Guia 2

1. $P=20=2a+2b \Leftrightarrow a=10-b$, $A=ba \Rightarrow A=b(10-b)=10b-b^2$
   $A=10b-b^2$
2. $A=6a^2$, $V=a^3 \Leftrightarrow a=V^{1/3} \Rightarrow A=6V^{2/3}$
3. (**Problema 1**)Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:
   a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\text{Dom } f=\{x/x\in\mathbb{R}, 1-x^2\geqslant 0\}$

      Usamos que: $\sqrt{x^2}=|x|$

      $1-x^2\geqslant 0 \Rightarrow 1\geqslant x^2 \Rightarrow 1\geqslant |x| \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$

      $\text{Dom } f=\{x/x\in\mathbb{R}, -1\leqslant x\leqslant 1\}$

   b) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$
      - Resolver de adentro hacia afuera:
      - $\sqrt{1-x^2} \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$, en ese rango ya la funcion tendra solucion.
      - $\text{Dom } f=\{x/x\in\mathbb{R}, -1\leqslant x\leqslant 1\}$

   c) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{x-2+x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$
      - Claramente el principal punto de importancia es cuando el denominador es cero.
      - $(x-1)(x-2)=0$ si $x=1$ o $x=2$, el resto de los puntos son validos
      - $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{1,2\}$

   d) $f(x)=(\sqrt{x})^2$
      - Claramente es necesario que: $x\geqslant 0$
      - $\text{Dom } f=\{x\in\mathbb{R}/x\geqslant 0\}$

   e) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } |x|>1 \Rightarrow x<-1, x>1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x|\leqslant 1 \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$
      - $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

4. (**Problema 2**)Encontrar el Dominio e imagen de las siguientes funciones:
   a) $f(x)=\frac{1}{x+3}$
      - $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-3\}$
      - Para buscar la imagen utilizo el siguiente lema:

        Para toda funcion $\text{Im } f=\{f(x)/x\in\text{Dom } f\}$
      - Es decir que puedo intentar invertir la relacion entre y, x para buscar esta imagen conociendo el dominio.

- $y=\frac{1}{x+3} \Leftrightarrow x+3=\frac{1}{y} \Leftrightarrow x=\frac{1}{y}-3$
- $y \neq 0$, Despues el resto de los valores son validos.
- $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}-\{0\}$
- Esta funcion es super enganiosa: Imaginemos que $x=-3+\frac{1}{100}$ luego: $x+3=\frac{1}{100}$ entonces: $f=100$.

b) $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$

- $\operatorname{Dom} g=\mathbb{R}$
- Para buscar la imagen nuevamente invertimos la relacion:
- $g=\frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{g} \Leftrightarrow |x|=\sqrt{\left(\frac{1}{g}-1\right)} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{g}-1\right)}$
- El dominio de esta funcion no incluye $0, \frac{1}{g}<1 \Leftrightarrow g \geqslant 1$
- $\operatorname{Im} g=\{g \in \mathbb{R} / 0<g \leqslant 1\}$
- Observacion: $\frac{1}{x^2+1}$ nunca nos va a dar un numero mayor a 1. por ejemplo:

  $x^2+1=\frac{1}{1000}+1=\frac{1001}{1000}>1$, en consecuencia: $\frac{1}{x^2+1}<1$
- La diferencia con el otro problema: $f(x)=\frac{1}{x+3}$ es que a traves de la resta ibamos a poder tener numeros mas chicos que 1.

c) $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$

- Se descartan del dominio los valores tales que: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow \sqrt{x^2}=1$
- $|x|=1 \Rightarrow x=1 \, o \, x=-1$
- $\operatorname{Dom} g=\{x \in \mathbb{R}\}-\{-1,1\}$
- Def Im g $:=\{g \in \mathbb{R} / \exists x \in \operatorname{Dom} g / g=g(x)\}$
- $g=\frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2-1=\frac{1}{g} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{g}+1 \Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{1}{g}+1} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{g}+1}$
- $g \neq 0, \frac{1}{g} \geqslant -1 \Leftrightarrow \begin{cases} g>0 \Rightarrow 1 \geqslant -g \quad -1 \leqslant g \quad g>0 \\ g<0 \Rightarrow 1 \leqslant -g \quad -1 \geqslant g \quad -1 \geqslant g \end{cases}$
- $\operatorname{Im} g=\{g \in \mathbb{R} / g>0, g \leqslant -1\}=(-\infty,-1] \cup(0, \infty)$

5. (**Problema 3**)Sea $f(x)=1/(1+x)$. Interprete los siguiente:

a) $f(f(x))$ Para cuales x tiene sentido?

