# 1 Teoria

- Que es una sucesion? : Una sucesion real es una funcion tal que mapea de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$
- Limite - Convergencia: $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \exists N\in\mathbb{N} / \text{si } n>N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
- Proposicion: considere $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l$ , $\lim_{n\rightarrow\infty}b_n = m$, $c\in\mathbb{R}$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}ca_n = cl$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n + b_n = l + m$ (Demostrado con desigualdad triangular)
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n b_n = lm$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$ , $m\neq 0$
- Proposicion: El limite de una sucesion es unico.
- Proposicion: Si $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l$, es decir el limite existe, entonces la sucecion $\{a_n\}$ esta acotada.
- Lema del Sandwich: Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, con $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l$ , $\lim_{n\rightarrow\infty}c_n = l \Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty}b_n = l$
- Limites utiles:
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{10^n}{n!} = 0$
- Sucesion que tiende a Infinito: $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = \Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{N} / \text{si } n>N \Rightarrow a_n > M$
- Proposicion: Si $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = \infty$, $\lim_{n\rightarrow\infty}b_n = \infty$ y $\lim_{n\rightarrow\infty}c_n = l \neq 0$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n + b_n = \infty$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n + c_n = \infty$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n c_n = \infty$ $(l>0)$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n b_n = \infty$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{a_n} = 0$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n c_n = -\infty$ $(l<0)$
- Teorema: Toda sucesion creciente (No necesariamente Estricatamente creciente) y acotada superiormente tiene un limite. Esto implica:
  - $a_n \leqslant a_{n+1}$ $\forall n$
  - $a_n \leqslant M$ $\forall n$
  - Entonces: $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = \sup\{a_n\}$
- Subsucesiones: Definicion: Una subsucesion $b$ de una sucesion $a$ , es una sucesion que cumple: $b(j) = a(n(j))$, es decir que $b$ toma algunos elementos de $a$ (No puede tomar otros elementos distintos que no esten en $a$). Tipicamente se escribe: $a_{n_j}$
- Proposicion: Si $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n = l \Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty}a_{n_j} = l$ , para cualquier subsucesion $a_{n_j}$ de $a$.
- Afirmaciones utiles de Subsucesiones:
  - $\lim_{n\rightarrow\infty}s_n = \lim_{n\rightarrow\infty}s_{n+n_0} = l$

- $\lim_{n\to\infty} s_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n} = l y \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = l$

- Demostrar que una sucesion no converge: Si una sucesion $a$ tiene 2 subsuceciones que convergen a limites distintos, entonces $a_n$ no converge.
- Lema: Si $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una funcion estrictamente creciente, entonces $f(n) \geqslant n$

# 2 Practico

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7. Esta sucesion esta definida inductivamente como:
8. Demostrar con subsucesiones que elsiguiente limite no existe: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+\pi} + \cos(n\pi)\right)$
   - Primero examine: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\pi} = 2$ (Facilmente demostrable)
   - Considere la subsucesion de terminos pares: $a_{2n} = \frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi)$
   - Calculemos el limite $\text{im}_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+\pi} + \cos(2n\pi) = 2 + 1 = 3$
   - Si ahora consideramos la subsucesion de terminos impares: $a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi)$
   - Calculamos el limite: $\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{2n+1+\pi} + \cos((2n+1)\,\pi) = 2 - 1 = 1$
   - Como ambas subsucesiones convergen a limites distintos , entonces la sucesion original no converge.
9. Considere $\{a_n\} / a_n \geqslant -10 \forall n$ considere $b_1 = a_5$, $b_2 = a_{25}$ y $b_3 = a_{125}$:
   a) Extender $b_1, b_2, b_3$ a una subsucesion: $b_j = a_{n_j}$ de $\{a_n\}$
      - Podemos considerar entonces: $b_j = a_{n(j)}$ con $n(j) = 5^j$ , es decir: $b_j = a_{5^j}$ de esta forma por ejemplo: $b_1 = a_5, b_2 = a_{25}, b_3 = a_{125}$

   b) Si se cumpliera que: $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$, cuanto vale $\lim_{j\to\infty}\sqrt{10 + b_j}$?
      - Por la proposicion en verde, la subsucesion debe tender al mismo valor que la sucesion original: En consecuencia, $\lim_{j\to\infty} b_j = 6$
      - Ahora tratemos de probar por definicion que esto existe y que es 4:

