Análisis Matemático I

ALGUNOS EJERCICIOS DEL PRÁCTICO 1

Eduardo G. Andreozzi*
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

31 de marzo de 2023

En lo que sigue se resuelven algunos ejercicios «importantes» del Práctico 1, a modo de ayuda para poder concretar algunas ideas necesarias justo antes de tener que enfocar la atención en el Práctico 2. Sólo se presentan en detalle aquellos que más han traído dificultades durante las clases prácticas, según mi experiencia.

Ejercicio 1

Demostrar las siguientes afirmaciones. Justificar **todos** los pasos, indicando las propiedades usadas.

(a) *(Propiedad Cancelativa de +)* Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

Ayuda: Usar el Axioma del opuesto aditivo. ■

(b) *(Unicidad del inverso)* Probar que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, cumplen que $a \cdot b = 1$ y que $a \cdot c = 1$, entonces $b = c$.

El siguiente razonamiento es eficiente en notación y elegante en procedimiento, aparte que muestra una «técnica» útil para más adelante:

$$\begin{aligned}
b &= 1 \cdot b && \text{Elemento neutro de la multiplicación} \\
&= (a \cdot c) \cdot b && \text{Hipótesis} \\
&= (c \cdot a) \cdot b && \text{Conmutatividad} \\
&= c \cdot (a \cdot b) && \text{Asociatividad del producto} \\
&= c \cdot 1 && \text{Hipótesis} \\
&= c && \text{Elemento neutro de la multiplicación}
\end{aligned}$$

---

*Comisión 5 (Tarde)

A partir de ahora, como cada número real a tiene un único inverso multiplicativo, se lo denota sugestivamente como a^{-1}. ■

(c) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.

Ayuda: Usar el Axioma del inverso multiplicativo. ■

(d) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Ayuda: Escribir $(x+y)^2 = (x+y) \cdot (x+y)$ y desarrollar usando varios axiomas. ■

(e) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$. ¿Cómo debería ser si $\cdot$ no fuera conmutativo?

Recordar que por el Axioma del inverso multiplicativo y el Ejercicio 1.b, si a es un número real no nulo el inverso multiplicativo de a es el **único** número real a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Como nos están pidiendo que verifiquemos que $a^{-1} \cdot b^{-1}$ es el inverso multiplicativo de $a \cdot b$ (¡lean el resultado a probar y traten de interpretar más en español y no tanto en símbolos!), seguimos la receta que nos da el mismo axioma: multiplicamos $a \cdot b$ por su hipotético inverso multiplicativo $a^{-1} \cdot b^{-1}$ (en cualquier orden) y vemos que nos da 1:

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)(a^{-1} \cdot b^{-1}) &= a \cdot (b \cdot a^{-1}) \cdot b^{-1} && \text{Asociatividad del producto} \\
&= a \cdot (a^{-1} \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Conmutatividad del producto} \\
&= (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{Asociatividad del producto} \\
&= 1 \cdot 1 && \text{Inverso multiplicativo} \\
&= 1 && \text{Elemento neutro del producto}
\end{aligned}$$

¿Qué pasaría si el producto de números reales no fuera conmutativo? Más adelante van a aparecer objetos matemáticos sobre los cuales se pueden definir las operaciones de suma y producto (de alguna forma) con propiedades análogas a las de los números reales, pero sin la conmutatividad del producto, así que hacerse la pregunta es importante.

Mirando en dónde usamos la conmutatividad del producto en la prueba anterior vemos qué habría que cambiar: si reemplazáramos $a^{-1} \cdot b^{-1}$ por $b^{-1} \cdot a^{-1}$ podríamos repetir el razonamiento sin conmutar ningún producto (ejercicio). El resultado entonces quedaría: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. ■

(f) Probar que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

Recordar que hay que probar dos implicaciones: ($\Rightarrow$) Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$, y ($\Leftarrow$) Si $a = 0$ ó $b = 0$ entonces $a \cdot b = 0$.

Ayuda: Para probar la dirección ($\Rightarrow$) convencerse de que probar $[\, a = 0 \;\text{ ó }\; b = 0 \,]$ es equivalente a probar [$a \neq 0$ implica $b = 0$]. ■

(g) Probar que $(-1)a = -a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Recordar que por la Unicidad del opuesto aditivo si a es un número real, el opuesto aditivo de a es el **único** número real $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Como nos están pidiendo que verifiquemos que $(-1) \cdot a$ es el opuesto aditivo de a, seguimos la receta que nos da el mismo axioma: sumamos a con su hipotético opuesto aditivo $(-1) \cdot a$ (en cualquier orden) y vemos que nos da 0:

$$\begin{aligned}
a + (-1) \cdot a &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a && \text{Elemento neutro del producto} \\
&= [1 + (-1)] \cdot a && \text{Propiedad distributiva} \\
&= 0 \cdot a && \text{Opuesto aditivo} \\
&= 0 && \text{Lema}
\end{aligned}$$

■

(h) Probar que $(-1)(-1) = 1$.

