Aplicaciones de la derivada

Repasamos la siguiente definición.

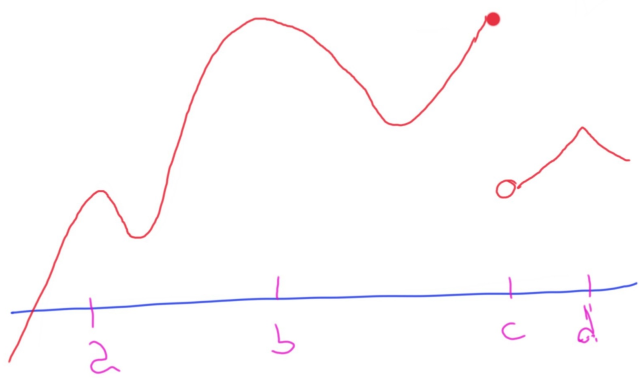
Definición. Sea f una función definida en un intervalo abierto A. Se dice que f alcanza el **valor máximo** en $a \in A$ si $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in A$.

En ese caso, a se denomina un **punto de máximo** (también llamado punto de máximo global) para f (que puede no ser único), y $f(a)$ es el valor máximo.

Las nociones de valor mínimo y punto de mínimo se definen análogamente.

Definición. Sea f una función definida en un intervalo abierto A. Se dice que $a \in A$ es un **punto de máximo local** si existe $\delta > 0$ tal que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

El concepto de punto de mínimo local se define de manera similar.



Para la función del dibujo, los puntos a, b, c y d son puntos de máximo local y los dos del medio son además puntos de máximo global.

Teorema. Sea f una función definida en un intervalo abierto y sea a un punto de máximo o mínimo local. Si f es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.

Ejemplo. La función $f(x) = |x|$ tiene mínimo local en $a = 0$ pero no es derivable en 0.

Prueba. La hacemos para máximo local (para mínimo local es semejante).

Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $f(a+h) \leq f(a)$ para todo $h \in (-\delta, \delta)$.

Por otro lado, existe

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En particular, existen los límites laterales y se cumple que

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0,$$

ya que $f(a+h) - f(a) \leq 0$ y $0 < h < \delta$.

También,

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0,$$

pues el numerador el cociente incremental es menor o igual que cero, como para $f'_+(a)$, pero el denominador es negativo.

En consecuencia, $f'(a) = 0$, como queríamos. □

Ejemplo. Si $f'(a) = 0$, no vale necesariamente que a sea punto de máximo o mínimo local. Por ejemplo,

$$f(x) = x^3, \qquad f'(x) = 3x^2, \quad \text{con lo cual} \quad f'(0) = 0.$$

Sin embargo, 0 no es punto de mínimo local ni de máximo local, pues

$$f(x) = x^3 > 0 = f(0) \text{ si } x > 0 \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^3 < 0 = f(0) \text{ si } x < 0,$$

respectivamente.

Máximos y mínimos globales de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Por el Tercer Teorema Fuerte sabemos que f alcanza un máximo. El teorema anterior facilita su búsqueda.

Proposición. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. El valor máximo de f en el intervalo $[a,b]$ es el máximo entre los números $f(x)$ con x de la siguiente forma:

1) $x = a$ o $x = b$ (o sea, x es un extremo del intervalo $[a,b]$),

2) $x \in (a,b)$ tal que $f'(x)$ no existe,

3) $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Prueba. Por el Tercer Teorema Fuerte sabemos que f alcanza un máximo. Por el teorema anterior, no puede alcanzarse en los puntos del intervalo abierto (a,b) donde la derivada exista y sea distinta de cero. Luego, debe alcanzarse en algún x como los señalados. □

Notas. a) Una proposición similar vale para el mínimo de f.

b) Los x de (2) y (3) se denominan **puntos críticos** de f.

Ejemplo. Encontrar los valores máximos y mínimos de de la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el intervalo $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$.

Como f es continua, podemos aplicar la proposición.

Buscamos los puntos críticos. Como f es derivable en $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, no tenemos puntos como en (2). Así que debemos encontrar los $x \in \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ tales que $f'(x) = 0$. Planteamos

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x-1)(x+1).$$

Luego los puntos críticos son $x = 1$ y $x = -1$ (ya que están el intervalo requerido).

Por la proposición, el máximo de f en $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ es

$$\max\left\{f\left(-\tfrac{3}{2}\right), f(3), f(1), f(-1)\right\} = \max\left\{\tfrac{9}{8}, 18, -2, 2\right\} = 18.$$

El valor mínimo de f en el intervalo dado es el mínino de ese conjunto, o sea, -2.

Comentario. En principio, para encontrar el máximo y el mínimo deberíamos comparar entre sí los valores de f en todos los puntos del intervalo, que son infinitos. La proposición nos dice que basta considerar los valores de f en los extremos del intervalo y en los puntos críticos.