        $\left|\sqrt{10 + b_j} - 4\right| < \varepsilon$ si $j > N$

        $\left|\frac{10 + b_j - 16}{\sqrt{10 + b_j} + 4}\right| = \left|\frac{b_j - 6}{\sqrt{10 + b_j} + 4}\right|$

        Aca usamos la hipotesis: $a_n \geqslant -10 \Rightarrow b_j \geqslant -10 \Leftrightarrow b_j + 10 \geqslant 0$

        Entonces: $\sqrt{b_j + 10} + 4 \geqslant 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b_j + 10} + 4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{b_j - 6}{\sqrt{b_j + 10} + 4}\right| < \frac{1}{4}|b_j - 6| < |b_j - 6| < \varepsilon$

  - Quedando demostrado el limite. Basta proporcionar el valor de $j$ tal que cuando $j > N$ se cumple $|b_j - 6| < \varepsilon$
  -

10. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{Z}$, probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / a_n = l \forall n > n_0$
    - Esto implica mostrar que la funcion es identicamente constante dadas las hipotesis a partir de cierto punto.
    - **Primera parte:**
    - Por la definicion: si $n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
    - En particular si $m > n > N \Rightarrow |a_m - l| < \varepsilon$
    - Como $a_n, a_m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_m = a_n + Z$ , $Z \in \mathbb{Z}$
    - Es decir: $|a_m - l| = |a_n + Z - l| \leqslant |a_n - l| + |Z| < \varepsilon + |Z|$
    - Sin embargo como $|a_m - l| < \varepsilon$ (Para el mismo $N$), la unica opcion viable es que: $|Z| = 0$, es decir: $Z = 0$
    - Hemos demostrado que $a_n = a_m$ $\forall m > n$
    - **Segunda Parte:**
    - Si $n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$, donde como vimos, siempre tenemos el mismo valor, que por hipotesis es un entero, asi que para visibilizar esto escribo: $|z - l| < \varepsilon$ si $n > N$
    - Por tricotomia: $z > l, z < l, z = l$
    - Si considera los casos: $z > l$ or $z < l \Rightarrow |z - l| > 0$ seria un valor fijo, y por lo tanto no puede cumplirse que $\forall \varepsilon > 0$ $|z - l| < \varepsilon$
    - Como unica posibilidad se debe cumplir que: $z = l$ (que es lo que se queria demostrar)

11. Probar que para todo $l \in \mathbb{R} / l \in (0,1)$ existe una sucesion: $\{q_n\}$ de numeros racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = l$.
    - La sucesion tiene que ser de numeros racionales: $q = \frac{m}{n}$
    - Lo que se plantea es que la sucesion sea: $q_n = \frac{[nl]}{n}$ , donde $[nl]$ es la parte entera. (Nos da el numero entero menor mas cercano a $nl$)
    - Lo anterior significa que: $nl - 1 < [nl] < nl \Leftrightarrow \frac{nl-1}{n} < \frac{[nl]}{n} < l$
    - Es decir: $l - \frac{1}{n} < \frac{[nl]}{n} < l$
    - En consecuencia como: $\lim_{n\to\infty} l - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} l = l$ puede utilizar el lema del Sandwich de las sucesiones, en consecuencia: $\lim_{n\to\infty} \frac{[nl]}{n} = l$
    - Observe que como $l \in (0,1)$ luego: $0 < l < 1 \Rightarrow 0 < \frac{[nl]}{n} < 1$
    - Esto demuestra lo propuesto.

12. Decidir en cada caso si la afirmacion es verdadera o falsa:
    a) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ or $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
       - Falso