- $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{-1\}$
- $f(f(x))=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}$
- $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{-1,-2\}$

- Notar que si al principio no excluyo $x=-1$ la expresion queda indefinida. Por lo cual para seguir operando tengo que primero excluir el caso $x=-1$ para luego encontrar que $x=-2$ tampoco puede estar en la solucion.

b) $f(1/x)$

- $f(1/x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}$, $x\neq 0$
- $f(1/x)=\frac{x}{x+1}$, $x\neq -1$
- Dom $f=\mathbb{R}-\{-1,0\}$

c) $f(cx)=\frac{1}{1+cx}$

- $1+cx=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{c}$
- Dom $f=\mathbb{R}-\{-1/c\}$

6. (**Problema 4**)Sean $C(x)=x^2$, $H(x)=\frac{1}{x}$, $S(x)=\text{sen}(x)$

a) Determinar: $(C\circ H)(y)$

- $(C\circ H)(y)=\left(\frac{1}{y}\right)^2=\frac{1}{y^2}$

b) Determinar: $(C\circ H\circ S)(t)+(S\circ H)(t)$

- $(C\circ H\circ S)(t)=\left(\frac{1}{\text{sen}\, t}\right)^2=\frac{1}{\text{sen}^2 t}$
- $(S\circ H)(t)=\text{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$
- $(C\circ H\circ S)(t)+(S\circ H)(t)=\frac{1}{\text{sen}^2 t}+\text{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$

7.

a) Para cada conjunto $A\subseteq\mathbb{R}$, definimos la funcion C_A como siguie:

$$C_J=\begin{cases}1 & \text{si}\, x\in J\\ 0 & \text{si}\, x\notin J\end{cases}$$

Encontrar expresiones para:

i. $C_{A\cap B}$

- Hay dos opciones $C_{A\cap B}=\emptyset$ o $C_{A\cap B}\neq\emptyset$
- Supongamos que: $C_{A\cap B}\neq\emptyset$
-

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\cap B$	$C_{A\cap B}(x)$	$C_A(x)C_B(x)$
1	1	1	1	1·1
0	0	0	0	0·0
1	0	0	0	1·0
0	1	0	0	0·1

- Conclusion: $C_{A\cap B}(x)=C_A(x)C_B(x)$

ii. $C_{A\cap B}$

- $A\cup B = A + B - A\cap B$

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\cup B = A+B-A\cap B$	$C_{A\cup B}(x)$	$C_A(x)+C_B(x)-C_A(x)C_B(x)$
1	1	1	1	$1+1-1.1$
0	0	0	0	$0+0-0{\cdot}0$
1	0	1	1	$1+0-1{\cdot}0$
0	1	1	1	$0+1-0{\cdot}1$

8. (**Problema 5**) V o F. Es par si $f(x)=f(-x)$, Es impar si: $f(-x)=-f(x)$

   a) $f(x)=x^2$ es par

   - $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, Es par, V

   b) $f(x)=x^3$ es impar

   - $f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)^2=(-x)x^2=-x^3=-f(x)$, Es impar , V

   c) Si f no es impar entonces f es par: Esto es falso

   - $f(x)=x+1$, $f(-x)=-x+1$, Esto no es ni par ni impar

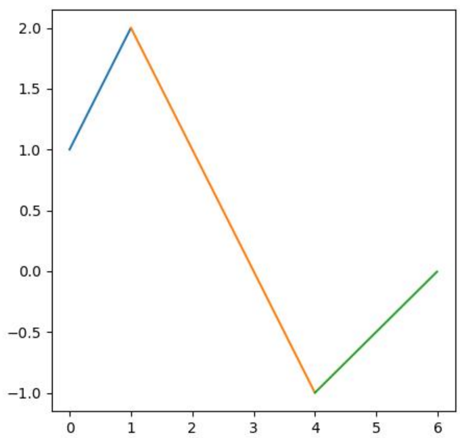
   d) Si f,g son pares , entonces: $f+g$ es par: Verdadero

   - $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
   - $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$

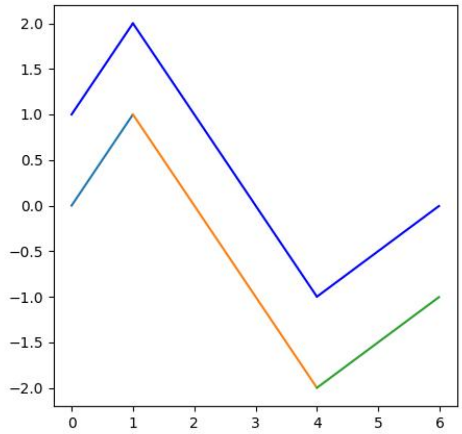
9. (Problema 6)

