Ingresando a FAMAF

MATERIALES DE ESTUDIO

Universidad Nacional de Córdoba

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Ingresando a FAMAF

MATERIALES DE ESTUDIO

Universidad Nacional de Córdoba

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Autoridades

Decana
Mirta Susana Iriondo

Vicedecano
Gustavo Alberto Monti

Secretaria Académica
Nesvit Castellano

Subsecretaria Académica
Fernanda Viola

Autores
Patricia Kisbye
David Merlo
Daniel Fridlender
Alejandro Tiraboschi
Elvio Pilotta
Monica Oddone
Nicolas Jares
Lourdes Aguiar Cau
Juan M. Scavuzzo

Coordinadoras Académicas de Edición
Cristina Beatriz Esteley
Patricia Kisbye

Diseño de Tapa
Micaela Ventureira

Colaboración Técnica
Fredy Restrepo

Ingreso a FAMAF: materiales de estudio / Patricia Kisbye ... [et al.]; contribuciones de Fredy Restrepo; coordinación general de Cristina Beatriz Esteley.-1a ed. - Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba, 2017.
186p.; 29 x 21 cm.

ISBN 978-950-33-1331-2

1. Álgebra. 2. Descripción de Funciones. I. Kisbye, Patricia II. Restrepo Fredy, colab. III. Esteley, Cristina, coord.
CDD 512

Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Av. Medina Allende s/n
Ciudad Universitaria
Cp:X5000HUA
Córdoba, Argentina. Año 2019

PALABRAS DE BIENVENIDA

Estimados jóvenes que hoy ingresan a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación y a la Universidad Nacional de Córdoba (FAMAF-UNC); es para mí, y para el conjunto de la comunidad que conforma esta institución, un honor y un placer darles la bienvenida a esta nueva etapa de la vida que transitaremos juntos. La elección de una carrera universitaria suele ser mucho más que la mera opción por una actividad que realizarán durante cierto tiempo. Esta elección contribuirá a configurar lo que en un futuro serán de una manera muy profunda y personal.

El curso de ingreso que ahora emprenden es la primera de muchas etapas que deberán sortear para llegar a la meta. Las llamadas "ciencias duras", aquéllas vinculadas especialmente a la matemática, la física, la computación, etc. tienen fama de ser "aburridas" y "difíciles". Tal vez las propias experiencias con las que llegan a este momento han abonado este mito...

Es cierto que el estudio de las asignaturas y la adquisición del conocimiento que comienza con este curso requerirá concentración en las clases, dedicación al estudio en casa, horas de trabajo en los laboratorios entre otras actividades; pero aún más cierto es que todo este esfuerzo será el contexto en el cual vivirán una de las etapas más bellas y apasionantes de vuestras vidas.

Conocerán y establecerán amistad con compañeros y compañeras de diversas edades y lugares de origen, serán acompañados por docentes que les entregarán lo mejor de sí, contarán con la asistencia del cuerpo no docente de la Facultad y tendrán al alcance de sus manos, corazones y mentes, el universo lleno de posibilidades de la vida universitaria. Entre tanto, vuestros espíritus comenzarán a sumergirse en algunos de los logros más notables de la humanidad, la dilucidación de los secretos de la naturaleza. Una aventura cuyos antecedentes se remontan a tiempos más antiguos que cualquier nación del continente que hoy habitamos, y cuya proyección hacia el futuro llega más allá de lo que cualquier hombre o mujer pueda imaginar.

En el siglo XVII, el gran astrónomo, físico, matemático y filósofo italiano Galileo Galilei dijo que "las matemáticas son el alfabeto con el que Dios ha escrito el universo". Más allá de la veracidad, en toda su extensión, de esta afirmación creo que es una muy precisa aproximación al poder que posee el conocimiento en el que se adentrarán en estas aulas y pasillos, uno de cuyos eslabones es el estudio de las matemáticas, tema específico de este material de estudio. No importa si en el futuro seguirán una vida académica, como docentes o investigadores, o preferirán el ejercicio profesional en el sector público o privado; los saberes y las destrezas que adquieran en este tiempo que ahora inicia, les permitirán "leer", y el que lee tarde o temprano "escribe", algunos de los maravillosos secretos del mundo que nos rodea.

Pero elegir el estudio de la ciencia no es, o no debe ser, una mera opción para la satisfacción personal o familiar para conseguir un lugar en la sociedad. La ciencia sólo encuentra su justificación última en la mejora de la condición humana en todas sus múltiples y diversas dimensiones, y el primer espacio humano al que nos debemos es el de la propia sociedad a la que pertenecemos. Uds. no ingresan sólo a la Universidad, están ingresando a una Universidad pública y gratuita, en la cual, para que puedan estudiar, el conjunto de nuestro pueblo está realizando un esfuerzo sostenido, y a veces duro, para brindarles esta oportunidad extraordinaria.

Vuestros estudios son posibles incluso por el sacrificio de quienes nunca podrán acceder a ellos por las adversas condiciones de vida que les ha tocado en suerte. Cada vez que el más pobre de los argentinos compra un pedazo de pan, el Impuesto al Valor Agregado que abona vendrá, en una parte importante, a sostener vuestro privilegio de estudiar y gozar de la Universidad. La deuda y la responsabilidad que ello deposita sobre Uds. no se cuenta en dinero ni en las cifras de un préstamo o una cuota, se mide en la magnitud del compromiso que deberán honrar para que en el futuro todo lo que recibieron vuelva acrecentado a la sociedad que lo hizo posible.

Dra. Ing. Mirta Iriondo
Decana FAMAF

PRÓLOGO

Ingresando a FAMAF-Material de Estudio, es un texto preparado para quienes ingresan a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. El mismo tiene por objetivo acercar a los ingresantes aquellos contenidos considerados fundamentales para iniciar el trayecto en las carreras que ofrece la facultad.

El material está conformado por cinco capítulos y cada uno de ellos ha sido escrito por docentes o miembros del Centro de Estudiantes de la FAMAF. La producción de estos capítulos se realizó en base a materiales que formaban parte de los Cuadernillos destinado a los ingresantes a las carreras de grado que se dictan en la facultad. Tales materiales fueron modificándose en estos dos últimos años a partir de las sugerencias de docentes que dictaron el Curso Nivelación en ese tiempo, de los aportes de algunos estudiantes, de las dificultades observadas, de las breves encuestas realizadas, del análisis de los contenidos de los Diseños Curriculares vigentes y de los conocimientos o procedimientos reconocidos como básicos para el cursado de las materias de primer año.

Durante estos dos años se fueron recopilando de manera sistemática fortalezas y debilidades en cuanto a contenidos, presentación escrita o visual del material, tiempos requeridos para la presentación en clases de los mismos como así también la calidad, tipo y cantidad de ejercicios a presentar.

Este libro recoge todo ese trabajo con el fin de mejorar las posibilidades de quienes transitan el Curso de Nivelación. El hecho de conformar con los materiales creados un libro significó un esfuerzo especial para que cada capítulo no pierda identidad pero a la vez conformen una unidad.

Los contenidos que se seleccionaron para incluir en este libro se organizan en cinco capítulos los que se secuencian tomando como referencia aquellos contenidos reconocidos como familiares para los estudiantes para luego ir aproximándose a aquellos menos familiares. De manera similar los aspectos simbólicos y formales van creciendo en complejidad y profundidad.

El primer capítulo de este texto corresponde a **Introducción a la Vida Universitaria**. Este capítulo busca que el ingresante se reconozca como miembro activo de la Universidad Nacional de Córdoba. En el mismo se ofrecen discusiones acerca del sentido de ser estudiante en una universidad pública, sus derechos como tales y las ideas de un conjunto de normativas básicas que hacen al funcionamiento de la universidad y el medio para ejercer el derecho a la educación.

El segundo capítulo titulado **Cálculos Algebraico** tiene por finalidad ofrecer herramientas elementales del cálculo algebraico inicial con un recorrido por números y sus operaciones para luego avanzar sobre expresiones algebraicas y a partir de ellas iniciar el trabajo simbólico y la introducción a entidades algebraicas como son las ecuaciones o los polinomios. Lo tratado en este capítulo guarda vínculos con todas las materias de primer año y sienta las bases de algunas ideas necesarias para Álgebra I.

El tercer capítulo **Lógica y Teoría de Conjuntos** utiliza y generaliza ideas tratadas en el capítulo anterior y da bases para los dos capítulos siguientes. En este capítulo, se desarrollan conocimientos reconocidos como básicos para trabajar principalmente en Matemática o en Ciencias de la Computación. Se desarrollan las ideas de proposiciones y conectivos lógicos y se avanza sobre nociones básicas de conjuntos.

El cuarto y quinto capítulo se focalizan en herramientas próximas al trabajo analítico y toma como ideas centrales al conjunto de los números reales y al concepto de función. El cuarto capítulo **Funciones** presenta y define las cuestiones fundamentales referidas a dicha noción, discute acerca de la construcción de gráficos e ilustra con imágenes las ideas presentadas. Avanza también en el estudio de funciones lineales, cuadráticas y definidas por partes. En el quinto capítulo **Trigonometría** se particulariza en el análisis de las funciones trigonométricas y algunas aplicaciones de las mismas a contextos geométricos u otros. Los conocimientos trabajados en estos capítulos son de gran importancia para todas las materias de primer año pero muy especialmente para Análisis Matemático.

Te invitamos a transitar por este texto y, en el trayecto, ir dejando tus huellas sobre las hojas destacando con marcadores las ideas reconocidas como principales, escribiendo notas sobre los márgenes , resolviendo ejercicios, haciendo diagramas o figuras para pensar sobre lo realizado, colocando comentarios sobre lo que entiendes, o destacando aquello que te produce especial dificultad.

Al final del trayecto, con todas tus marcas, este texto será tu propio texto.

Dra. Cristina Esteley
Coordinadora Académica de Edición

Índice general

PALABRAS DE BIENVENIDA III

PRÓLOGO V

1. VIDA UNIVERSITARIA 1

1.1. Ser estudiante en la UNC 1

La UNC te abre sus puertas 1

Estudiantes: ciudadanos de la Universidad pública 1

1.2. Derechos de los estudiantes 2

En la UNC 2

En la facultad 5

1.3. Participación estudiantil 6

Órganos Institucionales 6

Órganos gremiales 9

1.4. Textos para reflexionar 12

La relevancia de la Universidad pública 12

La ciencia y la tecnología como fuerzas destransnacionalizadoras 14

Jóvenes de ayer, jóvenes de hoy 16

La Universidad y el desafío de la inclusión de género 18

2. CÁLCULO ALGEBRAICO 27

2.1. Los conjuntos numéricos y sus operaciones 27

Introducción 27

Números naturales 28

Números enteros 29

Números racionales 31

Números irracionales 35

Números reales 36

Números complejos 39

Ejercicios 40

2.2. Expresiones algebraicas 43

Introducción 43

Generalización de fórmulas y propiedades numéricas 44

Incógnitas y ecuaciones 44

Polinomios 48

Ejercicios 54

2.3. Ecuaciones lineales 55

Ecuaciones lineales con una incógnita 55

Sistemas de ecuaciones lineales 57

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 59

Sistemas compatibles e incompatibles 61

Ejercicios 62

2.4. Resolución de ecuaciones de segundo grado 64

Introducción 64

El discriminante 66

Clasificación de las raíces 67

Propiedades de las raíces 68

Resolución de ecuaciones de grado par 70

Ejercicios 71

2.5. Expresiones algebraicas fraccionarias 72

Expresiones fraccionarias 72

Simplificación 72

Ecuaciones con expresiones fraccionarias 75

Ejercicios 79

3. LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS 83

3.1. Elementos de lógica 83
Introducción 83
Proposiciones 84
Conectivos lógicos 84
Negación 85
Conjunción 86
Disyunción 86
Propiedades de la conjunción y la disyunción 87
Ejercicios 89
3.2. Otros conectivos 89
Condicional o implicación 89
La implicación y el razonamiento deductivo 90
Recíproca y contrarrecíproca 91
Bicondicional 91
Reglas de precedencia para los conectivos lógicos 92
Ejercicios 93
3.3. Teoría básica de conjuntos 94
Introducción 94
Conjuntos y pertenencia 94
Subconjuntos 96
El conjunto universal 100
Diagramas de Venn 100
Ejercicios 101
3.4. Operaciones entre conjuntos 101
Introducción 101
Unión de conjuntos 102
Intersección de conjuntos 103