Este ejercicio se puede hacer de manera directa[1] pero se prefiere usar el ítem **(g)** anterior. Como $-(-a) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (ejercicio) tenemos que

$$\begin{aligned}
(-1) \cdot (-1) &= -(-1) && \text{Ejercicio 1.g} \\
&= 1 && \text{Ejercicio}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

(a) Probar que si $a^3 = 1$, entonces $a = 1$.

Por el Axioma de tricotomía sólo se puede cumplir una de las siguientes relaciones: $a > 1$, $a = 1$ ó $a < 1$. Vamos a razonar por absurdo para descartar las posibilidades $a > 1$ y $a < 1$, por lo que necesariamente se va a cumplir que $a = 1$.

Supongamos que $a > 1$, entonces en particular a es positivo, por lo que podemos usar la Monotonía del producto en las desigualdades para deducir que $a^2 > a$, y luego que $a^2 > 1$ por la Transitividad en las desigualdades. Usando nuevamente la Monotonía del producto en las desigualdades tenemos que $a^3 > a$, y concluimos que $a^3 > 1$ nuevamente por la Transitividad en las desigualdades. Pero esto contradice nuestra hipótesis: $a^3 = 1$. Al llegar a una conclusión absurda (una contradicción a la hipótesis inicial) descartamos la posibilidad $a > 1$.

[1]Probar que $(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$ usando los axiomas y luego apelar a la unicidad del opuesto aditivo del 1.

Ahora supongamos que $a < 1$. Primero notemos que a no puede ser nulo, ya que su cubo entonces sería nulo también. Por otro lado a tampoco puede ser negativo, ya que su cubo entonces también lo sería.

Veamos rápidamente esto último. Si a es negativo, $-a$ es positivo y por lo tanto también lo son $(-a)^2$ y $(-a)^3$ por sucesivas aplicaciones de la Monotonía del producto en las desigualdades. Pero

$$\begin{aligned}
(-a)^3 &= (-a)\cdot(-a)\cdot(-a) && \text{Definición}\\
&= [(-1)\cdot a]\cdot[(-1)\cdot a]\cdot[(-1)\cdot a] && \text{Ejercicio 1.g}\\
&= [(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)]\cdot[a\cdot a\cdot a] && \text{Asociatividad y conmutatividad del producto}\\
&= (-1)\cdot a^3 && \text{Ejercicio 1.h}\\
&= -a^3 && \text{Ejercicio 1.g}
\end{aligned}$$

Como entonces $-a^3$ es positivo, a^3 es negativo.

Después de este corto desvío nos queda claro que a debe ser positivo si se cumple que $a^3 = 1$. Habíamos supuesto que $a < 1$ (o sea $0 < a < 1$), y entonces podemos razonar exactamente igual que antes (igual que en el caso $a > 1$) y llegar a que $a^3 < 1$ (ejercicio), lo que nuevamente es absurdo por contradecir la hipótesis: $a^3 = 1$. Con esto descartamos la posibilidad $a < 1$ y estamos forzados a concluir que $a = 1$. ■

(b) Usar el inciso anterior para deducir que si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$.

Para este ítem es muy útil conocer el resultado: $(a^3)^{-1} = (a^{-1})^3$ para todo $a \neq 0$; aunque no está como ejercicio en el Práctico 1 sugiero fuertemente probarlo[2] como práctica de lo aprendido en el Ejercicio 1.

Si alguno de los números a ó b es nulo el resultado es consecuencia de un ejercicio anterior (¿cuál?, ¿cómo?), así que consideremos que tanto a como b no son nulos. La hipótesis $a^3 = b^3$ es equivalente a $a^3 \cdot (b^3)^{-1} = 1$ (¿por qué?), y con esto tenemos que

$$\begin{aligned}
(a\cdot b^{-1})^3 &= (a\cdot b^{-1})\cdot(a\cdot b^{-1})\cdot(a\cdot b^{-1}) && \text{Definición}\\
&= (a\cdot a\cdot a)\cdot(b^{-1}\cdot b^{-1}\cdot b^{-1}) && \text{Asociatividad y conmutatividad del producto}\\
&= a^3\cdot(b^{-1})^3 && \text{Definición}\\
&= a^3\cdot(b^3)^{-1} && \text{Resultado al principio}\\
&= 1 && \text{Hipótesis}
\end{aligned}$$

Como el número $a \cdot b^{-1}$ satisface que su cubo es igual a 1, por el ítem **(a)** anterior concluimos que $a \cdot b^{-1} = 1$, ó equivalentemente $a = b$.

