

Practico 5 - Continuidad

1 Teorico

- Definicion: Sea A un intervalo abierto que contiene al punto a . Se dice que la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- Proposicion: Si f y g son continuas en a , entonces $f+g$, $f \cdot g$ y f/g y son continuas en a (en el último caso, si $g(a) \neq 0$). Además, si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a .

- Proposicion: Sea A un intervalo abierto. La función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice continua en A si f es continua en a para todo $a \in A$.

- La función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice continua si f es continua en c para todo $c \in (a, b)$ y además:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

- Primer Teorema Fuerte:** Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe un número $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

- Corolario Primer Teorema Fuerte:** Si la función g es continua en $[a, b]$ y satisface $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $g(\alpha) = 0$.

- Teorema de los Valores Intermedios** (Corolario del primer Teorema Fuerte): Si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $g(a) < c < g(b)$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $g(\alpha) = c$.

- Tercer Teorema Fuerte.** Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo. Más precisamente: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

2 Practico

- Decir en qué puntos son continuas las siguientes funciones y justificar.

a)

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{x} & x < 0 \\ 5 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+10x}-1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{\sin(5x)}{5x} = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+10x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+10x}+1} = \frac{1}{2}, \text{ en consecuencia:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+10x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

- El valor de $f(0) = 5$, sin embargo los limites laterales no coinciden, por lo cual la funcion no es continua en $x = 0$.
- Para el resto de los puntos no hay problema, la funcion es continua.

c)

d) $f(x) = [x]$, Aqui puede elegir la funcion parte entera superior o inferior

- Si $x = d + \delta$, donde $d \in \mathbb{Z}$ y $0 < \delta < 1$
- Entones: $[x] = d$ (Parte entera inferior)
- $\lim_{x \rightarrow d^-} [x] = d - 1$
- $\lim_{x \rightarrow d^+} [x] = d$
- De manera que la funcion no es continua en los numeros enteros.

e) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$

- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = 0$
- Si $0 < x < 1$, luego $\frac{1}{x} = d + \delta$, con $d \in \mathbb{Z}$
- Como volvemos al caso anterior para $0 < x < 1$ tendremos discontinuidades en estos valores de x . Es decir, la funcion no es continua en $x = \frac{1}{d}$.

2.

a) Probar que si $|f(x)| \leq |x|$ entonces f es continua en 0

- Considere $g(x) = f(x) - x$, podemos demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ utilizando la definicion de limite.
- En efecto: $|f(x) - x| \leq |f(x)| + |x| \leq 2|x|$, luego:
- $|x| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$, claramente para que esto pueda cumplirse, debe cumplirse que $f(x)$ tienda a cero cuando $x \rightarrow 0$
- Ahora lo anterior solo nos dice que el limite existe y es cero.
- Otra forma de verlo: Lema del sandwich: $|f(x)| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$
- La ventaja de esta expresion es ademas que , queda claro que si evaluamos la misma: $0 \leq f(0) \leq 0$ por lo cual si o si debe cumplirse que: $f(0) = 0$

b) Esta vez considere: $|f(x)| \leq |g(x)|$, g es continua en 0 y $g(0) = 0$, entonces f es continua en cero.

- Nuevamente aplicamos lo mismo: $-|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|$
- Como g es continua en cero , siendo en particular que $g(0) = 0$ entonces tendremos que , por lema del sandwich: $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$ por otro lado ademas si evaluamos la funcion: $0 \leq f(0) \leq 0$ lo cual implica que $f(0) = 0$ lo que nos da dicha continuidad.

3. Determinar para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F , definida en toda la recta real, que extienda a f .

a) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

- El problema es que esta función no está definida en $x = -1, 1$ pero sí para el resto de los valores
- Calculamos el límite asociado a estos valores:
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1$ (pues estamos examinando la situación $x \neq 1$)
 Claramente entonces: $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$
- Lo mismo sucedería cuando el límite sea $x \rightarrow -1$
- En consecuencia la redefinición sería la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} & x \neq 1, -1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

- De entrada esta función no está definida para $x = 0$ podemos estudiar sus límites:
- $x \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -\frac{x}{x} = -1$; $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$
- No vamos a poder extender esta función ya que directamente el límite no existe.

c) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

- por el lema del sandwich podemos demostrar que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$
- Como la función no está definida en cero, pues simplemente extendemos:
- $\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4.

5.

6.

7.

8.

9.