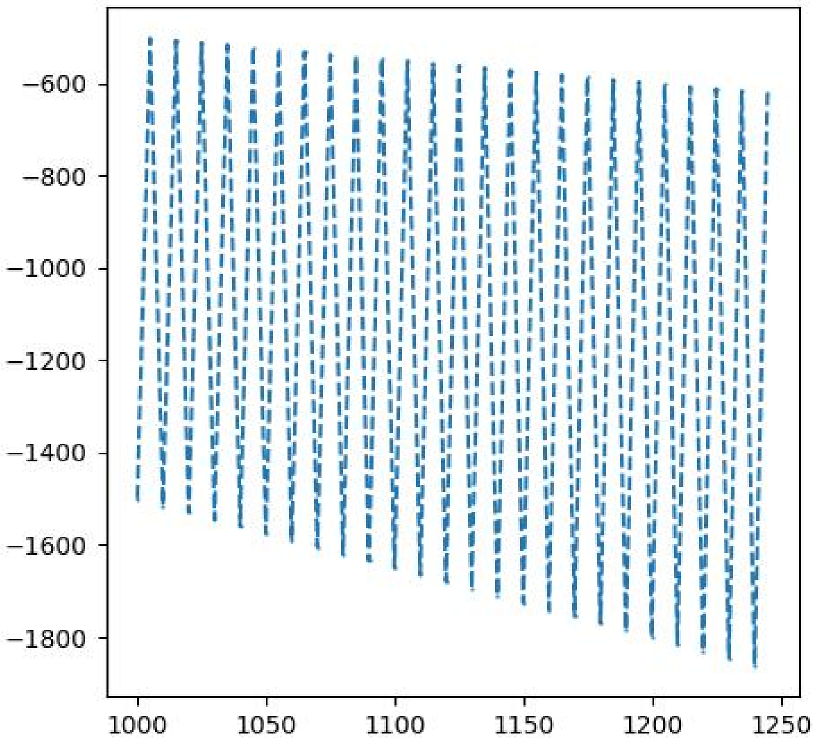
- Considere: $a_n = (-1)^n n$ , cumplee que: $|a_n| = n$ , luego: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$
- Sin embargo claramente: $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, pues si tomo subsucesiones de terminos pares y otra de impares ambas convergen a limites distintos.

b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ entonces $a_n$ es decreciente desde un $n_0$ en adelante, es decir , $\exists n_0 / \text{si}\, n > n_0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

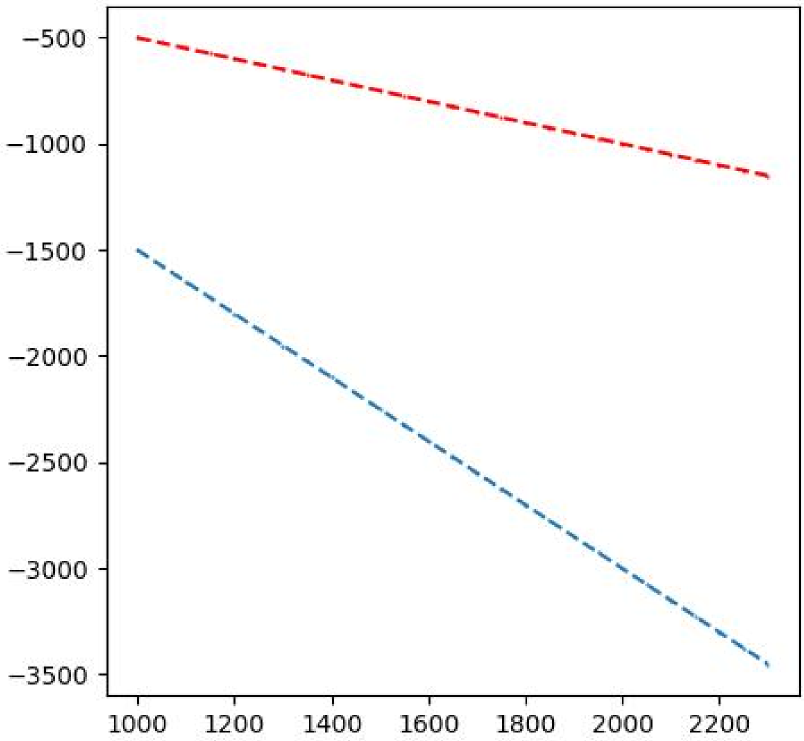
- Si esto es verdad entonces, la existencia de dicho limite implica que $\{a_n\}$ es eventualmente decreciente
- Considere la sucesion: $a_n = -n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right)$
- Esta sucesion cumple que: $\frac{-3n}{2} \leqslant -n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right) \leqslant -\frac{n}{2}$ , que si $n$ es par luego sen $\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ mientras que si $n$ es impar entonces el termino entre parentesis toma valores $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.
- Esto lo que produce es una sucesion "oscilante" decreciente:

  Si $m = \text{par} \Rightarrow a_m = -m$ , luego $m + 1 = \text{impar}$ tal que $a_{m+1} = -(m+1)\frac{1}{2}$

