Problema 2)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i. Mostrar que f es continua en 0:

- Para mostrar que f es continua en 0 hay que mostrar tres cosas:

  1. f esta definida en $x = 0$, en efecto lo esta, pues $f(0) = 0$

  2. $\lim_{x \to 0} f(x) = l$, esto signfica que el limite existe y es igual a algun valor l

     $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

     Aca puede tener en cuenta que: $-1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2$

     Ahora podemos utilizar el lema del Sandwich, este lema dice lo siguiente:

     Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ $\forall x$ y $\lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{x \to a} h(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = l$

     El lema del Sandwich se cumple para nuestro problema. Entonces podemos afirmar que (Via Lema del Sandwich):

     $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

  3. Finalmente se debe cumplir que: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ lo cual ocurre.

- Con lo anterior ha demostrado que f es continua en cero.

ii. Para demostrar que f es derivable en cero lo vamos a hacer aplicando la definicion de derivada.

- $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(1/h)$

- Nuevamente puedo utilizar el teorema del sandwich para calcular este limite, con esto obtendremos que:

  $\lim_{h \to 0} h \sin(1/h) = 0$

iii. Ahora debemos calcular f' para todo x y ver cual es el dominio de f'

- Si $x = 0$ ya sabemos que $f'(0) = 0$

- Si $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)(-1)x^{-2} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

- Conclusion: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

- Es decir: $\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R}$

iv. Nos pregunta si la funcion es f' es continua. Vamos a tener que justificarlo para todos los puntos:

- Si $a \neq 0$, $\lim_{x \to a} f'(x) = \lim_{x \to a} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2a \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \cos\left(\frac{1}{a}\right) = f'(a)$

- Si $a=0$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

- El limite $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe. Uno deberia ir un poco mas lejos y dar un argumento para la no existencia de este limite.

- La mejor manera de hacerlo es con el siguiente teorema de la relacion de limite y limite de sucesiones:

  Sea $f\colon A-\{a\}$, donde A es un intervalo abierto que contiene al punto a. Entonces:

  $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$ para toda sucecion x_n y que cumple $x_n \neq a\ \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

- Considere las sucesiones: $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ y $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, observemos que:

  $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ que es justo lo que necesitamos

  Ahora calculamos el limite de la funcion compuesta de estas sucesiones:

  $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right) = \lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi) = 1$

  $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\cos((2n+1)\pi) = -1$

  Hay convergencia a limites distintos para ambas suceciones, por lo tanto el limite no existe.

- La conclusion final es que el limite NO existe y por lo tanto la funcion no es continua en $x=0$.