Interiores estelares
Ecuaciones fundamentales

Cinco ecuaciones fundamentales

Ecuaciones que regulan los interiores estelares:

- La ecuación de equilibrio hidrostático
- La ecuación de conservación de la masa
- La ecuación de estado de los gases ideales
- La ecuación del equilibrio térmico
- “El transporte de energía”

Fundamentos de estructura estelar

(I) Todas las estrellas presentan simetría esférica.

(II) No sufren la presencia de fuerzas externas, y los efectos producidos por los campos magnéticos y/o de la rotación son despreciables.

(III) La composición química inicial es uniforme en toda la esfera.

(IV) Se encuentran en estado estacionario, es decir que los cambios que en ellas se producen son muy lentos.

→ V**álidas en una primera aproximación**!

Evolution of Stars and Stellar Populations

Maurizio Salaris
Astrophysics Research Institute,
Liverpool John Moores University, UK

Santi Cassisi
INAF-Astronomical Observatory of Collurania,
Teramo, Italy

Introduction to stellar astrophysics

Volume 2
Stellar atmospheres

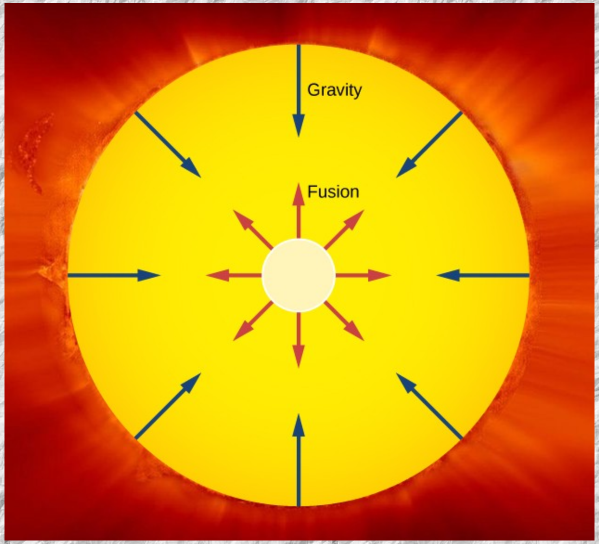
Erika Böhm-Vitense
University of Washington

3 Equations of Stellar Structure

3.1 Basic assumptions

The standard theory of stellar evolution is based on the following assumptions.

- Stars are spherically symmetric systems made of matter plus radiation. The effects of rotation and magnetic fields are negligible.

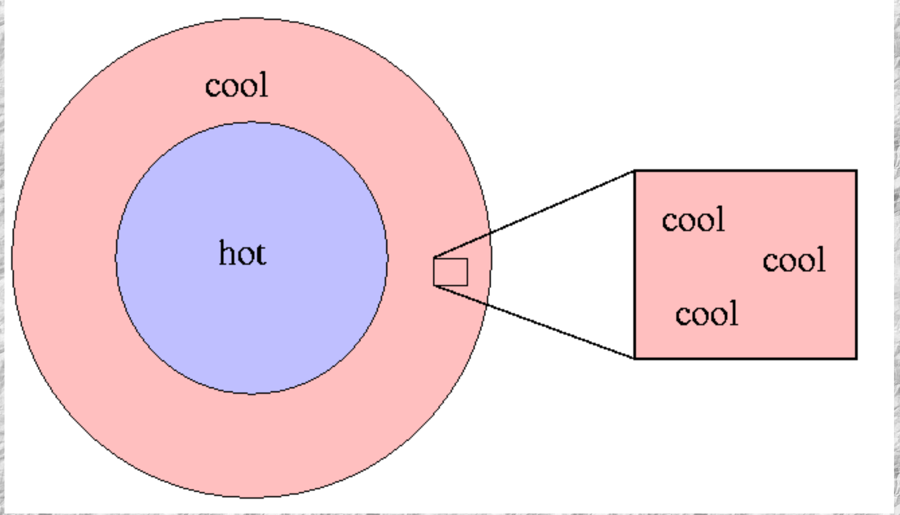


3 Equations of Stellar Structure

- The evolution of the physical and chemical quantities describing a star is slow, i.e. the temporal evolution of the stellar structure can be described by a sequence of models in hydrostatic equilibrium. The assumption of hydrostatic equilibrium (as we will see below) implies that the pressure has to increase toward the centre. In order to increase the pressure, the equation of state dictates that density and temperature have to increase too.

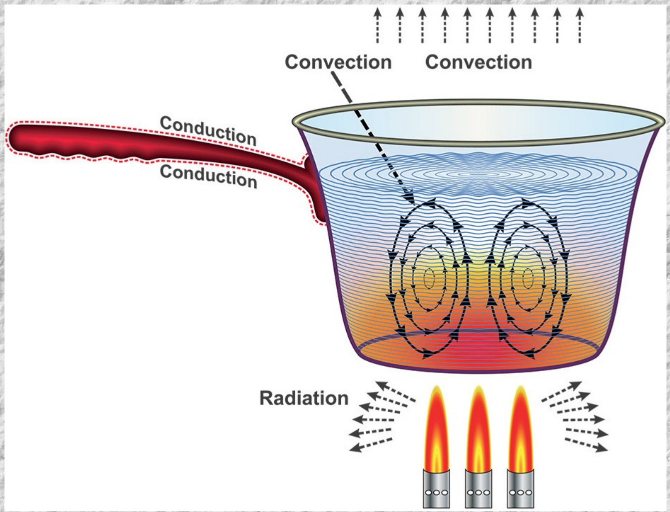
3 Equations of Stellar Structure

- The matter in each stellar layer is very close to local thermodynamic equilibrium. This hypothesis implies that the average distance travelled by particles between collisions – the mean free path – is much smaller than the dimension of the system, i.e. the radius of the star, and that the time elapsed between collisions is much smaller than the timescale for the change of the microscopic properties of the gas. The consequence of this hypothesis is that, at each point within the star, radiation can be well described by the Planck function corresponding to the unique temperature in common with the matter. This also means that each stellar layer can be assumed to behave like a black body, with (almost) no net energy flux absorbed or emitted. In reality there must be a small outgoing flux, otherwise stars would not shine. This asymmetry is, however, extremely small; in the case of the Sun, the flux at the surface is only $\approx 10^{-13}$ times the flux emitted by 1 cm^2 of a black body at the temperature typical of the Sun centre ($\sim 10^7$ K).



3 Equations of Stellar Structure

- The only mechanism of chemical element transport within stars is convection, i.e. the effect of rotational mixing and atomic diffusion is negligible.



