1 Teoria

- La problematica que se quiere resolver es la determinacion de la masa de las estellas, esto solo puede hacerse utilizando la gravedad.

- Las ecuaciones de Kepler se utilizan para determinar la masa de los cuerpos en el sistema solar, pero pueden ser modificadas para determinar la masa de sistemas binarios de estrellas, los cuales son muy abundantes.

1.1 Clasificacion de sistemas binarios

Tipo	Descripcion
Optical Double	No son binarias - Son estrellas en la misma linea de la visual - No estan gravitacionalmente ligadas
Visual Binary	Se resuelven ambas estrellas y se puede monitorear cada miembro. Hay informacion de la separacion angular desde su CM. Si se conoce su dist, se puede calcular su separacion.
Astrometric binary	Solo un miembro visible, se deduce la presencia del otro por el mov oscilatorio del miembro visible.
Eclipsing binary	Sistema binario de canto, cuando una pasa en frente de la otra se reduce el brillo
Spectrum binary	Binarias con dos espectros distinguibles.
Spectroscopic binary	Se observa un shift periodico de las lineas espectroscopicas.

Table 1.

1.2 Introduccion Elipses y leyes de Kepler

- Movimiento eliptico. La ecuacion de la elipse esta dada por: $r + r' = 2a$

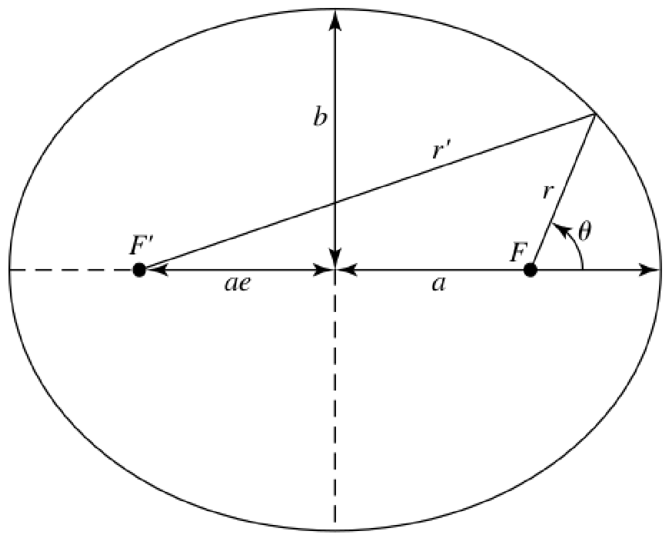


FIGURE 2.4 The geometry of an elliptical orbit.

- Del grafico podemos ver que a es la distancia desde el centro al borde del eje mayor de la elipse. Por otro lado r, r' representan las distancias desde los puntos focales a cualquier punto de la elipse. El foco F denominado principal es donde se encuentra el sol, mientras que el otro esta vacio.

- La excentricidad de la elipse se calcula como la distancia entre los focos , dividida $2a$. Para un circulo por ejemplo $e = 0$ y en general: $0 \leqslant e < 1$. Esto implica por otro lado, que la distancia desde cualquier punto al centro es: ae.

- Un punto sobre la elipse, que es el mas cerca del foco principal, se denomina Perihelio, mentras que el punto mas lejano se denomina Afelio.

- Para el punto b donde se cumple $r = r'$ podemos escribir: $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

- Para describir la posicion r de un planeta por ejemplo, se utilizan coordenadas radiales (Ver Carroll y Ostie), de donde finalmente puede deducirse esta en funcion del angulo que forma, en direccion contra reloj, desde el Afelio (Ver la figura arriba):

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

1.3 Visual Binaries

- Cuando la separacion de las estrellas puede resolverse facilmente, superando las condiciones locales de seeing y difraccion, se puede analizar las caracteristicas orbitales.

- Se puede llegar a determinar el cociente entre sus masas y la separacion existente entre estas.

- Cada una de las estrellas orbita el centro de masa del sistema, en una orbita eliptica con semieje mayor a_1, a_2.

- Puede demostrarse que:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

  - Si se conoce la distancia al objeto: d entonces se puede calcular los anglos subtendidos con los semiejes mayores: $\alpha_i = \frac{a_i}{d}$ (formula paralaje: $a = d \times \alpha$)

- Esto agrega una ecuacion extra:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

1.4 ECLIPSING, SPECTROSCOPIC BINARIES

- Eclipsing Binaries: These are systems where **the orbit is edge-on**, so the stars **pass in front of each other** from our point of view — they **eclipse** one another. You can't see two stars separately — but the **brightness of the system changes over time**.

