Practico 4

1 Definiciones

- Definicion de limite de Funciones:

  $\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

- Definicion limite al infinito: $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N / \text{si } N < x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

- Definicion limie a - infinito: $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N / \text{si } N > x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

- Limite que tiene a infinito:

  $\forall M, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

- Limite que tiene a - infinito

  $\forall M, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$

- Teorema de limite de sucesiones con limite de funciones: Sea $f: A - \{a\}$ (El dominio de f no contiene al punto a) entonces:

  $\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$, para esta sucesion se cumple que: $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

  Este teorema es la mejor herramienta para demostrar que un limite no existe.

2 Ejercicios

1.

2. $|x| < \delta$, $\text{dom}(f + g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$, entonces $f + g$ esta definida en $|x| < \delta$

   Si los dominios de f, g son distintos entonces tenes que computar antes la interseccion de los dominios.

3.

   a) $\lim_{x \to a} x^4 = a^4$

      $|x^4 - a^4| = |(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)| = |(x - a)(x + a)(x^2 + a^2)| = |x - a|\,|x + a|\,|x^2 + a^2|$

      $|x| - |a| < |x - a| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 + |a|$

      $|x + a| \leqslant |x| + |a| < 1 + 2|a|$

      Teniendo en cuenta lo anterior:

      $|x^2 + a^2| \leqslant |x|^2 + |a|^2 < (1 + |a|^2 + a^2)$

      Todo esto para escribir lo siguiente:

      $|x^4 - a^4| < |x - a|(1 + 2|a|)((1 + |a|)^2 + a^2) < \varepsilon$

      Con esto ya puedo buscar la δ

$$\delta = \frac{\varepsilon}{(1 + 2|a|)((1 + |a|)^2 + a^2)}$$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$

Aca utiliza el concepto de entorno, si me restrinjo a $|x-1|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2>\frac{1}{x}>\frac{2}{3}$

$\left|\frac{1}{x}-1\right|<\left|\frac{1-x}{x}\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|<\varepsilon\Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$

c) $\lim_{x\to 1}x^4+\frac{1}{x}=2$

$\left|x^4+\frac{1}{x}-2\right|=\left|x^4-1+\frac{1}{x}-1\right|\leqslant|x^4-1|+\left|\frac{1}{x}-1\right|=|(x-1)(x+1)(x^2+1^2)|+\left|\frac{1}{x}-1\right|$

$|(x^2+1^2)|<3$, $|x+1|<3$

$<|x-1|6+\left|\frac{1}{x}-1\right|<|x-1|6+2|x-1|=8|x-1|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-1|\leqslant\frac{\varepsilon}{8}=\delta$

4. Demostrar por definicion los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to a}x=a$

- $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0/|f(x)-a|<0\,\mathrm{si}\,|x-a|<\delta$
- Siempre empiezo escribiendo: $|f(x)-a|<\varepsilon$ y desde alli trato de buscar la relacion existente entre ε y δ:
- $|x-a|<\varepsilon\Rightarrow\varepsilon=\delta$

b) $\lim_{x\to a}c=c$

- $|c-c|=0<\varepsilon$ sin importar el $\delta>0$ que yo elija.

c) $\lim_{x\to a}x^2=a^2$

- Arriba vimos que: $|x+a|\leqslant|x|+|a|<1+2|a|$
- $|x^2-a^2|=|(x-a)(x+a)|<|x-a|(1+2|a|)<\varepsilon\Leftrightarrow|x-a|<\frac{\varepsilon}{|1+2|a||}=\delta$

d) $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

- $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|$
- Ahora usamos lo de restringirnos a un intervalo: $|x-a|<\frac{a}{2}$
- $-\frac{a}{2}<x-a<\frac{a}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{2}<x<\frac{3}{2}a\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{2}}<\sqrt{x}<\sqrt{\frac{3a}{2}}$
- Entones: $\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}<\sqrt{x}+\sqrt{a}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}}$
- $\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|<\frac{|x-a|}{\left|\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}\right|}<\varepsilon\Leftrightarrow\delta=\varepsilon\left|\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}\right|$ (No hace falta el modulo)

e) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a$

- $\left|\frac{x^2-a^2}{x-a}-2a\right|=\left|\frac{x^2-a^2-2ax+2a^2}{x-a}\right|=\left|\frac{(x-a)^2}{x-a}\right|=|x-a|<\varepsilon\Rightarrow\delta=\varepsilon$

f) $\lim_{x\to 0} x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

- $|\mathrm{sen}(x)| < 1$
- $\left|x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| < |x^2|\,1 = |x| < \sqrt{\varepsilon} = \delta$

5. Calcular los siguientes limites, en el caso de existir justificar:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g) $\lim_{x\to 2}(x^2 - [x])$

- Para ver si existe este limite fijarse si existe el limite de $[x]$
- $\lim_{x\to 2^-}[x] = 2$
- $\lim_{x\to 2^+}[x] = 3$
- Conclusion el limite no existe.

6.