The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G m_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$P(r) = \frac{R}{\mu} \rho(r) T(r)$$

$$\frac{dT}{dm_r} = -\frac{T}{P} \nabla \frac{G m_r}{4\pi r^4}$$

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

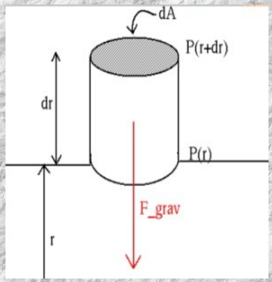
$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Continuidad (conservación) de la masa

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G m_r \rho}{r^2}$$

Equilibrio hidrostático



The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

Conservación de la energía (equilibrio térmico)

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

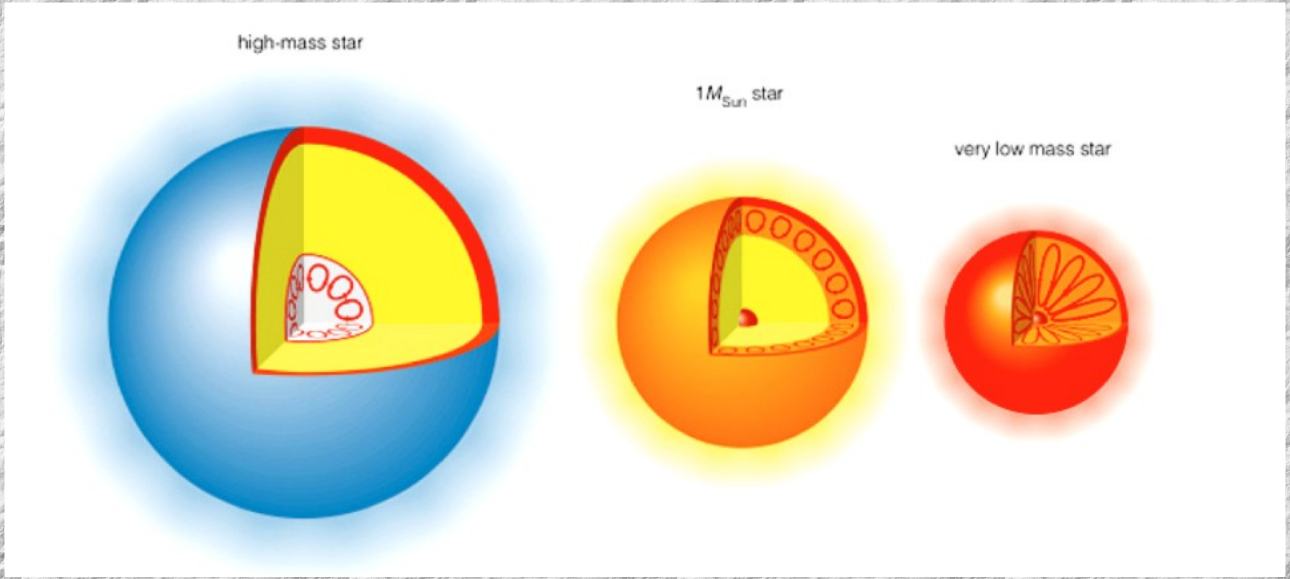
$$P(r) = \frac{R}{\mu}\rho(r)T(r)$$

Ecuación de estado

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dT}{dm_r} = -\frac{T}{P}\nabla\frac{Gm_r}{4\pi r^4}$$

Transporte de energía
(**radiación**, ***convección***, conducción)



The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G m_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$P(r) = \frac{R}{\mu} \rho(r) T(r)$$

$$\frac{dT}{dm_r} = -\frac{T}{P} \nabla \frac{G m_r}{4\pi r^4}$$

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G m_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$P(r) = \frac{R}{\mu} \rho(r) T(r)$$

$$\frac{dT}{dm_r} = -\frac{T}{P} \nabla \frac{G m_r}{4\pi r^4}$$

Vogt-Russell Theorem

"The Mass and the composition structure throughout a star uniquely determine its radius, luminosity and internal structure, as well as its subsequent evolution"

Equilibrio hidrostático

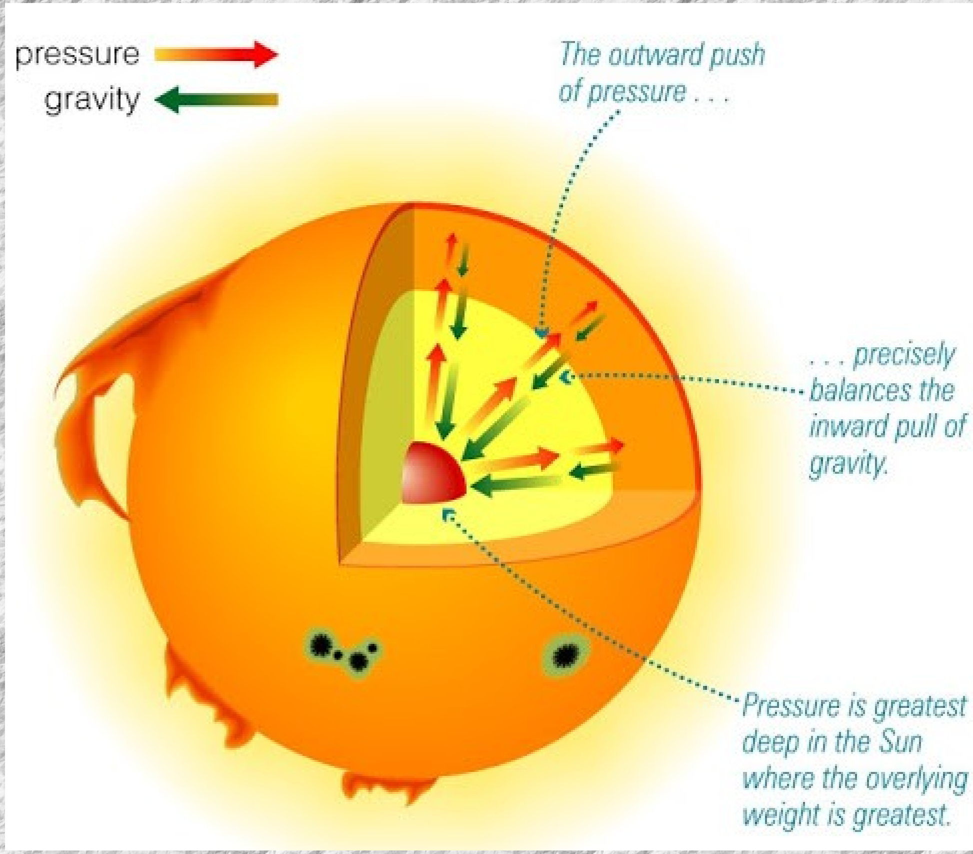
Existe un balance entre la gravedad que empuja hacia el centro (el peso de cada elemento de volumen) y la presión de los gases que empuja hacia afuera.

Equilibrio hidrostático

Existe un balance entre la gravedad que empuja hacia el centro (el peso de cada elemento de volumen) y la presión de los gases (que empuja hacia afuera).

Balancea la fuerza gravitatoria que hace que se contraiga la masa con la fuerza de presión de los gases.

Este balance es fundamental para que la estrella se mantenga estable (ni se contraiga ni se expanda)



Equilibrio hidrostático:

1

fza. atracción gravitatoria $\longleftrightarrow$ Presión de los gases

dV = elemento de volumen, a una dist. "r"

