

# Practico 7

## 1 Teoria

**Definition 1. Valor Maximo:** Sea  $f$  una funcion definida en un intervalo abierto  $A$ . Se dice que  $f$  alcanza el valor maximo en  $a \in A$  si  $f(a) \geq f(x) \forall x \in A$

**Definition 2. Punto de Maximo Local:** Sea  $f$  una funcion definida en un intervalo abierto  $A$ . Se dice que  $a \in A$  es un punto de maximo local si  $\exists \delta > 0$  tal que  $f(a) \geq f(x) \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$

**Theorem 3.** Sea  $f$  una funcion definida en un intervalo abierto  $A$ . Sea  $a$  un punto de maximo o minimo local en  $A$ . Entonces, si  $f$  es derivable en  $a : f'(a) = 0$

Notar que la hipotesis de la existencia de la derivada es fundamental. La funcion  $f(x) = |x|$  alcanza su maximo local, en el cero, pero no es derivable en cero.

Notar que si  $f'(a) = 0$  NO implica que el punto  $a$  sea un maximo o minimo (puede ser un punto silla), como ejemplo considere la funcion  $f(x) = x^3$ .

**Theorem 4. Teorema de Rolle:** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funcion continua tal que  $f(a) = f(b)$ . Si  $f$  es derivable en el intervalo  $(a, b)$  entonces existe  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $f'(t_0) = 0$

**Theorem 5. Teorema del valor medio:** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , una funcion continua. Si  $f$  es derivable en  $(a, b)$  entonces existe  $t_0 \in (a, b)$  tal que:

$$f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Corollary 6. (Corolario del teorema del valor medio)** Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , una funcion derivable en el intervalo abierto  $A$ . Si  $f'(t) > 0$  para todo  $t \in A$ , entonces  $f$  es estrictamente creciente. Si  $f'(t) < 0$  en cambio la funcion es estrictamente decreciente.

Concavidad y convexidad:

- Una funcion  $f(x)$  se dice convexa si:  $f'(x)$  es estrictamente creciente
- Una funcion  $f(x)$  es dice concava si:  $f'(x)$  es estrictamente decreciente

Teorema:

Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funcion definida en un intervalo abierto  $A$  tal que  $f'(a) = 0$ . Si  $f''(a) > 0$ , entonces  $a$  es un punto de minimo local si  $f''(a) < 0$ , entonces  $a$  es un punto de maximo local.

### 1.1 Maximos y minimos globales de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

## 2 Practico

1. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existen, maximos, minimos locales y absolutos en el conjunto  $A$ .

a)  $f(x) = x^3 + x$ ,  $A = [-1, 2]$

—  $f'(x) = 3x^2 + 1$

- Busco puntos criticos:  $3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1/3$
- Estos no existen. Pero la funcion aun puede tener maximo o minimo.
- Sin embargo observe que:  $f'(x) > 0$  (Corolario del teorema del valor intermedio) Esto significa que la funcion es estrictamente creciente.
- $f(-1) = -1 - 1 = -2$  ,  $f(2) = 8 + 2 = 10$  son los valores de minimo y maximo globales respectivamente.

b)  $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$  ,  $A = [-2, 2]$

- $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$   
 $x^2 - \frac{2}{3}x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -\frac{4}{3}$   
 $(x - 2)(x + \frac{4}{3}) = x^2 + \frac{4}{3}x - 2x - \frac{8}{3} = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$
- Para saber si es maximo o minimo:  $f(-\frac{4}{3}) = 4.74$   
 $f(2) = -16$
- Ahora antes de poder decir algo tenemos que analizar los intervalos:  
 $[-2, -\frac{4}{3}), (-\frac{4}{3}, 2]$
- $f'(x)$  es una forma parabolica. Sus raices son las que encontramos. En el intervalo  $[-2, -\frac{4}{3})$  la parabola es positiva. Por lo tanto la funcion  $f$  es creciente alli pues la derivada es positiva. Por otro lado en el intervalo  $(-\frac{4}{3}, 2]$  la parabola tiene valores negativos, por lo tanto la derivada tiene valor negativo, en consecuencia la funcion es decreciente en este intervalo.
- Como la funcion es creciente en  $[-2, -\frac{4}{3})$  es de esperar que el maximo este en  $-\frac{4}{3}$  , mientras que el minimo estaria en  $-2$ .
- Por otro lado, en  $(-\frac{4}{3}, 2]$   $f$  es decreciente, por lo cual el maximo, nuevamente estaria en  $-\frac{4}{3}$  y el minimo en  $2$ . Tiene pinta entonces de que  $-\frac{4}{3}$  es el maximo global.

c)  $f(x) = 2 + |x + 1|$  ,  $A = (-2, 1]$

- $f(x) = \begin{cases} 2 + x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ 2 - x - 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

No hay puntos criticos, pero la funcion es estrictamente creciente en el intervalo  $(-2, -1]$  y es decreciente en el intervalo:  $(-1, 1]$

d)

e)

f)  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  ,  $A = [0, \frac{7\pi}{15}]$

- $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

- $f'(x) = 0$  si  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$
- Cuantos de los anteriores tengo en el intervalo?
- $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$  pero  $\frac{7\pi}{15} < \frac{3\pi}{4}$  por lo tanto solo tengo un solo punto critico.
- Para  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos(x) > \sin(x)$ , mientras que en  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  se cumple lo opuesto.
- Finalmente si  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$  tendremos que  $\cos(x) < 0$  y  $-\sin(x) < 0$  por lo cual tendremos que  $f' < 0$ .

