Practico 1

1.

2.

3.

4.

5. Probar lo siguiente:

   a) Si $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

      - Tricotomia: $a = 1$, $a > 1$, $a < 1$
      - Si $a = 1$, Caso trivial: $a = 1 \Rightarrow a^2 = a = 1 \Rightarrow a^3 = a = 1$
      - Si $a < 1$, Dos opciones:

        i. $0 < a < 1$ entonces: $a < 1 \Rightarrow a^2 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1 \Rightarrow a^3 < 1 < 1 \Rightarrow a^3 < 1$ lo cual claramente no cumple

        ii. $a < 0 < 1$ entonces: $a < 0 \Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow a^3 < 0 < 1$. No lo cumple

      - Si $a > 1 \Rightarrow a^2 > a > 1 \Rightarrow a^3 > a > 1 \Rightarrow a^3 > 1$. Tampoco se cumple.
      - En conclusion la contrareciproca permite demostrar esto: Si $a \neq 1 \Rightarrow$ No se cumple: $a^3 = 1$

   b) $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$

      - Si $a = 0$ Caso trivial
      - Si $a > 0$ luego: $a^3(b^3)^{-1} = 1 \Rightarrow (ab^{-1})^3 = 1$
      - Falta probar que puedo intercambiar el -1 con el 3
      - Utilizando el problema anterior: $ab^{-1} = 1 \Leftrightarrow a = b$

6. Sean a, b, c números reales. Demostrar las siguientes afirmaciones

   a) Si $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$

      - $a \leqslant b \Rightarrow b - a \in \mathbb{P} \Rightarrow b - a + 0 \in \mathbb{P} \Rightarrow b - a + c - c \in \mathbb{P} \Rightarrow b + c \geqslant b + a$

   b) $a < byc < d \Rightarrow a + c < b + d$

      - $b - a \in \mathbb{P}$, $d - a \in \mathbb{P} \Rightarrow (b - a) + (d - a) \in \mathbb{P} \Rightarrow (b - a) + (d - a) \geqslant 0$

   c) $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$

      - $b - a \in \mathbb{P} \Rightarrow (b - a)c < 0 \Rightarrow bc < ac$

   d) $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$

      - $a - 1 \in \mathbb{P} \Rightarrow (a - 1)a \in \mathbb{P} \Rightarrow a^2 - a \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 \geqslant a$

e) $ab>0 \Leftrightarrow a>0, b>0 \,\text{or}\, a<0, b<0$

  - $ab>0$, tricotomia: $a>0$,$\exists a^{-1}$, $a^{-1}ab>a^{-1}0 \Rightarrow b>0$
  - $ab>0$, tricotomia: $a<0, \exists a^{-1}/a^{-1}<0$ puesto que si no, $a^{-1}>0$ y luego te daria: $aa^{-1}<0 \Rightarrow 1<0$ entonces: $a^{-1}ab<0 \Rightarrow b<0$
  - $a=0$, No por la prop absorbente tendria: $ab=0$.
  - La vuelta: Use tricotomia denuevo.

f) $a^2<b^2$, $a>0$ entonces $b>a$ o $b<-a$

  - $b^2-a^2 \in \mathbb{P}, (b+a)(b-a) \in \mathbb{P}$, del problema anterior esto implica lo siguiente:
  - $b+a>0$ y $b-a>0$ $\Rightarrow b>-a$ y que $b>a \Rightarrow b>a>0>-a$
  - $b+a<0$ y $b-a<0 \Rightarrow b<-a<a$

7. Para cada una de las siguientes desigualdades, hallar el conjunto de todos los números reales x que las satisfacen y graficar el resultado en la recta real.

   a) $4-x<3-3x$

     - $2x<-1 \Leftrightarrow x<-1/2$

   b) $5-x^2<8 \Leftrightarrow 0<x^2+3 \Leftrightarrow x^2>-3$

   c) $x^2>9 \Rightarrow x^2-9>0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)>0$ del ejercicio anterior f : $x>3$ o $x<-3$

   d) $x^2-4x+3>0 \Rightarrow (x-3)(x-1)>0 \Rightarrow x>3$ o bien $x<1$

   e) $x+1>x$ Esto se cumple para todos los reales.

   f) $x-1>x$ Esto es el conjunto vacio

   g) $-\frac{3}{x}>1 \Rightarrow x\neq 0, x<0$ (Importante para dar vuelta la desigualdad), $-3<x$. Entonces el intervalo de validez es: $-3<x<0$

   h) $\frac{x-1}{x+1}>0$ Se requieren dos opciones:

     - $x-1>0, x+1>0 \Rightarrow x>1, x>-1 \Rightarrow x>1$ Como dominio.
     - $x-1<0, x+1<0 \Rightarrow x<1, x<-1 \Rightarrow x<-1$
     - $\{x \in \mathbb{R}/x>1\} \mathbb{U} \{x \in \mathbb{R}/x<-1\}$

   i) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0, \Rightarrow \frac{1-x+x}{x(1-x)} \Leftrightarrow \frac{1}{x(1-x)}>0 \Rightarrow x\,(1-x)>0 \Leftrightarrow$ Se generan 2 opciones:

     - $x>0$ $(1-x)>0 \Rightarrow x>0, 1>x \Rightarrow 0<x<1$
     - $x<0$, $x>1$ Este intervalo es vacio.

8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

   a) $a<b$ y $c<d$ entonces: $a-c<b-d$

     - Falso: Contraejemplo: $a=1, b=2$, $c=3, d=8$
     - $a-c=1-3<2-8 \Rightarrow -2<-6$ Falso.

b) $a < b\ c > 0 \Rightarrow ac < bc$ Falso:

- $b - a \in \mathbb{P} \Rightarrow c \geqslant 0 \Rightarrow (b-a)c \in \mathbb{P}$ si $c > 0$ Pero si $c = 0$ No se cumple la desigualdad.

c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} / x + y < 0$ Verdadero:

- $x + y = x + -ax = x(1-a) < 0$
- Si $x > 0 \Rightarrow \text{tomo}\, a > 1$
- Si $x < 0 \Rightarrow \text{tomo}\, a < 1$
- Si $x = 0 \Rightarrow$ basta elegir cualquier $y < 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} / xy < 0$. Falso:

- Si $x = 0 =>$ por prop del elemento absorbente $x.y = 0$

9. Expresar lo siguiente prescindiendo de las barras de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.

a) $|(|x| - 1)| = \begin{cases} |x| - 1 \,\text{si}\, |x| \geqslant 1 \Rightarrow x \leqslant -1, x \geqslant 1 \Rightarrow x - 1 \,\text{para}\, x \geqslant 1, -x - 1 \,\text{para}\, x \leqslant -1 \\ -|x| + 1 \,\text{si}\, |x| \leqslant 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -x + 1 \,\text{para}\, 0 \leqslant x < 1\, y \quad x + 1 \,\text{para} - 1 < x < 0 \end{cases}$

b) $a - |(a - |a|)| = \begin{cases} a - (a - |a|) \,\text{si}\, a \geqslant |a| \Rightarrow a = |a| \\ a + (a - |a|) \,\text{si}\, a < |a| \Rightarrow a < 0 \,\text{el resultado seria}\, 3a \end{cases}$

10. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $|x| = |-x| \forall x \in \mathbb{R}$

- Tricotomia: $x = 0$, Caso Trivial.
- $x > 0 \Rightarrow -x < 0, |x| = x\ ,\ |-x| = -(-x) = x$
- Similarmente: $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ entonces: $|-x| = -x$ y $|x| = -x$

b) $|xy| = |x|\,|y|$

- Descartando caso trivial: $x = 0$ o $y = 0$ tenemos los siguientes casos: ($x > 0$, $y > 0$), ($x > 0, y < 0$), ($x < 0, y > 0$), ($x < 0, y < 0$)
- $(x > 0, y > 0) \Rightarrow |xy| = xy\ ,\ |x| = x,\ |y| = y \Rightarrow |x|\,|y| = xy$
- $(x > 0, y < 0) \Rightarrow xy < 0 \Rightarrow |xy| = -xy\ ,\ |x| = x,\ |y| = -y, \Rightarrow |x|\,|y| = -xy$
- Hacer lo mismo con los casos restantes.

c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

- $|x^{-1}|\,|x| = (\text{por}\, b) = |x^{-1}x| = |1| = 1$
- O sea que $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

11. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $|x - 3| = c$

- $\begin{cases} x - 3 = c, \,\text{si}\, x \geqslant 3 \\ -x + 3 = c, \,\text{si}\, x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = c + 3, \,\text{si}\, x \geqslant 3 \\ x = 3 - c, \,\text{si}\, x < 3 \end{matrix}$

b) $|x-1|\,|x+2|=3$

- $$\begin{cases} (x-1)(x+2)=3, \text{si}\, x-1\geqslant 0, x+2\geqslant 0 & x\geqslant 1, x\geqslant -2 \quad x\geqslant 1 \\ -(x-1)(x+2)=3, \text{si}\, x-1\geqslant 0, x+2<0 & x\geqslant 1, x<-2 \quad x\geqslant 1, x<-2 \\ -(x-1)(x+2)=3, x-1<0, x+2\geqslant 0 & x<1, x\geqslant -2 \quad 1>x\geqslant -2 \\ (x-1)(x+2)=3, \text{si}\, x-1<0, x+2<0 & x<1, x<-2 \quad x<-2 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} (x-1)(x+2)=3 & \text{si}\, x\geqslant 1, x<-2 \\ -(x-1)(x+2)=3 & \text{si}\, 1>x \end{cases}$$

12. Resolver las siguientes desigualdades. Interpretar en terminos de distancia y graficar.

a) $|x-3|<8$

- $$\begin{array}{l} |x-3|=x-3\,\text{si}\, x-3\geqslant 0 \Rightarrow x-3<8 \Leftrightarrow x<11, \text{cuando}\, x\geqslant 3 \\ |x-3|=-(x-3)\,\text{si}\, x-3<0 \Rightarrow (x-3)>-8 \Leftrightarrow x>-5, \text{cuando}\, x<3 \end{array}$$

- $\begin{array}{l} 11>x\geqslant 3 \\ 3>x>-5 \end{array}$: Graficar esto

- $|x-3|<8$: Numeros cuya distancia al numero 3 , sea menor que 8

- Forma rapida de hacer esto: usar que: $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$

- $|x-3|<8 \Rightarrow -8<x-3<8 \Leftrightarrow -5<x<11$

b) $|x-3|\geqslant 8$

- $|x|>a \Rightarrow -a>x \quad y \quad x>a$

- $|x-3|\geqslant 8 \Rightarrow x-3\geqslant 8$ y $x-3\leqslant -8$ $\Rightarrow x\geqslant 11$ y $x\leqslant -5$

c) $|x-3|<0$

- $-0<x-3<0$, pero el 0 es unico.

- Este conjunto es vacio

d) $|2x-3|>1$

- $2x-3<-1$ y $2x-3>1$

- $x<2$ y $x>2$

- El conjunto es: $\mathbb{R}-\{2\}$

- Para interpretarlo en forma de distancia conviene factorizar antes el 2

13. Probar las siguientes desigualdades $\forall x, y \epsilon \mathbb{R}$

a) $|x-y|\leqslant |x|+|y|$

- $|x-y|=|x+(-y)|=\leqslant |x|+|(-y)| \Rightarrow (P10a) \Rightarrow |x|+|(-y)|=|x|+|y|$

b) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$

- $|x|-|y|=|x+y-y|-|y|$[por a]$\leqslant |x-y|+|y|-|y|=|x-y|$

c) $|x-y|\geqslant ||x|-|y||$ [Reemplazo: $x\rightarrow |x|, y\rightarrow |y|$ en b)]

- $||x-y||\geqslant ||x|-|y||$

- $|x-y| \geqslant 0$, $\|x-y\| = |x-y|$

14. Determinar cu´ales de los siguientes subconjuntos de n´umeros reales tiene supremo, ´ınfimo, m´aximo o m´ınimo. Justificar con demostraciones.

    a) A=[3,8)

    - El conjunto A esta acotado superiormente, por ejemplo 9 cumple que $\forall a \epsilon A$, $a < 9$
    - El conjunto A esta acotado superiormente y es distinto del vacio, por lo tanto, TIENE cota superior minima (Supremo). Suponga que S es este supremo.
    - Este supremos al ser la menor de las cotas superiores debe cumplir:
    - $S < \frac{S}{2} + \frac{8}{2} < 8$, Si ahora tomamos la definicion de A: $\{a / 3 \leqslant a < 8\} \Rightarrow \frac{S+8}{2} \in A$
    - Y por lo tanto S no es cota superior de A.
    - Este conjunto no tiene maximo, puesto que su cota superior minima no pertenece al conjunto.
    - El conjunto A esta acotado inferiormente y es distinto del vacio, por lo tanto tiene cota inferior Maxima.
    - Claramente si $k < 3$, $k \notin A$, si $a > 3 \Rightarrow a \in A$.
    - 3 Es el minimo puesto que $3 \in A$.