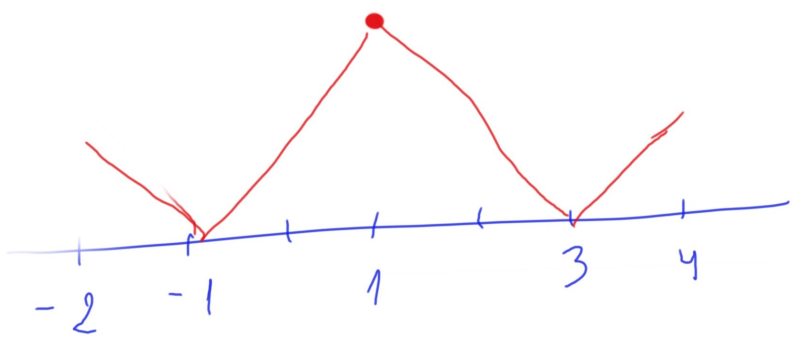
Ejemplo. Encontrar el máximo global de la función

$$f(x) = ||x-1|-2|$$

en el intervalo $[-2,4]$.

Calculamos

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} |x-1-2| & \text{si } x-1 \geq 0, \\ |-(x-1)-2| & \text{si } x-1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} |x-3| & \text{si } x \geq 1, \\ |-x-1| = |x+1| & \text{si } x < 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 1 \text{ y } x \geq 3, \\ -x+3 & \text{si } x \geq 1 \text{ y } x < 3, \\ x+1 & \text{si } x < 1 \text{ y } x \geq -1, \\ -x-1 & \text{si } x < 1 \text{ y } x < -1, \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3, \\ -x+3 & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ -x-1 & \text{si } x < -1. \end{cases} \end{aligned}$$



Claramente, la función es derivable en los intervalos abiertos $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,3)$ y $(3,\infty)$, y la derivada en cada uno de ellos es constante igual a 1 o a -1.

Para ver que la función es continua en todo $\mathbb{R}$ (y en particular en $[-2,4]$), a diferencia de una función definida a trozos general, no es necesario tomar límites laterales, pues f es la composición de cuatro funciones continuas, a saber,

$$x \mapsto x-1, \qquad y \mapsto |y|, \qquad w \mapsto w-2 \qquad \text{y} \qquad z \mapsto |z|.$$

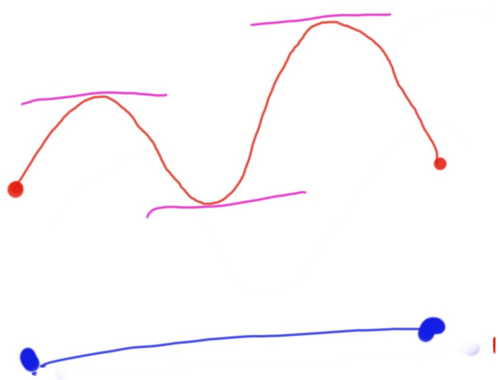
Entonces los puntos críticos de f están contenidos en el conjunto finito $\{-1,1,3\}$. En consecuencia, el mínimo de f en el intervalo $[-2,4]$ es

$$\text{máx}\{f(-2), f(-1), f(1), f(3), f(4)\} = \text{máx}\{0,1,2\},$$

pues $f(-2) = f(4) = 1$, $f(-1) = f(3) = 0$ y $f(1) = 2$. El único punto de ese intervalo donde se alcanza el máximo es 1.

Observamos que no verificamos si $-1,1,3$ son puntos críticos. No vale la pena que nos tomemos ese trabajo, pues resulta más fácil evaluar f en esos puntos y comparar los valores obtenidos.

Teorema de Rolle. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b)$. Si f es derivable en el intervalo (a,b), entonces existe $t_o \in (a,b)$ tal que $f'(t_o) = 0$.



Comentario. Supongamos que $f(t)$ denota la posición en el instante t de un móvil que se mueve suavemente en la recta real en el intervalo de tiempo $[a,b]$. La hipótesis indica que al final del recorrido está en el punto de donde partió. La tesis dice que en algún instante se detiene (posiblemente en más de uno).

Prueba. Como f es continua en $[a,b]$, por el Tercer Teorema Fuerte alcanza máximo y mínimo. Luego existen un punto de máximo x_o y un punto de mínimo y_o.

Si $x_o \in (a,b)$, como f es derivable en ese intervalo, sabemos por un teorema anterior que $f'(x_o) = 0$. Así, podemos tomar $t_o = x_o$.

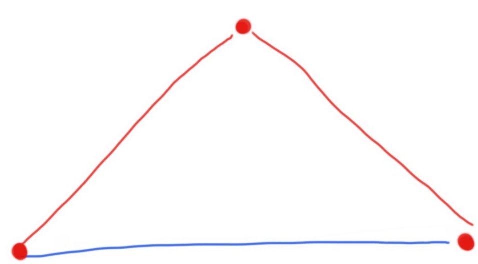
Lo mismo sucede si $y_o \in (a,b)$.

Entonces solo falta considerar el caso en que ni x_o ni y_o están en (a,b). O sea, x_o e y_o son ambos puntos extremos del intervalo $[a,b]$. Pero por hipótesis $f(a) = f(b)$, luego el máximo y el mínimo de f son iguales, con lo cual f es constante y por lo tanto $f'(t) = 0$ para todo t. Así, en este caso, t_o puede ser cualquier punto de (a,b). $\square$

Ejemplo. La hipótesis de que f sea derivable en (a,b) es necesaria. De hecho, $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leq t < 0, \\ 1-t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

cumple $f(-1) = f(1)$ pero f' no toma el valor cero.

