Funciones

Sean A y B dos conjuntos. Una **función** $f : A \to B$ asigna a cada elemento $a \in A$ un elemento $b \in B$ que se denota $f(a)$.

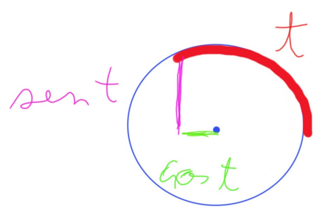
El conjunto A se llama el **dominio** de f y B es el **conjunto de llegada** de f.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2+5}{x^4+3}, \\ g &: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt[n]{x} \qquad (n \in \mathbb{N}), \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \sqrt[n]{x} \qquad (n \text{ impar}). \end{aligned}$$

Ya comentamos la existencia de $\sqrt{x}$ para $x > 0$ cuando aprendimos la propiedad del supremo. Más adelante justificaremos la existencia de g y h.

Consideraremos también las funciones coseno y sen definidas geométricamente mediante el siguiente dibujo (la circunferencia tiene radio 1)



(no explicaremos su existencia a partir de las 14 propiedades de $\mathbb{R}$).

Definición. Una función $f : A \to B$ se dice **inyectiva** si para todo $x, y \in A$ con $x \neq y$ se cumple que $f(x) \neq f(y)$. Equivalentemente,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, no es inyectiva, pues $f(1) = f(-1)$, pero $1 \neq -1$. Cuando estudiamos las propiedades de los números reales vimos que $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ sí es inyectiva.

Definición. Sea $f : A \to B$ una función. La **imagen** de f es

$$\{y \in B \mid \text{existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

La función f se dice **suryectiva** si la imagen de f es igual a B. En este caso también se dice que f es **sobre** B.

Nota. Si no se especifica, se entiende que el dominio de una función es el conjunto de números para los cuales la expresión tiene sentido. Por ejemplo, para $f(x) = \frac{x}{x-5}$ se entiende que el dominio de f es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$. Pero también se puede definir una función $g : (5,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{x-5}$. Se tiene que f y g son funciones distintas (pues sus dominios son distintos).

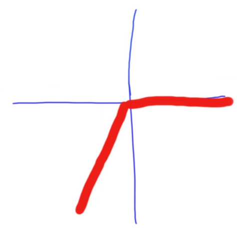
Ejemplo. Hallar el dominio y la imagen de f. Indicar si f es sobre $\mathbb{R}$

$$f(x) = x - |x|$$

Tenemos

$$f(x) = \begin{cases} x - x & \text{si } x \geq 0, \\ x - (-x) & \text{si } x < 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función f no es inyectiva, pues, por ejemplo, $f(3) = f(4) = 0$ pero $3 \neq 4$.



Veamos que Imagen $(f) = (-\infty, 0]$. Para demostrar la igualdad de dos conjuntos, verificamos las dos inclusiones.

$\subset$) Sea $y \in$ Imagen (f). Tenemos que $y = f(x)$ para algún $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \geq 0$, $y = f(x) = 0 \in (-\infty, 0]$.
Si $x < 0$, $y = f(x) = 2x < 0$, luego $y \in (-\infty, 0]$.

$\supset$) Sea $y \in (-\infty, 0]$, o sea, $y \leq 0$.
Si $y = 0$, $y = f(0)$.
Si $y < 0$, planteamos $y = 2x$. Despejando, obtenemos que $y = f(x)$ con $x = y/2$.

La función no es sobre $\mathbb{R}$ pues su imagen es $(-\infty, 0]$, que está contenido propiamente en $\mathbb{R}$ (los números positivos no están en la imagen).

Ejemplo. Hallar el dominio y la imagen de la función f, donde

$$f(x) = \frac{x}{x+3}.$$

Indicar si f es inyectiva o suryectiva.

Dominio $(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\} = \mathbb{R} - \{-3\}$.