- a) Probar que si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$ entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

- Considere la función $h(x) = f(x) - g(x)$, por la proposición, la suma de funciones continuas será continua en cada punto $x \in (a, b)$ por otro lado, debería cumplirse la definición de continuidad en un intervalo cerrado:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - g(x) = f(a) - g(a) = \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) - g(x) = f(b) - g(b) = \beta < 0$$

- Esta función satisface las hipótesis del primer teorema fuerte, de manera que debe existir $x_0 \in (a, b)$ tal que $h(x_0) = 0$, para este caso se cumple: $f(x_0) = g(x_0)$
- b) Mostrar que la ecuación $\sin(x) = x + 1$, tiene al menos una solución. Graficar las funciones $\sin(x)$ y $x + 1$ en el mismo sistema de ejes coordenados.
 - Con la misma idea que a) conformamos la función: $h(x) = x + 1 - \sin(x)$
 - Esta función será continua. Si $x = 0 \Rightarrow h(0) = 1 > 0$ por otro lado: $h(-\pi) = -\pi + 1 < 0$
 - Al satisfacer por continuidad el primer teorema fuerte, tendremos que dicha función debe cruzar por el cero en el intervalo: $(-\pi, 0)$
- c) Mostrar que existe un $x \in [0, \pi/2]$ tal que $x^3 \sin^7(x) = 2$
 - Conformamos una función: $h(x) = 2 - x^3 \sin^7(x)$
 - $h(0) = 2 > 0$; $h(\pi/2) = 2 - (\frac{\pi}{2})^3 \approx -1.9 < 0$
 - Nuevamente podemos utilizar el Teorema del Valor Intermedio.
- d) Mostrar que en el plano, un círculo de radio 1 y un cuadrado de lado 2 pueden intersectarse en una región cuya área sea exactamente 1.337..
 - La función que describe la intersección en términos de área, debería ser continua dado que el área es una función continua. Esta función describe la intersección entre un cuadrado inscrito en un círculo
 - Dicha función debería variar entre: 0 denotando que no hay intersección, hasta el máxima área que debería haber con un cuadrado, de lado 2. Resultando en un área de 4.
 - Como satisface la proposición del Teorema del Valor intermedio, entonces debe existir dicho valor.

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.

- a) Si f es continua y acotada en \mathbb{R} entonces f alcanza un mínimo.
 - No es verdadero, considere $f(x) = x$ en (a, b)
 - Si bien la función está acotada, la función no alcanza un mínimo dado que a no es alcanzado por f en dicho intervalo. Es decir, supremo e ínfimo sí tiene, pero no tiene máximo ni mínimo.
- b) Si $|f|$ es continua en a entonces f es continua en a .
 - Esto es falso: Considere $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- c) Existe un número que es exactamente una unidad mayor que su cubo.
 - Es decir, hay una solución para la ecuación: $x = x^3 + 1 \Leftrightarrow 0 = x^3 - x + 1$

- Consideramos el intervalo: $[-1, 1]$ podremos aplicar el primer teorema fuerte.
 - El enunciado es Verdadero
11. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Mostrar que si f es continua, entonces tiene un punto fijo, esto es, existe un x_0 tal que $f(x_0) = x_0$. Interpretar gráficamente.
- Lo que estamos diciendo aca es que: $0 \leq f(x) \leq 1$, vamo a omitir la posibilidad que daria la solucion trivial: $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$
 - Si $f(0) \neq 0$ entonces la unica posibilidad que le queda es que: $f(0) > 0$, de la misma forma, si $f(1) \neq 1$ la unica posibilidad que queda es que $f(1) < 1$, si no de otra forma nos salimos del intervalo $[0, 1]$.
 - Si ahora consideramos la funcion $h(x) = x - f(x)$ luego $h(1) > 0$ mientras que $h(0) < 0$
 - Dicha funcion sera continua en el intervalo pues es suma de funciones continuas.
 - En consecuencia, por el primer teorema fuerte, debera existir: $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$
12. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 am y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las 7:00 pm. A la mañana siguiente baja de la cima a las 7:00 am, siguiendo el mismo camino, arriba al monasterio a las 7:00 pm. Con el teorema del valor intermedio, demuestre que hay un punto del camino por el cual el monje pasa exactamente a la misma hora de los dos dias.
13. Sea f definida y continua para todo \mathbb{R} , supongamos que f es siempre positiva tal que: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Usamos la definicion de limite: Para un dado ε $|f(x)| < \varepsilon$ si $x < x_m$ por otro lado: $|f(x)| < \varepsilon$ si $x_M < x$
 - Si tomamos $\alpha = \max(|x_m|, |x_M|)$ luego: $|f(x)| < \varepsilon$ si $|x| > \alpha$
 - En el intervalo $|x| \leq \alpha$, como f es continua, podemos aplicar el Tercer teorema fuerte, f alcanza un maximo en $[-\alpha, \alpha]$, es decir $f(x_0) \geq f(x)$ para $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$
- 14.
- a) Definir una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.
- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
- b) Definir una función que sea discontinua en $1, 1/2, 1/3, \dots$, pero continua en todos los demás puntos.
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[x]} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$
- c) Definir una función que sea discontinua en $1, 1/2, 1/3, \dots$, y discontinua en cero pero continua en todos los demás puntos.
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[x]} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
 ; esta funcion no esta definida en $x = 0$