2.

3.  $p(x) = x^3 - 3x + m$ , no posee dos raices distintas en el intervalo  $[0, 1]$

- $p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$
- Tenemos dos puntos criticos en:  $x = 1, x = -1$
- En el intervalo  $[0, 1]$  tenemos que  $p'(x) < 0$  por lo cual la funcion sera decreciente.
- $p(0) = m$ ,  $p(1) = 1 - 3 + m = -2 + m$
- Claramente:  $p(0) > p(1)$
- Como una de las raices esta en  $x = 1$  tope del intervalo, y siendo la funcion polinomica estrictamente decreciente con  $p(0) > p(1)$  no hay otra raiz en este intervalo.

4. Verificar el teorema del valor medio:

- a)  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $[1, 2]$
- $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1} = -\frac{1}{2}$
  - $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
  - $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = x$

5.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- No espere que el teorema del valor medio se cumpla en un intervalo donde esta funcion no es continua.
- En particular si considera el intervalo  $[0, 2]$  no se va a cumplir porque la funcion no es continua en 1. En particular, aqui tiene una asintota.
- Si intenta calcular la derivada:  $f' = \frac{-2}{(x-1)^2}$  igualando en los puntos requeridos:  
 $-\frac{2}{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow -1 = (x-1)^2$ , no tiene solucion real.

6. Determinar, intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y puntos de inflexion de las siguientes funciones.

- a)  $f(x) = x^{2/3}$
- $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

- $f'(x) > 0$  si  $x > 0$  mientras que  $f'(x) < 0$  si  $x < 0$ .

7.

8. Graficar las siguientes funciones:

a)

b)

c)

d)

e)  $f(x) = x^2(x - 2)^2$

- $x = 0$  ,  $x = 2$  son raíces de esta función.

9.

10. Sean  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables en todo punto del intervalo  $I$ , sea  $a \in I$ .

a) Si  $f'(x) > g'(x)$  y  $g(a) = f(a)$  demostrar que entonces  $f(x) > g(x)$  para todo  $x > a$  y que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x < a$ .

- Considere  $h(x) = f(x) - g(x)$
- $h'(x) > 0$  Por hipótesis , entonces  $h$  es estrictamente creciente.
- Observar que:  $h(a) = 0$  y como es estrictamente creciente entonces  $h(x) < 0$  para  $x < a$  mientras que  $h(x) > 0$  para  $x > a$
- En consecuencia:  $f(x) > g(x)$  si  $x > a$  , mientras que  $f(x) < g(x)$  si  $x < a$

b) No se cumple sin la hipótesis  $g(a) = f(a)$

- Basicamente lo que estamos viendo aca es una intersección de rectas tangentes a las funciones.
- $f'(a) > g'(a)$  ahora calculamos las rectas tangentes:
- $t_f = f'(a)(x - a) + f(a)$  ,  $t_g = g'(a)(x - a) + g(a)$
- La única manera de que las rectas no se corten es que sean paralelas y para ello necesitaríamos que  $f'(a) = g'(a)$  y esto contradice la hipótesis.
- Por lo tanto deben tocarse en algún punto. Puede dar también un contraejemplo.

c) Demostrar que:  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$  cuando  $x > 1$

- $f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{-1/2} = x^{-1/2}$
- $g(x) = 3 - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = x^{-2}$
- Ambas funciones son positivas en el dominio de los reales positivos al menos.

- En particular  $f'(1) = g'(1)$  con lo cual recaemos en el caso del problema a)

11. Aca basicamente estamos hablando del logartimo. Hipotesis:  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  y  $f(1) = 0$

- Consideramos como en la sugerencia que:  $f(xy) = g(x)$
- Tambien es cierto que puede considerar:  $f(xy) = g(x) + c$
- $g'(x) = f'(xy)y = \frac{1}{xy} y = \frac{1}{x}$
- Literalmente estoy diciendo que  $f'(x) = g'(x) = f'(xy)$
- Esto significa que:  $g(x) = f(xy) + k = f(x) + c$
- $g(x=1) = f(y) + k = 0 + c \Leftrightarrow f(y) = c - k$

12. a Es raiz de orden  $n$  si:  $p(x) = (x - a)^n q(x)$

a) Probar que  $a$  es raiz de orden 2 si y solo si:  $p(a) = p'(a) = 0$  y  $p''(a) \neq 0$