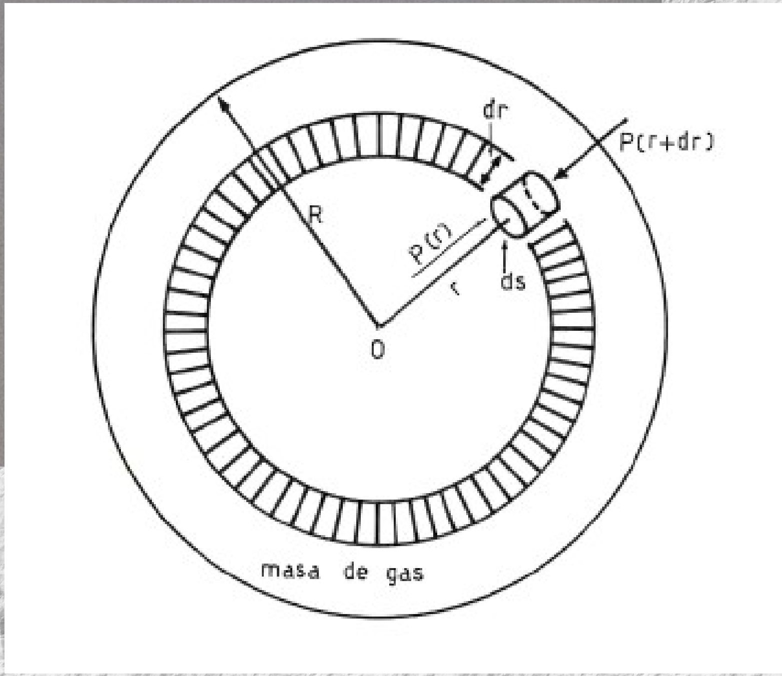
Fuerza gravitatoria con que la masa $M(r)$ (contenida en r) atrae a la masa dm (elemento de cilindro):

$$\rightarrow F_g = -\frac{G\,M(r)\cdot dm}{r^2}$$

Sea $\rho(r)$ = densidad del gas a la dist. r $\Rightarrow$

$$dm = \rho(r)\cdot dV$$
$$= \rho(r)\,.\,ds\,.\,dr \Rightarrow$$

$$(1)\quad \boxed{F_g = -\frac{G\,M(r)\cdot\rho(r)\,ds\,dr}{r^2}}$$



Fuerza de presión entre las dos caras del cilindro:

$$F_p = |P(r+dr) - P(r)|\, ds$$

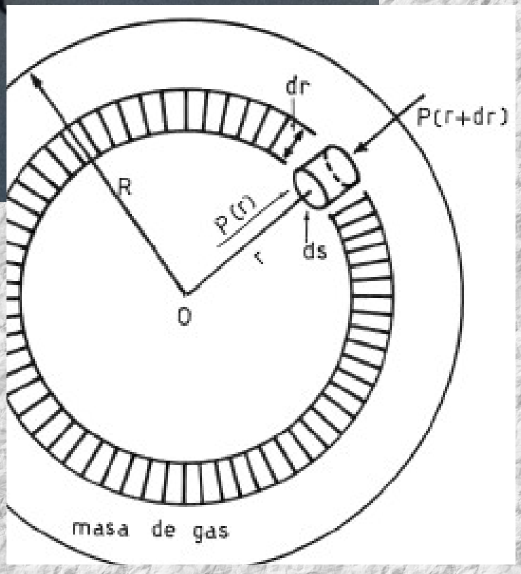
② $$\boxed{F_p = \left(\frac{dP}{dr}\cdot dr\right) ds}$$

⇒ ① = ② ⇒ $$-G\,\frac{(M(r))\cdot\rho(r)\,\cancel{ds}\cdot\cancel{dr}}{r^2} = \frac{dP}{dr}\cdot\cancel{dr}\,\cancel{ds}$$

⇒ $$\boxed{\frac{dP}{dr} = -G\,\frac{M(r)\cdot\rho(r)}{r^2}}$$ Ec. de eq. hidrostático

⇒ - gradiente de presión // contrarrestar gravedad

- La presión decrece con el radio.



Presión en el interior solar (Aproximada!!!)

$M = M_\odot$, $r = R_\odot$, $P_{sup}^{\odot} \simeq 0$, $\bar{\delta}_\odot = 1.41\ g/cm^3$

$= 1410\ kg/m^3$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} \simeq \frac{P_s - P_c}{R_s - R_0} = -\frac{P_c}{R_\odot} \Rightarrow$$

$$-\frac{P_c}{R_\odot} = -\frac{G M_\odot \bar{\delta}_\odot}{R_\odot^2} \Rightarrow P_c^\odot = G\frac{M_\odot \bar{\delta}_\odot}{R_\odot}$$

Con valores medios
M/2; (R/2)^2

$$\simeq 2.7 \times 10^{14} \frac{N}{m^2} \simeq 3 \times 10^{14} \frac{N}{m^2}$$

$(G = 6.7 \times 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$; $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}\ kg$; $R_\odot \simeq 7 \times 10^5\ km$, $7 \times 10^8\ m)$

$1\ atm \simeq 101325\ N/m^2$

6×10^9 atm

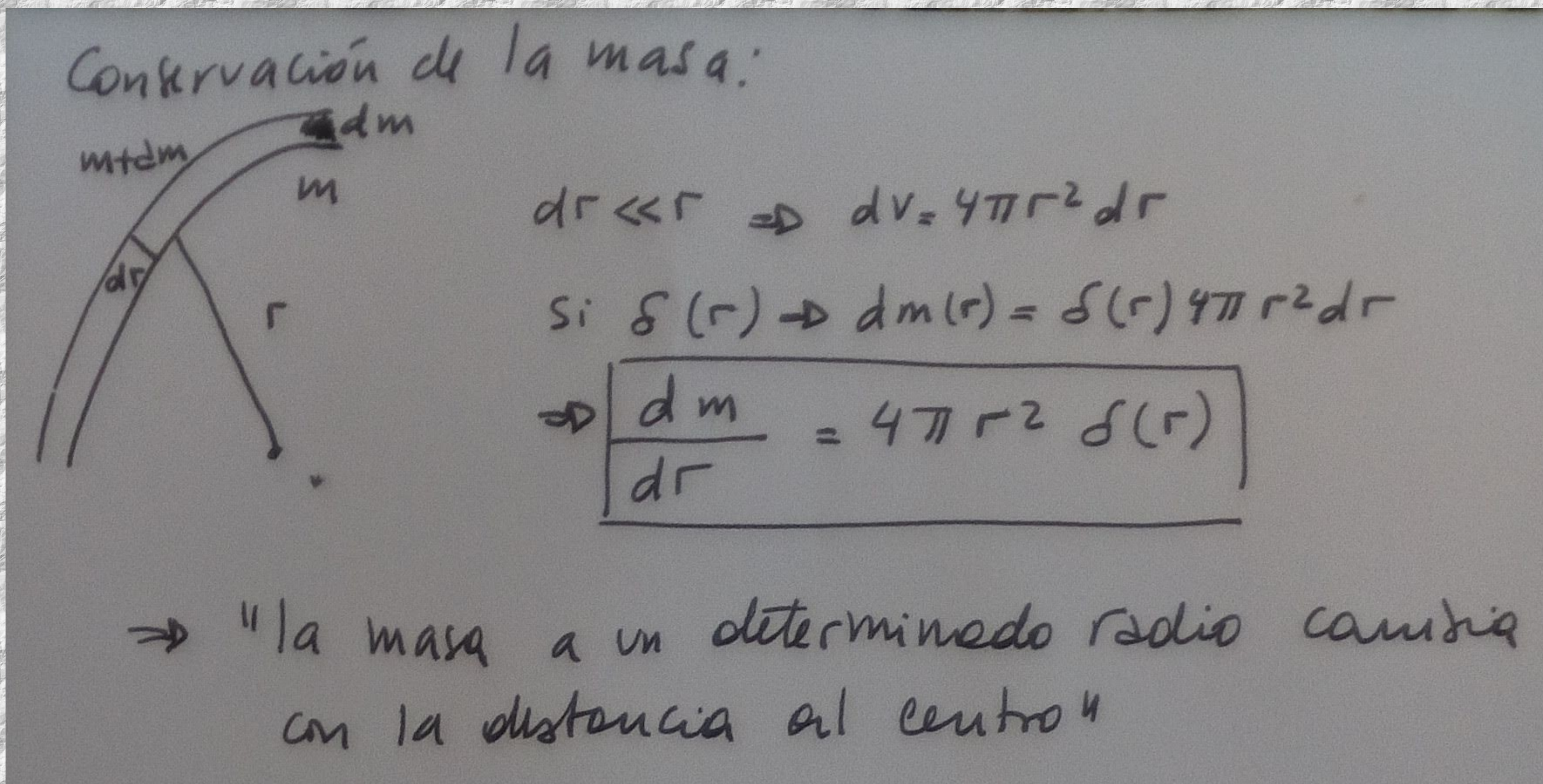
¡ojo! con $\bar{\delta}_\odot = 1410\ kg/m^3$

Conservación de la masa

Indica cómo la masa en el interior de la estrella, que se encuentra a una cierta distancia, cambia con la distancia al centro de la misma.