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\leqslant x<1 \\ -x+3 & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ \frac{1}{2}x-3 & 4\leqslant x\leqslant 6 \end{cases}$$, Graficar la funcion g donde:

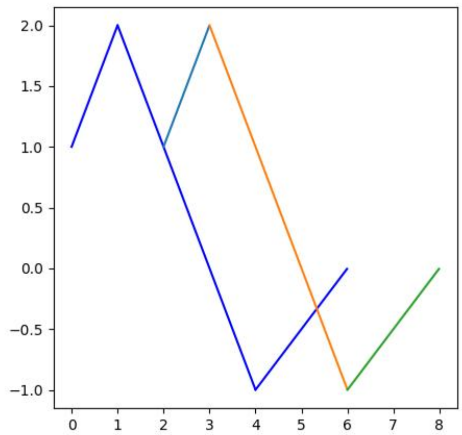
   a) $g(x)=f(x)$



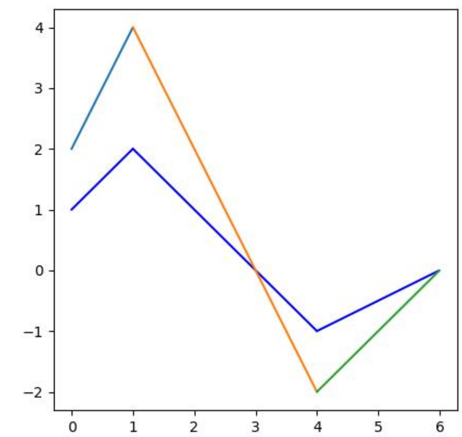
   b) $g(x)=f(x)-1$



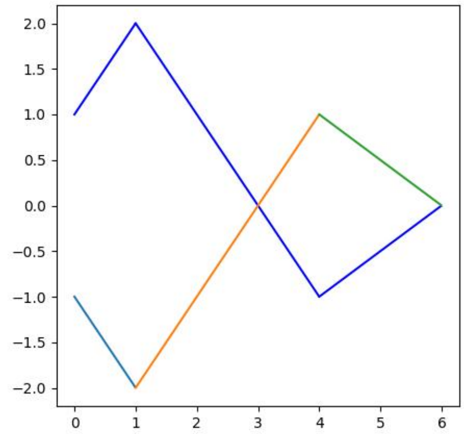
c) $g(x) = f(x+2)$



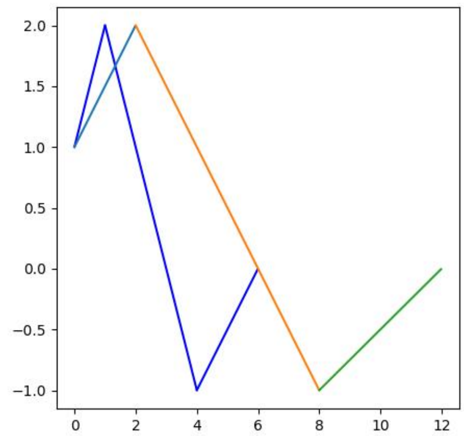
d) $g(x) = 2\,f(x)$



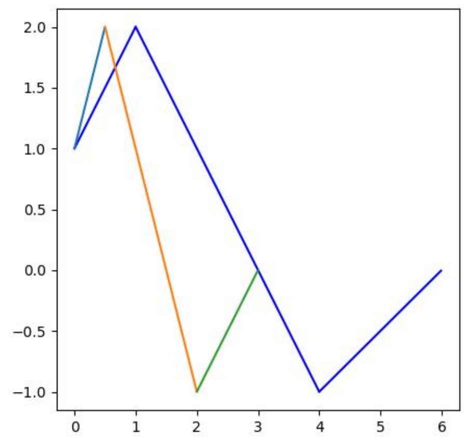
e) $g(x) = -f(x)$



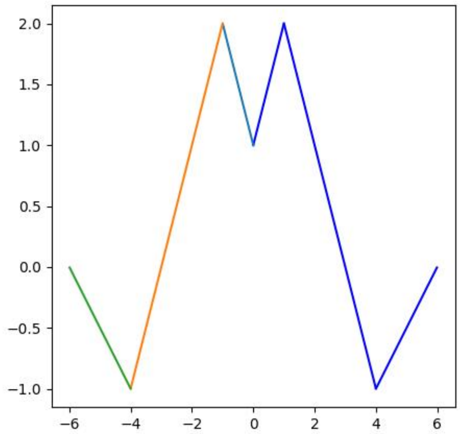
f) $g(x) = f(2x)$



g) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$



h) $g(x) = f(-x)$



i) $g(x) = |f(x)|$