7. Demostrar por definición que no existen los siguientes limites.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \text{No existe}$

- Considere dos sucesiones: $x_n = \frac{1}{n(-1)^{2n}}$, $z_n = \frac{1}{n(-1)^{2n-1}}$
- Claramente: si $n\to\infty$ luego: $x_n, z_n \to 0$
- Por otro lado: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n} = -\infty$

b) $\lim_{x\to 0}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{No existe}$

- Considero: $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi n}{2}} = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, $z_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi n}{2}} = \frac{2}{\pi(3+4n)}$
- Veamos que: $\lim_{n\to\infty} x_n, z_n = 0$, lo cual es algo requerido.
- Sin embargo: $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1+4n)\right) = 1$
- Mientra que: $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z_n}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}(3+4n)\right) = -1$

- La funcion compuesta con la sucesion tiende a limites distintos.

8.

9. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$ Usando la defnicion de limite.

- Si $\frac{1}{(x-3)^2}>M\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{M}}>|x-3|\Leftrightarrow\delta=\sqrt{\frac{1}{M}}$

b) $\lim_{x\to 0}f(x)=l\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x^3)=\lim_{x\to 0}f(x)$

- $|f(x^3)-l|<\varepsilon, |x^3-0|<\delta$

- Como: $|f(x)-l|<\varepsilon, |x|<\delta_1\Rightarrow|x|^3<\delta_1^3$ (Para ese δ)

- Entonces debo tomar: $\delta=\min(\delta_1,\delta_1^3)$

c) Si $\lim_{x\to 0}f(x^2)=l$ entonces no necesariamente exite el limite para $f(x)$

- Considere $f(x)=\begin{cases}1\,\text{si}\,x<0\\ -1\,x\geqslant 0\end{cases}$

d) Si $\lim_{x\to 0^+}f(1/x)=l\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(1/x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)$

- $x-a<\delta\Rightarrow\left|f\left(\frac{1}{x}\right)-l\right|<\varepsilon$

- Considere entonces $y=\frac{1}{x}$

- $x-a<\delta\Leftrightarrow x<a+\delta\Leftrightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{a+\delta}\Leftrightarrow\frac{1}{a+\delta}<\frac{1}{x}\Rightarrow|f(y)-l|<\varepsilon$

- Como $a=0$ se facilitan las cosas: $\frac{1}{\delta}<y$

- Aca consideraria que $\delta'=\frac{1}{\delta}$ y quedaria demostrado.

e) $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty^-}f(1/x)=\infty$

- $x-0<\delta\Rightarrow f(x)>M$

- $y=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{\delta}<\frac{1}{x}=y$

- Entonces: $f(1/y)>M\,\text{si}\,\frac{1}{\delta}<y$

- Es decir tomo $\delta'=\frac{1}{\delta}$

- Tienes que probar la vuelta

f) Existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a}f(x)$ no existe para todo $\mathbb{R}$

- Considere: $f(x)=\begin{cases}1\,x\in\mathbb{Q}\\ 0\,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

- Suponga que el limite existe:

- $|f(x)-l|<\varepsilon \Rightarrow \exists \min\left(|1-l|,|0-l|\right)$

- Por lo cual la distancia no puede ser mas chica que cierto numero y esto imposibilita que valga para todo epsilon.

10.

11. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(-x)$ (Verdadero)

      - Basicamente pregunta si es lo mismo el limite por la izquierda de $f(x)$ que el limite por la derecha de $f(-x)$

      - $|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta<x-a<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$

      - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = l \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / -\delta<x-a \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

      - Podria decirse que: $x>a-\delta$

      - Supongamos que se cumple esto, hagamos un cambio de variable: $x=-y$

      - $a-\delta<x<a+\delta \Rightarrow a-\delta<-y<a+\delta \Leftrightarrow -(a-\delta)>y>-(a+\delta)$

      - Como aca $a=0$ tenemos: $\delta>y>-\delta \Leftrightarrow |y|<\delta \Rightarrow |f(-y)-l|<\varepsilon$

   b) Si los limites de $f(x)$, $g(x)$ no existen entonces el limite de $f(x)+g(x)$ no existe. (Falso)

      - $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=1-\frac{1}{x}$, sus limites no existen.

      - $f(x)+g(x)=1$

   c) $\lim_{x\to 0} g(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (Verdadero)

      - $\left|g(x)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |g(x)|\,\left|\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |g(x)-0|<\varepsilon$ cuando $|x-0|<\delta$

   d) $\lim_{x\to 0}|f(x)|=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=0$ (Verdadero)

      - $||f(x)|-0|<\varepsilon \,\mathrm{si}\, |x-0|<\delta$

      - $||f(x)-0||=|f(x)|<\varepsilon \,\mathrm{si}\, |x|<\delta$

   e) $\lim_{x\to a} f(x)=l \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h)$

      - $|f(x)-l|<\varepsilon \,\mathrm{si}\, |x-a|<\delta$

      - Tomo $x=a+h$

      - $|f(a+h)-l|<\varepsilon \,\mathrm{si}\, |a+h-a|=|h|<\delta$

      - Puede pensarse como una composicion: $g(h)=a+h \Rightarrow \lim_{h\to 0} g(h)=a$

      - $|a+h|<\varepsilon, \mathrm{si}\, |h-0|<\delta$

      - $\lim_{h\to 0} f(g(a+h))=l$