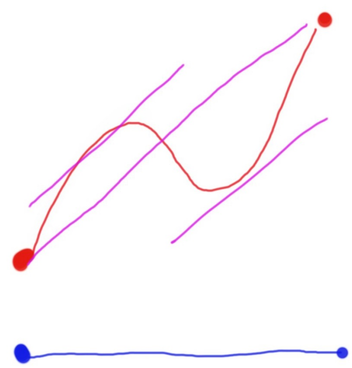


Del Teorema de Rolle se deduce el siguiente importante teorema (no confundirlo con el Teorema de los Valores Intermedios).

Teorema del Valor Medio. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f es derivable en el intervalo (a, b), entonces existe $t_o \in (a, b)$ tal que

$$f'(t_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Interpretación geométrica. Existe (al menos) una recta tangente al gráfico de f cuya pendiente es igual a la pendiente de la recta que une los extremos del gráfico.



Interpretación cinemática. Supongamos que f es la función posición de un punto que se mueve (suavemente) sobre la recta real en el intervalo de tiempo $[a, b]$. Entonces en algún momento t_o la velocidad del móvil (o sea, $f'(t_o)$) es igual a la velocidad media del móvil en $[a, b]$, es decir, el miembro derecho de (1).

Por ejemplo, si recorremos 18 km en tres horas (aunque nos hayamos detenido, o incluso ido para atrás un trecho), la velocidad media es de $\frac{18 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. El teorema dice que en algún momento esa fue nuestra velocidad instantánea.

Prueba. Sea

$$r(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a),$$

que es la ecuación de la recta que pasa por el punto $(a, 0)$ paralela a la recta que une los extremos del gráfico.

Llamamos

$$h(t) = f(t) - r(t) = f(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a).$$

Veamos que podemos aplicar el Teorema de Rolle a la función h en $[a, b]$. Claramente h es continua en ese intervalo, y derivable en (a, b) (pues f y r lo son). Así, solo resta verificar que $h(b) = h(a)$. En efecto,

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Por el Teorema de Rolle existe $t_o \in (a, b)$ tal que $h'(t_o) = 0$. O sea,

$$0 = h'(t_o) = f'(t_o) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Así, t_o tiene la propiedad requerida. $\square$

Corolario. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto A. Si $f'(t) = 0$ para todo t, entonces f es constante.

Comentarios. 1) Se trata de la recíproca de un hecho conocido: La derivada de una función constante es cero.

2) La interpretación cinemática es muy sencilla: Un móvil con velocidad cero está quieto. Sin embargo, la prueba usa el Teorema de Rolle (cuya demostración involucra el Tercer Teorema Fuerte) y lleva un par de renglones. Esto se debe a la dificultad técnica y conceptual de la noción de velocidad instantánea.

Prueba. Fijamos $a \in A$. Dado $b \in A$, debemos verificar que $f(b) = f(a)$. Supongamos que $a < b$. Por el Teorema del Valor Medio aplicado a f en el intervalo $[a, b]$ tenemos que existe $t_o \in (a, b)$ tal que

$$f'(t_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero por hipótesis $f'(t_o) = 0$. Luego $f(b) - f(a) = 0$, con lo cual $f(b) = f(a)$, como queríamos.

Si $a > b$, se procede de manera similar, intercambiando los roles de a y b. $\square$

Corolario. Sean f y g dos funciones derivables definidas en el mismo intervalo abierto A. Si $f' = g'$, entonces existe una constante c tal que

$$f(t) = g(t) + c$$

para todo $t \in A$.

Comentarios. 1) La interpretación geométrica es que el gráfico de f se obtiene a partir del de g trasladándolo verticalmente.

2) La interpretación cinemática es que dos móviles en la misma recta que tienen la misma velocidad se mantienen a una distancia constante.

Prueba. Sea $h : A \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(t) = f(t) - g(t)$. Derivamos miembro, obteniendo

$$h'(t) = f'(t) - g'(t) = 0$$

(por hipótesis). Por el corolario anterior, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(t) = c$ para todo $t \in A$. En consecuencia, $f = g + c$, como queríamos. $\square$

Corolario del Teorema del Valor Medio. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto A. Si $f'(t) > 0$ para todo $t \in A$, entonces f es estrictamente creciente.

Prueba. Dados $a < b$ en A, debemos ver que $f(a) < f(b)$. Por el Teorema del Valor Medio existe $t_o \in (a, b)$ tal que

$$f'(t_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $f'(t_o) > 0$ por hipótesis y $b > a$, entonces $f(b) - f(a) > 0$, o equivalentemente, $f(a) < f(b)$, como queríamos. $\square$

Nota. Un enunciado similar vale cuando la derivada es negativa. En ese caso la función es estrictamente decreciente.

Ejemplo. Mostrar que la función f dada por

$$f(t) = \operatorname{sen} t - t\cos t$$

es estrictamente creciente en el intervalo $(0, \pi)$.

Si quisiéramos usar la definición, deberíamos verificar que

$$\operatorname{sen} x - x\cos x < \operatorname{sen} y - y\cos y$$

para todo $0 < x < y < \pi$, lo que no es sencillo.