Conservación de la masa

Indica cómo la masa en el interior de la estrella, que se encuentra a una cierta distancia, cambia con la distancia al centro de la misma.



Ecuación de estado

Señala que el gas que compone la estrella se comporta como un gas ideal.

Ecuación de estado

El gas que compone la estrella se comporta como un gas ideal.

Una estrella es una masa de gas aislada en el espacio.

Por simplicidad supondremos que dicho gas se comporta como un gas ideal → verifica la ecuación de estado de un gas de este tipo:

$$P = NKT$$

(K = constante de Boltzmann, N = número de partículas, átomos y moléculas, por u. de vol.)

Ecuación de estado

$$P = NKT$$

Si $\rho = m N$; N = nº part./u.vol.

$$\Rightarrow N = \frac{\rho}{m}$$

Densidad de la estrella
Masa estelar

y $K = \frac{R}{N_0}$; R = cte de los gases

N_0 = nº de Avogadro

(nº de part. en un mol de gas)

$$\Rightarrow P(r) = \frac{\rho}{m} \cdot \frac{R}{N_0} \cdot T(r)$$

Peso molecular $\mu = N_0 \cdot m \Rightarrow \boxed{P(r) = \frac{R}{\mu} \cdot \rho(r) \cdot T(r)}$

Temp. en el interior de una estrella

Sup. constituidas por H, totalm. ionizado

número partículas $=$ nº protones $+$ nº e^- (por u. de vol.)

$m_e \ll m_p \Rightarrow \rho = m_p N_p$

$m_p \simeq m_H \rightarrow N_p = \dfrac{\rho}{m_H}$

$N = N_p + N_e$

$= \dfrac{2\rho}{m_H}$

como $P = NkT \Rightarrow T = \dfrac{P}{Nk}$

$\Rightarrow T = \dfrac{P \; m_H}{k \; 2\rho}$

$T_c = \dfrac{P_c \, m_H}{k 2\rho} = 15 \times 10^6 \, K \Rightarrow$ estado gaseoso!

Equilibrio térmico (gradiente de luminosidad)

Muestra que la energía total que pierde la estrella por unidad de tiempo es compensada por la energía nuclear generada por unidad de tiempo en el interior de la estrella.

Equilibrio térmico (gradiente de luminosidad)

Muestra que la energía total que pierde la estrella por unidad de tiempo es compensada por la energía nuclear generada por unidad de tiempo en el interior de la estrella.

Una masa de gas se encuentra en **condiciones de equilibrio térmico** cuando puede ser caracterizada por un única temperatura en toda su extensión.

Condición de equilibrio térmico

Una estrella en condiciones de equilibrio hidrostático no estará nunca en equilibrio térmico: su temperatura en el interior es de millones de grados y en su superficie es de

~ miles de grados.

Existe **estacionariedad**:

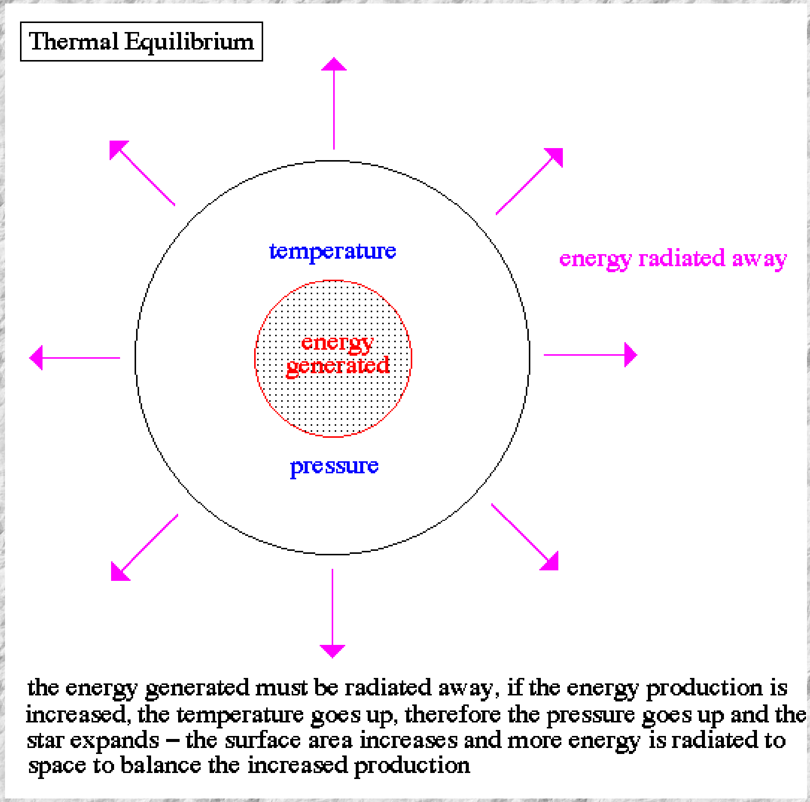
la temperatura en cada punto

del interior de una estrella permanece

constante durante períodos de tiempo

largos comparados con los tiempos

típicos para la generación de energía

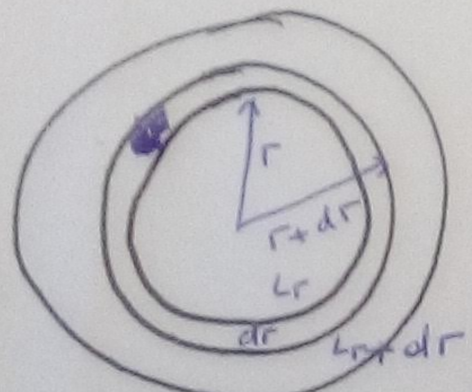


Equilibrio térmico

(A)

Para q' $\exists$ "estacionaridad", la cantidad de energía (ε) generada por u. de vol. y por u. de tiempo ($\varepsilon\rho$) sea exactamente igual al flujo neto de E. q' emerge del elemento de vol. en la u. de tiempo.

Sup. una estrella de radio R y densidad $\rho(r)$



$$dv = 4\pi r^2 dr$$

(A)

$$L(r+dr) - L(r) = \varepsilon\rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon}$$

Equilibrio térmico

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon}$$

⇒ La energía que emerge desde un cascarón de espesor "dr" es igual a la E. que llega al cascarón desde el interior estelar, más la generada en el propio cascarón.

Si se integra "r" entre 0 y R ⇒ Luminosidad total:

$$L = \int_0^R 4\pi r^2 \cdot \varepsilon \rho(r)\, dr$$

Mecanismos de transporte de la energía

La última “condición/ecuación” hace referencia a la manera en que se transporta la energía generada en el centro de la estrella hacia su superficie.

Mecanismos de transporte de la energía

La quinta "ecuación" hace referencia a la manera en que se transporta la energía generada en el centro de la estrella hacia su superficie.

