Guia 4

1 Teorico

-

- Teorema Relacion limite y sucesiones: Sea $f\colon A-\{a\}$ entonces $\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$ para toda sucesion x_n con valores en A que cumple con $x_n \neq a$ para todo n y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

2 Practico

1.

2.

3.

   a) $f(x)=x^4$; $l=a^4$, $x\to a$

   - $|x^4-a^4| = |x-a|\,|x+a|\,|x^2+a^2|$
   - $|x|-|a| \leqslant |x-a| < 1$ (Acotamos en un entorno) $\Leftrightarrow |x| < 1+|a|$
   - $|x^4-a^4| \leqslant |x-a|(|x|+|a|)(|x|^2+|a|^2) < |x-a|\ (1+|a|+|a|)([1+|a|]^2+|a|^2)$
   - $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{()}\right)$

   b) $f(x)=\frac{1}{x}$, $l=1$, $x\to 1$

   - $\left|\frac{1}{x}-1\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right|$
   - $|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 2$, con $x>0$ en este intervalo
   - $\left|\frac{1}{x}-1\right| < 2|x-1|$
   - $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

   c) $f(x)=x^4+\frac{1}{x}$, $x\to 1$, $l=2$

   - $\left|x^4+\frac{1}{x}-2\right| = \left|x^4-1+\frac{1}{x}-1\right| \leqslant |x^4-1| + \left|\frac{1}{x}-1\right|$
   - $\delta = \min\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon/2}{()}, \frac{\varepsilon/2}{2}\right)$

4. Demostrar por definicion los siguientes limites

   a) $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ $a>0$

   - $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right|$

- $|x-a|<\frac{a}{2} \Leftrightarrow 0<\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{2}}<\sqrt{x}<\sqrt{\frac{3a}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}<\sqrt{x}+\sqrt{a}$
- $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}}$
- $\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right|<\frac{|x-a|}{\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}} \Rightarrow \delta=\min\left(\frac{a}{2},\varepsilon\left(\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}\right)\right)$

b) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a$

- $\left|\frac{x^2-a^2}{x-a}-2a\right|=|x+a-2a|=|x-a|$
- Basta tomar $\varepsilon=\delta$

c) $\lim_{x\to 0}x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

- $\left|x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant|x^2|=|x|^2$
- Basta tomar $\delta=\sqrt{\varepsilon}$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$

- Considere: $M>0$
- $M<\frac{1}{(x-3)^2}\leqslant\frac{1}{|x-3|^2}\Leftrightarrow|x-3|<\frac{1}{\sqrt{M}}$

5. Demostrar por definicion que no existen los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$
- $\frac{1}{x}<-M$ si $0-\delta<x<0$
- $\frac{1}{-M}<x$, basta tomar $-\delta=\frac{1}{-M}$
- Por otro lado es demostrable que: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$
- $M<\frac{1}{x}$ si $0<x<\delta$
- De: $M<\frac{1}{x}\Leftrightarrow x<\frac{1}{M}$, basta tomar $\delta=\frac{1}{M}$

b) $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

- Suponga por el absurdo que este limite existe y es L. Por definicion si tomo $\varepsilon=\frac{1}{2}$ deberia poder encontrar δ
- $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\frac{1}{2}$ si $|x-0|<\delta$, pero lo estamos viendo para el limite derecho , es decir: $0<x<\delta\Rightarrow 0<\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{2}$
- Por la arquimenidad, puedo elegir $x_1=\frac{1}{n\pi}<\delta$ para todo δ

- Por otro lado si tomo: $x_2 = \frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}} < \delta$

- Como esto sucede entonces porsupuesto deberia cumplirse:

  $\left|\text{sen}\left(\frac{1}{1/n\pi}\right)\right| < \frac{1}{2}$ y $\left|\text{sen}\left(\frac{1}{1/(2m\pi + \pi/2)}\right)\right| < \frac{1}{2}$

- $1 = \left|\text{sen}(n\pi) - \text{sen}\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\text{sen}(n\pi) - L - \text{sen}\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) + L\right| \leqslant$

  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, lo cual es un absurdo.

c) Resolvemos el item b) pero con sucesiones:

- Considere dos sucesiones tales que: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- $a_n = \left\{\frac{1}{\pi n}\right\}$, $b_n = \left\{\frac{1}{2\pi n + \pi/2}\right\}$, estas sucesiones cumplen el limite anterior.

- Luego: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \text{sen}(\pi n) = 0$

- $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \text{sen}(2\pi n + \pi/2) = 1$

- La sucesion converge a limites distintos.

6. Calcular los siguientes limites, en caso de existir justificar

   a) $\lim_{y\to\infty} \frac{3y - 4}{6y + 1} = \text{im}_{y\to\infty} \frac{3 - 4/y}{6 + 1/y} = \frac{1}{2}$

   b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3 - 2x + 7}{4x^2 - 7} = \lim_{y\to -\infty} \frac{5x - 2/x + 7/x^2}{4 - 7/x^2} = -\infty$

   c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 7x}{x^4 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 7/x^2}{x - 2/x^3} = 0$

   d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$

   e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}} = 1$

7. Se satisface que: $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ entonces: $\lim_{x\to a} g(x) = l$

8. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$

   - Como el limite de $f(x)$ existe, entonces se debe cumplir la definicion

   - $|f(x) - l| < \varepsilon \,\text{si}\, |x - 0| < \delta$

   - $|f(x^3) - l| < \varepsilon$ si $|x - 0| < \delta$, considere $y = x^3$ entones, el limite que tengo que demostrar es:

   - $|f(y) - l| < \varepsilon$ si $|y^{1/3} - 0| < \delta \Leftrightarrow |y - 0| < \delta^3$

   - Es decir que para que el limite se cumpla $\delta_{\text{new}} = \delta^3$

   b) Si $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existe, entonces no necesariamente exite $\lim_{x\to 0} f(x)$

   - En efecto, si considera la funcion:

- $f(x)=\sqrt{x}$
- Esta funcion no tiene limite en 0^-

c) Si $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

- $y=\frac{1}{x}$
- $|f(1/x)-l|<\varepsilon$ si $0<x<\delta$
- $x<\delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta}<\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{\delta}<y \Rightarrow |f(y)-l|<\varepsilon$
- Esta ultima expresion es la del limite al infinito.

d) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(1/x)=\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(1/x)=\infty$
- $f(x)>M$ si $0<x<\delta$ entonces, si $\frac{1}{\delta}<\frac{1}{x}$ luego: $f(x)>M$
- Tomando $y=\frac{1}{x}$, reescribimos: $N<y \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)>M$
- La vuelta es similar.

e)

9.

10.