Imagen $(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x+3} \text{ para algún } x \neq 3\right\}$

Consideramos siempre $x \neq -3$ y planteamos

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{x+3} \quad \text{sii} \quad (x+3)\, y = x \quad \text{sii} \quad xy + 3y = x \\ \text{sii} \quad 3y &= x - xy \quad \text{sii} \quad 3y = x(1-y) \quad \text{sii} \quad x = \frac{3y}{1-y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ese cálculo nos lleva a proponer

$$\text{Imagen } (f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

(en particular no es sobre $\mathbb{R}$, pues 1 no está en la imagen).

Lo verificamos mostrando las dos inclusiones.

$\subset$) Sea $y \in$ Imagen (f). Debemos mostrar que $y \neq 1$. Esto se cumple, ya que por (1), $y = 1$ implica $3 = x\,(1-1) = 0$, absurdo.

$\supset$) Si $y \neq 1$, vemos en (1) que $x = \dfrac{3y}{1-y}$ satisface $f\,(x) = y$, con lo cual $y \in$ Imagen (f).

Ahora verificamos que f es inyectiva, de dos formas:

Primera forma. Sean $a \neq -3 \neq b$. Si $f\,(a) = f\,(b)$, entonces

$$\frac{a}{a+3} = \frac{b}{b+3}.$$

Equivalentemente,

$$a\,(b+3) = b\,(a+3) \qquad \text{sii} \qquad ab + 3a = ba + 3b \qquad \text{sii} \qquad a = b.$$

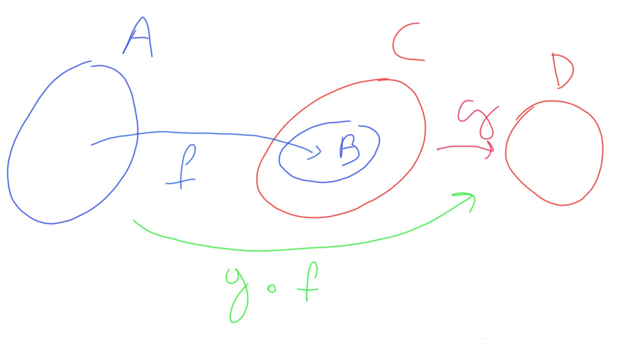
Segunda forma. En los cálculos para encontrar la imagen vimos que dado $y \neq 1$, existe un único x tal que $y = f\,(x)$ (x queda determinado por $x = \frac{3y}{1-7}$.

En los dos casos se concluye que f es inyectiva.

La composición de funciones

Definición. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Si $B \subset C$ se define una nueva función

$$g \circ f : A \to D, \qquad (g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x))\,.$$



Ejemplo. Sean

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f\,(x) = \frac{1}{x-1}, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g\,(x) = x^2. \end{aligned}$$

Hallar $g \circ f$ y $f \circ g$, y los respectivos dominios.

$$\begin{aligned} (g \circ f)\,(x) &= g\,(f\,(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 = \frac{1}{(x-1)^2}. \\ (f \circ g)\,(x) &= f\,(g\,(x)) = f\left(x^2\right) = \frac{1}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Dominio $(g \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}$, Dominio $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Funciones inversas

Definición. Una función $f : A \to B$ inyectiva y suryectiva se dice **biyectiva**.
Si $f : A \to B$ es biyectiva, se define la función inversa de f mediante

$$f^{-1} : B \to A, \qquad f^{-1}(y) = \text{ único } x \in A \text{ tal que } f(x) = y.$$

Tal x existe pues f es suryectiva y es único ya que f es inyectiva.

Ejemplo. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

(no es $\frac{1}{y^3}$).

Ejemplo. Hallar la inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$.
Dado $y \in \mathbb{R}$, buscamos x tal que $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 4$. O sea,

$$\frac{1}{2}x = y - 4 \qquad \text{sii} \qquad x = 2(y - 4) = 2y - 8.$$

Así, $f^{-1}(y) = 2y - 8$.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, no es inyectiva pues $f(1) = f(-1)$. Luego no tiene inversa.
Pero $g : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $g(x) = x^2 + 1$, sí es biyectiva y su inversa es

$$g^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty), \qquad g^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}.$$