- We measure a **light curve** — a plot of brightness vs. time. A **dip in brightness** occurs when one star passes in front of the other. The **primary eclipse** happens when the brighter star is blocked. The **secondary eclipse** is when the dimmer star is blocked.

- By analyzing the shape and timing of the light curve, we can get:

  - Orbital period P. Este periodo es el mismo para ambas estrellas que orbitan al rededor del centro de masa.

  - Relative sizes of the stars (from how long the eclipses last)

  - Orbital inclination i (usually near 90°)

  - Sometimes temperature ratio

- Spectroscopic Binaries: These are binaries where we can't see two stars separately, but we can **detect their motion** via **Doppler shifts** in their **spectra**.

- As the stars move, One star comes toward us → light is **blueshifted**, The other moves away → light is **redshifted**. And they swap places half an orbit later.

- We measure a **radial velocity curve** — velocity along the line of sight vs. time.

- From this, we can find:

  - The orbital period P

  - The radial velocity amplitudes v_{r1}, v_{r2}, $v_{r1} = v_1 \sin i$

  - Eccentricity and shape of the orbit

  - And something called the **mass function**

- Mass Function, This gives you a **lower limit** on the mass of the unseen companion:

$$f(M) = \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{P v_{1r}^3}{2\pi G}$$

- If it's **double-lined** (you see both stars' spectra), then:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}}$$

- If a binary is **both eclipsing and spectroscopic**, you can get:
  - The **absolute masses** M_1 and M_2
  - The **radii** of both stars
  - The **inclination** (close to 90°)
  - The **orbital separation** a

1.4.1 Deduccion de la funcion de Masa

El periodo orbital de cada estrellam esta dado por la tercera ley de kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

Aqui: $a = a_1 + a_2$

$$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 G(m_1 + m_2) = (a_1 + a_2)^3$$

La velocidad radial:

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \Rightarrow v_r = \omega r \operatorname{sen} i$$

Si queremos escribirla en terminos del periodo, $\omega = \frac{2\pi}{P}$, obtendremos:

$$v_r = \frac{2\pi}{P} r \operatorname{sen} i \Leftrightarrow \frac{P}{2\pi} v_r = r \operatorname{sen} i$$

Tomemos $r_i = a_i \Rightarrow a_i = \frac{P}{2\pi} \frac{v_r}{\operatorname{sen} i}$

Por conservacion del momento:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \Leftrightarrow a = a_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow \boxed{a^3 = a_1^3 \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2}\right)^3}$$

Ahora reemplazando en la segunda formula derivada de la tercer ley de Kepler:

$$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 G(m_1 + m_2) = a_1^3 \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2}\right)^3$$

Simplificamos masas:

$$\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 G m_2^3 = \left(\frac{P}{2\pi} \frac{v_r}{\operatorname{sen} i}\right)^3 (m_1 + m_2)^2$$

Reordenamos y simplificamos para obtener la ecuacion final:

$$\boxed{\frac{(m_2 \operatorname{sen} i)^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{P}{2\pi} \frac{v_r^3}{G}}$$

Interpretacion:

- You can **calculate the right-hand side** from observations
- But you don't know sin$i$sini, so this gives a **lower limit** on M_2
- Si la binaria esta eclipsando, entonces $i = 90$ y podes conocer sus masas verdaderas.

