Practico 4

1 Definiciones

- Definicion de Funciones:

  $\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2 Ejercicios

1.

2. $|x| < \delta$, $\mathrm{dom}\,(f + g) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$, entonces $f + g$ esta definida en $|x| < \delta$

   Si los dominios de f, g son distintos entonces tenes que computar antes la interseccion de los dominios.

3.

   a) $\lim_{x \to a} x^4 = a^4$

   $|x^4 - a^4| = |(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)| = |(x - a)(x + a)(x^2 + a^2)| = |x - a|\,|x + a|\,|x^2 + a^2|$

   $|x| - |a| < |x - a| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 + |a|$

   $|x + a| \leqslant |x| + |a| < 1 + 2|a|$

   Teniendo en cuenta lo anterior:

   $|x^2 + a^2| \leqslant |x|^2 + |a|^2 < (1 + |a|^2 + a^2)$

   Todo esto para escribir lo siguiente:

   $|x^4 - a^4| < |x - a|(1 + 2|a|)((1 + |a|)^2 + a^2) < \varepsilon$

   Con esto ya puedo buscar la δ

   $$\delta = \frac{\varepsilon}{(1 + 2|a|)((1 + |a|)^2 + a^2)}$$

   b) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$

   Aca utiliza el concepto de entorno, si me restrinjo a $|x - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

   $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 > \frac{1}{x} > \frac{2}{3}$

   $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \left|\frac{1 - x}{x}\right| = \frac{|x - 1|}{|x|} < 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$

   c) $\lim_{x \to 1} x^4 + \frac{1}{x} = 2$

   $\left|x^4 + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|x^4 - 1 + \frac{1}{x} - 1\right| \leqslant |x^4 - 1| + \left|\frac{1}{x} - 1\right| = |(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1^2)| + \left|\frac{1}{x} - 1\right|$

   $|(x^2 + 1^2)| < 3$, $|x + 1| < 3$

   $< |x - 1|6 + \left|\frac{1}{x} - 1\right| < |x - 1|6 + 2|x - 1| = 8|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{8} = \delta$