Guia 4

1 Parte Teorica

1.1 Lineas Espectrales

- En 1913 Bohr propuso un modelo más estable pensando solo en órbitas circulares. Sus hipótesis son contrarias a la clásica, y sin duda arbitrarias

  - Solo se permiten órbitas "estables" (estados estacionarios) con ciertas energías discretas $E_1, E_2, \ldots$ etc

  - Las órbitas permitidas tienen momento angular múltiplo entero de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, es decir: $L = n\hbar$ (Regla de Cuantizacion de Bohr)

  - El electron no pierde energia (no emite) si permanece en una orbita estacionaria. Los intercambios de energia son discretos, saltando de una orbita a otra; la diferencia de energia correspondiente a la transicion electronica de la orbita m hacia la n es liberada ($E_m > E_n$, por eso decae) mediante la emision de un foton cuya energia es:

    $h\nu = E_m - E_n$

  - Teniendo en cuenta solo la interacción coulombiana (la gravitatoria es 10^{-40} veces menor), a partir de $L = \hbar n$ puede obtenerse el radio de la orbita n-esima y la velocidad lineal en esa orbita para el caso del atomo de hidrogeno, es decir con un solo proton en el nucleo:

    $r_n = \left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\right)n^2 = n^2 a_0$; $v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{n\hbar}$

  - $a_0 = 0.53\,[\mathrm{nm}]$ Es el radio de Bohr

  - En el atomo de Hidrogeno como la masa del proton es mucho mayor a la del electron, puede pensarse que este no se mueve, la masa reducida $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = \left(\frac{m_e}{\frac{m_e}{m_p} + 1}\right)$ es muy parecida a m_e.

    $E_n = K + U = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{R}{n^2}$

  - R : Constante de Rydberg, $R = 13.6[\mathrm{eV}]$

  - Estas "energías de Bohr" corresponden a estados ligados, y por eso sus valores son negativos.

  - Si el nucleo tiene Z protones, las ecuaciones anteriores se modifican ligeramente:

    $r_n = n^2\frac{a_0}{Z}$, $E_n = -\frac{RZ^2}{n^2}$

  - El gran mérito del modelo atómico de Bohr es predecir correctamente la definición de las líneas espectrales emitidas: cuando se somete un gas a una descarga eléctrica (o a una llama), la radiación emitida consiste en unas líneas brillantes (de cierto color) con regiones negras entre ellas. Como $E_n = -\frac{R}{n^2}$ decae de un estado m al n libera un cuanto de energia:

    $h\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

- Las emisiones de radiacion asociadas con decaimientos hacia el estado fundamental (n= 1) conforman la serie de **Lyman**, en el espectro ultravioleta; los decaimientos hacia n= 2 integran la serie de **Balmer**, con longitudes de onda en el visible; la serie de **Paschen** corresponde a decaimientos hacia n= 3 y son emisiones con energıas en el infrarrojo.

1.2 Tipo espectral de las estrellas

- Pickering (1846–1919) and his assistant Williamina P. Fleming (1857–1911) in the 1890s labeled spectra with capital letters according to the strength of their hydrogen absorption lines beginning with the letter A for the broadest lines.

- Antonia Maury, rearranged the sequence of spectra by placing O and B before A, added decimal subdivisions (e.g., A0–A9), and consolidated many of the classes.

- With these changes, the Harvard classification scheme of "O B A F G K M" became a temperature sequence, running from the hottest blue O stars to the coolest red M stars.

- El tipo espectral del sol es G2.

2 Practico

Para resolver este practico tener en cuenta que HI : hidrogeno neutro (1p + 1e)

1. Adoptando el modelo de Bohr para un átomo de Hidrógeno, determine:

   a) Las velocidades y radios orbitales del electrón en los niveles 1, 2 y 3.

   - Los radios y velocidades estan dados por:

     $r_n = n^2 a_0$; donde a_0 es el radio de Bohr, con $a_0 = 0.53$ [nm]

     $v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{n\hbar}$

   - Los correspondientes velocidades y radios se obtienen al variar n.

   b) El período orbital en cada uno de esos estados.

   - $\omega T = 2\pi$

   - La velocidad radial: $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{v} r$

   - De donde podemos calcular T en funcion de el numero de la orbita n:

     $$T = \frac{2\pi}{v_n} r_n$$

   c) El número de órbitas descriptas por el electrón antes de caer al nivel fundamental, si la vida media del primer nivel excitado es de 10^{-8} segundos.

   - El electron permanece en $n = 2$ un tiempo de $\tau = 10^{-8}[s]$

- Del problema anterior calculamos que: $T = \frac{2\pi}{v_n} r_n$, es decir que el periodo que se tarda en dar una vuelta en la orbita $n = 2$ es :

- $T = \frac{2\pi}{v_2} r_2 = \frac{2\pi}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2\hbar}} n^2 a_0$

2. Calcule el mínimo de energía que se debe suministrar al átomo de Hidrógeno para que produzca la línea $H\beta$. Exprese el resultado en eV ¿Cuál es la longitud de onda de Hβ?