1.4.2 Uso de eclipses para obtener radios y cocientes de temperaturas

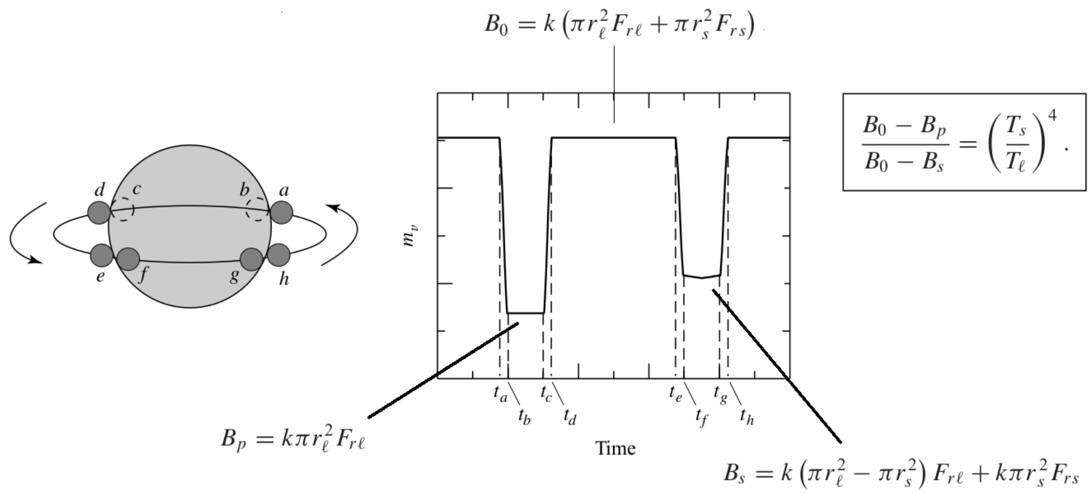
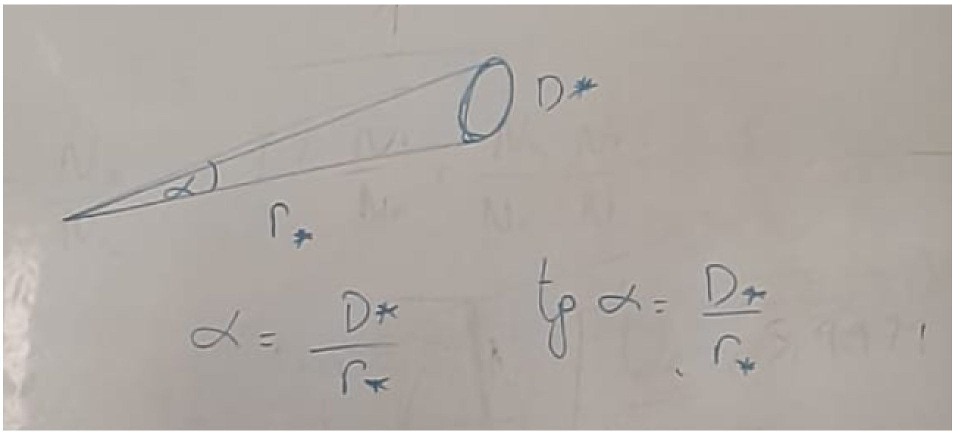


Figure 1. Figura que muestra lo que sucede con el brillo de un sistema binario, visible de canto (el eje de rotacion perpendicular a la linea visual).

- En el diagrama de arriba F_r denota el flujo radiativo: $F_r = \sigma T^4$.
- r_s: Radio de la estrella mas chica, r_l: Radio de la estrella mas grande.
- k : Es una constante que depende de la distancia al sistema, pero que por lo general no se puede determinar.
- B_0: Es el brillo detectado cuando ambas estrellas se ven sin eclipsarse entre si. En el diagrama de arriba esto corresponde a los mayores brillos. (Lineas constantes)
- B_p: Brillo del minimo primario, ocurre cuando la estrella mas caliente pasa por detras de la mas fria.
- B_s: Es el brillo en el minimo secundario.

2 Practico

1. El tamaño angular de una estrella medido con un interferómetro resultó ser igual a 10^{-5} veces el tamaño angular del Sol. Si la estrella tiene una magnitud aparente bolométrica de 4 mag., calcule su temperatura efectiva.



- En el dibujo: D^*, r^*, de donde se puede deducir: $\tan(\alpha)=\frac{D^*}{r^*}$, para angulos chicos: $\alpha=\frac{D^*}{r^*}$; Voy a denotar: $r^*=r$ y de la misma forma las otras cantidades.

- De lo anterior y los datos puede plantearse que:

$$10^{-5}=k=\frac{\alpha}{\alpha_\odot}=\frac{2R}{r}\frac{r_\odot}{2R_\odot}=\frac{R}{r}\frac{r_\odot}{R_\odot}\Leftrightarrow\frac{1}{k}\frac{r_\odot}{R_\odot}=\frac{r}{R} \tag{1}$$

- De la relacion de magnitud absoluta bolometrica:

$$M_{\text{bol}}-M_{\odot,\text{bol}}=-2.5\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)=-2.5\log\left(\frac{4\pi R^2\sigma T^4}{4\pi R_\odot^2\sigma T_\odot^4}\right)=-2.5\log\left(\frac{R^2T^4}{R_\odot^2T_\odot^4}\right) \tag{2}$$

- Por otro lado deacuerdo a la formula de Modulo de distancia:

$$m_{\text{bol}}-M_{\text{bol}}=5\log\left(\frac{r}{10[\text{pc}]}\right)=2.5\log\left(\left(\frac{r}{10[\text{pc}]}\right)^2\right) \tag{3}$$

- Sumamos las ecuaciones 1 y 2:

$$m_{\text{bol}}-M_{\odot,\text{bol}}=2.5\log\left(\left(\frac{r}{10[\text{pc}]}\right)^2/\frac{R^2T^4}{R_\odot^2T_\odot^4}\right)=2.5\log\left(\frac{R_\odot^2T_\odot^4}{10^2[\text{pc}]^2}\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot\frac{1}{T^4}\right)$$