Usando el corolario, la validez del enunciado es bastante directa: Calculamos

$$f'(t) = \cos t - \cos t - t(-\operatorname{sen} t) = t\operatorname{sen} t,$$

que es positiva en $(0, \pi)$. Entonces f es creciente en ese intervalo.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente, pero su derivada no es siempre positiva: $f'(0) = 0$.

Proposición. Sea $f : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ (con $\delta > 0$) una función continua tal que f es creciente en $(a, a + \delta)$ y decreciente en $(a - \delta, a)$. Entonces a es un punto de mínimo para f.

Prueba. Queremos ver que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Consideramos primero el caso en que $x > a$. Sabemos que si $a < y < x$, entonces $f(y) < f(x)$, o equivalentemente, $f(x) - f(y) \geq 0$.

Ahora tomamos límite para $y \to a^+$, y como f es continua obtenemos

$$0 \leq \lim_{y \to a^+} f(x) - f(y) = f(x) - f(a),$$

con lo cual, $f(a) \leq f(x)$.

Cuando $x < a$ se procede de manera similar. $\square$

Convexidad, concavidad y la derivada segunda

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto A. Se define la derivada segunda de f mediante $f'' = (f')'$, que puede existir o no.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^4 + x^3 + \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + \cos x$ y $f''(x) = 12x^2 + 6x - \operatorname{sen} x$.

Comentario. Si p es la función posición de un móvil en la recta real, entonces $p''(t)$ es la aceleración del móvil en el instante t (indica cómo varía la velocidad en ese momento).

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Luego,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0, \\ -2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

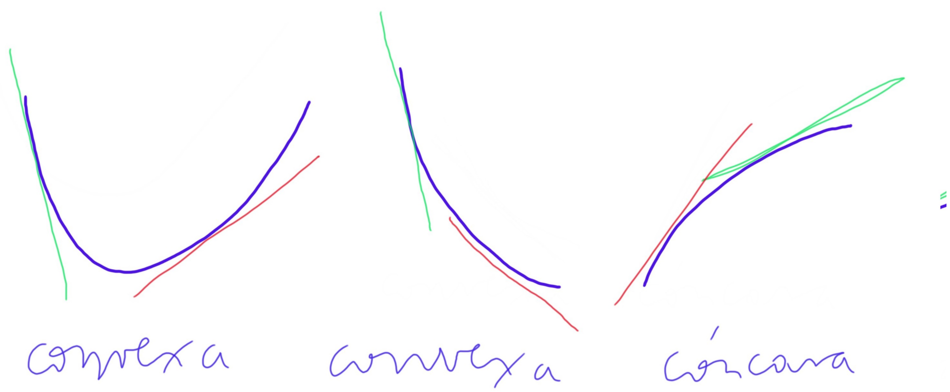
Para $x \neq 0$, eso vale pues f coincide en intervalos **abiertos** con las funciones $x \mapsto x^2$ y $x \mapsto -x^2$, que son derivables. Para ver que $f'(0) = 0$, podemos calcular las derivadas laterales $f'_{\pm}(0)$, recurriendo al cociente incremental, que son ambas iguales a cero. Otra forma es usando un ejercicio del práctico que dice que si $|f(x)| \leq x^2$ (situación que tenemos), entonces f es derivable en cero.

Así, $f'(x) = 2|x|$, que sabemos que no es derivable en cero. Por lo tanto, $f''(0)$ no existe.

A continuación definimos las nociones de función convexa y función cóncava.

Comentario. Visualizamos las funciones convexas y las cóncavas como aquellas cuyos gráficos son "panza abajo" o "panza arriba", respectivamente.

En las primeras observamos que las pendientes de las rectas tangentes crecen, mientras que decrecen para las segundas (en cada caso, la recta verde tiene una pendiente menor que la recta roja).



La anterior es la interpretación geométrica de la convexidad y concavidad.

Definición. Una función derivable f definida en un intervalo abierto se dice **convexa** si f' es estrictamente creciente, y se dice **cóncava** si f' es estrictamente decreciente.

Ejercicio. Suponer que f'' existe. Mostrar que si es positiva, entonces f es convexa y si es negativa, entonces f es cóncava.

Comentario. Se puede demostrar que una función derivable f definida en un intervalo abierto A es convexa si y solo si para todo $a < b$ en A se cumple que el segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está por encima del gráfico de f.

Ejemplo. Determinar en qué intervalos abiertos la función $f(x) = x^3$ es convexa o cóncava.

Calculamos $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$. Como $f''(x)$ es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$, resulta que f es convexa en $(0, \infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0)$.

El siguiente teorema da un criterio para que un punto donde se anula la derivada sea un punto de mínimo local, usando la derivada segunda.

Teorema. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto A tal que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces a es un punto de mínimo local, y si $f''(a) < 0$, entonces a es un punto de máximo local.

Prueba. Demostramos la primera afirmación (la prueba de la segunda es similar). Sabemos que

$$0 < f''(a) = (f')'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Luego existe $\delta > 0$ tal que la función $h \mapsto \frac{f'(a+h)}{h}$ es positiva en $(a - \delta, a + \delta) - \{a\}$.

