cos' = -\operatorname{sen}$, recurriendo a la identidad

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Los detalles se dejan como ejercicio.



Prueba de la regla de la cadena. Sabemos que

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}, \\ f'(g(a)) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k}. \end{aligned}$$

Queremos calcular $(f \circ g)'(a)$. Planteamos

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h}.$$

Como queremos usar lo que sabemos, dividimos y multiplicamos por $g(a+h) - g(a)$, obteniendo

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Para eso necesitamos $g(a+h) - g(a) \neq 0$ para h próximo a cero. Eso nos lleva agregar una hipótesis: que $g'(a) \neq 0$. En ese caso,tenemos que existe $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$ se cumple que $\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \neq 0$, y por lo tanto $g(a+h) - g(a) \neq 0$.

Llamamos $k = k(h) = g(a+h) - g(a)$, que tiende a cero para $h \to 0$, pues g es continua (ya que es derivable). Así, $g(a+h) = g(a) + k$, y podemos escribir

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{k \to 0} \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(g(a))\, g'(a),\end{aligned}$$

como queríamos.

El cambio de variable de h a k se justifica con lo que sabemos del límite de la composición de funciones. Las funciones a componer son

$$\begin{aligned} h &\mapsto g(a+h) - g(a), \\ k &\mapsto \begin{cases} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} & \text{si } k \neq 0, \\ f'(g(a)) & \text{si } k = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Notar que la última función que se aplica, como es requerido, es continua en $g(a)$.

En conclusión, no hemos demostrado el teorema en su generalidad, sino el caso en que $g'(a) \neq 0$. Para el caso en que $g'(a) = 0$ se usan otros argumentos; no lo hacemos. $\square$

Sea f una función inyectiva y continua en el intervalo abierto A. y sea B la imagen de f. Entonces existe la función inversa $f^{-1} : B \to A$.

Ya mencionamos en otra sección que B es un intervalo abierto. Dado $b \in B$, el siguiente teorema da condiciones suficientes para que la derivada de f^{-1} en b exista, y en este caso, su valor.

Teorema (derivada de la inversa). Sea f una función inyectiva y continua en el intervalo abierto A. Sea B la imagen de f y sea $b \in B$. Entonces

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \tag{2}$$

si se cumple que

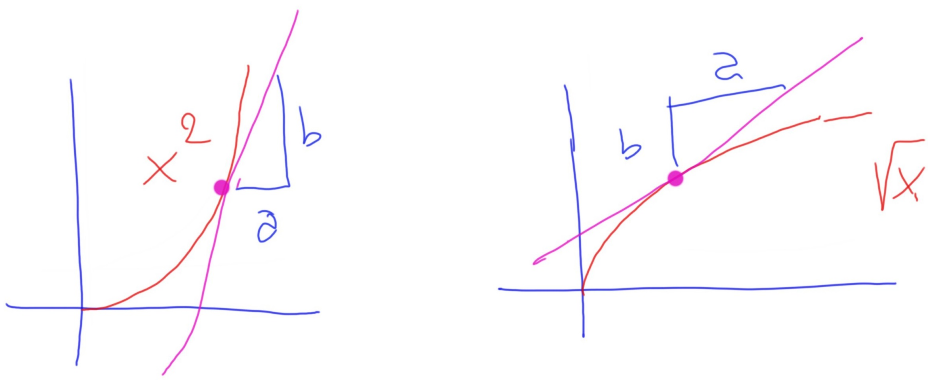
$$f' \text{ es derivable en } f^{-1}(b) \qquad \text{y} \qquad f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0. \tag{3}$$

Observaciones. 1) El requerimiento (3) es solo lo que se necesita para que la expresión (2) tenga sentido.

2) Para el caso de

$$\begin{array}{rcll} f & : & (0,\infty) \to (0,\infty), & f(x) = x^2; \\ f^{-1} & : & (0,\infty) \to (0,\infty)\ , & f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \end{array}$$

visualizamos en el dibujo que en los puntos correspondientes de los gráficos de f y f^{-1}, las rectas tangentes tienen pendientes una la inversa de la otra.