[2] O su versión más general: $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ para todo $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9

Expresar lo siguiente prescindiendo de las barras de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.

(a) $|(|x|-1)|$.

La mejor estrategia es (casi) siempre empezar removiendo las barras de valor absoluto **de adentro hacia afuera**. Veamos cómo hacer esto.

Primero consideramos los casos $x \geq 0$ y $x < 0$, pensando en el valor absoluto (de x) más interior. Escribimos

$$|(|x|-1)| = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \geq 0 \\ |-x-1| & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \geq 0 \\ |x+1| & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ahora dividimos nuevamente cada caso. En el caso $x \geq 0$ tenemos que

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

y en el caso $x < 0$ tenemos que

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Ahora toca compactar un poco la expresión final, considerando cómo las condiciones sobre x se «intersecan» para definir regiones disjuntas de la recta real sobre las cuales la expresión $|(|x|-1)|$ toma sus distintas formas. Por ejemplo, el caso $x \geq 0$ se subdivide luego en los casos $x \geq 1$ y $x < 1$, es decir que en realidad tenemos que considerar los casos $x \geq 1$ y $0 \leq x < 1$ para escribir dos de las formas finales que toma $|(|x|-1)|$ en la región $x \geq 0$ de la recta real.

Meditando un poco lo recién dicho, la expresión final buscada es

$$|(|x|-1)| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x-1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

■

(b) $a - |(a-|a|)|$.

Notar que $a \leq |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$, luego $|(a-|a|)| = -(a-|a|) = |a| - a$ sin importar el a. Entonces

$$a - |(a-|a|)| = a - (|a|-a) = 2a - |a| = \begin{cases} 2a - a & \text{si } a \geq 0 \\ 2a-(-a) & \text{si } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 3a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Este es un caso en donde fue mejor remover las barras de valor absoluto de afuera hacia adentro, pero sólo porque la expresión es muy conveniente. Este caso también enseña a «observar» la expresión antes de lanzarse a separar en casos a lo loco.

Ejercicio 14

Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de números reales tiene supremo, ínfimo, máximo o mínimo. Justificar con demostraciones.

Antes de empezar se aclaran las definiciones de máximo y mínimo de un subconjunto real.

Definición. Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente se dice que A **admite máximo** (o **tiene máximo**) si existe un número $\alpha \in A$ cota superior de A. Tal número α es único, se lo denomina **máximo de** A y se lo denota $\alpha = \max A$. Dicho en sencillo, *el máximo de A es el elemento de A más grande de todos*, si tal elemento existe.

Análogamente, si $B \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente se dice que B **admite mínimo** (o **tiene mínimo**) si existe un número $\beta \in B$ cota inferior de B. Tal número β es único, se lo denomina **mínimo de** B y se lo denota $\beta = \min B$. Dicho en sencillo, *el mínimo de B es el elemento de B más chico de todos*, si tal elemento existe.

■

Ahora sí veamos cómo hacer algunos ítems de este ejercicio.

(a) $[3, 8)$.

> **Aclaración:** Este ejercicio puede resolverse usando el «Lema Útil» en sus versiones para supremo e ínfimo. Por ser el primero en su tipo se prefiere resolverlo sólo usando las definiciones de supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
> Por otro lado, hay dos versiones del «Lema Útil» dadas en las clases teóricas de la mañana (Comisiones 1, 2 y 3) y de la tarde (Comisiones 4 y 5). En esta exposición se considera la versión del «Lema Útil» dada en las clases teóricas de la tarde. Se recuerda más adelante este lema para evitar confusiones.

Primero deberían convencerse (vía el Axioma del supremo y su equivalente para el ínfimo) de que el conjunto en cuestión tiene supremo (el 8) pero no máximo y tiene tanto ínfimo como mínimo (el 3).