Entonces en el intervalo $(a, a + \delta)$ (para denominador $h > 0$) se cumple que el numerador $f'(a+h)$ es positivo, con lo cual f crece en ese intervalo.

De manera análoga, en $(a - \delta, a)$ la función decrece, pues como $h < 0$, debe ser $f'(a+h) < 0$.

Por una proposición anterior, a es un punto de mínimo local para f, como queríamos. $\square$

Ejemplo. En general, para ver que un punto a es un punto de mínimo local de una función derivable, conviene ver que f crece a la derecha de a y decrece a la izquierda da a, estudiando el signo de f' (como lo hemos hecho más arriba). Pero en alguno casos conviene recurrir al teorema anterior. Por ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 g(x)$, donde g es una función derivable tal que $g(0) > 0$. Mostrar que 0 es un punto de mínimo local para f.

Calculamos

$$f'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x), \qquad \text{y} \qquad f''(x) = 2g(x) + 2xg'(x) + 2xg(x) + x^2 g'(x),$$

con lo cual,

$$f'(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f''(0) = 2g(0) > 0.$$

Así, 0 es un punto de mínimo local para f, por el teorema anterior. Notar que esto resultó más sencillo que verificar que $f'(x)$ es mayor o menor que cero para $x > 0$ o $x < 0$ próximos a cero, respectivamente.

Teorema del Valor Medio de Cauchy. Sean f y g dos funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, ambas derivables en (a, b). Entonces existe $t_o \in (a, b)$ tal que

$$(g(b) - g(a)) f'(t_o) = (f(b) - f(a)) g'(t_o). \tag{2}$$

Ejercicio. Mostrar que en el caso particular cuando $g(x) = x$ se recupera el Teorema del Valor Medio para f.

Comentario (interpretación cinemática). Supongamos que $g' > 0$. Así, g es creciente, y en particular $g(b) \neq g(a)$.

Entonces (2) equivale a

$$\frac{f'(t_o)}{g'(t_o)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}. \tag{3}$$

Supongamos que f y g son las funciones de posición de dos móviles en la recta real, en el mismo intervalo de tiempo $[a, b]$, y el segundo móvil nunca se detiene.

Entonces (3) dice que existe un instante $t_o \in (a, b)$ tal que el cociente de las velocidades medias de ambos móviles en $[a, b]$ es igual al cociente de las velocidades instantáneas en t_o.

Un ejemplo concreto: Supongamos que vos y yo nos movemos sobre una recta en el mismo intervalo de tiempo (digamos, con funciones de posición f y g) y yo no me detengo nunca. Si tu velocidad media fue, digamos, el triple de la mía, el Teorema del Valor Medio de Cauchy indica que en algún instante tu velocidad instantánea fue el triple de le mía. Se ve tomando f y g tu función de posición y la mía, respectivamente, con los cocientes de (3) iguales a 3.

Prueba del Teorema del Valor Medio de Cauchy. Consideramos la función

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad h(t) = (g(b) - g(a)) f(t) - (f(b) - f(a)) g(t).$$

Claramente, h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), pues f y g lo son.

Además, es fácil ver que

$$h(b) = g(b) f(a) - f(b) g(a) = h(a).$$

Luego, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Rolle. Así, existe $t_o \in (a, b)$ tal que

$$0 = h'(t_o) = (g(b) - g(a)) f'(t_o) - (f(b) - f(a)) g'(t_o),$$

que es equivalente a (2), como queríamos. □

El siguiente teorema recurre a las derivadas para calcular límites de concientes en situaciones indeterminadas.

Teorema (regla de L'Hopital). Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

No damos la prueba, pero al menos hemos presentado la herramienta principal de la demostración, el Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Ejemplo. Podemos deducir de lo anterior la validez del límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

que no habíamos demostrado cuando la enunciamos más arriba. En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Entonces, por la regla de L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Ejemplo. Calcular
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.$$
Como
$$\lim_{x\to 0}\tan x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0,$$
por la regla de L'Hopital tenemos que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan' x}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$
(Este límite también es inmediato a partir del límite notable.)

Ejemplo. Calcular
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{1}{\cos x} - \tan x.$$
Se trata de una situación indeterminada $\infty - \infty$. Por ejemplo,
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \infty,$$
pues $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\operatorname{sen} x = 1$ y
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\cos = 0$$
por valores positivos (notar que el mismo límite, pero por derecha, es igual a $-\infty$).

Tenemos que
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{1}{\cos x} - \tan x = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$
Como se trata de una situación indeterminada $\frac{0}{0}$, por la regla de L'Hopital, el límite resulta igual a
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \frac{-0}{-1} = 0.$$