- Agregamos la ecuacion 1 y reemplazamos algunos datos:

$$4-M_{\odot,\text{bol}}=2.5\log\left(\frac{R_\odot^2T_\odot^4}{10^2[\text{pc}]^2}\left(\frac{1}{k}\frac{r_\odot}{R_\odot}\right)^2\frac{1}{T^4}\right)$$

- De donde finalmente podemos despejar la temperatura:

$$10^{(4-M_{\odot,\text{bol}})/2.5}=\frac{T_\odot^4}{10^2[\text{pc}]^2}\frac{r_\odot^2}{k^2}\frac{1}{T^4}\Leftrightarrow\boxed{T^4=\frac{T_\odot^4}{10^2[\text{pc}]^2}\frac{r_\odot^2}{k^2}10^{-(4-M_{\odot,\text{bol}})/2.5}}$$

- Se debe buscar $T_\odot, r_\odot, M_\odot$ en Allen.

2. Considere 3 estrellas de magnitudes aparentes visuales: $m_1=2.0$, $m_2=2.5$, $m_3=3.0$ cuya paralaje media es de $\bar{p}=0.010''$. Si dichas estrellas tienen la **misma magnitud absoluta** visual, encuentre dicha magnitud y las paralajes individuales

   - Empezamos planteando el modulo de distancia:

$$m_i-M=-5+5\log(r_i[\text{pc}])$$

- Despejamos cuanto vale r:

$$r_i = 10^{\frac{m_i - M + 5}{5}}$$

- Ahora calculamos el paralaje:

$$p'' = \frac{1}{r_i} = 10^{0.2(M - m_i - 5)}$$

- La paralaje media es el promedio de las paralajes:

$$\bar{p} = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$$

- Reemplazamos el correspondiente de cada objeto:

$$\bar{p} = \frac{1}{3}(10^{0.2(M - m_1 - 5)} + 10^{0.2(M - m_2 - 5)} + 10^{0.2(M - m_3 - 5)})$$

- Operamos un poco mas:

$$\bar{p} = \frac{10^{0.2(M-5)}}{3} \cdot (10^{-0.2m_1} + 10^{-0.2m_2} + 10^{-0.2m_3})$$

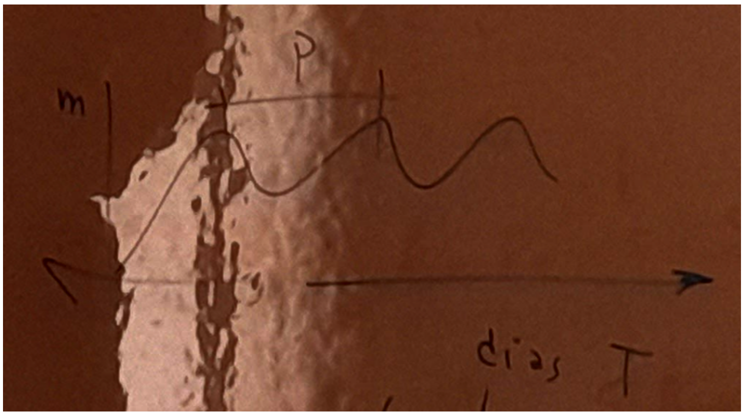
- Despejando M y aplicando el logaritmo:

$$0.2\,(M - 5) = \log\left(\frac{1}{3\bar{p}}\right) \log(10^{-0.2m_1} + 10^{-0.2m_2} + 10^{-0.2m_3})$$

- Despejamos M y de alli podemos resolver las paralajes individuales.

  $10^{-0.2m_1} + 10^{-0.2m_2} + 10^{-0.2m_3} = 10^{-0.2 \cdot 2} + 10^{-0.2 \cdot 2.5} + 10^{-0.2 \cdot 3} = 0.97$

3. Una variable cefeida de un sistema estelar tiene un período de 40 días y una magnitud aparente de 15 mag. ¿La estrella pertenece a nuestra Galaxia?



- Para esto podemos utilizar la ecuacion 14.1 de Carroll y Ostie, para las estrellas variables:

$$M_{<V>} = -2.81 \log(P_d) - 14.3$$

- Donde: $M_{<V>}$ es la magnitud absoluta promedio, P_d es el periodo en dias.