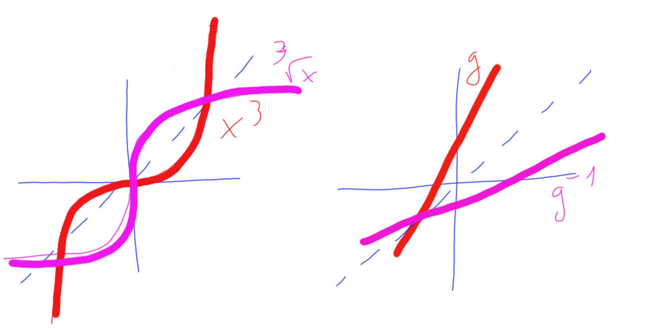
Comentario. La función f^{-1} deshace lo que hace f, y viceversa. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, tenemos que $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ y par todo x resulta

$$\sqrt[3]{x^3} = x \qquad \text{y} \qquad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

Gráfico de la función inversa. Como se intercambian los roles de x e y, el gráfico de f^{-1} se obtiene reflejando el gráfico de f respecto a la diagonal principal.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3, \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}; \\ g(x) &= 2x + 4, \qquad g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2. \end{aligned}$$



Funciones inversas de seno y coseno

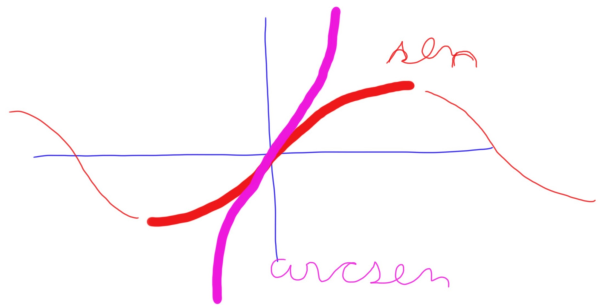
La función $\operatorname{sen}:\mathbb{R}\to[-1,1]$ es suryectiva pero no inyectiva (por ejemplo, $\operatorname{sen}(0)=\operatorname{sen}(\pi)$). Pero

$$\operatorname{sen}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$

es biyectiva (por abuso de notación, conservamos el nombre al restringir el dominio). Luego tiene una inversa

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen} &= \operatorname{sen}^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\\ \operatorname{arcsen}(y) &= \text{único } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } \operatorname{sen}x=y.\end{aligned}$$

Por ejemplo, $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ pues $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.



De manera análoga,

$$\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$$

es biyectiva. Luego tiene una inversa

$$\arccos=\cos^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi].$$

El gráfico de arccos se deja como ejercicio.

Suma, multiplicación y división de funciones

Sean $f:A\to\mathbb{R}$, $g:A\to\mathbb{R}$ dos funciones con el mismo dominio A. Se definen

$$f+g:A\to\mathbb{R},\qquad fg:A\to\mathbb{R},\qquad \frac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$$

(en el último caso, si $g(x)\neq 0$ par todo $x\in A$) mediante

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad (fg)(x)=f(x)\,g(x),\qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Gráficos de funciones emparentadas

Dado el gráfico de una función f, nos interesa describir el gráfico de una función emparentada g a partir del gráfico de f.

Ejemplo. Sea $g(x) = f(x) + 3$. El gráfico de g se obtiene trasladando el gráfico de f tres unidades hacia arriba.

Ejemplo. Sea $g(x) = f(-x)$. El gráfico de g se obtiene reflejando el gráfico de f respecto de eje y.

Ejercicio. Sea $g(x) = -f(x)$. ¿Cómo se obtiene el gráfico de f a partir del de f?

Ejemplo. Sea $g(x) = 3f(x)$. El gráfico de g se obtiene expandiendo (o estirando) el gráfico de f en sentido vertical, manteniendo fijo el eje x.

Ejercicio. Sea $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$. ¿Cómo se obtiene el gráfico de f a partir del de f?

Ejercicio. Sean $g(x) = f(3x)$ y $h(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$. ¿Cómo se obtienen los gráficos de g y de h a partir del de f?

Ejemplo. Sea $g(x) = f(x-3)$. El gráfico de g se obtiene trasladando el gráfico de f tres unidades hacia la **derecha**. Informalmente: Vamos a buscar el valor de f que está tres unidades a la izquierda. En el dibujo, la función de arriba es f y la de abajo es g.