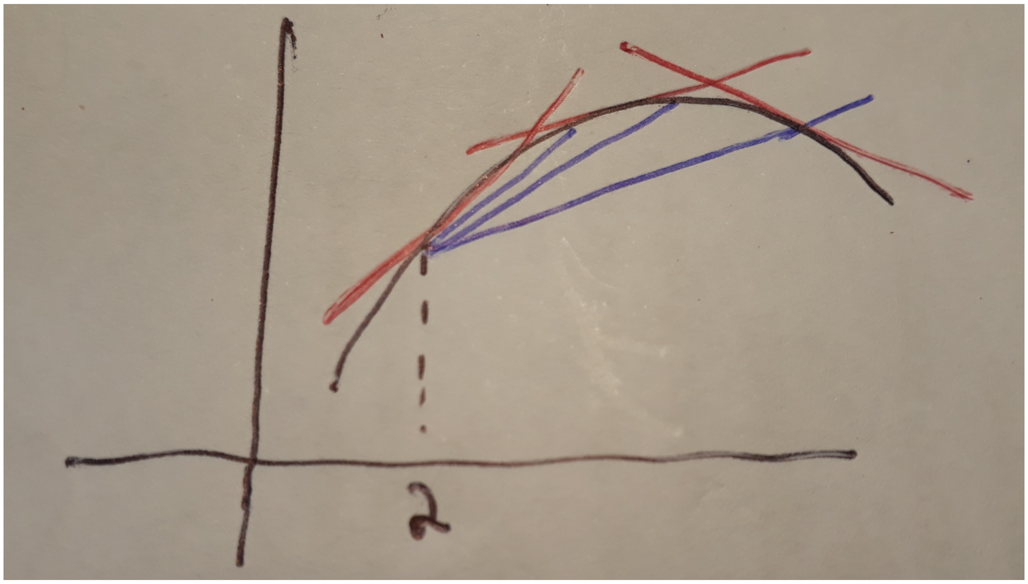
Nota. La regla de L'Hopital vale en situaciones más generales, a saber: Si
$$\lim_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \lim_{x\to\mathcal{A}} g(x) = \mathcal{B} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\mathcal{A}}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \mathcal{L},$$
donde
$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} & \text{puede ser} & a,\, a^-,\, a^+,\, \infty \;\text{ o }\; -\infty; \\ \mathcal{B} & \text{puede ser} & 0,\, \infty \;\text{ o }\; -\infty \quad \text{y} \\ \mathcal{L} & \text{puede ser} & \ell,\, \infty \;\text{ o }\; -\infty, \end{array}$$
entonces
$$\lim_{x\to\mathcal{A}}\frac{f(x)}{g(x)} = \mathcal{L}.$$

Ejemplo. Hallar
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x.$$
Se trata de una situación indeterminada $\infty - \infty$. Calculamos
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x &= \lim_{x\to\infty} x\,\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} - 1\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right),
\end{aligned}$$
que también es una situación indeterminada, ahora de tipo $\infty\cdot 0$. Luego seguimos transformando, esta vez a una situación $\frac{0}{0}$, para poder aplicar la regla de L'Hopital. El límite buscado es igual a
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\left(1+x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)}{\frac{d}{dx}x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1+x^{-1}\right)^{1-\frac{1}{2}}(-1)\,x^{-2}}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ahora vemos una aplicación de la regla de L'Hopital.

Proposición. Sea g una función continua tal que $\lim_{x\to a} g'(x)$ existe y vale ℓ. Entonces $g'(a)$ existe y vale ℓ.

Prueba. Tenemos que
$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$
Como g es continua en a, el numerador tiende a cero para x que tiende a a. Luego, por la regla de L'Hopital,
$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)-0}{1-0} = \lim_{x\to a} g'(x) = \ell,$$
como queríamos.



Comentario (interpretación geométrica) Supongamos que la función es continua. Si existe el límite de las pendientes de las rectas tangentes (rojas en el dibujo), entonces existe el límite de las pendientes de las rectas secantes (azules en el dibujo), que no es otra cosa que la derivada de la función en el punto, por definición.

Observación. La proposición implica que una función que es derivada de otra, o sea, de la forma g', podría no ser continua en a, pero en ese caso, $\lim_{x\to a} g'(x)$ no debe existir (no puede darse la alternativa, de que el límite exista y sea distinto del valor de la función en el punto). En el ejercicio 5c de la guía 6 se presenta un ejemplo de esta última situación.

Por la proposición, si una función es derivada de otra, o sea, de la forma g', podría no ser continua en a, pero en ese caso, $\lim_{x\to a} g'(x)$ no debe existir. No puede darse la alternativa, de que el límite exista y sea distinto del valor de la función en el punto). Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

no es la derivada de ninguna función. La razón no es simplemente por ser discontinua: En el ejercicio 5c de la guía 6 se ve que la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

tiene derivada definida en todo $\mathbb{R}$, la llamamos f, pero f no es continua. Como era de esperar por la proposición, no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ (oscila entre ∞ y $-\infty$).

Definiciones. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f tiene una **asíntota vertical** en a si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Se dice que f tiene una **asíntota horizontal** ℓ en ∞ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell.$$

Se dice que f tiene una **asíntota oblicua de pendiente** ℓ en ∞ si

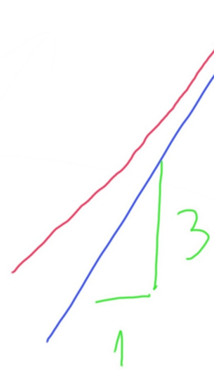
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

De manera similar se definen asíntotas horizontales y oblicuas en $-\infty$.