- Las líneas Hα, Hβ, Hγ, etc. son parte de la **serie de Balmer**, que se producen cuando un electrón cae desde un nivel superior (n > 2) hacia **n = 2**

- La linea $H\beta$ se produce al caer de $n = 4$ a $n = 2$

Transición de n	3→2	4→2	5→2	6→2	7→2	8→2	9→2	∞→2
Nombre	H-α	H-β	H-γ	H-δ	H-ε	H-ζ	H-η	
Longitud de onda (nm)	656,3	486,1	434,1	410,2	397,0	388,9	383,5	364,6
Color	Rojo	Azul-verde	Violeta	Violeta	(Ultravioleta)	(Ultravioleta)	(Ultravioleta)	(Ultravioleta)

- Para calcular la longitud de onda: $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)$

- $R = 1.097 \times 10^{-7}[m]$

3.

a) ¿Cuáles son las longitudes de onda entre las que están comprendidas las series espectrales de Lyman, Balmer, Paschen, Brackett y Pfund del HI?

serie	n	$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$
Lyman	1	
Balmer	2	
Paschen	3	
Brackett	4	
Pfund	5	

b) Indique la amplitud espectral de cada una de las series del inciso a.

- Para encontrar la amplitud espectral de las series debe encontrar $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$

- Podemos encontrar $\lambda_{\min}$ cuando $m \to \infty$; $\frac{1}{\lambda_{\min}} = R_H \frac{1}{n^2}$; donde n depende de la serie.

- Para encontrar $\frac{1}{\lambda_{\max}} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$; donde hemos tomado $m = n + 1$

serie	$\lambda_{\min}$	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ (nm)
Lyman	121.6	91.2	30.4
Balmer	656.3	364.6	291.7
Paschen	1875.1	820.6	1054.5
Brackett	4051.3	1458.0	2593.3
Pfund	7460.6	2278.0	5182.6

c) ¿Cuál es la longitud de onda de cada una de las diez primeras líneas de la serie de Balmer?

- Para responderlo utilizamos: $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$; $m = 3, 4, 5, 6, 7\ldots$; $n = 2$

4. Encuentre cuáles son las líneas espectrales del Hidrógeno que aparecen en la llamada región óptica o visible del espectro (4000Å − 7000Å)

   – El visible va entre los 400 a 700. Por lo cual, segun el ejercicio b del punto anterior solamente las lineas de la serie de Balmer serian visibles en este rango.

5. Encuentre el número de posibilidades diferentes de emitir líneas que tiene un átomo de HI, cuando el e- se encuentra en el nivel n = 4 y va al nivel 1. Calcule las longitudes de onda correspondientes.

   – Hay multiples formas de emitir distintos tipos de lineas. Tenemos que contabilizar las formas en las que podriamos obtener lineas de alguna serie:

   – $4 \rightarrow 1$: Serie de Lyman

   – $4 \rightarrow 3$: Paschen para luego $3 \rightarrow 1$ Lyman

   – etc.

6. Calcule la energía de enlace, es decir la que liga el electrón al núcleo en el nivel fundamental, de los átomos de HI y HeII. Dicha energía se conoce como potencial de ionización. Exprésela en eV.

   – Nota: Solo podemos aplicar el modelo de Bohr a atomos Hidrogenoides, es decir que tienen alguna cantidad de protones y un solo electron. Si tenemos 2 o mas electrones ya no podemos aplicar este modelo. Por eso en todas las preguntas de esta guia a lo sumo hay 1 electron.

   – Tenemos dos tipos de atomos hidrogenoides, para los cuales podemos calcular las energias como:

$$E_n = -\frac{RZ^2}{n^2} = -\frac{13.6[\mathrm{eV}]\,Z}{n^2}$$

   – Donde Z: Es el numero de Protones. Para el caso del hidrogeno neutro HI: 1 proton + 1 electron. Para el caso del Helio Ionizado: 2 proton + 1 electron.

   – La energia del nivel fundamental corresponde a $n = 1$

   – $E_1(\mathrm{HI}) = -13.6[\mathrm{eV}]$; $E_1(\mathrm{He\,II}) = -13.6[\mathrm{eV}] \times 2$

7. En los espectros de algunas estrellas muy tempranas se puede ver la serie de Pickering del HeII, que aparece cuando el e- salta de niveles superiores al 4. Establezca:

   a) la fórmula para las longitudes de onda de esta serie según el modelo de Bohr para los átomos hidrogenoides.

      – Utilizamos la formula de Rydeberg generalizada:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

      – Para nuestro problema $Z = 2$, $n = 4$

   b) La región del espectro donde se encuentra esta serie.

      – Para las distintas transiciones:

m	λ
$m \to \infty$	364.7nm
5	912.4nm
6	806.5nm
7	750.4nm
etc	

- La serie se encuentra en: infrarrojo cercano → visible → ultravioleta cercano

8. Muestre que las líneas de la serie de Pickering de HeII correspondientes a n par y mayor/igual que 4, coinciden con las líneas de la serie de Balmer del HI para niveles superiores o iguales a 3.

   - Para He II : $\frac{1}{\lambda} = RZ^2(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}) = 4R(\frac{1}{16} - \frac{1}{m^2})$
   - Para HI: $\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{l^2})$
   - Si ahora las igualamos:

     $4R(\frac{1}{16} - \frac{1}{m}) = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{l^2}) \Leftrightarrow (\frac{1}{16} - \frac{1}{m^2}) = (\frac{1}{16} - \frac{1}{4l^2})$
   - Claramente seran iguales si: $m^2 = 4l^2 \Leftrightarrow m = 2l$

He II	HI
m	$2l$
$6 \to 4$	$3 \to 2$
$8 \to 4$	$4 \to 2$
$10 \to 4$	$5 \to 2$
$12 \to 4$	$6 \to 2$