Complemento de un conjunto . . . 104
Diferencia de conjuntos . . . 105
Propiedades entre conjuntos . . . 106
Relación con la lógica proposicional . . . 108
Ejercicios . . . 108
3.5. Cuantificadores . . . 110
Funciones poposicionales . . . 110
Cuantificadores . . . 110
Negación de proposiciones cuantificadas . . . 113
Funciones proposicionales de varias variables . . . 113
Renombre de variables . . . 113
Ejercicios . . . 114
3.6. Producto cartesiano . . . 115
Pares ordenados y producto cartesiano . . . 115
Representación en ejes cartesianos . . . 116
Ejercicios . . . 118

4. FUNCIONES 121

4.1. Conceptos generales . . . 121
Introducción . . . 121
Definición y propiedades . . . 122
Gráficos de funciones . . . 124
Desplazamientos y reflexiones . . . 131
4.2. Funciones lineales . . . 136
Definición y propiedades . . . 136
Gráfico de funciones lineales . . . 137
4.3. Funciones cuadráticas . . . 142
Definición y propiedades . . . 142
Gráfico de funciones cuadráticas . . . 142
4.4. Funciones definidas por partes . . . 147

Definición y propiedades . . . 147
Ejercicios . . . 148

5. TRIGONOMETRÍA **155**

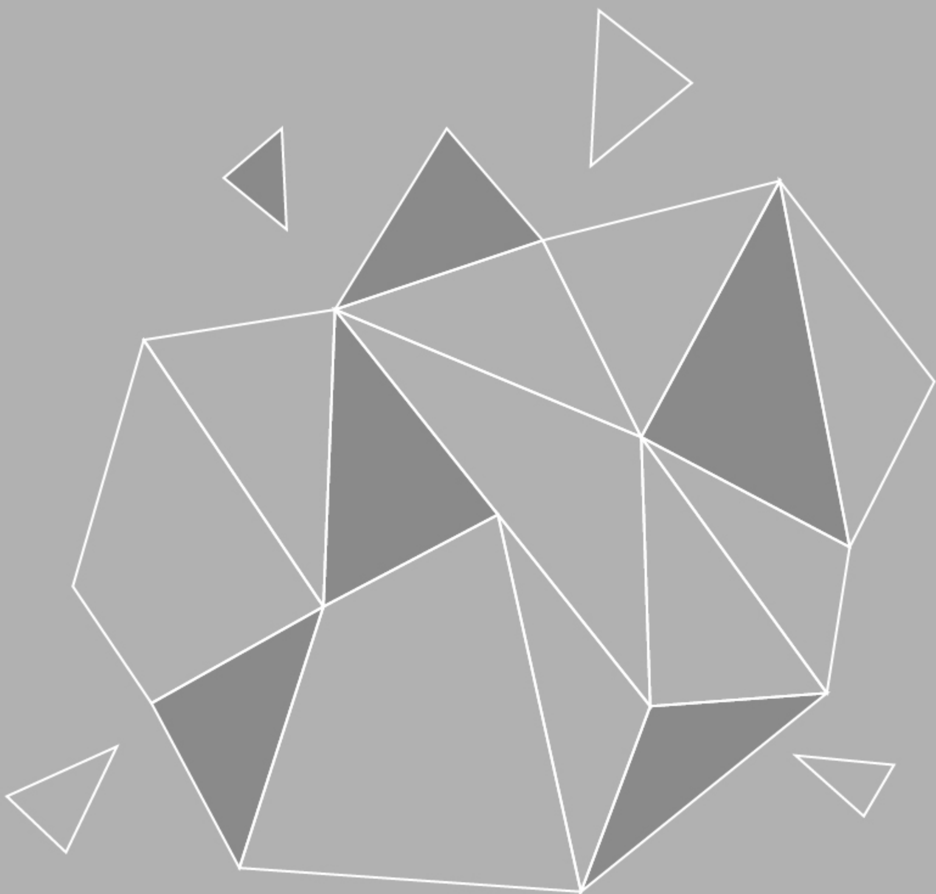
5.1. Funciones trigonométricas . . . 156
Introducción . . . 156
Distancia en el plano y circunferencia . . . 156
La circunferencia unitaria o trigonométrica . . . 160
5.2. Las funciones seno y coseno . . . 163
Definición y propiedades . . . 163
Gráficos e identidades trigonométricas . . . 165
Amplitud y período . . . 167
5.3. La función tangente . . . 168
Definición y propiedades . . . 168
Funciones secante, cosecante y cotangente . . . 171
5.4. Aplicación sobre triángulos rectángulos . . . 173
Triángulos rectángulos y razones trigonométricas . . . 173
Problemas de aplicación . . . 177
5.5. Apéndice de fórmulas . . . 179
Fórmula para $\cos(t-s)$ . . . 179
Fórmula para $\operatorname{sen}(t+s)$ . . . 180
Ejercicios . . . 181

hoja en blanco sin numerar

1

Introducción a la vida Universitaria

Lourdes Aguiar Cau
Nicolás Jares
Juan Manuel Scavuzzo



Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

1 | VIDA UNIVERSITARIA

SECCIÓN 1.1

Ser estudiante en la UNC

§ La UNC te abre sus puertas

Desde el Centro de Estudiantes y la Secretaría de Asuntos Estudiantiles de la FAMAF queremos darles la bienvenida a la Universidad Pública. Sabemos todo lo que significa este momento para ustedes, momento de decisiones y proyectos, personas que conocer, lugares que recorrer y ocupar, caminos por construir. Todo eso nuevo toma distintas formas al unirse con lo que cada uno y cada una de ustedes trae consigo, sus experiencias, sus aprendizajes previos, sus historias y expectativas.

Para nosotros es también un momento importante: es un desafío siempre renovado hacer que cada nuevo estudiante se sienta bienvenido a esta Universidad, se sienta protagonista de esta institución de la que a partir de ahora, forma parte.

Ser estudiante de nuestra UNC, para nosotros, no es sólo venir a cursar y rendir. Apostamos a que el paso por la Universidad nos permita formarnos como profesionales comprometidos con la realidad social y como ciudadanos activos en la transformación de los espacios que transitamos.

Con esa concepción de estudiante en mente es que pensamos este material como una herramienta para favorecer la construcción de ciudadanía universitaria.

§ Estudiantes: ciudadanos de la Universidad pública

Los estudiantes de la UNC gozan de ciertos derechos y obligaciones, como cualquier miembro de casi cualquier grupo humano. Pero además, en la UNC, los estudiantes forman parte de la toma de decisiones de la Universidad en prácticamente todos los niveles donde estas decisiones son discutidas. Este trío de toma de decisiones, derechos y obligaciones, convierte a los estudiantes en plenos sujetos de derechos dentro de la comunidad universitaria, en *ciudadanos de la Universidad Pública*. Y justamente el ejercicio de esa toma de decisiones, derechos y obligaciones es lo que llamamos *ciudadanía universitaria*.

Para que este texto sirva como herramienta para la construcción de dicha ciudadanía decidimos estructurarlo en tres grandes secciones. En la primera sección vamos a desarrollar una breve historia de esos derechos estudiantiles, enfatizando cómo fueron conquistados para luego delimitar cuáles son los principales derechos a nivel UNC y a nivel FAMAF.

En la segunda sección se explicarán las diferentes instancias de participación estudiantil que existen en la UNC y la FAMAF, instancias tanto institucionales como gremiales.

Por último, en la tercera sección se presentan algunos artículos de actualidad seleccionados con la intención de invitar a reflexionar sobre diferentes temáticas relacionadas con los contenidos de este texto.

Históricamente, los estudiantes han tenido una gran incidencia a la hora de tomar las decisiones que atañen a la Universidad en general (y a las distintas facultades en particular) y que han dado lugar a la ampliación de derechos. Esto se logró gracias a la participación estudiantil tanto en los órganos institucionales como en los gremiales. Es por ello que conocer sus derechos, su historia, ser conscientes y entender el funcionamiento de los espacios de participación es fundamental para llegar a ser ciudadanos integrales de la Universidad. Esperamos poder abonar a ese objetivo con este texto.

SECCIÓN 1.2

Derechos de los estudiantes

Todos los derechos que los estudiantes tienen como ciudadanos no existieron siempre, sino que existen hoy como fruto de las luchas y la participación de muchas personas y grupos a lo largo de la historia. En el mismo sentido, el cumplimiento y ejercicio de esos derechos como estudiantes dependen, en primer lugar, de conocerlos y exigir que sean respetados. Por eso, es de suma importancia compartir toda la información al respecto, ser protagonistas y organizarse para hacerlos valer y conquistar otros nuevos.

El acceso a la educación superior es un derecho de todos y una responsabilidad del Estado. Ese derecho contiene muchos otros que deben ser garantizados a los estudiantes como ciudadanos de esta Universidad, por ejemplo el derecho a una educación gratuita y de calidad, el derecho a la salud, el derecho a la información, entre otros.

Existen múltiples espacios para conocer más al respecto, o a donde acudir si algún derecho está siendo vulnerado: el Centro de Estudiantes, la Secretariía de Asuntos Estudiantiles de la Facultad, la Secretaría de Asuntos Estudiantiles de la Universidad, la Defensoría de la Comunidad Universitaria, los representantes estudiantiles en los órganos institucionales como los consejos de la facultad, entre otros.

A lo largo de esta sección avanzaremos y profundizaremos sobre distintos derechos que hoy en día gozan los estudiantes de la UNC. Para organizar las ideas, distinguiremos los derechos que son comunes para todos los estudiantes de la Universidad de los que son específicos para los estudiantes de FAMAF.

§ En la UNC

La Declaración de Derechos Estudiantiles aprobada por la UNC en 2009 reconoce tres categorías de derechos para todos sus estudiantes. Los derechos académicos, vinculados al proceso de cursado de una carrera universitaria y a la formación. Los derechos sociales, vinculados a la calidad de vida y al acceso a la información y la cultura. Y los derechos políticos, vinculados a la participación de los estudiantes en los órganos de co-gobierno como instancias democráticas de toma de decisiones a nivel institucional. A continuación se explicitan detalles relativos a las 3 categorías mencionadas.

Derechos académicos

Si bien los derechos académicos están establecidos fundamentalmente en el ”Régimen de Enseñanza” de cada Facultad o unidad académica, la Declaración contempla derechos generales que atañen a los estudiantes de toda la universidad. Algunos de ellos son:

Derecho al acceso al cursado de una carrera universitaria en condiciones de equidad.

Para el cumplimiento de este derecho, la Universidad y el Estado deben garantizar la atención a las dificultades socioeconómicas, culturales y de otro tipo que los estudiantes puedan tener. Para llevarlo a cabo es que existen los programas de becas, apoyo psicológico, régimen especial para estudiantes trabajadores, con hijos, etc.

Derecho al conocer el programa de las materias.

El programa de cada materia es un plan de trabajo que cada docente diseña para el dictado de esa asignatura. El programa incluye los objetivos (lo que se espera lograr al final del cursado), los contenidos que se desarrollarán, la bibliografía obligatoria y complementaria, las modalidades de evaluación, entre otros. Al momento del examen, los contenidos que se evalúan son aquellos que figuran en el programa, que debe ser presentado cuando la materia empieza a dictarse.

Derecho a ver el examen una vez corregido.

Las instancias de examen, sean parciales o finales, deben entenderse como una herramienta más del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por eso, una vez rendido, los estudiantes tienen derecho a ver el examen y a recibir una devolución de la evaluación realizada por el docente que los haya corregido.

Derecho de firmar el acta de conformidad de un exámen sólo una vez que estemos de acuerdo.

Al rendir un examen final, la nota queda plasmada en un Acta de Examen. La misma, es un documento de notificación, y por lo tanto se debe firmar una vez que la nota obtenida en el examen esté escrita en la misma.

Derecho a que no se superpongan exámenes de materias de un mismo semestre.

La facultad debe garantizar que no se superpongan exámenes de aquellas materias que corresponden a un mismo semestre de un mismo año, según el Plan de Estudios de cada carrera.

Derecho a recuperar un examen parcial o práctico.

Los estudiantes tienen derecho a instancias de recuperación de parciales y/o trabajos prácticos. Dichas instancias deben ser garantizadas a todos los estudiantes, ya sea por la ausencia (justificada o no) o reprobación de uno de los parciales y/o trabajos prácticos evaluados.

Derecho a gozar de una licencia estudiantil en caso que corresponda.

Las licencias estudiantiles permiten a las y los estudiantes suspender por un período de tiempo su actuación académica, manteniendo las condiciones obtenidas hasta el momento de la solicitud de la licencia. Tienen derecho a solicitar la licencia en caso de embarazo, enfermedad, accidente, participación en eventos en representación de la Universidad o por motivos laborales.