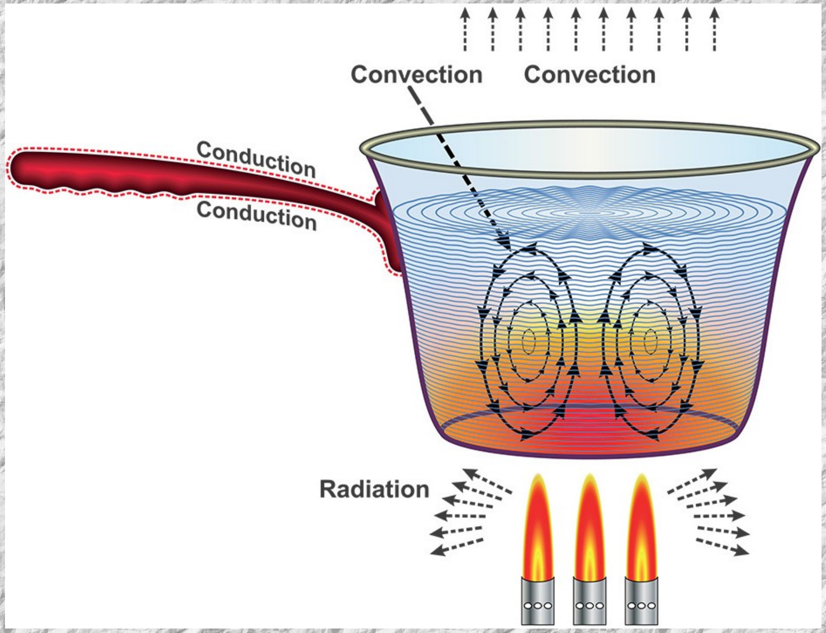
Existen tres mecanismos de transporte de energía: radiación, convección y conducción.

Prevalece, en general, es el **transporte radiativo**.

Permite que la energía sea transmitida por fotones.

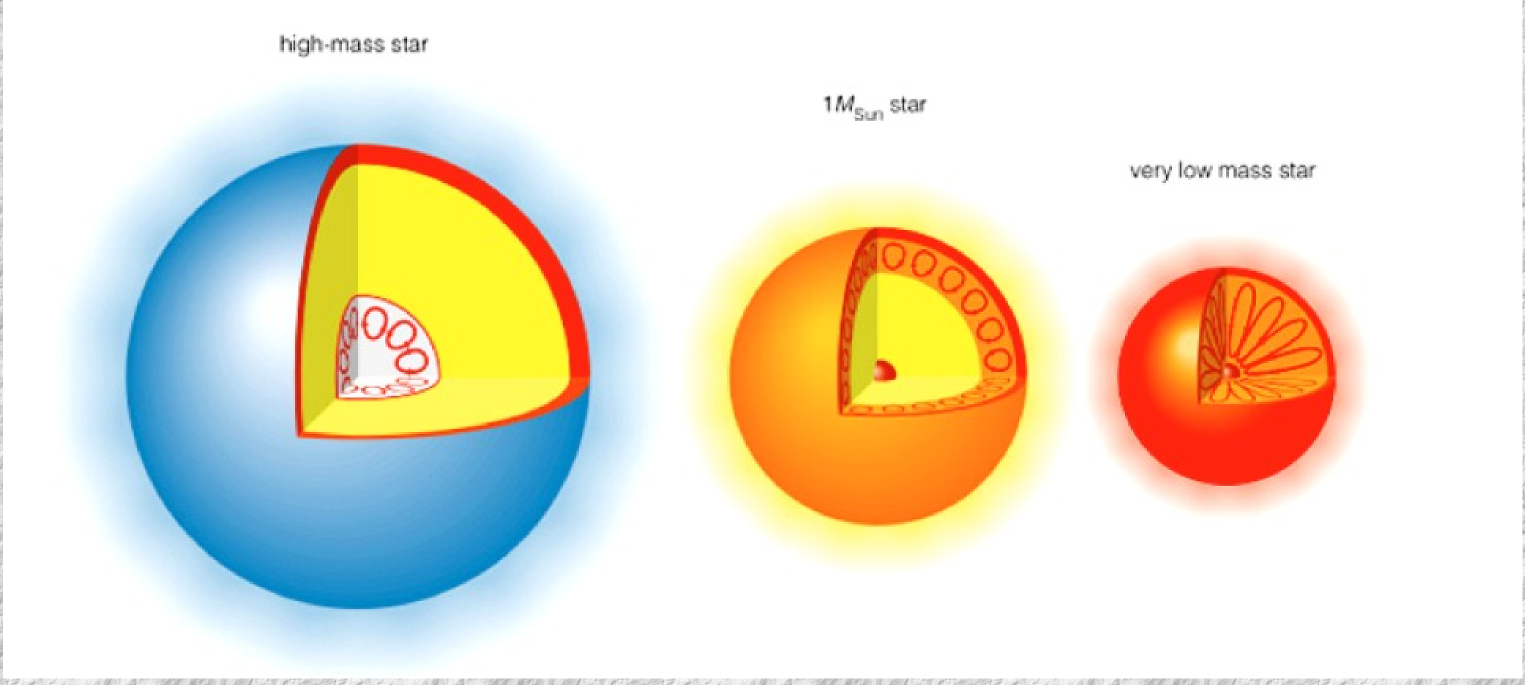
Three Energy Transport Mechanisms

Three different energy transport mechanisms operate in stellar interiors. **Radiation** allows the energy produced by nuclear reactions and gravitation to be carried to the surface via photons, the photons being absorbed and re-emitted in nearly random directions as they encounter matter (recall the discussion in Section 9.3). This suggests that the opacity of the material must play an important role, as one would expect. **Convection** can be a very efficient transport mechanism in many regions of a star, with hot, buoyant mass elements carrying excess energy outward while cool elements fall inward. Finally, **conduction** transports heat via collisions between particles. Although conduction can play an important role in some stellar environments, it is generally insignificant in most stars throughout the majority of their lifetimes and will not be discussed further here.