Ejemplo. La función $f(x) = \frac{1+3x^2}{x}$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 3 en ∞. En efecto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1+3x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3x^2}{x^2} = 3.$$

El gráfico de la función, para x grandes, se acerca cada vez más a una recta de pendiente igual a 3.



Gráficos de funciones

Para graficar una función f dada, determinaremos lo siguiente (en general, no todos los ítemes aplican):

- El dominio de f. La paridad de f.
- Los puntos de intesección del gráfico de f con los ejes coordenados.
- Los límites de f en los extremos del intervalo de definición.
- Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Los puntos críticos de f y sus valores.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, junto con los puntos de máximo y mínimo locales y globales, y sus valores.
- Los intervalos de convexidad, de concavidad, los puntos de inflexión, y los valores de la función en estos puntos.

Algunos de ellos pueden ser redundantes, pero trabajamos con todos, para mayor certeza.

Ejemplo. Graficar la función
$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$
El dominio de f es $\mathbb{R}$. Se cumple que $f(0) = 0$ y
$$0 = f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2\left(x^2 - 2\right) = x^2\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right).$$
Así, el gráfico corta al eje y en cero y al eje x en los puntos 0, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.
No hay asíntotas verticales.
Calculamos
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty,$$
en particular, no hay asíntotas horizontales. Como
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty,$$
tampoco hay asíntotas oblicuas.

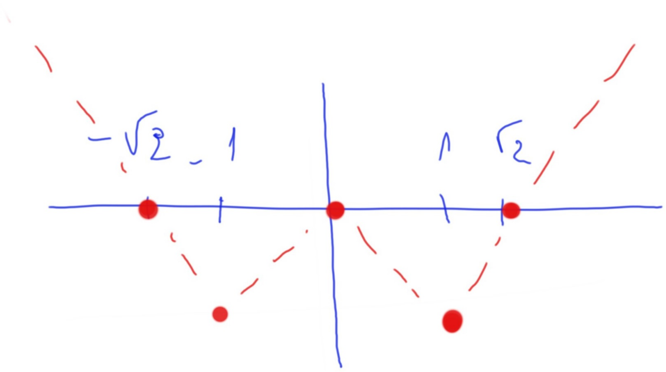
Ahora hallamos los puntos críticos de f. Como f es derivable en toda la recta real, son aquellos x que satisfacen
$$0 = f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right),$$
o sea, $x = 0$, 1 y -1.

Para determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de f, estudiamos el signo de la derivada. Tenemos
$$f'(x) = 4x(x-1)(x+1).$$
Para $x < -1$, los tres factores de $f'(x)$ (salvo el 4) son negativos. Como el producto de tres números negativos es negativo, f' resulta negativa en $(-\infty, -1)$. Luego, en ese intervalo f es decreciente.

De forma similar se ve que f es decreciente en $(0,1)$ y decreciente en $(-1,0)$ y $(1,\infty)$.

De allí se deduce que -1 y 1 son puntos de mínimo local y 0 es un punto de máximo local. Calcualamos los valores de f en esos puntos:
$$f(-1) = f(1) = -1 \qquad \text{y} \qquad f(0) = 0.$$

Hasta ahora podemos esbozar el gráfico de f así (usamos líneas punteadas mientras no conozcamos dónde es cóncava o convexa):



Falta solo estudiar los intervalos de convexidad y concavidad. Para eso estudiamos el signo de

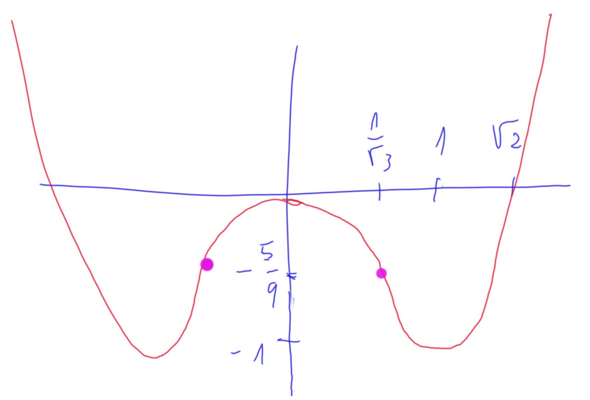
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 4x\right) = 12x^2 - 4 = 4\left(3x^2 - 1\right),$$

que es negativa en x si y solo si $x^2 < \frac{1}{3}$, o equivalentemente, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Luego f es convexa en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, y cóncava en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Los puntos extremos de estos intervalos, donde cambia la concavidad, se llaman **puntos de inflexión** de f.

Finalmente, evaluamos la función en los puntos de inflexión:

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3^2} - 2\frac{1}{3} = -\frac{5}{9}.$$

Con todos esos datos, podemos esbozar el gráfico de f:



Notar que si hubiéramos observado antes que f es par, o sea, $f(x) = f(-x)$ para todo x, habría bastado estudiar la función para x positivos, y al final reflejar el gráfico respecto del eje y.

Ejemplo. Graficar la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$. El gráfico interseca al eje y en $f(0) = \frac{2}{-1} = -2$. No interseca al eje x pues la ecuación

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

no tiene solución, ya que el discriminante es $(-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$.

