Análisis Matemático I

Algunos ejercicios del Práctico 6

Eduardo G. Andreozzi*

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba

5 de junio de 2023

En lo que sigue se resuelven y se dan ayudas para algunos ejercicios del Práctico 6. Sólo se presentan en detalle los más complicados, según mi opinión y mi experiencia en las clases prácticas.

Ejercicio 1

(a) Demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$ para $a \neq 0$.

El cálculo del límite que define a la derivada de f en $x = a$ es directo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h}{a(a+h)} \right) = -\frac{1}{a} \left(\lim_{h \to 0} \frac{1}{a+h} \right) = -\frac{1}{a^2}.$$

De lo anterior tenemos por definición que $f'(a) = -1/a^2$ si $a \neq 0$. □

(b) Demostrar que la recta tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a)$ no corta la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.

Sea T_a la recta tangente al gráfico de $f(x) = 1/x$ en el punto $(a, 1/a)$. Por el resultado del inciso **(a)** anterior tenemos que

$$T_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a) = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}.$$

Razonando por absurdo, si existiera $b \neq a$ no nulo tal que T_a corta al gráfico de f en el punto $(b, 1/b)$, se cumpliría que $T_a(b) = f(b)$, o equivalentemente

$$-\frac{1}{a^2}(b-a) + \frac{1}{a} = \frac{1}{b}.$$

Pero

$$-\frac{1}{a^2}(b-a) + \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}(a-b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}(a-b) = \frac{a-b}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{ab} \Leftrightarrow a = b.$$

*Comisión 5 (Tarde)

Como llegamos a una contradicción a la suposición inicial ($a \neq b$), un tal b no existe. $\square$

(c) Demostrar que si $h(x) = \sqrt{x}$, entonces $h'(a) = a^{-1/2}/2$ para $a > 0$.

El cálculo del límite que define a la derivada de $h(x) = \sqrt{x}$ en $x = a$ es directo:

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(a+t)-h(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{a+t}-\sqrt{a}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t(\sqrt{a+t}+\sqrt{a})} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+t}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

De lo anterior tenemos por definición que $h'(a) = a^{-1/2}/2$ para $a > 0$. $\square$

(d) Si $f(x) = \lfloor x \rfloor$, hallar f' donde sea posible.

Como el dominio de f' debe excluir como mínimo a todos los puntos de discontinuidad de f, deducimos que ningún número entero está en este dominio.

Si ahora $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k < a < k+1$, y como $f(x) = k$ para todo $x \in (k, k+1)$, tenemos que $f'(a) = 0$; los detalles finos de esto último quedan como ejercicio.

Concluimos entonces que $\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f')$.

Ejercicio 2

Sea f una función derivable en el intervalo abierto (a, b) y $c \in \mathbb{R}$. En cada caso hallar g' en su respectivo dominio.

(a) $g(x) = f(x + c)$.

El dominio de g consiste en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $x + c \in (a, b)$. Queda de ejercicio convencerse de que $\mathrm{Dom}(g) = (a - c, b - c)$.

Ahora tomemos $x \in (a - c, b - c)$ fijo. Entonces existe $y \in (a, b)$ tal que $x = y - c$. Calculemos el límite que define a $g'(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+c+h)-f(x+c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = f'(y) = f'(x+c).$$

De lo anterior deducimos que $g'(x) = f'(x + c)$ para todo $x \in (a - c, b - c)$, y entonces $\mathrm{Dom}(g') = \mathrm{Dom}(g)$. $\square$

(b) $g(x) = f(cx)$.

Si $c = 0$ entonces $g(x) = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en cuyo caso $g' = 0$ en $\mathbb{R}$.

Pasando rápido al caso $c \neq 0$, el dominio de g consiste en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $cx \in (a,b)$. Igual que antes, queda de ejercicio convencerse de que $\mathrm{Dom}(g) = (a/c, b/c)$ si $c > 0$, y $\mathrm{Dom}(g) = (b/c, a/c)$ si $c < 0$.

Ahora tomemos $x \in \mathrm{Dom}(g)$ fijo. Entonces existe $y \in (a,b)$ tal que $x = y/c$. Calculemos el límite que define a $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c(x+h)) - f(cx)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(y+ch)-f(y)}{h} \\
&= c\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(y+ch)-f(y)}{ch}\right) \\
&= c\left(\lim_{t\to 0} \frac{f(y+t)-f(y)}{t}\right) \\
&= cf'(y) \\
&= cf'(cx).
\end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $g'(x) = cf'(cx)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(g)$, y entonces $\mathrm{Dom}(g') = \mathrm{Dom}(g)$. $\square$

(c) $g(x) = f(x)^2$.

El dominio de g coincide con el dominio de f, es decir $\mathrm{Dom}(g) = (a,b)$.

Ahora tomemos $x \in (a,b)$ fijo, y calculemos el límite que define a $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)^2 - f(x)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))\,(f(x+h)+f(x))}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}(f(x+h)+f(x))\right) \\
&= 2f(x)f'(x).
\end{aligned}$$

En el último paso se usó el hecho de que si f es derivable en x, f es también continua en x, de manera que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Del primer cálculo anterior deducimos que $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, y entonces $\mathrm{Dom}(g') = \mathrm{Dom}(g)$.

