1 Ejercicios

1.

   a)

   b)

   c)

   d)

   e) $f(x) = \sqrt{x}$

      - $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

      - $\lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

   f) $f(x) = [x]$, hallar f' donde sea posible.

      - Si la funcion no es continua, entonces no es derivable ya que la definicion de derivada requiere que f sea valuada en el punto en cuestion y que exista el limite.

      - Ya sabemos que entonces f no sera derivable en los enteros.

      - Sea entonces: $x = d + \delta$ donde $d \in \mathbb{Z}$, podemos calcular la derivada para esta situacion. Por otro lado hay que elegir si: $[x] = \lfloor x \rfloor$ o bien $[x] = \lceil x \rceil$

      - $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lfloor d+\delta+h \rfloor - \lfloor d+\delta \rfloor}{h} =$

      - $\lim_{h\to 0^-} \frac{\lfloor d+\delta+h \rfloor - \lfloor d+\delta \rfloor}{h}$, como h es chico, luego $h < 0$ y $|h| < \delta > 0$ entonces: $d + \delta + h > d$, en consecuencia: $\lfloor d+\delta+h \rfloor = d$

      - De manera que la derivada queda:
        $\lim_{h\to 0} \frac{\lfloor d+\delta+h \rfloor - \lfloor d+\delta \rfloor}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{d-d}{h} = 0$

      - Cabria pensar en una demostracion mas rigurosa.

2. Sea f una función derivable en el intervalo abierto (a, b) y c ∈ R. En cada caso hallar g ′ en su respectivo dominio

   a)

   b)

   c)

   d) $g(x) = f(cx)$

      - $\lim_{h\to 0} \frac{f(c(a+h))-f(ca)}{h}$

      - La hipotesis de f derivable dice que: $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

- Lo calculamos basicamente con la demostracion de la regla de la cadena:

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(c(a+h)) - f(ca)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c(a+h)) - f(ca)}{c(a+h) - ca} \cdot \left(\frac{c(a+h) - ca}{h}\right)$

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(c(a+h)) - f(ca)}{ch} \cdot \left(\frac{c(a+h) - ca}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ca+ch) - f(ca)}{ch} \cdot \left(\frac{c(a+h) - ca}{h}\right)$

- Claramente cuando $h \to 0$ luego $ch \to 0$

- Como f es derivable, luego si tomaramos $b = ca$ y definimos $k = ch$, despues tendriamos:

- $\lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} \frac{f(b+k) - f(b)}{k} \cdot \left(\frac{c(a+h) - ca}{h}\right) = cf'(b) = cf'(ca)$

- Forma alternativa mas facil:

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(c(a+h)) - f(ca)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ca+ch) - f(ca)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(ca+ch) - f(ca)}{ch}$

e) $g(x) = [f(x)]^2$

- $\lim_{h\to 0} \frac{[f(a+h)]^2 - [f(a)]^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h) + f(a))(f(a+h) - f(a))}{h} = 2f(a)f'(a)$

3. Demostrar que $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

   - Partiendo de la definicion alternativa:

     Si $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$

   - Considere: $x = a + h$:

     $|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$ si $|a + h - a| < \delta \Rightarrow |h - 0| < \delta$

   - Conclusion si $h \to 0$ luego $x \to a$

4.

5.

5. En cada uno de los siguientes casos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto (x_0, y_0) indicado.

(a) $\begin{cases} y = 1 - 2x - 3x^2, \\ (x_0, y_0) = (-2, -7) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ (x_0, y_0) = (1, 1) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{1 - x}, \\ (x_0, y_0) = (0, 0) \end{cases}$

a) $y' = -2 - 6x \Rightarrow y'(-2) = -2 - 6(-2) = 10$

- $T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- $T(x) = 10(x - (-2)) + (-7)$

b) $y' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{2}$

- $T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- $T(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1$

c) $y' = \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow y'(0) = 1$

- $T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- $T(x) = 1(x - 0) + 0$

6.

7. Calcular $f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si:

(a) $f(x) = x^{10}$ (b) $f(x) = \cos(x)$ (c) $f(x) = 1/x$ (d) $f(z) = \sqrt{z}$

7.

a) $f(x) = x^{10}$

- $\frac{d^n}{dx^n} f = \begin{pmatrix} 10 \\ 10-n \end{pmatrix} x^{10-n}$

b) $f(x) = \cos(x)$

- $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$; $f''(x) = -\cos(x)$; $f'''(x) = \operatorname{sen}(x)$; $f^{\text{iv}}(x) = \cos(x)$
- $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ (aprovechando la paridad e imparidad)
- $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

- $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^n n! x^{-(1+n)}$

d) $f(x) = x^{1/2}$; Esto esta demostrado en el teorico de Salvai

- $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^{n-1} \frac{n!!}{2^n} x^{1/2-n}$

8.