Veamos que 8 es el supremo de $[3, 8)$. Claramente 8 es una cota superior de $[3, 8)$, por lo que tiene supremo y lo denotamos como S. Se cumple entonces que $3 \leq S \leq 8$ (¡recordar la definición de supremo!). Pero si se cumpliera que $S < 8$, el número $(S + 8)/2$ satisface que

$$3 \leq S < \frac{S+8}{2} < 8,$$

es decir habríamos encontrado un número[3] en el conjunto dado mayor a S, lo que es absurdo ya que S es una cota superior del mismo. Esto nos dice que la opción $S < 8$ no es posible y entonces $S = 8$.

Ahora veamos que $[3, 8)$ no tiene máximo. Toda cota superior del conjunto es mayor o igual a 8 (¿por qué?), pero $[3, 8)$ no contiene a ningún número mayor o igual a 8, luego no puede tener máximo.

Ahora veamos que 3 es el ínfimo de $[3, 8)$. Claramente 3 es una cota inferior de $[3, 8)$, por lo que tiene ínfimo y lo denotamos como I. Se cumple entonces que $3 \leq I < 8$ (¡recordar la definición de ínfimo!). Pero si se cumpliera que $I > 3$, habríamos encontrado un número (el 3) en el conjunto dado menor a I, lo que es absurdo ya que I es una cota inferior del mismo. Esto nos dice que la opción $I > 3$ no es posible y entonces $I = 3$.

Por último veamos que 3 es también el mínimo de $[3, 8)$. Claramente 3 es una cota inferior de $[3, 8)$ y pertenece a dicho conjunto, luego 3 es el mínimo por definición. ■

(b) $(-\infty, \pi)$.

Ayuda: Notar que $(-\infty, \pi)$ no está acotado inferiormente, por lo que no puede tener ínfimo ni mínimo. Al estar acotado superiormente tiene supremo, pero no máximo. ■

(c) $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ayuda: Recordar todo lo conocido hasta el momento sobre $\mathbb{Z}$ (en particular, que $\mathbb{Z}$ no está acotado). ¿Puede el conjunto dado en el enunciado estar acotado? ■

(d) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\}$.

Ayuda: Notar que $-1 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Si todavía no les sale, sigan leyendo que el siguiente ítem **(e)** se hace de manera muy parecida. ■

(e) $\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Para este ítem vamos a usar el «Lema Útil» y la Propiedad arquimediana de los números reales. Recordamos estos resultados.

Lema. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Entonces $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de A si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $a \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a$.*

Si ahora $B \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado inferiormente, $\beta \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de B si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $b \in B$ tal que $b < \beta + \varepsilon$.

Teorema. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.*

■

Primero deberían convencerse de que el conjunto en cuestión tiene supremo (el 3) pero no máximo

[3] Por si todavía no entienden la elección del número, es sólo el promedio entre S y 8, que está justo en el medio.

y tiene tanto ínfimo como mínimo (el 2).

Veamos que 3 es el supremo del conjunto. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces por la Propiedad arquimediana de los números reales existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Considerando el número $3 - \frac{1}{N}$, que pertenece al conjunto, vemos que

$$3 - \varepsilon < 3 - \frac{1}{N},$$

y entonces por el «Lema Útil» concluimos que 3 es el supremo del conjunto.

Ahora veamos que el conjunto no tiene máximo. La forma más fácil de ver esto es notar que todo número en el conjunto admite un número más grande también en el conjunto: para un dado número $3 - \frac{1}{N}$ en el conjunto, $3 - \frac{1}{N+1}$ es un número más grande también en el conjunto. Esto implica que es imposible encontrar una cota superior en el conjunto, luego éste no puede tener máximo.

Ahora veamos que 2 es el ínfimo del conjunto. Claramente 2 es una cota inferior del conjunto, por lo que tiene ínfimo y lo denotamos como I. Se cumple entonces que $2 \leq I < 3$. Pero si se cumpliera que $I > 2$, habríamos encontrado un número $(2 = 3 - \frac{1}{1})$ en el conjunto dado menor a I, lo que es absurdo ya que I es una cota inferior del mismo. Esto nos dice que la opción $I > 2$ no es posible y entonces $I = 2$.

Por último, veamos que 2 también es el mínimo del conjunto. Claramente 2 es una cota inferior del conjunto y pertence al mismo, luego 2 es el mínimo por definición. ■

(f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 0\}$.

Ayuda: Existen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. Recuerden la Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. ■

(g) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$.

Ayuda: ¿Cuántos números hay en este conjunto? ■

(h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$.

Primero deberían convencerse de que el conjunto tiene supremo (el número $\sqrt{2}$) e ínfimo (el 0) pero no máximo ni mínimo.