  $-m < -(m+1)\frac{1}{2} = -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ si $m$ es lo suficientemente grande
- Entoncse la sucesion no puede ser nunca decreciente o estrictamente decreciente.
- Pero cumple esta sucesion que tiende a $-\infty$?
- Como: $-n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \leqslant -\frac{n}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$, luego para dado $M$ si tomo $N / \frac{-n}{2} < M$, en consecuencia para ese mismo $N$: $-n\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \leqslant -\frac{n}{2} < M$
- Plots de la funcion:



- Observe la tendencia decreciente (aunque oscilatoria)




-
- En rojo tenemos la funcion $-n/2$

# 3 2025 Practico de Silvina

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7. **7.** Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida inductivamente mediante
$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}.$$
Mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Sugerencia: demostrar que la sucesión es decreciente y acotada inferiormente.

   - Por definicion $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Supongamos (porque esto no lo sabemos) que $a_n \geqslant 2$, entonces: $2a_n \geqslant 4 \Leftrightarrow a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \geqslant 2$

- Sin embargo, el primer termino de la sucesion $a_1=3$ y entonces: $\sqrt{2a_1}=\sqrt{6}>2$, en consecuencia todos los terminos posteriores a este cumpliran, ser mayores a 2.

- Entonces esta afirmacion ya esta probada: $a_n>2\forall n \Rightarrow a_n^2>2a_n \Leftrightarrow a_n>\sqrt{2a_n}=a_{n+1}$, es decir que la sucesion es DECRECIENTE.

- Entonces hasta ahora tenemos que: $a_n>2$ (Esta acotada inferiormente por 2) y que la sucesion es decreciente.

- Como la sucesion es decreciente y acotada inferiormente entonces converge:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=L;\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n}=\sqrt{2L}$$

- Es decir que: $L=\sqrt{2L} \Leftrightarrow L-2L=0 \Leftrightarrow L(L-2)=0$ , es decir , tenemos 2 posibilidades: $L=2$ o bien $L=0$.

- Sin embargo como $a_n>2$ entonces nos quedamos con $L=2$.

8.

**9.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión, $a_n \geq -10$ para todo $n$, y sean $b_1=a_5$, $b_2=a_{25}$ y $b_3=a_{125}$.
(a) Extender $b_1, b_2, b_3$ a una subsucesión $b_j=a_{n(j)}$ de $\{a_n\}$.
(b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n=6$, ¿cuánto vale $\lim_{j\to\infty}\sqrt{10+b_j}$?

9.

a) Claramente la extension posible es: $b_j=a_{5j}$

b) Primero tenga en cuenta que una subsucesion de una sucesion convergente converge y converge al mismo limite:

   - $\lim_{n\to\infty}\sqrt{10+b_j}=\sqrt{10+6}=4$

   Se puede intentar demostrar esto por definicion (pero a mi criterio no hace falta)

**10.** (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $\{a_n\}$ converge y $l=\lim_{n\to\infty} a_n$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $a_n=l$.
(b) Sea la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n=(-1)^n$.
(i) Dar tres subsucesiones convergentes de $\{a_n\}$ distintas.
(ii) Probar que si $\{a_{n_j}\}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim_{j\to\infty} a_{n_j}=1$ ó $-1$.

10.

a) Ver la demostracion del problema 10 de arriba (practico viejo).

b)

   i. Dar la subsucesion par , impar y alguna sub sucesion de alguna de estas.

   ii. Si considero $b_n=a_n^2$ , luego: $b_n=1\forall n \Rightarrow b_n\to 1$ cuando $n\to\infty$

   - $|b_{n_j}-1|=|a_{n_j}^2-1|=|(a_{n_j}-1)(a_{n_j}+1)|<\varepsilon$

   - Como por hipotesis estas subsucesiones son convergentes, entonces $a_{n_j}$ converge a 1 o -1

   - Otra forma: $a_{n_j}\to l$ si $j>j_0$ entonces: $a_{n_j}^2\to l^2=1 \Leftrightarrow l=\pm 1$

**11.** Probar que para todo número real $\ell \in (0,1)$, existe una sucesión $\{q_n\}$ de números racionales tal que $q_n \in (0,1)$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = \ell$.

11.