    b) $A = (-\infty, \pi)$

    - $A = \{a / a < \pi\} \Rightarrow \text{si}\, x < \pi, \text{luego:}\, x \in A$
    - Suponemos que existe Inf $A \Rightarrow \text{Inf}\, A < a, \forall a \in A$.
    - En particular: si $a \in A \Rightarrow a < \pi \Rightarrow a - 1 < \pi - 1 < \pi \Rightarrow a - 1 \in A, \forall a \in A$
    - Como $a - 1 \in A \Rightarrow \text{Inf}\, A < a - 1 \Leftrightarrow \text{Inf}\, A + 1 < a, \forall a \in A$
    - Lo que provoca que: $\text{Inf}\, A < \text{Inf}\,(A+1) < a$, $\forall a \in A$. Esto es un absurdo, que proviene de suponer que A tiene infimo.
    - Ahora use la contrarreciproca: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ distinto de $\mathbb{O}$ y acotado superiormente posee supremo. Contrareciproca: Para todo subconjunto de $\mathbb{R}$ distinto de $\mathbb{O}$, si no posee supremo entonces no esta acotado superiormente.
    - Si no tiene infimo, no tiene minimo
    - Opcion B: El conjunto $-\mathbb{N} \subset A$, Como $\mathbb{N}$ no esta acotado superiormente luego $-\mathbb{N}$ no esta acotado inferiormente, por lo cual A no debe estar acotado inferiormente.
    - El conjunto A esta acotado superiormente, por 6 , por ejemplo. Como este conjunto es distinto de $\mathbb{O}$, entonces tiene una cota superior minima (Supremo).
    - Puede usar el mismo recurso que en a), muestre que: $\sup A < \frac{\sup A + \pi}{2} < \pi$, luego: $\frac{\sup A + \pi}{2}, \sup A \in A$, entonces $\sup A$ no es cota superior de A.

c) $K = \{k = 6z \,/\, z \in \mathbb{Z}\}$

- Sea $k' = \sup K \Rightarrow k < k' \Rightarrow k + 6 < k' + 6$, ahora $k + 6 \in K$, pues $k = 6z \Rightarrow k + 6 = 6(z+1)$ y por supuesto $z + 1 \in \mathbb{Z}$ porque $\mathbb{Z}$ no esta acotado.

- Como $k + 6 \in K \Rightarrow k + 6 < k' \Leftrightarrow k < k' - 6 < k'$, como esto ocurre para todo k,k' no es la cota superior minima.

- Ahora use la contrarreciproca: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ distinto de $\mathbb{O}$ y acotado superiormente posee supremo. Contrareciproca: Para todo subconjunto de $\mathbb{R}$ distinto de $\mathbb{O}$, si no posee supremo entonces no esta acotado superiormente.

d) $A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

- $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n > 0, n < 0$ (Tricotomia)

- Prop arquimedeana: $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{n} < \varepsilon$ entonces, sumando 1 a ambos lados:

  Esta desigualdad se puede escribir como: $-\frac{1}{n} > -\varepsilon$. Ahora sumo 1 a ambos lados:

- $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$

- Lema util: Si $A \subset \mathbb{R}, \alpha = \sup A \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ tal que: $\alpha - \varepsilon < a$

- Es decir que si: $1 - \frac{1}{n} \in A$, luego 1 es la cota superior. Probemos esto:

- $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, claramente: $n - 1 \in \mathbb{Z}$, de manera que: $1 - \frac{1}{n} \in A$

- En particular $1 {\in} A$, por lo cual A, tiene maximo.

- Ahora para probar la existencia del infimo.

- Lema util:$A \subset \mathbb{R}$ $\alpha = \inf A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ tal que: $a < \alpha + \varepsilon$

- Por propiedad arquimediana: $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow -1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon$.

- Es facil ver que $-1 + \frac{1}{n} \in A$. Por lo tanto -1 es el infimo de A.

- Tambien se cumple que -1 es el minimo de A pues $-1 \in A$

e) $A = \{3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

- Claramente el conjunto tiene la pinta de que: $2 < a < 3$

- Prop Arq: $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} /\ \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n} > -\varepsilon$

- Entonces: $3 - \varepsilon < 3 - \frac{1}{n}$, Claramente $3 - \frac{1}{n} \in A$.

- Lema util: Si $A \subset \mathbb{R}, \alpha = \sup A \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ tal que: $\alpha - \varepsilon < a$

- Esto significa que: 3 es el supremo de A. Como $3 \notin A$ entonces no tiene Maximo.

- Prop Arq: $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} /\ \frac{1}{n} < \varepsilon$ Quisiera, pero no!