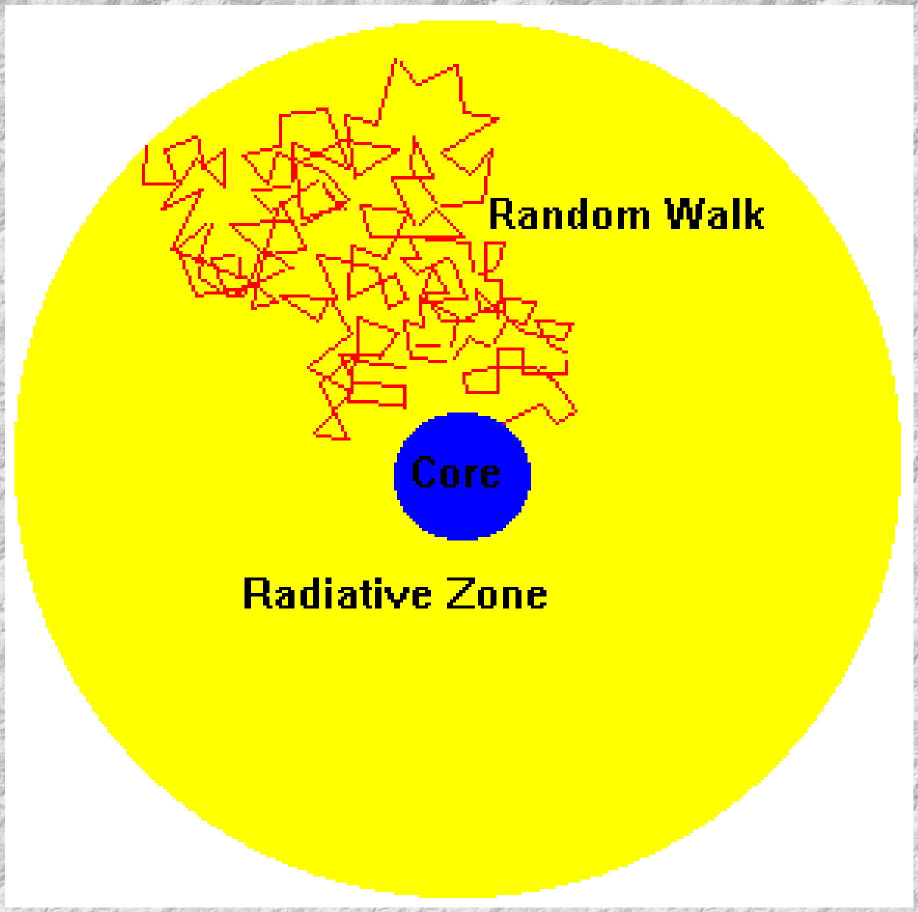


Three Energy Transport Mechanisms

Three different energy transport mechanisms operate in stellar interiors. **Radiation** allows the energy produced by nuclear reactions and gravitation to be carried to the surface via photons, the photons being absorbed and re-emitted in nearly random directions as they encounter matter (recall the discussion in Section 9.3). This suggests that the opacity of the material must play an important role, as one would expect. **Convection** can be a very efficient transport mechanism in many regions of a star, with hot, buoyant mass elements carrying excess energy outward while cool elements fall inward. Finally, **conduction** transports heat via collisions between particles. Although conduction can play an important role in some stellar environments, it is generally insignificant in most stars throughout the majority of their lifetimes and will not be discussed further here.



Equilibrio del transporte radiativo



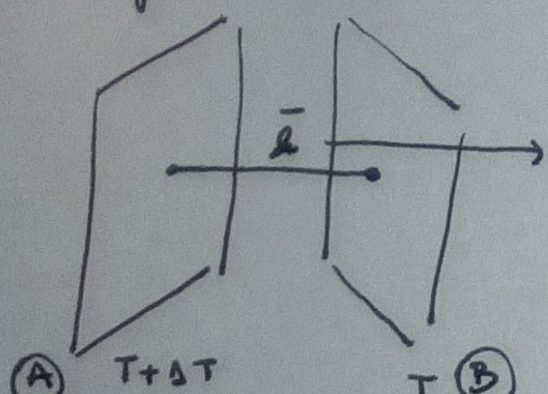
Equilibrio del transporte radiativo

Interior: gas ideal $\Rightarrow P(r) = \frac{R}{\mu}\,\rho(r)\,T(r)$

$\rho(r) \rightarrow$ densidad del gas.

$\mu \rightarrow$ peso molecular medio

tiene en cuenta la emisión de fotones en regiones calientes y su posterior absorción en regiones más frías. La efectividad de este mecanismo de transporte dependerá del gradiente de temperatura y de la "capacidad" de los fotones de desplazarse.



$\bar{\ell}$: camino libre medio $\rightarrow \Delta T \simeq -\frac{dT}{dr}\cdot\bar{\ell}$

$T \gg \Delta T$

La E emitida $\overbrace{\sigma(T+\Delta T)^4}^{\text{star = cN}}$ por (A) debe ser absorbida por (B).

E emitida por (B) $= \sigma T^4$.

star = CN

La E emitida $\sigma(T+\Delta T)^4$ por Ⓐ debe ser absorbida por Ⓑ.

E emitida por Ⓑ $= \sigma T^4$.

Sea "F" la diferencia entre las emisiones de Ⓐ y Ⓑ

$$F = \sigma (T+\Delta T)^4 - \sigma T^4$$ (E. ganada por u. de sup. y por u. de tiempo)

$$= \sigma T^4 \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^4 - \sigma T^4$$

......

$$\left(1+\frac{\Delta T}{T}\right)^4 = 1 + \frac{4\Delta T}{T} \Rightarrow F = \sigma T^4 \left(1 + 4\frac{\Delta T}{T}\right) - \sigma T^4$$

$$F = 4\sigma T^3 \Delta T$$

dirección flujo ≠ dirección ∇temp. ⇒ $$\boxed{F = - 4\sigma \bar{l} T^3 \frac{dT}{dr}}$$

$\bar{l}$: camino libre medio

sea un rayo "I" q' recorre una dist. dx (int. *)

$\Rightarrow dI = -\underbrace{k'}_{\text{coef. de absorción por u. de long.}} I\, dx$ (radiación absorbida en dx)

($k' = k \cdot \rho$; k: coef. másico de absorción)

$$\frac{dI}{I} = -k\rho\, dx \quad (\text{integrando}) \Rightarrow \ln I = -k\rho x + cte.$$

$$(x=0 \rightarrow I = I_0) \Rightarrow I = I_0 e^{-k\rho x}$$

$\bar{l} \equiv \dfrac{1}{k\rho}$ ∴ cuando el fotón recorre una distancia $= \bar{l}$

$\Rightarrow$ la intensidad disminuye $\dfrac{1}{e}$

$\left(I = I_0 e^{-\frac{x}{\bar{l}}} ; \text{ si } x = \bar{l} \rightarrow \dfrac{I}{I_0} = \dfrac{1}{e} \right)$

Ecuación de equilibrio del transporte radiativo

Teníamos: $F = -\dfrac{4\sigma T^3}{\kappa\rho}\cdot\dfrac{dT}{dr}$ (flujo por u. de área)

$$= 4\sigma\bar{l}\,T^3\frac{dT}{dr}$$

$$L(r) = 4\pi r^2 F$$

$$\boxed{L(r) = -4\pi r^2\cdot\frac{4\sigma T^3}{\kappa\rho}\cdot\frac{dT}{dr}}$$

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm_r\rho}{r^2}$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$P(r) = \frac{R}{\mu}\rho(r)T(r)$$

$$\frac{dT}{dm_r} = -\frac{T}{P}\nabla\frac{Gm_r}{4\pi r^4}$$

The equations of stellar structure are five differential equations which describe the run of pressure, temperature, luminosity, radius and chemical element abundances as a function of m_r at a given time t, and their evolution with t. The solution of these equations requires the knowledge of auxiliary functions like the equation of state and opacity of the stellar matter, and the rate of energy generation.

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G m_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$$P(r) = \frac{R}{\mu} \rho(r) T(r)$$

$$\frac{dT}{dm_r} = -\frac{T}{P} \nabla \frac{G m_r}{4\pi r^4}$$

Vogt-Russell Theorem

"The Mass and the composition structure throughout a star uniquely determine its radius, luminosity and internal structure, as well as its subsequent evolution"

Teorema de Vogt-Russell

Establece que la masa y la C.Q. de una estrella unívocamente determinan el radio, la luminosidad y la estructura interna, y también su evolución subsecuente.

La masa y la C.Q. → determinan prácticamente todas sus demás propiedades.

“Enunciado” de Vogt-Russell

Establece que la masa y la C.Q. de una estrella unívocamente determinan el radio, la luminosidad y la estructura interna, así como también su evolución subsecuente / La masa y la C.Q. de una estrella determinan prácticamente todas sus demás propiedades.

Dada la masa y la C.Q. de una estrella queda determinada toda su estructura interna, radio y luminosidad, y evolución.