Derecho a exámenes públicos, con la posibilidad de solicitar mesa especial o un veedor estudiantil con voz en los tribunales

En caso de conflicto y/o arbitrariedad es posible solicitar que un determinado docente no forme parte del tribunal (recusación) y/o solicitar que un estudiante de la misma carrera que ya haya aprobado esa materia esté presente durante todo el proceso de evaluación.

Derecho a participar de forma activa en los procesos de selección y evaluación de sus docentes

Esto incluye desde las encuestas de evaluación docente, hasta la participación de un estudiante con voz en los tribunales de concursos y con voz y voto en los tribunales de evaluación docente en el marco de la carrera docente.

Derechos sociales

Los derechos sociales se desprenden de derechos que nuestra Constitución Nacional y distintos Pactos Internacionales declaran como responsabilidad del Estado. En ese sentido, la Universidad Nacional de Córdoba los reconoce y se compromete a desarrollar actividades tendientes a garantizarlos. Estos derechos incluyen:

Derecho a disponer de una alimentación adecuada.

Se refiere al acceso a una alimentación saludable y equilibrada, acorde a las características y necesidades de la población estudiantil. Como resultado del reconocimiento de este derecho existe en la UNC un Comedor Universitario con un menú a un precio accesible.

Derecho a acceder a un sistema básico de salud.

Incluye la promoción de hábitos de vida saludables, la prevención de enfermedades, consultorio básico de diferentes especialidades médicas y la posibilidad de derivación ante situaciones de mayor complejidad.

Derecho al reconocimiento de la identidad y expresividad de género elegida y autopercibida por cada estudiante.

Este derecho había sido reconocido por la UNC con anterioridad a la aprobación de la Ley de Identidad de Género. En la actualidad este derecho es reconocido en todo el país.

Derecho al acceso a espacios deportivos, culturales y de recreación.

El objetivo de estos espacios es que faciliten el encuentro entre estudiantes, sirvan de esparcimiento, hábito saludable y complemento a la formación académica.

Derechos políticos

Son derechos consagrados para garantizar el pleno desempeño de los estudiantes como integrantes de la Universidad en el sentido de poder elegir y ser elegidos.

Derecho a postularse como representantes de su claustro y elegir sus representantes estudiantiles en los órganos de co-gobierno

Este derecho se refiere a la participación en los órganos institucionales en los que se toman las decisiones sobre la mayoría de los diferentes aspectos de la Universidad y la Facultad: reglamentos, concursos docentes, planes de estudio, becas, etc.

Derecho a organizarse, ser elegido y elegir en el seno de los órganos gremiales propios de su claustro, participando libremente de agrupaciones, comisiones de trabajo, etc.

Se vincula con el reconocimiento de la existencia de los Centros de Estudiantes, la Federación Universitaria de Córdoba, y toda otra forma de participación estudiantil que sea independiente de los órganos de gobierno de la UNC y sirva como representación de los intereses de los estudiantes, la defensa de sus derechos, la organización de actividades extra-curriculares, etc.

§ En la facultad

La declaración de derechos estudiantiles de la UNC no es un reglamento propiamente dicho, sino sólo una enunciación de los derechos reconocidos por la Universidad. Es necesario que esos derechos sean luego plasmados en un reglamento detallado en cada facultad para que pueda garantizarse su plena vigencia. Por ejemplo, el Régimen de Alumnos de FAMAF establece las condiciones de cursado y evaluación de las materias en la Facultad. Es en esta reglamentación que los derechos estudiantiles vinculados a nuestro cursado son reglamentados.

El régimen completo se encuentra disponible en la página web de la facultad, sin embargo a continuación presentamos algunos derechos mencionados en el mismo.

Derechos relacionados con el período del cursado de materias

Derecho a conocer las condiciones para regularizar y/o promocionar las materias.

Al comienzo del dictado de cada materia, el docente encargado establecerá los requisitos para que un alumno pueda obtener la condición de alumno regular, promocional o libre. Tales requisitos son establecidos en el programa de cada materia y no pueden ser modificados durante el cuatrimestre.

Cantidades mínimas/máximas de evaluaciones parciales y derecho a recuperatorios.

En aquellas materias en las cuales se requiera la aprobación de evaluaciones parciales para acceder a la condición de alumno regular o promocional, se deberán tomar al menos dos parciales y no más de tres. Además el alumno tendrá derecho a recuperar al menos uno de ellos.

Derecho a recuperar los contenidos correspondiente al parcial que se está recuperando.

En los recuperatorios, los contenidos que se evalúan deberán coincidir con los contenidos y los tipos de tareas que se hayan planificado para evaluar en el parcial al cual corresponde el recuperatorio.

Derecho a que no se superpongan las evaluaciones parciales.

Las evaluaciones parciales de las materias de un mismo cuatrimestre de un mismo año de una misma carrera deberán tener una separación mínima de tres días entre ellas.

Derecho a ser evaluado sólo en los días y horarios de clase

Las evaluaciones parciales y sus recuperatorios deberán tomarse durante el período de clases y dentro de los días y horarios establecidos para la materia.

Derecho a cursar como alumno libre.

Los estudiantes que cursen como alumnos libres tendrán derecho a rendir las evaluaciones parciales, trabajos prácticos y de laboratorio y demás actividades que se establezcan en el cursado, pero no podrán adquirir la condición de alumno regular ni promocional. Están exceptuadas de cursarse como libre las materias optativas, especialidades y las asignaturas Metodología y Práctica de la Enseñanza,

Derechos relacionados con el período de exámenes finales

Derecho a inscripción hasta 72hs hábiles antes de un exámen.

Para inscribirte a rendir un examen, tenés tiempo inclusive hasta el tercer día hábil antes de la fecha del mismo.

Derecho a solicitar una mesa especial o un veedor estudiantil en exámenes.

Los exámenes serán públicos, y el alumno que rinda podrá solicitar mesa especial o un veedor estudiantil con voz en los tribunales cuando existan situaciones de conflicto y/o arbitrariedad.

Derecho a rendir con el programa vigente al momento de regularizar.

Los alumnos inscriptos a examen en condición de regulares tendrán derecho a ser examinados con el programa vigente de la asignatura al momento de obtener su regularidad. Deberán dejar constancia de dicha decisión en el Despacho de Alumnos al momento de inscribirse al examen.

Derecho a conocer los criterios de corrección y ver el examen corregido.

El tribunal de examen deberá establecer un horario en el cual los alumnos podrán acceder a sus evaluaciones corregidas y conocer los criterios de corrección.

La firma del acta de examen será una conformidad de la nota.

De cada sesión de exámenes se labrará un Acta de Examen. Las firmas de los alumnos en el acta se corresponderá con la notificación de la nota y no como un registro de asistencia.

Pedir mesa especial en Mayo y Septiembre al adeudar dos o menos materias.

Todo alumno que adeude como máximo dos materias para egresar, tendrá derecho a solicitar una fecha por cada materia en la época de exámenes febrero-marzo hasta el 31 de marzo, como así también en los turnos especiales de exámenes de mayo y septiembre.

SECCIÓN 1.3

Participación estudiantil

La consagración y defensa de los derechos enunciados hasta ahora, así como diferentes reformas y actualizaciones sobre los más diversos asuntos vinculados con las actividades estudinatiles en la UNC y la FAMAF han sido el resultado de iniciativas propuestas por los estudiantes que participan en los distintos órganos de gobierno y espacios de representación de dichas instituciones.

A lo largo de esta sección se nombrarán y describirán brevemente los ámbitos más relevantes en los que hay participación estudiantil en la Universidad y la Facultad

§ Órganos institucionales

En primer lugar se abordarán los ámbitos institucionales, o de gobierno. En ellos hay representación de los cuatro claustros de la Universidad: Estudiantes, Docentes, Nodocentes y Graduados.

En cada uno de esos órganos se toman decisiones necesarias para el funcionamiento de la Universidad y la Facultad, y que afectan a todos los miembros de la comunidad universitaria.

A continuación los describiremos respetando un orden jerárquico:

Órganos que implican a toda la UNC

La existencia de la Asamblea Universitaria y el Consejo Superior es una consecuencia directa del Estatuto de la UNC, que los crea y reglamenta. Aquí se mencionan los aspectos más relevantes pero, para una descripción completa, es posible consultar el Estatuto de la UNC en la página web de la misma.

Asamblea Universitaria

La Asamblea Universitaria es el máximo órgano de toma de decisiones de la Universidad.

La Asamblea está conformada por todos los miembros de los Consejos Directivos de las distintas Facultades de la Universidad. La preside el Sr Rector, quien ocupe su lugar según el Estatuto de la UNC, o quien designe la Asamblea en caso de ausencia o acefalía. Algunas atribuciones de la Asamblea Universitaria son:

- Dictar y modificar los Estatutos de esta Universidad.
- Separar al Rector y al Vicerrector en los casos previstos por el Estatuto de la UNC.
- Decidir la creación de nuevas facultades.
- Tomar a su cargo el gobierno de la Universidad en caso de conflicto grave o insoluble.

Consejo Superior

El Consejo Superior es el siguiente órgano de máxima autoridad de la Universidad luego de la Asamblea Universitaria. El referido consejo está compuesto por el Rector, los Decanos de las 15 Facultades, 15 delegados por el claustro docente a razón de 1 por Facultad, 10 delegados por los estudiantes, 3 delegados por los egresados, 2 delegados por los nodocentes, 1 representante del Colegio Nacional de Monserrat y 1 representante de la Escuela Superior de Comercio ”Manuel Belgrano”. Los representantes por los establecimientos preuniversitarios, antes mencionados son sus respectivos Directores.

Los miembros del Consejo Superior se llaman consiliarios. Los consiliarios docentes son elegidos por los docentes de su respectiva Facultad mientras que los delegados de los restantes claustros son elegidos en distrito único. Los consiliarios estudiantiles tienen mandatos de 1 año y los de los restantes claustros tienen mandatos de 2 años. Todos son elegidos por voto secreto y directo y pueden ser reelectos.

Los representantes no podrán ser al mismo tiempo consiliarios y consejeros de una Facultad.

Algunas atribuciones del Consejo Superior son:

- Interpretar el Estatuto y ejercer toda atribución que no esté explícitamente reservada a la Asamblea, al Rector o a las Facultades.
- Convocar a Asamblea Universitaria.
- Dictar ordenanzas y reglamentaciones acorde a los fines de la UNC.
- Aprobar, modificar y reajustar el presupuesto anual de la UNC.
- Administrar el patrimonio de la UNC.
- Aprobar los planes de estudio de las carreras de la UNC.
- Velar por la salud física y moral de los estudiantes.
- Designar, remover y conceder licencia a los profesores titulares, a propuesta del Consejo Directivo de la respectiva Facultad.
- Crear institutos de investigación, premios recompensa, becas de perfeccionamiento e intercambio con otras universidades e institutos para estimular las vocaciones y el incremento de la producción científica y cultural.

- Proponer a la Asamblea la creación de nuevas Facultades y/o la modificación del Estatuto.
- Disponer número y funciones de las Secretarías del Rectorado y la modalidad de su participación permanente en las Comisiones del Consejo Superior.
- Fijar aranceles, derechos o tasas sobre los servicios que presente la Universidad.
- Dictar ordenanzas comunes atenientes al orden, disciplina y sanciones para miembros de todos los claustros.

FAMAF

En el caso de la FAMAF, sólo el Consejo Directivo es creado por el Estatuto de la UNC. Los demás Consejos y Comisiones son creados por el Consejo Directivo. Cada uno cuenta con sus propios reglamentos, funciones y atribuciones.

Consejo Directivo

El Consejo Directivo es el máximo órgano de gobierno dentro de la Facultad. Este consejo está conformado por 9 representantes docentes, compuestos por 3 Profesores Titulares y/o Asociados, 3 Profesores Adjuntos y 3 Profesores Auxiliares, 6 representantes estudiantiles, 2 graduados y 1 No docente.

Los miembros del Consejo Directivo se llaman consejeros. Los consejeros estudiantiles tienen mandatos de 1 año y los de los restantes claustros tienen mandatos de 2 años. Todos son elegidos por voto secreto y directo de sus pares y pueden ser reelectos.

Para ser consejero estudiantil es necesario tener aprobado por lo menos 1/3 del número de años de la carrera o un tercio 1/3 del número total de materias establecidas en el plan de estudio, indistintamente.

