Guia 2

1. $P=20=2a+2b \Leftrightarrow a=10-b$, $A=ba \Rightarrow A=b(10-b)=10b-b^2$

   $A=10b-b^2$

2. $A=6a^2$, $V=a^3 \Leftrightarrow a=V^{1/3} \Rightarrow A=6V^{2/3}$

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

   a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, Dom $f=\{x/x \in \mathbb{R}, 1-x^2 \geqslant 0\}$

      Usamos que: $\sqrt{x^2}=|x|$

      $1-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \geqslant x^2 \Rightarrow 1 \geqslant |x| \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$

      Dom $f=\{x/x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

   b) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

      - Resolver de adentro hacia afuera:
      - $\sqrt{1-x^2} \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$, en ese rango ya la funcion tendra solucion.
      - Dom $f=\{x/x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

   c) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{x-2+x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$

      - Claramente el principal punto de importancia es cuando el denominador es cero.
      - $(x-1)(x-2)=0$ si $x=1$ o $x=2$, el resto de los puntos son validos
      - Dom $f=\mathbb{R}-\{1,2\}$

   d) $f(x)=(\sqrt{x})^2$

      - Claramente es necesario que: $x \geqslant 0$
      - Dom $f=\{x \in \mathbb{R}/x \geqslant 0\}$

   e) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } |x|>1 \Rightarrow x<-1, x>1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

      - Dom $f=\mathbb{R}$

4. Encontrar el Dominio e imagen de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\frac{1}{x+3}$

      - Dom $f=\mathbb{R}-\{-3\}$
      - Para buscar la imagen utilizo el siguiente lema:

        Para toda funcion Im $f=\{f(x)/x \in \text{Dom } f\}$

- Es decir que puedo intentar invertir la relacion entre y, x para buscar esta imagen conociendo el dominio.

- $y = \frac{1}{x+3} \Leftrightarrow x+3 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} - 3$

- $y \neq 0$, Despues el resto de los valores son validos.

- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Esta funcion es super enganiosa: Imaginemos que $x = -3 + \frac{1}{100}$ luego: $x + 3 = \frac{1}{100}$ entonces: $f = 100$.

b) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

- $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$

- Para buscar la imagen nuevamente invertimos la relacion:

- $g = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{g} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\left(\frac{1}{g} - 1\right)} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{g} - 1\right)}$

- El dominio de esta funcion no incluye $0, \frac{1}{g} < 1 \Leftrightarrow g \geqslant 1$

- $\operatorname{Im} g = \{g \in \mathbb{R} / 0 < g \leqslant 1\}$

- Observacion: $\frac{1}{x^2+1}$ nunca nos va a dar un numero mayor a 1. por ejemplo:

  $x^2 + 1 = \frac{1}{1000} + 1 = \frac{1001}{1000} > 1$, en consecuencia: $\frac{1}{x^2+1} < 1$

- La diferencia con el otro problema: $f(x) = \frac{1}{x+3}$ es que a traves de la resta ibamos a poder tener numeros mas chicos que 1.

c) $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

- Se descartan del dominio los valores tales que: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = 1$

- $|x| = 1 \Rightarrow x = 1\, o\, x = -1$

- $\operatorname{Dom} g = \{x \in \mathbb{R}\} - \{-1, 1\}$

- Def Im g := $\{g \in \mathbb{R} / \exists x \in \operatorname{Dom} g / g = g(x)\}$

- $g = \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{g} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{g} + 1 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{g} + 1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{g} + 1}$

- $g \neq 0,\ \frac{1}{g} \geqslant -1 \Leftrightarrow \begin{cases} g > 0 \Rightarrow 1 \geqslant -g & -1 \leqslant g \quad g > 0 \\ g < 0 \Rightarrow 1 \leqslant -g & -1 \geqslant g \quad -1 \geqslant g \end{cases}$

- $\operatorname{Im} g = \{g \in \mathbb{R} / g > 0, g \leqslant -1\} = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

5. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interprete los siguiente:

a) $f(f(x))$ Para cuales x tiene sentido?

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$

- $f(f(x)) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}$

- $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$

- Notar que si al principio no excluyo $x = -1$ la expresion queda indefinida. Por lo cual para seguir operando tengo que primero excluir el caso $x = -1$ para luego encontrar que $x = -2$ tampoco puede estar en la solucion.

b) $f(1/x)$

- $f(1/x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}}$, $x \neq 0$

- $f(1/x) = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$

- $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

c) $f(cx) = \frac{1}{1+cx}$

- $1 + cx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{c}$

- $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1/c\}$

6. Sean $C(x) = x^2$, $H(x) = \frac{1}{x}$, $S(x) = \text{sen}(x)$

a) Determinar: $(C \circ H)(y)$

- $(C \circ H)(y) = \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2}$

b) Determinar: $(C \circ H \circ S)(t) + (S \circ H)(t)$

- $(C \circ H \circ S)(t) = \left(\frac{1}{\text{sen } t}\right)^2 = \frac{1}{\text{sen}^2 t}$

- $(S \circ H)(t) = \text{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$

- $(C \circ H \circ S)(t) + (S \circ H)(t) = \frac{1}{\text{sen}^2 t} + \text{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$

7.

a) Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos la funcion C_A como siguie:

$$C_J = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$$

Encontrar expresiones para:

i. $C_{A \cap B}$

- Hay dos opciones $C_{A \cap B} = \oslash$ o $C_{A \cap B} \neq \oslash$

- Supongamos que: $C_{A \cap B} \neq \oslash$

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$C_{A\cap B}(x)$	$C_A(x)C_B(x)$
1	1	1	1	$1{\cdot}1$
0	0	0	0	$0{\cdot}0$
1	0	0	0	$1{\cdot}0$
0	1	0	0	$0{\cdot}1$

- Conclusion: $C_{A\cap B}(x) = C_A(x)C_B(x)$

ii. $C_{A\cap B}$

- $A \cup B = A + B - A \cap B$

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B = A + B - A \cap B$	$C_{A\cup B}(x)$	$C_A(x) + C_B(x) - C_A(x)C_B(x)$
1	1	1	1	$1 + 1 - 1.1$
0	0	0	0	$0 + 0 - 0{\cdot}0$
1	0	1	1	$1 + 0 - 1{\cdot}0$
0	1	1	1	$0 + 1 - 0{\cdot}1$