Practico 6

1 Repaso teoria

Definition 1. *Sea A un intervalo abierto que contiene al punto a. Se dice que la funcion* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *es derivable en a si existe:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El valor de este limite se denota como f'(a)

Definition 2. *Si la funcion f es derivable en a, la recta tangente al grafico de f por el punto (a,f(a)) es la dada por la funcion: y(x)=f'(a)(x-a)+f(a)*

Que determina la unica pendiente f'(a) que pasa por el punto (a,f(a)).

Definition 3. *Si la funcion f es derivable en todo punto de A (Abierto) decimos que f es derivable en el intervalo. Podemos definir entonces f' como la derivada de f en A.*

Theorem 4. *Si f es derivable en a entonces f es continua en a. (La reciproca es falsa).*

Theorem 5. *Derivada de la suma: (f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)*

Theorem 6. *Derivada del producto: f'(a)g(a)+f(a)g'(a)*

Corollary 7. *Derivada de funcion por constante: (cf)'(a)=cf'(a)*

Proposition 8. *Derivada (factor): Sea f(x)=*$x^n \Rightarrow$ *f'(x)=*nx^{n-1}

Theorem 9. *Si g es derivable en a y g(a)*$\neq 0$ *entonces la funcion* $\frac{1}{g}$ *es derivable en a y* $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

Faltan : Teorema derivada del cociente

Teorema derivada de la composicion: Chain rule.

Derivadas seno y cos

Teorema de la derivada de la inversa.

Teorema de la derivada de la raiz enesima.

2 Practico

1.

2.

3.

4. Calcular f' donde $f(x)$ viene dada por cada una de las siguientes expresiones.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h) $\cos\left(\sqrt{x^4+7}\right)$

- La derivada es la correspondiente a una composicion de funciones. Use la regla de la cadena:
- $[f(g)]' = f'(g(x)) = -\mathrm{sen}\left(\sqrt{x^4+7}\right)\left(\frac{1}{2}(x^4+7)^{-1/2}4x^3\right)$

5.

a) Sea h una funcion tal que $|h(x)| \leqslant x^2$ para todo x. Demostrar que h es derivable en 0 y calcular $h'(0)$.

- Recuerde el lema del Sanwich: Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x entonces si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$
- En nuestro caso concreto: $-x^2 \leqslant h(x) \leqslant x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 0$
- Ademas: $-0 \leqslant h(0) \leqslant 0 \Rightarrow h(0) = 0$
- Para demostrar que h es derivalbe en 0 , tiene que existir este limite:

$$\lim_{k\to 0} \frac{h(0+k) - h(0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k}$$

- Por loa hipotesis de acotacion:

$$\lim_{k\to 0} -\frac{k^2}{k} \leqslant \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k} \leqslant \lim_{k\to 0} \frac{k^2}{k}$$

- De manera que: $0 \leqslant \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k} \leqslant 0 \Rightarrow \lim_{k\to 0} \frac{h(k)}{k} = 0$

b) Considere la funcion $g(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ demostrar que es derivable en todo $\mathbb{R}$ pero que la derivada no es continua en 0.

- Si $x \neq 0$ la funcion es derivable. No voy a verificar eso, es simplemente calcular la derivada que va a existir.
- Calculamos la derivada en 0

$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\text{sen}(1/h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(1/h)}{1/h}$

- Normalmente uno llegaria hasta aca y no podria calcular (No puede utilizar limites notables)

- Es en este momento que se utiliza la hipotesis de $a)$, tenga en cuenta que:

  Si $x\neq 0$ luego $|g(x)|\leqslant x^2$ de manera que $\lim_{h\to 0}h^2\text{sen}(1/h)/h=0$

- $g'(0)=0$

- Para el resto de los puntos: $g'(x)=2x\,\text{sen}(1/x)-x^2\cos(1/x)(-1/x^2)$

  $g'(x)=2x\,\text{sen}(1/x)+\cos(1/x)$

- Cuando quiera tomar $x\to 0$ no podre calcular el limite de $\cos(1/x)$

6. Calcular $f^n(x)$ para todo $n\in\mathbb{N}$

   a) $f(x)=x^{10}$

   - Empieze calculando algunas derivadas:

   - $f'(x)=10x^9$, $f''(x)=10{\cdot}9{\cdot}10^8$

   - $f^n(x)=\frac{10!}{(10-n)!}x^{10-n}$