Algunas atribuciones del Consejo Directivo:

- Suspender y remover al Decano y aprobar o suspender las medidas tomadas por el mismo, en los casos previstos en el Estatuto.
- Crear nuevas escuelas y proponer la organización de departamentos de enseñanza.
- Fijar las condiciones de admisibilidad y promoción de los alumnos.
- Someter al Consejo Superior las reformas de los planes de Estudio.
- Aprobar los programas de las materias de acuerdo a los planes de estudio y a las condiciones de cursado de los alumnos.
- Proponer al Consejo Superior el nombramiento de profesores titulares.
- Nombrar, con los mismos requisitos de los profesores titulares, a los profesores adjuntos.
- Llamar a concursos docentes auxiliares.
- Promover la Extensión Universitaria con el sentido social que exige el progreso de la Nación.
- Presentar al Consejo Superior proyecto de presupuesto y solicitar modificaciones o reajustes del mismo.
- Decidir sobre el cumplimiento de los deberes de los profesores y alumnos y ejercer la jurisdicción policial y disciplinaria dentro de sus locales, pudiendo sancionar las faltas cometidas, conforme a estos Estatutos y las reglamentaciones que dicte el Consejo Superior.

Consejo de Grado y Comisiones Asesoras

En nuestra facultad existen varias Comisiones y Consejos auxiliares que ayudan al Consejo Directivo a tomar algunas decisiones. Los más relevantes para la vida estudiantil son el Consejo de Grado y las Comisiones Asesoras de Área. También existen el Consejo de Posgrado, la Comisión Asesora de Becas, la Comisión de Equivalencias, entre otros.

- *Consejo de Grado*

  Está compuesto por los Secretarios Académico y de Asuntos Estudiantiles, 6 docentes (uno por carrera) y dos estudiantes.

  En el consejo se revisan los programas, sistemas de evaluación y actividades propuestas de cada asignatura de grado que se dicta en la facultad, sugiriendo modificaciones de ser necesario. También realizan un seguimiento e informan sobre el desempeño docente de grado en base a los mecanismos de control de gestión docente (encuestas estudiantiles, por ejemplo).

  El consejo también elabora cada cuatrimestre la distribución docente en coordinación con las Comisiones Asesoras de cada sección y la eleva al Consejo Directivo para su aprobación.

- *Comisiones Asesoras*

  Actualmente son 5: Matemática, Astronomía, Computación, Física y Enseñanza. En cada una hay un coordinador, una cantidad variable de docentes según el Área y un estudiante.

  En estas comisiones se realiza la distribución docente de cada sección para luego ser puesta a consideración del Consejo de Grado. También son consultadas sobre temas específicos de cada área, como correlatividades dentro de la carrera, planes de estudio, materias optativas, etc.

§ Órganos gremiales

A continuación se mencionarán los ámbitos de participación gremiales. Estos ámbitos tiene tres grandes diferencias con los institucionales.

La primera es que están conformadas únicamente por estudiantes, no tienen participación de ninguno de los otros tres claustros de la Universidad.

La segunda, y quizás más importante, es que su existencia no deriva del ninguna Ley (como la UNC), estatuto (como la Asamblea o los Consejos Superior y Directivo) ni ordenanzas o resoluciones (como los consejos y comisiones asesoras de la facultad). La existencia de estos órganos es resultado de la organización de los mismos estudiantes. Como consecuencia de esa organización es que muchos de estos órganos son luego *reconocidos* por la Institución, pero jamás dependen de la misma, su existencia es independiente.

La tercera diferencia es consecuencia de la segunda, y son sus atribuciones o funciones. Ellas están íntimamente relacionadas con lo que haya motivado su conformación. Una de las más importantes suele ser contar con un órgano que nuclee y represente a todos los estudiantes y que permita bregar por la defensa de sus intereses.

UNC: Federación Universitaria de Córdoba (FUC)

Si bien comenzamos con el nivel UNC, no existe jerarquía necesaria entre la FUC y cada Centro de Estudiantes. La participación de un Centro de Estudiantes dentro de la FUC es opcional.

La FUC es el órgano que nuclea y representa a los Centros de Estudiantes de la Universidad Nacional de Córdoba.

Sus principios y objetivos, extraídos de su estatuto, son:

- Impulsar la organización de los estudiantes de la Universidad Nacional de Córdoba a través de sus Centros de Estudiantes para forjar un movimiento estudiantil, democrático, unitario y participativo que bregue junto a los actores democráticos populares contra la oligarquía, el imperialismo y todo intento golpista.
- Fomentar la participación del alumnado en las distintas instancias del movimiento estudiantil y el cogobierno estudiantil de la UNC
- Inspirarse en las mejores tradiciones nacionales y de la propia FUC como la Reforma Universitaria de 1918 y del Cordobazo de 1969 a fin de contribuir a formar los profesionales que aseguren un proceso de profundización de la democracia con sentido de liberación nacional y social.
- Bregar por la conformación de la UNC en una universidad democrática, científica, nacional y popular elevando su capacidad de docencia, investigación y creación y poniéndola al servicio de la independencia económica, cultural, científica y tecnológica de nuestro pueblo.
- Impulsar, organizar y coordinar la lucha del movimiento estudiantil de la UNC por sus reivindicaciones gremiales, políticas y contra todo limitacionismo bajo cualquiera de sus aspectos.
- Coordinar el accionar del movimiento estudiantil de la UNC y promover el intercambio cultural con el de otras Regionales.
- Coordinar el accionar del movimiento estudiantil de la UNC con todos los miembros de la comunidad universitaria.
- Propender a la unidad obrero-estudiantil y de todos los sectores democráticos en función de los objetivos comunes.
- Comprometerse a luchar por y para la vigencia de los Derechos Humanos proclamados en la Declaración Universal de los Derechos del Hombre de 1948.
- Apoyar a todos los pueblos que luchan por su Liberación Nacional y en especial al pueblo Latinoamericano solidarizándonos con su movimiento estudiantil.

La FUC tiene tres órganos de toma de decisiones:

Congreso de Estudiantes

Está conformado por congresales designados en función de los resultados obtenidos en la última elección a Centro de Estudiantes. La cantidad de votos que hayan obtenido las organizaciones que se presentaron a dichas elecciones determina cuantos congresales les correponden. El congreso se reúne al menos una vez al año para elegir a las autoridades de la Junta Ejecutiva y decidir el rumbo general que tendrá la FUC durante el siguiente año. También puede modificar el estatuto de la FUC.

Junta Ejecutiva

Toma decisiones sobre las acciones que realizará la Federación durante el receso del Congreso, en función de lo decidido por éste, así como también sobre problemas no contemplados por el Congreso.

Junta Representativa

Está conformada por el presidente de la FUC y por los presidentes de todos los Centros de Estudiantes reconocidos por la Federación. Actúa como órgano de control de la Junta Ejecutiva. También decide sobre la afiliación o desafiliación de un Centro de Estudiantes a la Federación y sobre las posiciones públicas de la FUC.

FAMAF: centro de estudiantes (CEIMAF)

El CEIMAF está dirigido por una Comisión Directiva (CD), formada por el Presidente, el Secretario General y ocho (8) vocales.

Los miembros de la CD se designan por elección abierta a todos los estudiantes de FAMAF. Estos durarán en sus funciones un año calendario.

A su vez, existen comisiones que forman parte del Centro de Estudiantes, a cada una de ellas la coordina un vocal. Según el estatuto, la CD está obligada a conformar, como mínimo, las Comisiones de ”Cultura y Recreación”, ”Deportes”, ”Gremial”, ”Académica” y ”Prensa”.

Las funciones y objetivos del CEIMAF según su estatuto son:

En lo universitario

- Fomentar las relaciones y vínculos entre los estudiantes de la FAMAF, nucleando actividades orientadas a tal fin.
- Funcionar como centro de recepción de ideas e inquietudes y motor de las mismas.
- Facilitar a los estudiantes los medios necesarios para desenvolverse adecuadamente en sus estudios.
- Defender los derechos de los estudiantes ante la Universidad y la FAMAF, recurriendo a los medios que sean necesarios en la coyuntura que se presente.
- Colaborar con la comunidad de la FAMAF en la mejora del funcionamiento de esta institución, de acuerdo a las opiniones y necesidades del claustro estudiantil.
- Mantener relaciones con otras Universidades, Facultades y Centros de Estudiantes a fin de llevar adelante los objetivos establecidos en los incisos anteriores.

En lo cultural y recreativo

- Desarrollar tareas de recreación cultural y humanística, con el objetivo del enriquecimiento de la comunidad de estudiantes de la FAMAF.
- Implementar activamente una política de Ciencia y Técnica para el fortalecimiento de la conciencia nacional, y para la formación de profesiones solidarios y preocupados por el desarrollo de la sociedad.

En lo que respecta la extensión universitaria

- Fomentar actividades de extensión desde la formación profesional dada en la FAMAF, sin que ello derive exclusivamente en la venta de servicios calificados o profesionales, pero no excluyendo actividades que generen ingresos materiales.
- Llevar adelante proyectos de extensión conjuntos con la comunidad de la FAMAF, sin por ello violar el inciso anterior.

En lo social

- Llevar adelante tareas de inclusión social en la Universidad, de los sectores más desprotegidos, con la implementación de bolsas de trabajo y/o becas cuando sea posible.

- Facilitar y promover el ingreso a la universidad de manera igualitaria, para mantener el carácter de público de esta Universidad Nacional de Córdoba.
- En general, promover la concreción de un sistema social justo, participativo, democrático y solidario.

SECCIÓN 1.4

Textos para reflexionar

A continuación presentamos cuatro textos de actualidad. Los primero tres textos fueron extraídos de "El Manifiesto Liminar - Legado y debates contemporáneos", 2012. El cuarto fue una colaboración para la FAMAF de las autoras del mismo. Todos ellos han sido seleccionados con la intención de fomentar el debate y la reflexión acerca del vínculo que tiene la Universidad con la sociedad, como formadora de sujetos comprometidos.

Estos textos reflejan opiniones. No buscamos que sean tomados como *verdades absolutas*, sino que sean leídos críticamente y que cada uno de ustedes realice el ejercicio de decidir si están de acuerdo o no con las ideas que se exponen y porqué.

§ La relevancia de la Universidad pública

Por José Luis Coraggio [1]

La universidad es una institución importante siempre, pero particularmente en esta época. Estamos en transición hacia otras formas de organización económica y la universidad puede jugar un papel de mediadora entre los nuevos marcos de comprensión, las nuevas tecnologías y los procesos sociales de transformación. Por supuesto, las universidades tienen una responsabilidad principal en su ámbito inmediato, pero creo que no tienen que ser "locales", sino parte de un sistema nacional e internacional de producción y difusión de conocimiento comprometido con las transformaciones que se avecinan, para revertir la catástrofe neoliberal y avanzar a formas superiores de sociabilidad. Comprometerse con los procesos de cambio a favor de las mayorías significa ponerse del lado de las víctimas de este sistema, teniendo iniciativa, produciendo conocimientos pertinentes y relevantes desde esa perspectiva, relacionándose con la comunidad de manera que lo que se desarrolla no sea el mismo sistema que excluye. La práctica teórica crítica es por lo tanto fundamental. No se trata de criticar a un gobierno, sino al sistema que está excluyendo socialmente y rompiendo equilibrios fundamentales del ecosistema.

La universidad no puede verse como vanguardia de la sociedad. Tiene que estar en permanente diálogo con la comunidad, contribuir a abrir un espacio público, donde la diversidad de expresiones e intereses de la comunidad pueda expresarse. Porque un problema que tenemos es un déficit de democracia, una democracia

[1] Economista, formado en la Escuela de Economía de la Universidad de Buenos Aires (UBA) y Magister Artium en Ciencia Regional en el Wharton Business School de la Universidad de Pennsylvania. Profesor Emérito de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

Tiene una experiencia prolongada como investigador, docente universitario y profesional en el campo de la economía en: México (1976-80), Nicaragua (1981-85), Ecuador (1986-1990), Estados Unidos (1991-94) y Argentina (1961-76 y desde 1995 a la fecha). En este último país, fue Rector electo de La Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) entre 1998 y 2002 y Director-Organizador del Instituto del Conurbano (ICO) de dicha Universidad. Actualmente es Investigador-Docente en el área de Sistemas Económicos Urbanos en el Instituto del Conurbano y desde el 2003, Director Académico de la Maestría en Economía Social (MAES), que dicta el ICO. Investigador Invitado del Instituto de Altos Estudios Nacionales (IAEN) del Ecuador

Ha dedicado los últimos años al desarrollo de investigaciones sobre la Economía Social, su teoría y su método. Actualmente es responsable de la coordinación del eje económico del proyecto de investigación regional: "Democracias en Revolución & Revoluciones en Democracia" coordinado por el IAEN y dirigido por Ramón Torres.