- $2+\frac{1}{n}<2+\varepsilon$, faltaria demostrar que: $2+\frac{1}{n}\in A \Longleftarrow$ Este paso falla

- Supongamos que existe: $\beta=\inf A \Rightarrow \beta<2$, Sea $\varepsilon>0$ tal que:

- $\beta<\beta+\varepsilon<2$, por hipotesis existe $a/\ \beta<a<\beta+\varepsilon<2$

- $3-\frac{1}{m}<2 \Leftrightarrow 1<\frac{1}{m} \Leftrightarrow m<1$, luego $m\notin\mathbb{N}$, un numero que cumple: $3-\frac{1}{m}<2$ no pertenece al conjunto.

- No existe entonces, para todo $\varepsilon>0$ ese n tal que $\beta<a<\beta+\varepsilon<2$.

- Como 2 pertenece al conjunto, este es su minimo.

f) $\left\{x\in\mathbb{Q}/-\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 0\right\}$

g) $A=\{x\in\mathbb{N}/0<x<\sqrt{2}\}$

- $A=\{1\}$, Claramente el supremo es $\sqrt{2}$ y el infimo es 0

h) $A=\{x\in\mathbb{Q}/0<x<\sqrt{2}\}$

- Sea $\sup A=Q \Rightarrow \exists a\in A/Q<a<\sqrt{2}$, de manera que Q No puede ser el supremo. Solo puede cumplirse que: Sup $A=\sqrt{2}$

15. Probar que si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, entonces $A\cup B$ es acotado superiormente.

   - Como A y B son acotados superiormente, suponiendo que son distintos del vacio, entonces tienen supremo.
   - Si $a\in A$ y $b\in B$ entonces: $a\leqslant\sup A$, $b\leqslant\sup B$
   - Entonces: $\sup A<\sup B$, $\sup A>\sup B$ o bien $\sup A=\sup B$
   - El caso trivial es: $\sup A=\sup B$
   - $a\leqslant\sup A<\sup B$, Por lo cual $\sup B$ es una cota superior de A.
   - El otro caso seria: $\sup B<\sup A$, que daria como resultado que $\sup A$ es una cota superior para los elementos de B.

16. Sean A y B subconjuntos no vacıos de $\mathbb{R}$ tales que $x\leq y$ para todo $x\in A$, $y\in B$. Demostrar que:

a) $\sup A\leq y$ para todo $y\in B$.

- Como $x\leq y$, entonces y es una cota superior para todo x.
- Como A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y esta acotado superiormente entones $\exists\sup A$
- Por el absurdo: Suponga que existe $y<\sup A \Rightarrow x\leqslant y<\sup A\ \forall x\in A$.
- Lo anterior significa que $\sup A$ no puede ser el supremo.

b) $\sup A \leqslant \inf B$

- Como $x \leqslant y$, B esta acotado inferiormente y como es distinto del vacio, puedo decir que: $\exists$ $\inf B$.

- Por tricotomia: $\sup A = \sup B$, $\sup A > \inf B$, $\sup A < \inf B$

- $\sup A = \inf B$, es el caso trivial. Esto se cumple tranquilamente: $x \leqslant \sup A = \inf B \leqslant y$

- Si ahora supongo: $\sup A > \inf B$, usando el problema a) tendriamos: $\sup A \leqslant y$, $\forall y \in B$

- Es decir: $\inf B < \sup A \leqslant y$. Esto signfica que inf B no es la mayor de las cotas inferiores de B. Lo cual produce un absurdo

- La unica opcion que es posible entonces es: $\sup A < \inf B$

17. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son densos.

Definicion: Un sub-conjunto A de R es denso si para todo a, b de R se cumple que existe $\alpha \in A$ tal que: $a < \alpha < b$

a) $\{x \in R : x^3 < 100\}$: No es denso porque si elijo $a = 110$, $b = 111$ no encuentro elementos de a

b) No es denso : Basta tomar numeros los intervalos restados.

c) No es denso

d) Es denso, remover una cantidad finita de numeros no me cambia esto. DEMOSTRAR MEJOR.

18. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta.

a) Si $\sup A \leq \inf B$, entonces $A \cap B = \emptyset$

- Yo diria que lo correcto seria decir $\sup A < \inf B$, porque si $\sup A = \inf B$ y ahora supongamos que A y B tengan maximo y minimo. Luego $\max A = \min B$,

  De manera que: $A \cap B \neq \emptyset$

b) Un conjunto formado por todos los números reales salvo un número finito de ellos

es denso.

- True