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-2x+2}{x}}{\frac{x-1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty.
\end{aligned}$$

¿Tiene asíntota oblicua en $\pm\infty$? Sí, en ambos casos es igual a 1, puesto que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2+\frac{2}{x}}{x-1}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.\end{aligned}$$

Ahora estudiamos la asíntota vertical en $x=1$. Calculamos

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\infty,$$

pues el numerador tiende a 1 (positivo) y el denominador tiende a 0 por valores positivos. De la misma manera,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,$$

pues el numerador tiende a 1 (positivo) y el denominador a 0 por valores negativos.

Ahora estudiamos los puntos críticos. En los intervalos $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$ la función es derivable, así que los puntos críticos son los x que satisfacen la ecuación

$$0=f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2},$$

o sea, los cumplen

$$0=(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x+2\right)=\cdots=x(x-2),$$

es decir $x=0$ y $x=2$.

Tenemos que

$$f(0)=-2 \qquad \text{y} \qquad f(2)=\frac{2^2-4+2}{2-1}=2.$$

Para ver dónde f es creciente o decreciente, estudiamos el signo de la derivada. Como el denominador de $f'(x)$ es positivo, miramos el signo de $x(x-2)$, y obtenemos que en los intervalos $(\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,\infty)$, f' es positiva (producto de dos negativas), positiva, negativa y positiva, respectivamente. Notar que debimos partir el intervalo $(0,2)$ pues f no está definida en 1.

Estuidamos con más detalles el signo del numerador de la derivada: Si $x\in(-\infty,0)$, o sea, si $x<0$, tenemos $x<0$ (claro) y $x-2<0$, luego $x(x-2)>0$. Si $x\in(0,1)$, o sea, si $0<x<1$, tenemos que $x>0$ (claro) y $x-1<0$, luego $x(x-1)<0$. Los otros dos casos son similares.

De lo anterior se deduce que 0 y 2 son puntos de máximo y mínimo locales, respectivamente.

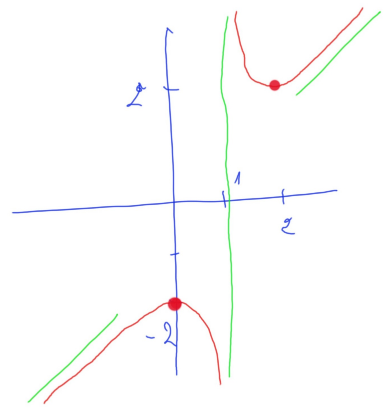
Como f tiende a $\pm\infty$ para $x\to 1^{\pm}$ y para $x\to\pm\infty$, f no posee máximos ni mínimos globales.

Falta solo determinar los intervalos de convexidad y concavidad. Calculamos

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{d}{dx}\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=\frac{d}{dx}\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\\ &= \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}\\ &= \cdots=\frac{2x-2}{(x-1)^4}.\end{aligned}$$

Así, $f''(x)$ es positiva o negativa dependiendo de si $2x-2>0$ o $2x-2<0$. o equivalentements, si $x>1$ o $x<1$. Entonces f es convexa en $(1,\infty)$ y cóncava en $(-\infty,0)$.

Con todos esos datos, podemos esbozar el gráfico de f:



En varias oportunidades no interesa conocer el signo de una función en un intervalo (por ejemplo el signo de f' para detectar si f crece o decrece, o de f'' para estudiar la convexidad de f). La siguiente afirmación puede ser útil para esto.

Observación. Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función **continua** y sean $a<b$ dos ceros consecutivos de f, es decir, $f(a)=0=f(b)$ y $f(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$. Si $f(c)>0$ para cierto $c\in(a,b)$, entonces $f(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$. O sea, la positividad de la función en un punto, bajo ciertas condiciones implica la positividad en todo un intervalo. La demostración es una aplicación inmediata del Primer Teorema Fuerte.

Para terminar el tema de gráficos de funciones, dejamos este ejercicio.

Ejercicio. Dibujar en cada caso el gráfico de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumpla lo requerido.

a) La función f es creciente, convexa en $(-\infty,0)$ y cóncava en $(0,\infty)$. No alcanza el máximo y tiene una asíntota oblicua de pendiente $\frac{1}{3}$ en $-\infty$.

b) La función f tiene una asíntota vertical en 0, decrece en $(0,\infty)$, es convexa en $(0,1)$ y cóncava en $(1,\infty)$. Además, f es impar.

Al final de las notas presentamos posibles soluciones.

Comentario. A pedido de algunos alumnos damos la definición y la propiedad pricipal de una sucesión de Cauchy. Es útil para hablar de convergencia sin mencionar el límite.

Una sucesión a_n se dice de Cauchy si

$$\text{para todo } \varepsilon>0 \text{ existe } N \text{ tal que } (n,m>N \implies |a_n-a_m|<\varepsilon).$$

En otras palabras, si dos elmentos cualesquiera de una cola de la sucesión están tan cerca uno de otro como se quiera, con tal que la cola comience suficientemente lejos.

Se cumple que una sucesión es de Cauchy si y solo si es convergente. De manera informal e imprecisa, si los elementos de la sucesión se amontonan cada vez más entre sí, necesariamente se van pareciendo, a la larga, a un cierto número, que será el límite.

Al final de la página dibujamos soluciones posibles del ejercicio de los gráficos.