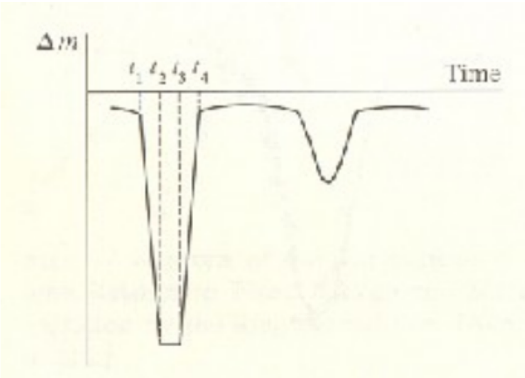
- Observacion: El profe dio otras opciones de ecuaciones, asi que esta no seria la unica:

  $M_{<V>} = -2.2 \log(P_d) - 2.05$; $M_{<V>} = -2.78\,(\log(P_d) - 1) - 4$

- Utilizando que el periodo en dias es $P_d = 40$, luego podemos obtener $M_{<V>}$
- Despues podemos utilizar la formula de Modulo-distancia:

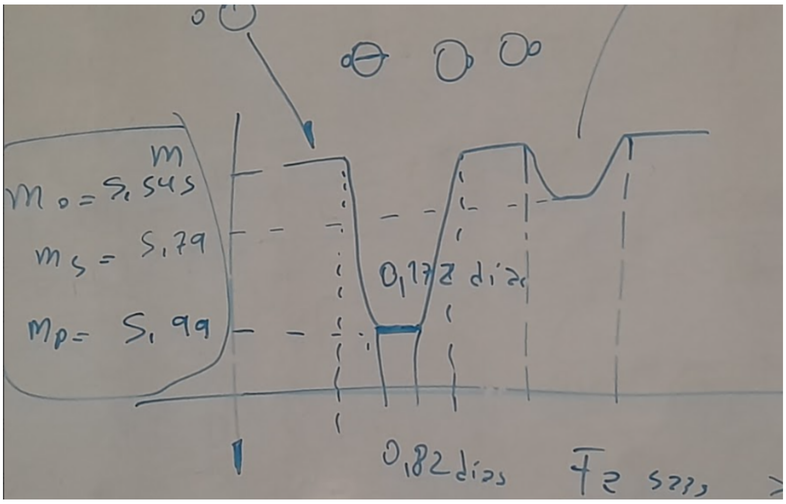
  $V - M_V = 5\log(d) - 5$, donde $=$ $V = 15$, para obtener d.

4. Una binaria eclipsante tiene una curva de luz similar a la de la Fig.1. **El período es de 100 días**, **cada eclipse dura 0.812 días** y la **"luz" permanece constante por 0.172 días**. Los datos espectroscópicos muestran que la componente más brillante posee v**elocidades radiales** que varían entre +2.9 y +57.1 km/s, mientras que para la más débil varían entre –8.3 y +68.3 km/s.



La Fig.2 esquematiza la curva de velocidades radiales de este sistema. **La luz combinada** del sistema tiene una **magnitud bolométrica aparente** de 5.545 mag. en los máximos, 5.99 mag. en el mínimo primario y 5.79 mag. en el secundario. La **distancia** al sistema es de 50 pc. Considere la órbita como circular y contenida en un plano cuya **normal es perpendicular a la visual**(Vista de canto). Determine todas las características que le sea posible.

- Vamos anotando algunos datos:
- $P = 100$[dias] ; $v_{r1} = [2.9, 57.1][\mathrm{km}/s]$; $v_{r2} = [-8.3, 68.3][\mathrm{km}/s]$; $r = 50$[pc]
- Para las magnitudes: $m_0 = 5.545$ (Maximos) - $m_p = 5.99$ - $m_s = 5.79$



  - Relacion Masa-Velocidad radial:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}} = \frac{[-8.3, 68.3][\mathrm{km}/s]}{[2.9, 57.1][\mathrm{km}/s]}$$

- La otra cosa que podemos intentar medir es el cociente de temperaturas usando la ecuacion:

$$\frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \left(\frac{T_s}{T_l}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{1 - \frac{B_p}{B_0}}{1 - \frac{B_s}{B_0}} = \left(\frac{T_s}{T_l}\right)^4$$

- Para calcular los brillos utilizamos la relacion:

  $m_2 - m_1 = -2.5 \log\left(\frac{F_2}{F_1}\right) \Leftrightarrow 100^{(m_1 - m_2)/5} = \frac{F_2}{F_1}$

- Entonces podriamos escribir:

  $\frac{B_p}{B_0} = 100^{(m_0 - m_p)/5}$; $\frac{B_s}{B_0} = 100^{(m_0 - m_s)/5}$

- De donde podemos obtener la relacion de cocientes $\left(\frac{T_s}{T_l}\right)^4$