- Considere $p_n = \lfloor nl \rfloor$, la cual es la parte entera inferior y porsupuesto cada elemento de la misma sera un racional. (Esta no es aun la sucesion final)

- Ahora podemos hacer:

$$p_n \leqslant nl < p_n + 1 \Leftrightarrow \frac{p_n}{n} \leqslant l < \frac{p_n}{n} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 \leqslant l - \frac{p_n}{n} < \frac{1}{n}$$

  En particular: $-\frac{1}{n} < l - \frac{p_n}{n} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \left|l - \frac{p_n}{n}\right| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \left|\frac{p_n}{n} - l\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ (Arquimenidad)

- Entonces la sucesion que estamos proponiendo es: $q_n = \frac{p_n}{n}$. En rigor ahora hay que probar que efectivamente $0 < q_n < 1$.

- Tenemos la hipotesis de que $0 < l < 1 \Leftrightarrow 0 < nl < n \Leftrightarrow 0 \leqslant \lfloor nl \rfloor < n \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{\lfloor nl \rfloor}{n} < 1$

- Casi lo tenemos, pues la hipotesis $q_n \in (0,1)$ falla para $n$ chico aunque eventualmente para $n$ grande tendriamos que $q_n \in (0,1)$. Suponga entonces que si $n \geqslant m_0$ luego $nl > 1$, entonces podemos hacer que nuestra sucesion cumpla lo anterior redefiniendo:

$$q_n = \frac{\lfloor (n + m_0) l \rfloor}{n}$$

- Por la arquimenidad sabemos que $|q_n - l| < \frac{1}{n} < \varepsilon$, con lo que ya habriamos demostrado el problema. Tambien puede demostrar el limite utilizando el lema del sandwich:

**12.** Decir en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, entonces $a_n$ es decreciente desde un $n_o$ en adelante, o sea, $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n > n_o$.

12.

a) El enunciado es falso, y el contraejemplo es la sucesion: $a_n = n(-1)^n$

b) El enunciado vuelve a ser falso. En este caso consideremos la sucesion definida como:

$$a_k = \begin{cases} a_{2k} = -k^2 \\ a_{2k-1} = -k \end{cases}$$

  - $-k^2 < -k$ para $k$ grande

  - Luego para $k+1$ (supongamos que $k$ era par): $-k^2 < -(k+1)$

  - Por el cual el termino posterior era menos negativo.

  - Puede verse por otro lado que la sucesion converge hacia menos infinito.

**13.** (a) Definir sucesión de Cauchy.

(b) Demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy.

(c) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.

(d) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente (convergen al mismo límite).

13.

**14.** Para probar el siguiente ejercicio usaremos resultados que se deducen usando el binomio de Newton (se probará/prueba en Álgebra I)

(i) $(1+h)^n \geq 1+nh$ para $h>0$.

(ii) $(1+h)^n \geq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ para $h>0$.

(a) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, si $a>1$ (Sugerencia: expresar $a=1+h$, donde $h>0$).
(b) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, si $0<a<1$.
(c) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $a>1$ (Sugerencia: expresar $\sqrt[n]{a}=1+h$ y estimar $h$).
(d) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $0<a<1$.
(e) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Sugerencia: usar (ii)).

14.

a) Aqui queremos demostrar que $a_n > M$ si $n > N$

- Si $a>1$ , puedo expresarlo como la sugerencia. $(1+h)^n \geqslant 1+nh > M \Leftrightarrow n > \frac{M-1}{h}$ , si quiere que sea natural puede tomar la parte entera. Es decir, basta que $n > N = \left\lceil \frac{M-1}{H} \right\rceil$

b) Si $0<a<1 \Rightarrow 0<a^2<a<1$, si sigo haciendo esto llego $0<a^n<a^{n-1}<\cdots<a<1$, es decir $a_n$ es monotona decreciente y acotada por cero, por lo cual converge, en particular:

$a^{n+1} = a a^n \Leftrightarrow a_{n+1} = a a_n$ deben converger al mismo limite, por lo cual:

$l = al \Leftrightarrow l(1+a) = 0 \Rightarrow l = 0$ pues $a>0$

c) Bajo la sugerencia se tendria que:

- Para $h>0$ , podemos hacer: $(1+h)^n \geqslant 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2 > 1+nh$
- Es decir que $nh < (1+h)^n - 1 = a-1 \Leftrightarrow h = h_n = \frac{(a-1)}{n}$
- Si tomamos el limite: $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$
- Por lo tanto luego $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1 + h_n = 1$