Primero veamos que $\sqrt{2}$ es el supremo del conjunto. Claramente $\sqrt{2}$ es una cota superior del conjunto, por lo que tiene supremo y lo denotamos como S. Se cumple entonces que $0 < S \leq \sqrt{2}$. Pero si se cumpliera que $S < \sqrt{2}$ entonces, por la Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existiría un número $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (S, \sqrt{2})$. Entonces habríamos encontrado un número (el número q) en el conjunto dado mayor a S, lo que es absurdo ya que S es una cota superior del mismo. Esto nos dice que la opción $S < \sqrt{2}$ no es posible y entonces $S = \sqrt{2}$.

Ahora veamos que el conjunto no tiene máximo. La forma más fácil de ver esto es notar que todo número en el conjunto admite un número más grande también en el conjunto: para un dado número p en el conjunto, podemos usar la Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ para encontrar un número $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (p, \sqrt{2})$, y por lo tanto q está en el conjunto. Esto implica que es imposible encontrar una cota superior en el conjunto, luego éste no puede tener máximo.

Ahora veamos que 0 es el ínfimo del conjunto. Claramente 0 es una cota inferior del conjunto, por lo que tiene ínfimo y lo denotamos como I. Se cumple entonces que $0 \leq I < \sqrt{2}$. Pero si se cumpliera que $I > 0$ entonces, por la Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existiría un número $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (0, I)$. Entonces habríamos encontrado un número (el número q) en el conjunto dado menor a I, lo que es absurdo ya que I es una cota inferior del mismo. Esto nos dice que la opción $I > 0$ no es posible y entonces $I = 0$.

Por último, veamos que el conjunto no tiene mínimo. La forma más fácil de ver esto es notar que todo número en el conjunto admite un número más chico también en el conjunto: para un dado número p en el conjunto, podemos usar la Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ para encontrar un número $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (0, p)$, y por lo tanto q está en el conjunto. Esto implica que es imposible encontrar una cota inferior en el conjunto, luego éste no puede tener mínimo. ■

(i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

Ayuda: Traten de identificar en qué difiere este ejercicio del anterior. ■

BONUS: Para subconjuntos de los números reales con máximos, por ejemplo, se habrán dado cuenta a esta altura que sus respectivos supremos coinciden con tales máximos, y que cada vez que un conjunto acotado superiormente contiene a su supremo, el mismo resulta también ser su máximo. Esto no es casualidad, y es «intuitivamente» evidente. Entonces el siguiente resultado debería parecer «natural».

Proposición. *En $\mathbb{R}$ todo máximo es supremo y todo mínimo es ínfimo. Dicho más formalmente, si $A \subset \mathbb{R}$ admite máximo, entonces $\sup A = \max A$, y si $A \subset \mathbb{R}$ admite mínimo, entonces $\inf A = \min A$. Por otro lado, si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente y contiene a su supremo, entonces A admite máximo y $\max A = \sup A$, y si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente y contiene a su ínfimo, entonces A admite mínimo y $\min A = \inf A$.*

Demostrar el resultado anterior es un desafío interesante para practicar las definiciones. Por otra parte «reduce» el trabajo de encontrar/demostrar supremos, ínfimos, máximos o mínimos una vez se detectan fácilmente algunos de ellos.

Ejercicio 17

Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son densos (Aquí, $X \setminus Y$ denota la resta de conjuntos).

(a,b,c,d) No se presenta ninguna solución, sólo unos comentarios.

Existen dos definiciones de densidad de subconjuntos de $\mathbb{R}$ útiles para esta materia.

Definición 1. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice **denso en** $\mathbb{R}$ si para todo intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ existe un número $\alpha \in A$ tal que $\alpha \in (a, b)$.

Definición 2. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice **denso en** $\mathbb{R}$ si para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, existe $a \in A$ tal que $x < a < y$.

■

Queda de ejercicio convencerse de que las dos definiciones anteriores son equivalentes. Aunque no parezca que la diferencia entre las definiciones es substancial, a veces es conveniente pensar en una más que en la otra dependiendo del ejercicio: la primera definición dice que un subconjunto real es denso si se lo puede «cortar» con cualquier intervalo abierto, y la segunda definición dice que un subconjunto real es denso si siempre se puede «encajar» un elemento de él entre dos números reales cualesquiera. La única diferencia recae en los «dibujos» que se hacen en la cabeza cuando resuelven los ejercicios.

Por último, de las definiciones anteriores se les debería quedar la siguiente «idea gráfica»: un subconjunto real es denso si no está acotado de ninguna manera (se extiende por toda la recta real) ni tiene «agujeros grandes» (capaces de contener intervalos abiertos).