Proposición (derivada de la raíz n-ésima). Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Entonces

$$g'(x) = \frac{1}{n} x^{1-\frac{1}{n}}$$

Observaciones. 1) Si n es impar, se puede tomar $\mathbb{R} - \{0\}$ como el dominio de g (ya vimos, por ejemplo, que la raíz cúbica no es derivable en cero).

2) La fórmula sigue el mismo patrón que la derivada de una potencia con exponente entero.

Prueba. Notamos que $g = f^{-1}$, donde $f(y) = y^n$ (con lo cual, $f'(y) = ny^{n-1}$. Por el teorema,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \\ &= \frac{1}{n\left(f^{-1}(x)\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Ejercicio. Sea $q = \frac{m}{n}$ un número racional, con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$g(x) = x^q = x^{\frac{m}{n}}.$$

Entonces

$$g'(x) = qx^{q-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

(de nuevo se repite el patrón de la derivada de una pontencia con exponente entero).

Sugerencia: Escribir g como composición de las funciones

$$x \mapsto x^{\frac{1}{n}}, \qquad y \mapsto y^m,$$

cuyas derivadas conocemos.

Tenemos por ejemplo que

$$\left(x^{\frac{7}{5}}\right)' = \frac{7}{5} x^{\frac{7}{5}-1} = \frac{7}{5} x^{\frac{2}{5}}.$$

Prueba del teorema. No probamos que f^{-1} es derivable en x. Aceptando que lo es, mostramos que la expresión (2) es válida.

Sabemos que para todo s se cumple que

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

Derivamos miembro a miembro, aplicando la regla de la cadena, y obtenemos

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x) = 1,$$

para todo x. Despejando se obtiene la fórmula buscada. $\square$

Ejemplo (derivada del arcoseno). Recordemos que

$$\operatorname{sen} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$$

es biyectiva y su inversa es

$$\operatorname{sen}^{-1} = \operatorname{arcsen} : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(en realidad, también podemos considerar intervalos cerrados, pero para derivar los tomamos abiertos).

Por la regla para derivar la inversa,

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \left(\operatorname{sen}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}. \tag{4}$$

Ahora buscamos una expresión más sencilla. Nos preguntamos: ¿Cuál es el coseno de un ángulo entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno es x? La restricción para el ángulo se debe al dominio del arcsen (si no, la respuesta no es unívoca, ¿verdad?).

Obtendremos

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}, \tag{5}$$

con lo cual, remplazando en (4),

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

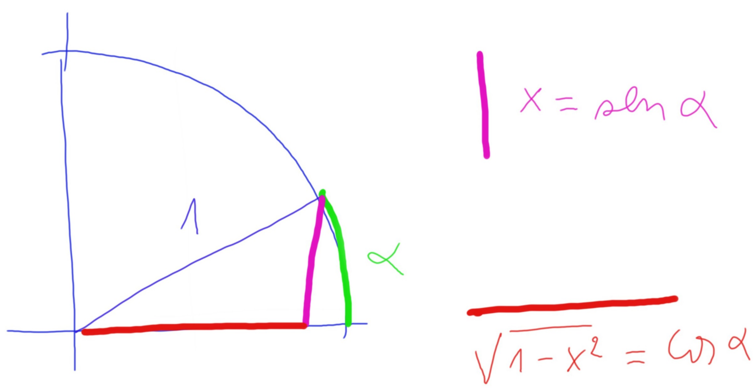
Llamamos $\alpha = \operatorname{arcsen}(x)$, o equivalentemente,

$$\operatorname{sen}\alpha = x \qquad \text{y} \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

y justificamos (5) de dos maneras:

1) Geométricamente: Observando la circunferencia trigonométrica tenemos que

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}.$$



2) Analíticamente: Sabemos que $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1$, con lo cual,

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x) \\ &= (\cos(\operatorname{arcsen} x))^2 + (\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2 \\ &= (\cos(\operatorname{arcsen} x))^2 + x^2. \end{aligned}$$

Despejando,

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2},$$

como queríamos. Pregunta: ¿Por qué elegimos la raíz positiva de $1 - x^2$?