Es autor y coautor de más de 25 libros y 125 artículos.

que es todavía muy formal, con escasa participación y posibilidades de expresión autónoma de la ciudadanía. En ese sentido, la universidad debe contribuir a proponer alternativas factibles a lo existente, pero es difícil decir qué es lo que habría que hacer sin pasar por un encuentro con la comunidad en sus diversos niveles. El compromiso social de las universidades ha estado históricamente asociado a la "extensión", lo que implica que la universidad tiene su objetivo específico y que, además, extiende su brazo para hacer algo adicional, hacia un "afuera". Me parece que tenemos que hablar más bien del servicio a la comunidad, del compromiso con la comunidad, y no vinculamos como actores externos, y menos como los poseedores del saber.

Pero, sumado a ello, tenemos también una agenda interna de transformación. Con respecto a la enseñanza, necesitamos formar de otra manera, formar profesionales con un compromiso ético por la vida digna de todos y con otras capacidades y disposiciones. No puede ser que sigamos formando a los economistas del establishment, analistas del mercado financiero.

Respecto de la producción de conocimiento, hoy hay muchas discusiones sobre el papel de la ciencia en la sociedad, sobre las epistemologías que se aplica para producir el conocimiento. Hay un cambio de paradigma, todavía no está completo, pero empieza a manifestarse. En ese sentido, las universidades tienen que actualizarse, tomar posición, lo cual implica un debate. Las universidades están atravesadas por cierto corporativismo y defensa de posiciones logradas en el pasado, que hacen difíciles esas transformaciones, pero hay que dar la lucha.

Universidades "tradicionales" y Universidades "innovadoras"

Esta diferencia se suele hacer, y muchas veces es clave de conflicto por recursos,. Sin duda hay que tener una mirada crítica del modo tradicional de hacer universidad, pero los que pretenden innovar pueden terminar reproduciendo ese mismo sistema en dimensiones más pequeñas. Quienes participamos del proceso de diseño de la Universidad Nacional de General Sarmiento, decíamos "tenemos, por razones coyunturales, la posibilidad de innovar", de no reproducir la universidad tradicional. Ahora bien, uno puede hacer los mejores diseños, pero después hay que ver si son factibles. Una de las cuestiones que planteábamos era que había que romper con el modelo de "profesor que sabe - alumno que es ignorante". Es decir, crear una comunidad de aprendizaje que pudiera replantear qué hacemos con la formación, cómo nos salimos un poco de las carreras tradicionales y avanzamos en una co-construcción de conocimiento y capacidades profesionales orientadas hacia los problemas que tiene la sociedad.

Por lo demás, algunas innovaciones pueden ser destructoras y muchas prácticas tradicionales ser beneficiosas para la sociedad. Sin embargo, no se puede generalizar. Veamos, si no, el sistema de control y de acompañamiento a las universidades, de repartición del financiamiento -ya sea en la investigación o en la formación-, que hoy sigue un modelo configurado y universalizado por las políticas neoliberales. Este sistema representa un tipo de innovación que muestra que hace aguas, sólo el cinismo permite no verlo así. Se ha generado un sistema de incentivos materiales para orientar las investigaciones, y esa orientación no parte necesariamente de las necesidades de la sociedad, ni de la responsabilidad por cumplir las funciones que justifican nuestra existencia como universitarios e investigadores, sino que establece criterios formales: cuántas publicaciones en revistas con referato, la presentación elegante de proyectos para pedir recursos, etc. Y eso ha ido creando una cultura que se encuadra en una visión instrumental del conocimiento, que pide resultados que valúa predominantemente con indicadores cuantitativos.

Por otro lado, pienso que las universidades tradicionales o antiguas juegan un papel fundamental en el sistema universitario y que tenemos que colaborar todos con todos. Para mi, la innovación tiene que estar también en las universidades más antiguas. Cierto es que, en principio, es más difícil porque está todo muy corporativizado, y un proyecto de cambio es visto como una amenaza.

El movimiento estudiantil como factor de cambio

Lo mismo que hablar de las universidades en general es hablar del movimiento estudiantil en general: creo que no ayuda mucho, pero que algunas cosas se pueden plantear. Primero creo que el movimiento estudiantil pierde potencia cuando hay adscripción a corrientes políticas que actúan corporativamente, cuando se ve a la universidad como un espacio donde hay que ganar poder "político". en la medida en que esto está presente, se hace difícil discutir realmente no sólo cuál es el rol de la universidad sino cómo avanzar en su transformación. Hay slogans, hay declaraciones, pero no hay un espacio donde realmente nos ponemos a discutir sin pensar cuántos representantes vamos a tener en el gobierno de la universidad. Creo que éste es un desafío de todas las formas políticas y de representación de estamentos de la universidad, y el movimiento estudiantil es sólo uno.

Ahora bien, yo siempre pensé que en la posibilidad de renovación de las universidades los sujetos de esa renovación tienen que ser centralmente los estudiantes, Porque son ellos los que están siendo formados para este mundo y son los que podrían reclamar cuál es el sentido de su formación, qué relación van a tener con la sociedad. Esto supone un estudiantado progresista. El problema es que estos treinta años de neoliberalismo han hecho que la vocación pase a ser secundaria, que haya una elección de las carreras en función de las posibilidades de ingreso, una posición más oportunista, y que lo político -con mayúscula o con minúscula- se deje para minorías militantes. Es totalmente explicable, porque se ha implantado una economía de mercado que dice que cada uno tiene que ver cómo se las arregla. Además, con un nivel de incertidumbre y falta de protección que hace que haya individualismo y pragmatismo inmediatista. Ése es una determinante real, objetivo, y reduce la representatividad del movimiento estudiantil, limitándola a un proceso electoral. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con la enseñanza en la economía: que haya estudiantes que siguen aceptando que se les enseñe un formuleo cada vez más sofisticado, toda esa modelística, sin preguntarse cuál es el sentido de eso, y que no hagan preguntas más filosóficas, más políticas, sobre qué es la economía y hacia dónde va, me parece que es un proceso de alienación terrible. Ese modo de enseñar sigue generando profesionales que van a depender -porque les resulta natural hacerlo- del mismo sistema que genera la imposibilidad de que la economía resuelva los problemas de la sociedad. Entonces yo veo con esperanza que empiecen a aparecer espacios donde se cuestiona qué estamos aprendiendo sobre la economía, y que se propugne el pluralismo, que se puedan ver las distintas corrientes, que se pueda situarlas históricamente, indagar qué sentido tienen. Ayudaría a abrir espacios públicos donde la sociedad, con toda su complejidad, discuta con la universidad qué universidad queremos.

§ La ciencia y la tecnología como fuerzas destransnacionalizadoras

Por Diego Hurtado [2]

Una dicotomía atraviesa la historia de la ciencia y la tecnología en la Argentina de la segunda mitad del siglo XX. Durante las dos primeras presidencias de Juan Perón -cuando en los países industrializados la ciencia y la tecnología se transforman en objeto de políticas públicas- esta dicotomía tomó la forma de confrontación entre dos "modelos de ciencia". Ideologías y representaciones divergentes acerca de qué problemas, agendas y objetivos deberían guiar la investigación y, por lo tanto, de cuál debía ser la función social de los científicos, definían dos tipos alternativos de ciencia y de tecnología para un país en pleno proceso de industrialización.

Mientras que el gobierno de Perón promovió un modelo de ciencia vinculado a la planificación económica y a la solución de "problemas nacionales" -energía, salud, recursos naturales, producción, defensa-, un grupo importante de científicos agrupados en la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias promovió que asumió como objetivos cruciales el acceso a los estándares internacionales de producción científica, la autorregulación de sus actividades -reclamo que incluía la determinación de los temas a investigar-, el financiamiento del Estado, y la "ciencia básica" como el principal.

Esta fragmentación o dualidad de modelos se consolidó durante el gobierno de facto que expulsó a Perón

[2] Doctor en Física. Especialista en innovación y gestión de la tecnología, e historia de la ciencia en la Argentina.

Es secretario de Innovación y Transferencia de la UNSAM, donde además se desempeña como director de la Agencia de Noticias Tecnología Sur Sur (TSS) y como profesor de grado. Además, dicta materias de posgrados en la Universidad Nacional de Rosario, la Universidad Nacional de Córdoba y en el Instituto del Servicio Exterior de la Nación. Integra el directorio de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva de la Nación.

Publicó más de setenta artículos en revistas especializadas nacionales e internacionales y es autor de los libros "La ciencia argentina. Un proyecto inconcluso 1930-2000" y "El sueño de la Argentina atómica. Política, tecnología nuclear y desarrollo nacional (1945-2006)".

de la presidencia, y tuvo su reflejo en las instituciones que integran el complejo científico-tecnológico local. Instituciones como las universidades públicas y CONICET, con excepciones que no llegaron a dar forma a una alternativa política de largo plazo, quedaron del lado del modelo de ciencia académica. Juan José Giambiagi, uno de los físicos argentinos más destacados, representante de la mejor ciencia académica argentina durante los años '60, a fines de los '80 realizaba una mirada retrospectiva: "Ya en 1962 no existían posibilidades de absorber a casi ninguno de los graduados que habíamos formado (...). Esa experiencia me hizo ver que no podemos pensar en instituciones científicas estables si la actividad científica no se vincula con la realidad económica." Y agregaba más adelante: "Desarrollamos una ciencia que no estaba ligada a la problemática del país. La década del '60 demostró que la Universidad estaba totalmente divorciada de su medio".

Por su parte, Jorge Sábato, ideólogo del desarrollo nuclear argentino durante los años '60 y referente latinoamericano en política tecnológica, a comienzos de los '70 contaba en una entrevista sobre sus dos décadas de esfuerzos para lograr que la metalurgia "se convirtiese en una actividad académica". Y agregaba a continuación: "(...) yo siento repugnancia por la palabra 'académica' pero no tengo más remedio que usarla en el sentido de describir con ella una actividad científica organizada y continua, realizada en laboratorios, centros de investigación, facultades, etc. (...)"

En 1973, en el momento en que el proceso de industrialización sustitutiva alcanzaba su momento de mayor desarrollo, Alberto Aráoz hacía notar que menos del 6 % de los proyectos de investigación en todo el país tenía objetivos industriales. Aráoz concluía: "Si bien es cierto que las industrias dinámicas trabajan continuamente con tecnología importada, no deja de llamar la atención el magro apoyo del sistema científico".

Es evidente que este escenario se explica en parte por la estructura económica del país. Mientras las dictaduras debilitaban las universidades por considerarlas espacio de propagación del comunismo, las filiales de las empresas transnacionales consolidaban el hábito de la importación de tecnología y desplazaban del escenario a la pequeña y mediana industria. Señalaba a comienzos de los años '70 el economista brasileño Celso Furtado: "Entre 1955 y 1968, las ganancias de las subsidiarias de empresas norteamericanas en América Latina por derechos de patentes y asistencia técnica representaron el 56 % de las ganancias remitidas a sus casas matrices".

Durante la última dictadura, el terrorismo devastó el complejo de CyT, especialmente en las universidades. Entre muchas otras consecuencias, al final del gobierno de facto existían más de 100 institutos del CONICET, elemento clave para entender la parcial desarticulación del tándem CONICET -universidades heredado por la democracia. Por otro lado, el drástico cambio de régimen de acumulación que puso en marcha la política económica de la dictadura tuvo consecuencias de largo plazo. A través de enormes costos sociales, sostiene Schvarzer, los primeros cinco años de política económica de la dictadura iban a "modificar la estructura de poder económico (y político) en favor de los dueños del dinero y, sobre todo, de aquéllos que operan en el mercado financiero".

Como explican Azpiazu y Schorr, la política económica impulsada por la dictadura buscó compatibilizar las prácticas de especulación financiera dominantes en la arena internacional con la expansión local de los sectores extractivos, así como de unas pocas actividades industriales vinculadas al aprovechamiento de los recursos naturales, "dedicadas a la elaboración de commodities de escaso dinamismo en el mercado mundial" y caracterizadas por "estructuras de mercado altamente concentradas". El legado de este modelo fue "una marcada reprimarización del tejido productivo-exportador", explican Azpiazu y Schorr, así como una ostensible desarticulación de la matriz industrial.