Ejercicio 3

Sea f una función derivable en a. Demostrar que $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Ayuda: En el Ejercicio **9.e** del Práctico 4 tuvieron que probar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$ para una función f definida en un entorno de a. Usen apropiadamente este resultado acá.

Ejercicio 5

(a) Sea h una función tal que $|h(x)| \leq x^2$ para todo x. Demostrar que h es derivable en 0 y calcular $h'(0)$.

Primero hay que notar que $h(0) = 0$, evaluando en $x = 0$ la desigualdad $|h(x)| \leq x^2$.
Calculemos ahora el límite que define a $h'(0)$ en valor absoluto:

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{h(t)-h(0)}{t}\right| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{h(t)}{t}\right| \leq \lim_{t\to 0}\left|\frac{t^2}{t}\right| = \lim_{t\to 0}|t| = 0.$$

Por el Ejercicio **9.d** del Práctico 4, lo anterior nos dice que

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t} = 0,$$

y por lo tanto h es derivable en $x = 0$ y $h'(0) = 0$. □

(b) Probar que la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, calcular g' y probar que no es continua en 0.

Como $|g(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el inciso **(a)** anterior implica que g es derivable en $x = 0$, a partir de lo cual deducimos que g es derivable en todo $\mathbb{R}$.
Además, por lo anterior podemos calcular g' como

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

El sumando $\cos(1/x)$ es el que arruina la continuidad de g' en $x = 0$. Queda como ejercicio completar los detalles.

Ejercicio 6

Calcular $f^{(n)}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^{10}$.

Ayuda: Justifiquen correctamente que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{10!}{(10-n)!}x^{10-n} & \text{si } n \leq 10 \\ 0 & \text{si } n \geq 11. \end{cases}$$

Utilicen la convención $0! = 1$. $\square$

(b) $f(x) = \cos x$.

Ayuda: Justifiquen correctamente que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -\cos x & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

$\square$

(c) $f(x) = 1/x$.

Ayuda: Justifiquen correctamente (por inducción) que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}.$$

$\square$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$.

Ayuda: Justifiquen correctamente (por inducción) que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{y} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,(2n-3)!!}{2^n\, x^{n-1/2}} \qquad \text{si } n \geq 2.$$

Utilicen la siguiente definición: dado $n \in \mathbb{N}$, se define $n!!$, el *doble factorial de* n, como el producto de todos los números naturales entre 1 y n que tienen la misma paridad que n, es decir

$$n!! = n(n-2)(n-4)\dots 1.$$

$\square$

Ejercicio 9

(a) Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

Calculemos el límite que define a $f'(0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hg(h)}{h} = \lim_{h\to 0} g(h) = g(0).$$

De lo anterior deducimos que f es derivable en 0 y $f'(0) = g(0)$. $\square$

(b) Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0.

Definiendo

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es claro que $f(x) = xg(x)$, y entonces sólo queda verificar que g es continua en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = g(0).$$

Ejercicio 12

(a) Se define la función $\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ como la inversa de la función $\operatorname{sen} x$ restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Demuestre que $\operatorname{arc\,sen}'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$.

Como $\cos x > 0$ si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, para estos x se cumple que $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$.

Si ahora fijamos $s \in (-1, 1)$ tenemos que $\operatorname{arc\,sen} s \in (-\pi/2, \pi/2)$, por lo que usando lo anterior deducimos que

$$\operatorname{arc\,sen}'(s) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arc\,sen} s)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} s)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} s)}} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

En particular, el dominio de la función $\operatorname{arc\,sen}'(s)$ es el intervalo abierto $(-1, 1)$. $\square$

(b) Análogamente se define $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$. Demuestre que $\arccos'(s) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-s^2}}$.

Como $\operatorname{sen} x > 0$ si $x \in (0,\pi)$, para estos x se cumple que $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2(x)}$.

Si ahora fijamos $s \in (-1,1)$ tenemos que $\arccos s \in (0,\pi)$, por lo que usando lo anterior deducimos que

$$\arccos'(s) = \frac{1}{\cos'(\arccos s)} = \frac{-1}{\operatorname{sen}(\arccos s)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos s)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

En particular, el dominio de la función $\arccos'(s)$ es el intervalo abierto $(-1,1)$. □

(c) Se define ahora $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$ como la inversa de la función $\tan x$ restringida al intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$. Demuestre que $\arctan'(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$.

Recordando que

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \qquad \text{si } x \in (-\pi/2,\pi/2),$$

tomando $s \in \mathbb{R}$ fijo tenemos que $\arctan s \in (-\pi/2,\pi/2)$. Entonces usando lo anterior deducimos que

$$\arctan'(s) = \frac{1}{\tan'(\arctan s)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan s)} = \frac{1}{1+s^2}.$$

En particular, el dominio de la función $\arctan'(s)$ es todo $\mathbb{R}$.