- $p'(x) = n(x - a)^{n-1}q(x) + (x - a)^n q'(x)$
- $p''(x) = n(n - 1)(x - a)^{n-2}q(x) + n(x - a)^{n-1}q'(x) + n(x - a)^{n-1}q'(x) + (x - a)^n q''(x)$
- Tomando  $n = 2$   
 $p'(x) = 2(x - a)q(x) + (x - a)^2 q'(x)$   
 $p''(x) = 2q(x) + 2(x - a)q'(x) + n(x - a)q'(x) + (x - a)^2 q''(x)$
- Vamos con la ida: consideremos que  $x = a$  es raiz de orden 2:  
Esto implica:  $p(a) = 0$  y  $p'(a) = (x - a)^2 q(x)$
- De las derivadas anteeiores:  
 $p'(a) = 0$ , de manera que  $p(a) = p'(a)$   
 $p''(a) = 2q(a)$ , distinto de cero ( $q(a)$  no puede ser cero, puesto que si no entones ya no seria  $a$  raiz de orden 2 si no de almenos orden 3).
- Vamos con la vuelta: consideramos  $p(a) = p'(a) = 0$  y  $p''(a) \neq 0$   
 $p(x) = (x - a)^n q_i(x)$ , aca puede haber infinitos  $q_i(x)$  tales que  $q_i(a) \neq 0$   
 $p''(x) = n(n - 1)(x - a)^{n-2}q(x) + n(x - a)^{n-1}q'(x) + n(x - a)^{n-1}q'(x) + (x - a)^n q''(x) \neq 0$
- Si observamos detenidamente, solo hay una opcion y es  $n = 2$  si tomaramos  $n = 1$  tendriamos una indeterminacion. y tomando  $n = 2$  nos aseguramos de que no sea nulo.

b) Lo anterior nos da una pista para la generalizacion. Uno en general quiere que  $p^k(a) \neq 0$  y para ello debe ocurrir que  $p(x) = (x - a)^k q(x)$  y porsupuesto tener la condicion de que  $p(a) =$

13. Si  $a_1 < \dots < a_n$  probar que  $f(x) = \sum_i (x - a_i)^2$  tiene valor minimo y hallarlo.
- $\frac{d}{dx}f(x) = \sum_i 2(x - a_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_i 2x - \sum_i 2a_i = 2xn - 2\sum_i a_i = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}\sum_i a_i$
  - Este valor es de punto critico y es el minimo, porque lo que tenemos son sumas de parabolos:
- $$f(x) = \sum_i x^2 - 2xa_i + a_i^2 = nx^2 - 2(\sum_i a_i)x + (\sum_i a_i^2)$$
- La cual es la formula de una cuadratica.
14. Sea  $f$  una funcion  $n$  - veces derivable con  $f(x_1) = \dots = f(x_{n+1})$  demostrar que existe  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f^{(n)}(y_0) = 0$ .
- Si aplico el teorema de Rolle con estas hipotesis encuentro que:
- $$f'(t_i) = 0 \text{ para } x_i < t_i < x_{i+1}, \text{ con } i = 1, n,$$
- Tenga en cuenta que, antes tenia  $[x_1, \dots, x_{n+1}]$  valores. Ahora solo tiene:  $[t_1, \dots, t_n]$
- Si ahora examino la segunda derivada, tambien puedo volver a aplicar el Teorema de Rolle (Porque  $f$  es  $n$  veces derivable, si no lo fuera no puedo aplicar el Teorema). Entonces podria decir:
- $$f''(k_i) = 0 \text{ para } t_i < k_i < t_{i+1}$$
- Una propuesta es calcularlo inductivamente:
- Suponga lo anterior para  $f^k(x)$ ,  $f^k(x_1) = \dots = f^k(x_{n-k})$
- Siendo  $k \leq n$  puedo derivar nuevamente, ademas de que cumplen las hipotesis del teorema de rolle.
  - Cuando tengamos  $k = n$  tendremos solo un valor  $f^n(x_0) = 0$
15. Sean  $f, g$  dos funciones derivables. Probar que si  $f$  es creciente y  $f, g$  son convexas (maximo), entonces  $f(g(x))$  es convexa.
- Primero defina  $h(x) = f(g(x))$
  - Para que  $h(x)$  sea convexa, esta, debe ser creciente
  - Tenga en cuenta que si  $h'(x) > 0$  entonces  $h(x)$  es creciente.
  - Tiene sentido entonces demostrar que si  $h''(x) > 0$  entonces  $h'(x)$  es creciente y por lo tanto  $h$  seria convexa.
  - $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$
  - $h''(x) = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x)$
  - Como  $f, g$  son convexas, entonces tiene sentido que para que sus derivadas sean crecientes:  $f''(x), g''(x) > 0$
  - Por otro lado, como  $f$  es creciente, entonces  $f' > 0$
  - Juntando todo, tendremos que  $h''(x)$  es convexa.