Éste era el panorama cuando, con el retorno a la democracia, fue nombrado al frente de la SECyT el matemático Manuel Sadosky, quien asumió que "la Universidad desquiciada desde 1966 debía volver a ser la institución creadora de cultura". En este momento se reconoció "la irrupción del problema tecnológico", y que había que admitir "que los industriales, los ganaderos o los empresarios no iban con sus problemas a la Universidad, al CONICET o al INTA", como tampoco era usual "que los resultados logrados en los laboratorios universitarios o institutos se volcasen a la actividad productiva". La SECyT se comprometía a "hacer un gran esfuerzo para aumentar la investigación tecnológica".

A pesar de las buenas intenciones, la profundización de la estructura económica heredada de la dictadura colocó al complejo de CyT en un lugar de irrelevancia. El proyecto de globalización neoliberal se cristalizó a comienzos de los años ‘90 en una construcción ideológica que intentó definir normativamente, por un lado, las sociedades como ámbitos que deben generar condiciones propicias para los ”negocios” -definidos, a su vez, por la lógica de maximización de las utilidades-, y, por otro lado, una supuesta dinámica de competencia -impulsada por flujos de innovaciones organizacionales y tecnológicas-, que sería regulada por el libre juego de las fuerzas de mercado.

En este escenario dominado por mercados oligopólicos, capitales concentrados y un Estado desarticulado, por un lado, se legitimaron, sostiene Sevares, las ”conductas empresarias adversas al riesgo y buscadoras de rentas” y su correlato ”en el mantenimiento de bajos niveles de I&D [investigación y desarrollo] privada, escasa innovación y atraso técnico”, y, por otro lado, se consolidaron los comportamientos corporativos, de tipo ”adaptativo” dentro de las universidades e instituciones públicas de CyT, que a su vez obstaculizaron la posibilidad de pensar que la comunidad científica argentina podría ser un actor relevante en la construcción de una agenda política, social y económica para la ciencia argentina.

El grado inaudito de descontextualización de la ”revolución cultural” neoconservadora resultó evidente cuando se comenzaron a promover diagnósticos de organismos financieros internacionales que recomendaban criterios de eficiencia empresarial para las universidades públicas o la privatización del CONICET. Decía un informe: ”El CONICET y la Fundación Miguel Lilio deberían ser privatizados, resultando en 5.639 posiciones abolidas del presupuesto público”.

El derrumbamiento de la matriz neoliberal y el actual proceso de construcción de un nuevo campo de fuerzas sociocultural y político en América Latina crearon las condiciones de posibilidad para la elaboración de una política pública de CyT de escala nacional. En este nuevo escenario de reindustrialización con base en la generación de trabajo calificado, el uso intensivo de conocimiento y la producción de valor agregado, que se alcanza luego de tres décadas ininterrumpidas de democracia -y subterráneos pero notorios procesos de aprendizaje político e institucional-, las universidades y el CONICET parecen estar superando la ”edad de la inocencia”, al asumir que la ciencia no es un juego altruista y universal, ni en sus intereses, ni en la definición de sus agendas; que es un mito el libre acceso al conocimiento científico, o que exista algo como una ”comunidad científica internacional”, que además se comporte de forma desinteresada y solidaria; que aunque no sean excluyentes, para un país en desarrollo hoy es más importante sustituir importaciones, desarrollar vacunas y avanzar, tanto sea posible, en la autonomía tecnológica que ganar premios Nobel.

La recuperación de un proyecto de desarrollo económico -si se permite el término- destrasnacionalizador asigna al CONICET y las universidades la tarea perentoria de comprender y producir el perfil de ingenieros, tecnólogos y científicos -naturales y sociales-, así como el tipo de conocimiento que necesita este proyecto de país.

§ Jóvenes de ayer, jóvenes de hoy

Por Eduardo Rinesi [3]

La presente edición del Manifiesto Liminar de la Reforma Universitaria, dado en Córdoba en una época tan distante de la nuestra, que apenas parecería posible imaginar que podamos nosotros encontrar en ese documenta una inspiración adecuada para pensar nuestro propio tiempo, nos enfrente sin embargo a la evidencia de la enorme actualidad de esos párrafos tantas veces recorridos. No se trata desde luego. De que nuestra universidad (de que nuestra propia idea sobre la universidad), que se fue forjando en un proceso del que la reforma de 1918 constituye un hito sin duda fundamental, pero lejano, presente hoy las mismas características

[3] Filósofo, politólogo y educador argentino. Nacido en Rosario en 1964. Entre 2010 y 2014 se desempeñó como rector en la Universidad Nacional de General Sarmiento.1 También se encuentra a cargo de la cátedra de Sociología dictada en el Colegio Nacional de Buenos Aires desde hace ya más de 20 años. Obtuvo su licenciatura en Ciencias Políticas en la Universidad Nacional de Rosario y su maestría en Ciencias Sociales en FLACSO. En 2002 se doctoró en Filosofía en la Universidade de São Paulo.

Entre 2002 y 2010 dirigió el Instituto del Desarrollo Humano de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

Ha publicado numerosos libros y artículos sobre política y cultura.

que aquellas cuyas rigideces, cuyo dogmatismo y cuya incongruencia con las tendencias más avanzadas de su tiempo motivaron entonces la rebelión estudiantil, y entre otras cosas, como parte de ese movimiento, la redacción de este documento memorable. Como se ha dicho ya con toda razón, demasiadas cosas cambiaron en nuestra propia representación sobre la universidad y sobre su misión como para que podamos suponer que los principios entonces sostenidos, que los remedios entonces propuestos para los malos de la vieja universidad clerical y conservadora contra la cual se alzaron los reformistas cordobeses, pudieran ser los nuestros (Buchbinder, 2008). Y sin embargo, no es sólo la poderosa redacción del manifiesto lo que consigue hoy impresionarnos cuando volvemos a leerlo: hay ahí un conjunto de cuestiones importantes que no han desaparecido de nuestro propio campo de preocupaciones sobre la universidad, y que le dan a este documento extraordinario una parte importante del interés que aún podemos encontrar en él.

La primera de esas cuestiones, me parece, es la insistencia en – digámoslo así – desnaturalizar el modo de funcionamiento que presentaba la universidad contra la que está escrito este documento, que los párrafos del Manifiesto muestran asociado a la vigencia, inaceptable, de lo que aquí se llama una ”especie del derecho divino” (”El derecho divino del Profesor Universitario”) y de un tipo de autoridad que, sostenido apenas sobre la fuerza y la tradición, se horta al escrutinio de sus fundamentos por una razón emancipada y libre. Es claro que ni esa forma del ”derecho divino” de los profesores ni esa forma de autoridad que ellos detentaban forman parte del paisaje actual de nuestras universidades, pero no lo es menos que sigue siendo indispensable mantener en ellas la vigilia frente a cualquier forma de naturalización de su tarea, a cualquier tentación de dejar de examinar críticamente, todo el tiempo, el tipo de conocimiento que produce y que hace circular, y cualquier impulso que lleve a consentir formas dogmáticas de la autoridad. De las que nuestras universidades, todo lo seculares y laicas que se quieran, no están, por supuesto, exentas. De ahí la importancia de la defensa – que surge nítida de este Manifiesto – de la actitud reflexiva y crítica que debe caracterizar, como quería el Kant de El Conflicto de las Facultades, cualquier pensamiento que se quiera propiamente universitario. Y de ahí también el valor del precioso principio republicano de la autonomía, cuyo valor no hay que reducir al de un blasón de pensamiento anti-estatista, porque no es siempre ni necesariamente en el estado, como podemos comprobar hoy mismo entre nosotros, donde radican las peores acechanzas a un pensamiento soberano.

La segunda cuestión que es necesario destacar en este manifiesto, por el modo en el que habla al corazón de nuestra situación política presente, es su fuerte tono latinoamericanista. No es necesaria abundar: no solo algunas de las más famosas y solicitadas frases de este documento (desde su dedicatoria ”a los hombres libres de Sud América” hasta la que remata todo el escrito) participan de esa entonación, que lo recorre entero, sino que la gran influencia del movimiento reformista cordobés en toda la región es una de las razones de su enorme importancia, trascendencia y también actualidad. Porque, en efecto, igual que aquella de este Manifiesto, ésta que vivimos en sin duda también, para usar la expresión que aquí puede leerse, una ”hora americana”. Quizás con la importante diferencia, con respecto a aquélla, de que si entonces ese impulso latinoamericanista provenía más bien de los sectores de la militancia universitaria o de los ámbitos de la vida intelectual (de Ingenieros a Mariátegui, de Rodó a Vasconcelos), y si la propia reforma alcanza esa dimensión continental gracias a la militancia de dirigentes estudiantiles como Gabriel de Mazo o de políticos de la oposición como Alfredo Palacios, hoy en cambio esa alineación regional de las políticas forma parte de una orientación compartida por una parte decisiva de los propios gobiernos de los países del sur del continente. Motivo suficiente para recordar con entusiasmo los antecedentes intelectuales y políticos de aquel latinoamericanismo de hace casi un siglo, pero también para imaginar para el de hoy, miras aún más amplias bajo el auspicio y con el empuje de los propios gobiernos de nuestros Estados.

Tercer asunto que merece un comentario: la crítica a la idea de una universidad incontaminada y alejada de los problemas del tiempo. ”Pura”. La asunción del carácter político, de una orientación política mas general, del movimiento al que este Manifiesto busca dar voz. Que no es, desde luego un movimiento que quiera definir su ámbito de intervención apenas del lado de adentro de los muros de la propia universidad, sino que ve a ésta, y a su propia degeneración, como síntomas de una ruina mayor de la sociedad de la que forma parte: ”Las universidades han llegado a ser así el fiel reflejo de estas sociedades decadentes...” Y tampoco se trata de cambiar la universidad despreocupándose por las injusticias del mundo que ella expresa, sino de pensarla políticamente, de pensarla como parte de un pensamiento mayor sobre la polis: sobre la ciudad, sobre Córdoba, sobre el País, sobre América. La reforma universitaria de 1918, y este documento que aquí vuelve a editarse quieren poner la discusión universitaria en la plataforma más vasta de la discusión política y social más general, y en ese geste este Manifiesto vuelve a hablarnos a nosotros, divirtiéndonos sobre esa aberración que es la figura de lo "universitario puro". (Scotto 2008, pp.9-11), que sin embargo no deja de visitar como una posibilidad y a veces como una tentación nuestras propias formas de representación de la labor académica en nuestras universidades actuales. Romper con esta representación y no hacerlo bajo la forma de la vindicación de un "extensionismo" convencional, filantrópico y tranquilizador, es uno de los desafíos de la política universitaria de esta hora que es la nuestra.

Y cuarto y para terminar: la idea de la juventud. La entonación juvenilista que respira todo el texto, y que es ciertamente una de sus dimensiones más ostensibles y más señaladas. La reivindicación de la juventud (que en este Manifiesto hace sistema con un progresismo, típicamente decimonónico, de "últimas cadenas" y de "dolores que quedan" y de "libertades que faltan" y de confianza enorme en las potencias de las luces, las "fuerzas morales" y la ciencia) como protagonista de los inexorables cambios que terminarían por derribar las camarillas y los privilegios y las tiranías. La defensa del heroismo, la incorruptibilidad, el desinterés y la sabiduría de la juventud. Es un un tono – que duda- de época. De una época de vanguardias e idealismo. Hoy podemos y debemos desconfiar de esas confianzas. Pero en cambio asistimos con interés y con expectativa a un movimiento de incorporación muy significativa de una cantidad importante de jóvenes (de otros jóvenes, ciertamente muy distintos a aquellos que hicieron hace casi un siglo la Reforma), a una serie de ámbitos que hoy empiezan a renovarse al calor de esa llegada. Me quedan pocas líneas y apenas quiero decir dos cosas. Una es que es ampliamente celebrable la afluencia de este enorme número de jóvenes (a veces muy jóvenes) a los ámbitos de la militancia política, de la vida política institucional e incluso de las responsabilidades gubernamentales. Asistimos a la aparición de una nueva generación militante y dirigencial y esa es una buena noticia. La otra buena noticia, que supone también un desafío mayor, me va a llevar el último párrafo de esta nota,

Que voy a dedicar a decir esto: que la universidad pública argentina tuvo un momento de indudable democratización en las jornadas de 1918 que esta reedición del Manifiesto busca homenajear. Que más tarde tuvo un segundo momento de democratización con el establecimiento de la gratuidad de los estudios de grado en 1949, durante el primer gobierno de Perón. Y que vive hoy un a hora de democratización extraordinaria dada, para decirlo rápido, por una triple circunstancia: el crecimiento notable, desde fines de los años '60, del número de universidades públicas en el país, la instauración, por ley de la Nación, de la obligatoriedad de los estudios secundarios; y la fuerza de un conjunto de políticas públicas (por ejemplo, aunque no únicamente: la AUH) tendientes a facilitar a las familias el cumplimiento de esa obligación legal que ahora tienen de mandar a sus hijos a la escuela hasta terminar la secundaria. Con el resultado, que a es visible y que va a serlo aún más en los próximos años, de que muchos más de esos jóvenes pueden hoy aspirar a ingresar a la universidad, un destino que ciertamente sus padres no pudieron abrazar y sus abuelos ni siquiera imaginar. Lo que pone hoy a nuestras universidades ante el desafío de pensarse como lo que nunca antes habían sido: las responsables de garantizar lo que por primera vez puede ser pensado, no como un privilegio de unos pocos, sino como un derecho (digamos: por lo menos tendencialmente) universal. La pregunta del millón, en esta apasionante hora de la historia de la universidad pública argentina, es si estaremos en condiciones de asumir con responsabilidad y con éxito este desafío mayor.