Si una estrella se encuentra en equilibrio hidrostático y térmico, y su energía la obtiene de reacciones nucleares, entonces su estructura está completamente determinada por su masa y por la distribución de los diferentes elementos químicos en su interior.

Resolución de las ecuaciones de estructura interna

Resolución de las ecuaciones de estructura interna

Relaciones:

- $\kappa = \kappa$ (ρ, T, C.Q.); coeficiente másico de absorción
- $\varepsilon = \varepsilon$ (ρ, T, C.Q.); cantidad de energía por unidad de volumen

Condiciones de Contorno:

- cuando $r \rightarrow 0$

  $M(r) \rightarrow 0$

  $L(r) \rightarrow 0$

- cuando $r \rightarrow$ R_estrella

  $T \rightarrow 0$

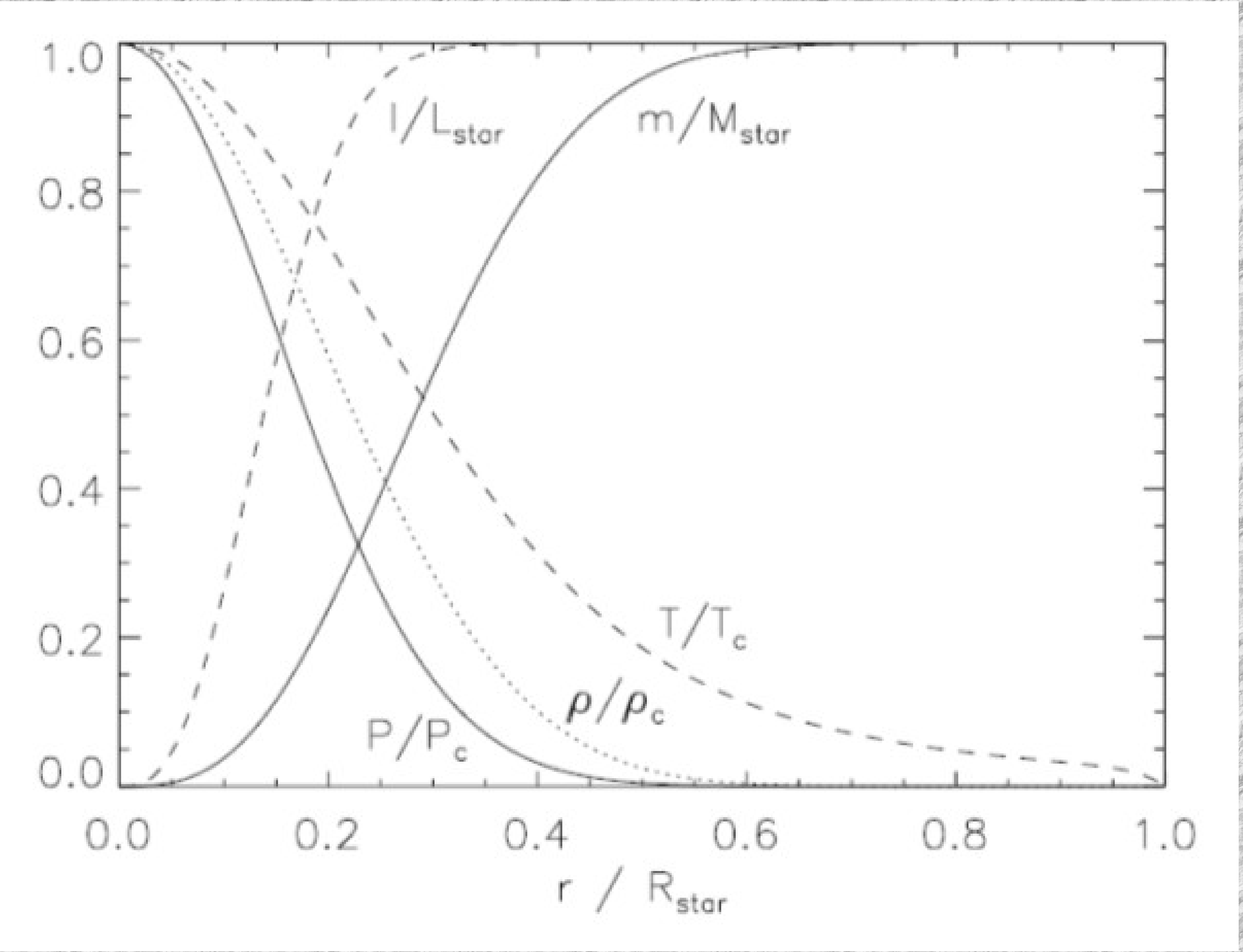
  $P \rightarrow 0$

Resolución de las ecuaciones de estructura interna

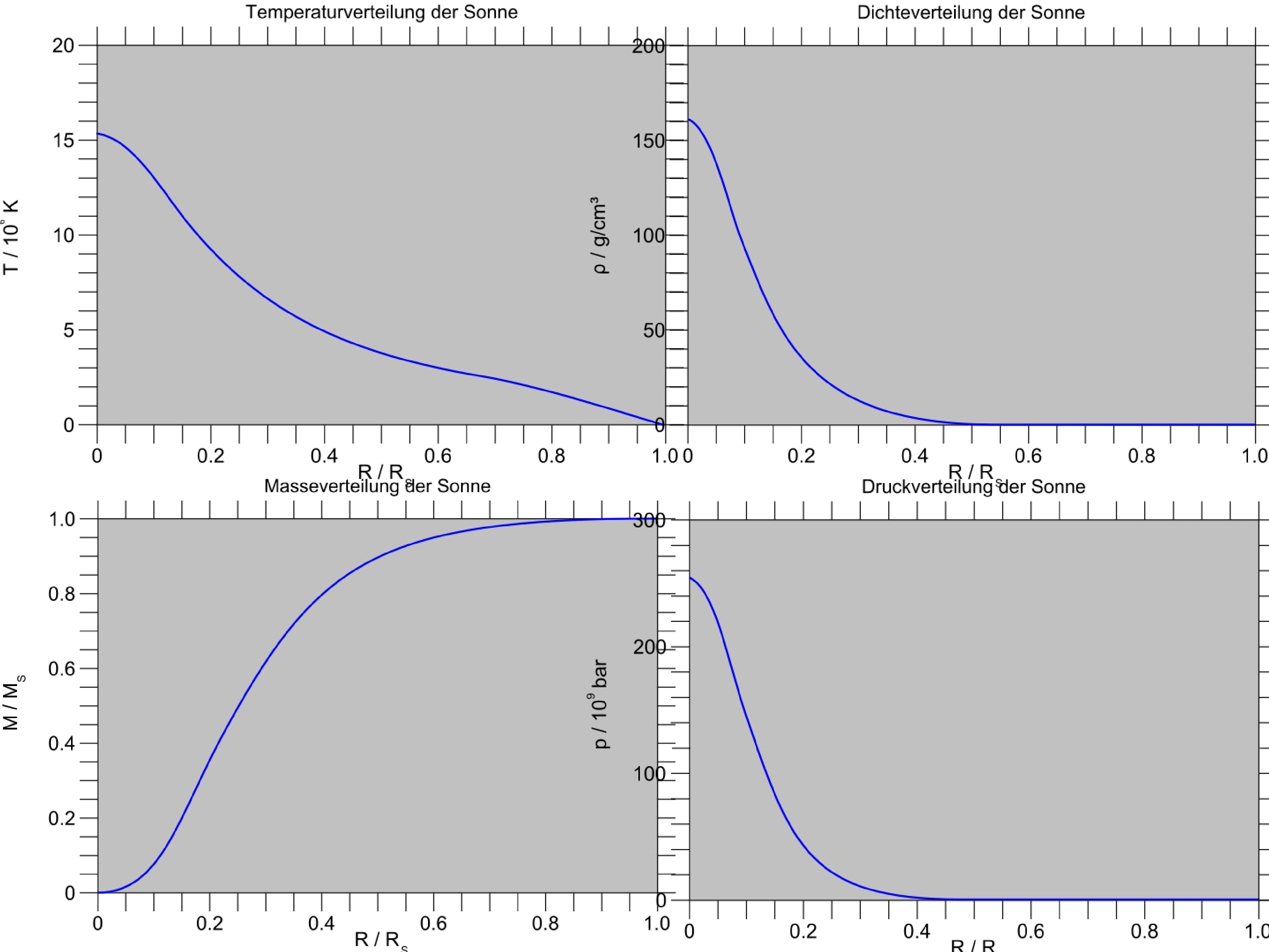
- No poseen una solución analítica

- Para encontrar las variables P, densidad, T, M y L en cada punto del interior de una estrella: es necesario fijar una cierta masa M y una determinada composición química X, Y, Z. Luego se integran (numéricamente) las 5 ecuaciones para obtener los valores no solo de las 5 incógnitas en cualquier r, sino también el radio R y la luminosidad L de la estrella.

- Esto constituye un modelo del interior estelar.



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
l/L_star
m/M_star
T/T_c
ρ/ρ_c
P/P_c
r / R_star


Temperaturverteilung der Sonne
T / 10⁶ K
R / R_S
Dichteverteilung der Sonne
ρ / g/cm³
R / R_S
Masseverteilung der Sonne
M / M_S
R / R_S