9.

10.

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $f + g$ es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.
(b) Si fg es derivable en a, entonces f y g son derivables en a.
(c) Si f es derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $|f|$ es derivable en a.
(d) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que no es derivable en una cantidad infinita de puntos.
(e) Existe una función continua en $\mathbb{R}$ que es derivable en 0 y no lo es en cualquier intervalo abierto que contiene al 0.
(f) Dados $a < b$, toda función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se extiende a una función derivable en todo $\mathbb{R}$.

11.

a) Falso; tome $f = \frac{1}{x}$ y $g = -f$ y preguntese si son derivables en 0. No lo son pues no son contiuas en este punto

b) Falso; en este caso considere $f = \frac{1}{x}$ y $g = x$, no hay derivavilidad en 0 para f.

c) Verdadero: $|f| = \sqrt{f^2} \Rightarrow |f|'(x = a) = \frac{1}{2} f^2(a) 2 f(a) f'(a)$

d) Aqui podemos utilizar un ejemplo especial del practico anterior:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si}\, x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si}\, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

La cual es una funcion que es continua en 0 pero no es continua y por lo tanto no es derivable en el resto de puntos.

e) Aca utilizamos el resultado del ejercicio 6:

6. (a) Sea f una función tal que $|f(x)| \le x^2$ para todo x. Demostrar que f es derivable en 0 y calcular $f'(0)$.

y consideramos concretamente una modificacion de la funcion del punto c):

$$f(x) = \begin{cases} x^2|\text{sen}(1/x)|\, \text{si}\, x \neq 0 \\ 0\, \text{si}\, x = 0 \end{cases}$$

- Por el problema 6 a tendremos que f es derviable en 0. Pero en un intervalo que contiene el cero, veremos que , concretamente en los puntos donde $f = 0$, f no sera derivable por el modulo. Esto no contradice el punto c de este ejercicio justamente porque aqui el problema esta en los puntos $f(x) = 0$.

f) Verdadero. Tenga cuidado simplemente en que se pueda extender con la misma pendiente de la derivada a la funcion.

12. Considerar la función biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6 - x - x^3$. Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $(-4, 2)$.

- Basicamente lo que nos pide es encontrar la derivada, dado que la recta tangente seria:

  $T(x) = (f^{-1})'(x)(x - a) + f^{-1}(a)$

- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

- Ojo: Aca encontrar f^{-1} no lo vas a poder hacer.

- $f'(x) = -1 - 3x^2$

- Si examinamos la prueba de la derivada de la inversa, vemos que esta debe cumplir:

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

- Entonces $f(2) = -4 \Leftrightarrow f^{-1}(-4) = 2$

- $f'(f^{-1}(-4)) = f'(2) = -1 - 3(4) = -13$

- En consecuencia: $(f^{-1})'(-4) = \frac{1}{-13}$

13. Determinar en los siguientes casos $(f^{-1})'(d)$.

(a) $f(x) = x^5 + 2, \quad d = 1.$

(b) $f(x) = \sqrt{4-x}, \quad d = 3.$

(c) $f(x) = \tan(2x), \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad d = 1.$

a) $f(x) = x^5 + 2$

- $f^{-1}(x) = ?$
- $y = x^5 + 2 \Leftrightarrow (y-2)^{1/5} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^{1/5}$
- En consecuencia la derivada de la inversa estara dada por:
  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{5(f^{-1})^4} = \frac{1}{5(x-2)^{4/5}}$

14. (a) Se define la función $\operatorname{arcsen}(s) : [-1,1] \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$ como la inversa de la función sen (x) restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Demuestre que

$$\operatorname{arcsen}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

(b) Análogamente se define $\arccos(s) : [-1,1] \mapsto [0, \pi]$. Demuestre que

$$\arccos'(s) = \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

a) Para que exista la derivada de la inversa se requiere:

- Que f sea continua e inyectiva en el intervalo en un intervalo abierto A
- Que porsupuesto exista su funcion inversa f^{-1} en ese intervalo.

Siendo que f cumple con estas caracteristicas entonces sabemos que su derivada cumple:

- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) La demostracion de esto es similar