§ La Universidad y el desafío de la inclusión de género

Por la Dra Gabriela Bard Wigdor[4] y la Mgter Gabriela Cristina Artazo[5].

[4]Posdoctoranda del CONICET, Doctora en Estudios de Género por el Centro de Estudios Avanzandos (CEA-UNC). Magister en Trabajo Social y Licenciada en Trabajo Social por la Facultad de Cs. Sociales (UNC). Docente de las cátedras TEEyEII (comunitaria), Epistemologías de las Ciencias Sociales y Cursillo de Nivelación de la Facultad de Cs Sociales (UNC). Sus principales líneas de investigación en la actualidad son las epistemologías feministas Decoloniales y latinoamericanas y los Estudios de la masculinidad desde una perspectiva feminista, de cuyos temas ha publicado diferentes artículos y ponencias en congresos nacionales e internacionales. Co-directora del Equipo de Investigación "El Telar: comunidad de pensamiento feminista latinoamericano", que recientemente ha publicado su primer libro de producción regional, que puede descargarse en el siguiente link: https://drive.google.com/file/d/0B9uceQ4PKKZMUWpCdWlub2c1b1k/view

[5]Becaria doctoral del CONICET. Doctoranda del Doctorado en Cs. Políticas del CEA-UNC. Master Internacional en "MERCOSUR y Unión Europea: Diferencias y Similitudes", Licenciada en Trabajo Social por la Universidad Nacional de Córdoba. Docente de la Facultad de Ciencias Sociales. Sus principales líneas de investigación son las políticas públicas, el trabajo social y los feminismos

Introducción

"Nadie es, si se prohíbe que otros sean"

Paulo Freire

Antes de comenzar a desarrollar el tema que nos convoca y bajo la premisa de que "lo que no se nombra no existe", solicitamos comprensión ante el uso del lenguaje "no sexista o inclusivo", que tal vez resulte algo incómodo para la lectura, pero representa una apuesta política y ética para quienes no somos el sujeto universal de la palabra: las mujeres y sexualidades disidentes. De manera que advertimos que a lo largo del capítulo utilizaremos "lenguaje no sexista o inclusivo", como estrategia narrativa para destacar el género en la palabra y evitar universalizar las experiencias desde lo masculino. La lengua ha sido utilizada desde hace siglos como el soporte de estrategias patriarcales[6] de subordinación de las mujeres y otros géneros, por lo que lleva inscripta y oculta relaciones de dominación. Se sostiene sobre opciones léxicas sesgadas, discriminatorias o degradantes, al considerar que lo masculino es superior a lo feminizado, lo que se expresa, por ejemplo, en el uso de lo masculino como lo universal, como si fuera el modo de incluir y nombrarnos a todas/os. En efecto, el género masculino se usa como representante de todas las experiencias, mientras que el femenino es "exclusivo", es decir, se refiere solamente a las mujeres. En efecto, el lenguaje influye poderosamente en las actitudes, el comportamiento y las percepciones de las personas sobre el resto y sobre sí mismas, por eso, desafiar el lenguaje es importante.

Desarrollando la problemática que nos convoca en este capítulo, es importante destacar que los y las sujetos nos encontramos posicionados/as en relaciones económicas o de clase, sociales, raciales, de género, etarias, etc. Diferentes y desiguales. Estas posiciones, nos acercan o nos alejan de las instituciones como la educación o la salud, de acuerdo a procesos de inclusión o exclusión por parte del Estado. Es una constatación empírica para quienes investigamos en ciencias sociales con enfoque de género y clase, que la universidad pública y gratuita en la Argentina, aún con todos los avances logrados hasta el año 2015[7], excluye o que incluye según quienes sean los/as sujetos en cuestión, siendo las mujeres, principalmente de sectores populares, las campesinas, indígenas y de color, las travestis, trans, entre otras, quienes mayormente sufren las barreras de acceso a la universidad. A esta manera de estudiar las posiciones de los y las sujetos, lo llamamos enfoque de género, clase e Interseccionalidad.

En ese sentido, la Interseccionalidad atiende a la relación entre raza, etnicidad, clase y sexualidad, para dar cuenta de experiencias diferenciadas y de accesos desiguales a los derechos, como es poder estudiar una

latinoamericanos. Actualmente se especializa en la investigación de temáticas como la Industria del Sexo, debates sobre abolición o legalización de la prostitución desde un enfoque decolonial y feminista, del cual se desprenden artículos y ponencias que se difunden en revistas y congresos internacionales. Es miembro del equipo de investigación de El Telar: Comunidad de Pensamiento Feminista latinoamericano y del comité editor de la revista "Conciencia Social" de la Facultad de Sociales-UNC.

[6] El Patriarcado es una forma de organización del Estado y la sociedad que trajo la colonización de América Latina, donde la autoridad política y familiar es ejercida por el varón blanco adulto y heterosexual "jefe de cada familia", denominado "patriarca". Esto produce todo tipo de desigualdades de poder entre varones y mujeres y otras sexualidades, así como entre adultos/as y niños/as (Adultocentrismo).

[7] Como fueron el aumento del presupuesto universitario en general y de los sueldos docentes. También, debemos mencionar que en los últimos 12 años (2003-2015) en Argentina, diferentes autores (Adamovsky, 2012; Kessler, 2014; Merklen, 2010; entre otros/as) caracterizan al país como en una etapa de "vuelta a un Estado social", debido a un tiempo universitario de grandes mejoras, entre las cuales: se aumenta el presupuesto universitario, el cual pasó del 2 % al 6,5 % del PIB (durante el período 2003-2015). Como meta de la ley de financiamiento educativo aprobado por el congreso, aumentan un 843 % los salarios del sector; se implementa un programa de infraestructura universitaria único, que incluyó la realización de obras con una inversión de más de 1382 millones de pesos. A su vez, se crearon y abrieron universidades en las localidades populares del Gran Buenos Aires, Avellaneda, Florencio Varela, Moreno, Merlo y José C. Paz, en Villa Mercedes (San Luis), Río Negro y en Tierra del Fuego. Actualmente todas las provincias cuentan, por lo menos, con una Casa de Altos Estudios. Un dato a destacar es que una gran cantidad de los alumnos/as de esas nuevas universidades es la primera generación de universitarios en su familia y que desde el INDEC se señala que desde 1991 a 2013, la población de mujeres que accedió a la universidad pasó de 44,6 % a 57,6 % (Chiroleu y Marquina, 2015). En Córdoba particularmente, se conquistó el ingreso irrestricto a cualquier carrera de grado, tutorías para ingresantes, becas para financiamiento de materiales de estudios, comedor universitario gratuito para becados/as y al precio de 30 centavos de dólar para el resto de la comunidad educativa, transporte público subsidiado para estudiantes, etc.

carrera de grado; muestra que la condición de género o el hecho de ser inmigrantes, por ejemplo, sea cual sea la procedencia de la persona, produce que su etnicidad y si es mujer, su sexualidad, se tornen un motivo de discriminación por parte de las diferentes instituciones. Asimismo, este enfoque muestra que la idea de "buen estudiante" para la universidad y "de buen ciudadano" para el Estado en general, es el varón blanco, heterosexual, de sectores privilegiados y de valores europeizantes, porque ese es el modelo que nos imponen desde el genocidio de la colonización hasta hoy. En este capítulo, nos concentramos principalmente en el género y la clase, para poder comprender por qué ser mujeres y más aún de sectores populares, son motivos de exclusiones y discriminaciones. Para lo cual, te proponemos leer brevemente un poco de la historia mundial y nacional de la universidad y su relación con las mujeres y grupos no dominantes.

Breve historización de las mujeres y la universidad

Partiendo de la historia europea y siguiendo a Palermo (2006), podemos conocer que las mujeres vivieron dos períodos en relación con el acceso a la educación universitaria: primero una forma que llamamos "excepcional" porque ingresaban seleccionadas por "motivos especiales" o porque se disfrazaban de varones. Segundo, ya como mujeres, pero con un número de acceso escaso en la realidad, donde solo algunas privilegiadas por su clase lograban estudiar. Esto sucedía porque en el siglo XIX, se insistía con la idea de que las mujeres no teníamos capacidad para producir ni comprender la ciencia, además de que nuestro único rol era tener hijos e hijas, cuidar de la familia y realizar las tareas domésticas (creencias que todavía persisten).

En Latinoamérica, el acceso de las mujeres a los estudios universitarios se produjo a partir de la década de 1880 y fue en la carrera de medicina donde fuimos mayoritarias (igual que en Europa) y paulatinamente en todas aquellas carreras que tuvieran que ver con el cuidado de otros/as (enfermería, maestra, trabajo social, etc.). Particularmente, fueron cinco los países latinoamericanos que incluyeron mujeres a la universidad en el siglo XIX: Brasil, México, Chile, Cuba y Argentina. Esta apertura a las mujeres, se correspondía con la idea dominante de la época de que la educación debía ser común obligatoria y gratuita, que incluyera a todos los niveles sociales, sin distinción de género (aunque sí de etnia y clase, dejando por fuera a los pueblos indígenas, que habían sido casi exterminados/as por la colonización y campesinos/as).

Para la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del siglo XX, en Argentina se sanciona el "sufragio universal" (Ley Sáenz Peña, 1912), que lleva ese nombre pero que no habilitaba a mujeres ni a inmigrantes para votar, y nacen movimientos políticos de gran trascendencia como el movimiento universitario reformista. En Córdoba, para esa misma época, la Universidad Nacional sostenía lógicas de la época colonial, donde la investigación científica era casi inexistente, al igual que en las otras Universidades de Latinoamérica. Enfrentando esta situación, se fortalecen los movimientos sociales que pretendían democratizar el acceso a la universidad. Especialmente importante fue la Reforma Universitaria de 1918, que denunciaba el oscurantismo, el autoritarismo y el elitismo en la universidad. Esto da inicio a varias décadas de resistencia y luchas por ampliar el acceso a la universidad y democratizarla.

En efecto, es indudable que la Universidad se ha democratizado con el correr de los siglos, aunque esto no signifique que haya abandonado totalmente su carácter de institución colonial, que perpetúa, aunque de un modo más sutil, desigualdades raciales, clasistas y de género. En verdad, bajo un discurso de diversidad, encubre el fortalecimiento de la idea del logro individual, de que todo pasa por el esfuerzo del/la sujeto, propio del pensamiento masculino, liberal y capitalista. Es el/la individuo/a "quien debe superarse a sí mismo/a" para ingresar en la universidad y sobre todo para permanecer.

Siglo XXI: ¿Qué sucede con las mujeres en la Universidad patriarcal?

Actualmente, existe un fenómeno que se llama "feminización de la educación" y que viene a confirmar que cuanto más central es un ámbito para la sociedad, cuanto más poderoso es un grupo, tanto menos están representadas las mujeres. Ellas sólo consiguen conquistar las profesiones peores pagas o que están en decadencia. En efecto, en las distintas regiones, las mujeres suelen estar más fuertemente educadas que los varones, obtienen licenciaturas y maestrías en mayor proporción, según estudios de la Unesco (2016). Empero esto no garantiza que lleguen a cargos altos en empresas ni en ámbitos públicos o que ocupen puestos laborales bien pagos, propio del fenómeno que las feministas denominan techos de cristal[8].

