Examen final

Nombre:
Carrera:
Condición: **Año y cuatrimestre de la regularidad:**

1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b	Pract.

5a	5b	5c	6	7	Teor.	Total	Nota

Indicaciones generales

Se deben aprobar ambas partes del examen. JUSTIFICAR debidamente cada respuesta. No está permitido el uso de aparatos electrónicos tales como calculadoras y teléfonos, ni ningún tipo de bibliografía. Enunciar con precisión los resultados que se usen.

Parte práctica

Para aprobar esta parte es necesario sumar por lo menos:

- Estudiantes regulares: 30 puntos.
- Estudiantes libres: 36 puntos.

Ejercicio 1: Límites y Sucesiones.

a. (8 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Determinar si existe el límite para x que tiende a cero, y de ser así, calcularlo.

b. (6 puntos) Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$ tal que la subsucesión a_{2k} y la subsucesión a_{2k+1} ambas convergen a l, mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

Ejercicio 2: Teoremas Fuertes y significado de la derivada. Sea la función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y derivable en $(0,3)$, tal que $f(0) < 0$ y $f(3) > 0$. Además, $f'(x) > 0$ en los intervalos $(0,1)$ y $(2,3)$, y $f'(x) < 0$ en el $(1,2)$

(a) (8 puntos) Mostrar que $f(x)$ tiene al menos una raiz y a lo sumo 3 raices en $[0,3]$.

(b) (6 puntos) ¿ Se puede afirmar que $f'(x)$ tiene solo dos raices en $[0,3]$?

Ejercicio 3: Significado de la derivada. Representación Gráfica.

Sea $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

(a) (8 puntos) Determinar los intervalos donde $f(x)$ es creciente ó decreciente.

(b) (6 puntos) Encontar los puntos críticos y determinar si son máximos o mínimos locales o globales.

(c) (8 puntos) Analizar los intervalos de concavidad y convexidad, y determinar los puntos de inflexión.

(d) (2 puntos) Esbozar el gráfico de $f(x)$, indicando los puntos relevantes.

Ejercicio 4: Significado de la Derivada. (8 puntos)
Sea una función f dos veces derivable, convexa en (a, b) y g un funcion derivable y decreciente en (a, b). Mostrar que $f \circ g$ es cóncava.

Parte Teórica

Para aprobar esta parte hay que sumar por lo menos 20 puntos, tanto para estudiantes regulares como libres. Además, la demostración de al menos uno de los teoremas que se pidan debe estar completa y detallada.

Ejercicio 5: Verdadero o Falso. Justifique sus repuestas

(a) (5 puntos) Toda subsucesión de una sucesión creciente es creciente.

(b) (5 puntos) Si $\lim_{x \to a} f(x) + g(x)$ existe, entonces existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$.

(c) (5 puntos) Si $\lim_{x \to a} |f(x)| = 1$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = 1$.

Ejercicio 6: (13 puntos) Enunciar con presición el teorema de la unicidad del limite de sucesiones.

Ejercicio 7: (12 puntos) Enunciar y demostrar el Teorema de L´Hospital.