Druckverteilung der Sonne
p / 10⁹ bar
R / R_S

Relación masa - luminosidad

$$\frac{dP}{dr} = -G\,\frac{M(r)\,\rho(r)}{r^2}$$

A diferencias finitas $\Rightarrow \dfrac{P_c - P_s}{R_c - R_s} = -\dfrac{P_c}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow +\dfrac{P}{R} \propto +\dfrac{M\rho}{R^2}$; $M = V\cdot\rho \rightarrow \rho = \dfrac{M}{V} \propto \dfrac{M}{R^3}$

$$\frac{P}{R} \propto \frac{M}{R^2}\cdot\frac{M}{R^3} \Rightarrow \boxed{P \propto \frac{M^2}{R^4}}$$

Teníamos f': $P \propto \rho T$ y

$$\Rightarrow \boxed{P \propto T\cdot\frac{M}{R^3}}$$

$$T\,\frac{M}{R^3} \propto \frac{M^2}{R^4} \Rightarrow T \propto \frac{M}{R} \rightarrow \frac{dT}{dR} \propto \frac{M}{R^2}$$

Relación masa - luminosidad

$$T \, \frac{M}{R^3} \propto \frac{M^2}{R^4} \Rightarrow T \propto \frac{M}{R} \rightarrow \frac{dT}{dR} \propto \frac{M}{R^2}$$

Como $L(r) = \dfrac{-16 \pi r^2 \sigma T^3}{\kappa \rho} \cdot \dfrac{dT}{dr}$ (Eq. transp. Rad.)

$$L \propto \frac{R^2 T^3}{\rho} \cdot \frac{M}{R^2}$$

$$L \propto \frac{T^3 M}{\rho} \; ; \; \rho \propto \frac{M}{R^3} \wedge T \propto \frac{M}{R}$$

$$L \propto \frac{M^3}{\cancel{R^3}} \cancel{M} \cdot \frac{\cancel{R^3}}{\cancel{M}} = \boxed{L \propto M^3} \; !!!$$

Relación masa-luminosidad (secuencia principal)

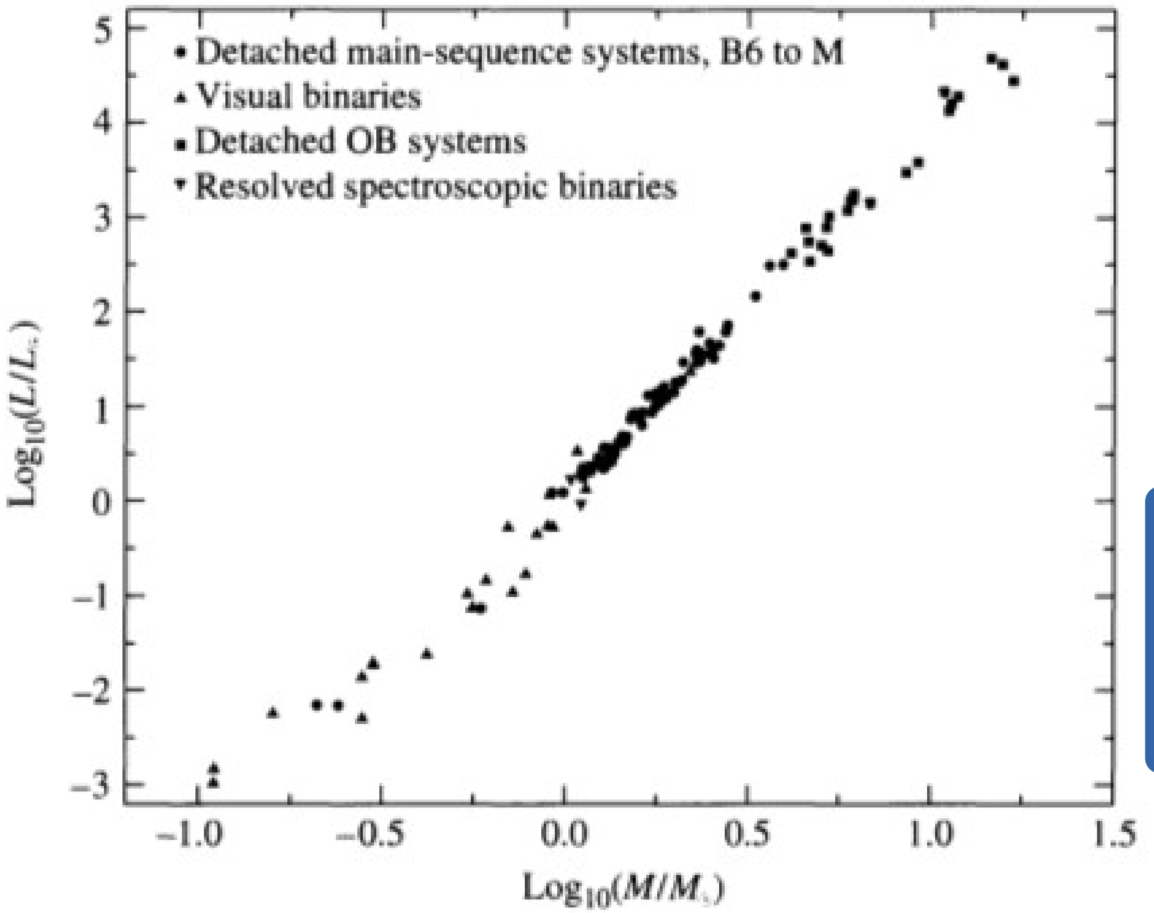


FIGURE 7.7 The mass–luminosity relation. (Data from Popper, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, *18*, 115, 1980.)

$$\boxed{\frac{L}{L_\Theta} \approx \left(\frac{M}{M_\Theta}\right)^{3.5}}$$