[8] Se denomina techo de cristal a la limitación velada del ascenso laboral de las mujeres al interior de las organizaciones. Se trata de

En ese sentido, en el mundo, el 87 por ciento de las juntas directivas de empresas están presididas por hombres y sólo el 13 por ciento por mujeres, según el informe de la Organización Internacional del Trabajo (OIT, 2016). El llamado "techo de cristal" con el que chocan las mujeres a la hora de acceder a puestos de responsabilidad, sigue siendo un problema vigente que la Universidad no discute ni acciona para su modificación. Por otro lado, para las estudiantes, trabajadoras no docentes y alumnas de la Universidad, resulta difícil conciliar el mundo laboral y el mundo familiar, ya que se les exige igual que a los varones o más en mismos puestos de trabajo y de formación, mientras en la familia siguen siendo demandadas como el principal sostén organizativo y emocional (Bard Wigdor y Borchi, 2014).

Por lo tanto, la manera en que se estructura la academia tiene diversas implicancias en el desarrollo de la vida de las mujeres que participan y en quienes quedan fuera. Quienes acceden deben cumplir con una serie de tareas meritocráticas, inspiradas en la vida cotidiana de los varones, las cuales pueden imitar las mujeres, pero a partir de sacrificios de todo tipo, como relegar la vida personal y aceptar como condición, esforzarse el doble que los varones para obtener iguales o peores resultados. Se vuelve habitual e incluso natural la explotación que las mujeres hacen de sí mismas y de otras, en una competencia despiadada por los pocos espacios de poder que se les ofrecen. Esta situación se hace explícita y evidente, por ejemplo, en las licencias de maternidad que se les otorgan a las mujeres en al ámbito científico, donde los plazos para la producción de conocimiento son apremiantes (como artículos o ponencias), en la asistencia indefectible a los lugares de trabajo más allá de problemas de salud de los que se tengan que ocupar, personas a cargo, etc. En la competitividad que se espera que desempeñen más allá de sus condiciones de producción. Indudablemente no es un problema exclusivo de la academia, pero ésta lo refuerza y lo legitima.

En ese orden, el sistema universitario y científico se estructura para mujeres blancas y de clase social media-alta, de quienes se espera que no elijan ser madres, no tengan cargas familiares (enfermos/as y discapacitados/as o personas de cuarta generación), o en su defecto, detenten posiciones socioeconómicas que les permita costear los gastos de que terceras se ocupen de este tipo de tareas (casi siempre mujeres), consideras como tareas privadas por el sistema sexual de división del trabajo (cuando son un aporte al conjunto de la sociedad). Debido a lo cual, podríamos afirmar que la percepción dominante es que la mujer "puede" salir a efectuar trabajo productivo fuera del hogar o estudiar formalmente, siempre que siga reproduciendo correctamente su rol original en la familia (como en el siglo XIX), o en su defecto, abandone totalmente su desarrollo en estas áreas. De modo que el ambiente de la Universidad y de la producción científica se encuentra masculinizado y, pese a los avances en materia de género, no ha logrado incluir y mantener a la diversidad de mujeres, mucho menos a otros géneros (Borchi y Bard Wigdor, 2014).

Por otra parte, la equidad de género no proviene únicamente del sistema universitario y científico, mientras las mujeres continúen ocupándose del amplísimo abanico de responsabilidades que toman a su cargo, aun teniendo las mismas posibilidades y derechos en el plano formal, no podrán afrontar los requerimientos permanentes del mundo académico y laboral en general.

Finalmente, no podemos desconocer que la exclusión de las mujeres de los lugares de poder, como de tantos/as otras/os sujetos no varones, responde no sólo a cuestiones de género sino de clase, raza, etnia, religiosidad y procedencia geográfica. Nos ocuparemos del cruce de género y clase.

Mujeres de sectores populares y el acceso a la Universidad

Retornando al enfoque de Interseccionalidad que explicamos al comienzo del capítulo, las mujeres no son iguales a los varones, pero tampoco entre sí. De acuerdo al género y a la etnia, por ejemplo, se presentan diferentes obstáculos para acceder a estudios universitarios. A partir de nuestras investigaciones[9], comprendemos que los sectores populares del campo y de la ciudad, tienen grandes dificultades para ingresar y perma-

un techo que limita sus carreras profesionales, difícil de traspasar y que les impide seguir avanzando.

[9] Las investigaciones en la cuales se origina este escrito responden; por un lado, a una investigación empírica concluida denominada: "Culturas políticas de mujeres de sectores populares: políticas desde lo cotidiano", realizada para obtener el título máximo de Doctora en Estudios de Género (Bard Wigdor, 2015), financiada por CONICET. Por otro lado, a otra investigación en curso denominada "Estado, Instituciones y Políticas Públicas" (Artazo, 2015), donde se analiza la incidencia del Programa Nacional Progresar, como parte de las estrategias de reproducción social de jóvenes insertos/as en unidades educativas formales de una ciudad de Córdoba (Villa María).

necer en las instituciones educativas formales, resultado de su posición histórica en la estructura social, la cual condiciona determinada calidad de vida y de acuerdo al carácter clasista de la universidad, no se garantizan trayectorias educativas exitosas para todo el conjunto social.

En tal sentido, en los barrios populares de Córdoba donde se ha indagado en relación al acceso a la universidad, nos encontramos con un porcentaje abrumador que nos habla de la discriminación que sufren los y las jóvenes, especialmente las mujeres: casi el 90 % de jóvenes y mujeres entrevistadas (sobre una población de 90 entrevistas realizadas en el año 2015), no han finalizado el nivel educativo secundario y solo cuentan con el primario completo. Sus hijos/as no escapan a la dinámica expulsiva de las instituciones formales, encontrándose por fuera del sistema educativo medio. De hecho, el secundario es una gran incógnita en la Argentina, comprender por qué los y las jóvenes de sectores populares encuentran marcadas dificultades para ingresar y permanecer sigue siendo un problema clave.

De allí que la Universidad es una institución prácticamente inexistente en el imaginario de los sectores más empobrecidos y quien logra acceder a la Casa de Altos Estudios, es considerado o considerada una rareza para su entorno y en general, cuenta con mayor capital social y económico que la mayoría de las familias de su comunidad. En ocasiones suele deberse, a que son hijos/as de padres y madres obreros/as, que supieron estar incluidos socialmente a través del empleo, obtuvieron título secundario y valoran el estudio como oportunidad de ascenso y progreso social. Son sectores medios empobrecidos, que en los 90 se denominaban ”nuevos pobres”. En el resto de los casos con los que trabajamos, son generaciones de sujetos excluidos del empleo formal y la educación formal, predominando el primario incompleto y en varias ocasiones, dificultades para leer y escribir.

Dentro de estas comunidades, las mujeres son quienes antes se ven excluidas del trayecto educativo formal. Desde la infancia deben ocuparse de ”las tareas del cuidado”: cuidar a sus hermanas/os menores, ayudar a limpiar la casa, cargar con las tareas domésticas que su madre no pueda afrontar, etc. El peso de las desigualdades de género es evidente y visible a diario, cuando caminamos por las calles de las diferentes comunidades populares y observamos mujeres jóvenes sentadas en la puerta de su casa, barriendo, atendiendo hermanos/as, hijos/as, en horario donde deberían poder concurrir a la escuela. Estudiar es sin duda, un privilegio de clase y de género.

Estos procesos se agudizan durante períodos de crisis económicas donde el Estado deja de invertir recursos en la educación pública, lo que afecta mayormente a las mujeres y ese fenómeno tiene un nombre: ”feminización de la pobreza”. Se expresa en variados indicadores, entre ellos, más mujeres deben ocuparse solas del ingreso familiar, abandonan el cuidado de su salud y los estudios para emplearse, viendo sus oportunidades en términos de integración social dentro del sistema educativo formal cada vez más lejano. Preguntamos, ¿Qué oportunidades le ofrece el Estado a una mujer madre, soltera, con secundario finalizado en un acelerado, sin empleo formal para continuar sus estudios si se recortan becas y subsidios? Este caso no es una rareza, sino que bastante frecuente en nuestra sociedad. La universidad no ofrece reales oportunidades para estas mujeres, y más allá de los esfuerzos de inclusión que se han realizado, las exigencias y capacidades que solicita la permanencia en la universidad, le indicaran a este tipo de mujeres, que su lugar no es dentro sino fuera de la institución. Con esto queremos ejemplificar formas habituales en que se expresa la exclusión por género. Las mujeres simplemente se retiran del campo universitario con la creencia de que ”no es para ellas o les falta capacidad”, así queda por fuera del horizonte de sentido de los sectores populares, la universidad como alternativa de formación.

Además, el modo en que se configuran los regímenes de enseñanza y las prácticas educativas de contados/as docentes, como sostendría Paulo Freire (2002), muestran relaciones de opresión y exclusión para quienes no responden al modelo o estereotipo de estudiante idealizado: el varón blanco, de sectores medios-altos y heterosexual. No predomina el respeto por los intereses y la multiplicidad de experiencias y saberes de los/as estudiantes, ni atención a sus particulares demandas y derechos. Es importante aclarar, que la discriminación no se realiza de manera explícita, el sistema educativo superior argentino posee mecanismos de violencia simbólica[10], donde no se agrede ni se excluye directamente a los y las estudiantes, sino que se recortan sus

[10] Es una forma de agresión difícil de distinguir y percibir, porque se efectúa de manera cotidiana, a través de mensajes y acciones que naturaliza situaciones que no son naturales, como la falta de respeto a las mujeres. Son valores, íconos, estereotipos, para perpetuar la desigualdad y la discriminación. Como no es visible de manera directa, es la más difícil de distinguir y combatir.

posibilidades de permanencia y persistencia por medio de complejos mecanismos de distinción, en donde solo aquellos/as que provienen de sectores económicos privilegiados, podrán sostener y adaptarse a los mismos.

Lo paradójico de lo que describimos, es que la Universidad pública debiera responder a las necesidades del ámbito público, del cual dependen la mayoría de la población no privilegiada, y no de las demandas del ámbito privado, como actualmente sucede en la gran parte de las carreras de grado. En tal sentido, la educación superior argentina enfrenta no sólo problemáticas históricas de formación de profesionales con poca o escasa conciencia nacional, sino políticas de exclusión racista, por género y clase; sumado a nuevos desafíos como la no planificación estatal en la materia y, por tanto, un gobierno que tampoco asegura que el mercado pueda absorber a todos/as sus alumnos/as cuando logran egresarse.

Reflexiones

No podemos cerrar sin señalar que en los últimos doce años (2003-2015), existieron grandes avances en materia de normativas y leyes en relación a la violencia de género y al reconocimiento de derechos para las sexualidades disidentes, tanto a nivel nacional como provincial. Solo para dar algunos ejemplos, podemos mencionar: A nivel nacional, entre las leyes más importantes que se sancionaron, encontramos la Ley 25.673 de Salud Sexual y Reproductiva (2002); Ley 25.929 de Parto Respetado (2004); Ley 26.061 de Protección Integral de los Derechos de las Niñas, Niños y Adolescentes (2005); Ley 26.364 que sanciona contra la Trata de Personas (2008); Ley 26.485 de Protección Integral contra la violencia hacia las Mujeres (2009); Ley 26.529 de Derechos del paciente, historia clínica y consentimiento informado; Ley 26.618 de Matrimonio Igualitario (2010); Ley 26.743 de identidad de género (2012); Ley 26.862 de fertilización asistida 2012) y Ley 26.844 del empleo en casas particulares (2013), entre otras.

En el caso provincial, especialmente en lo que atañe a la Universidad Nacional de Córdoba, la ordenanza del Consejo Superior 9/2011 que reconoce la identidad de género, y la resolución 1011/2015, que crea el Plan de Acciones contra la Violencia de Género en la UNC. En efecto, la UNC se convirtió en la primera Casa de Altos Estudios de Argentina en contemplar en su reglamentación el reconocimiento de la identidad de género elegida, declarándose ”una institución libre de discriminación por identidad y expresión de género”. Gracias a estas normativas, los/as miembros de la comunidad universitaria pueden ser reconocidos/as por su identidad elegida, aunque ésta no sea la registrada en la documentación formal; para tal fin deben presentar una nota con carácter de declaración jurada y realizar el cambio de nombre en los registros de la Universidad. Por medidas como las descriptas, podemos afirmar que la Universidad se ha democratizado en los últimos años, aunque esto no signifique que haya abandonado totalmente su carácter de institución colonial, que perpetúa, aunque de un modo más sutil, desigualdades raciales, clasistas y de género.

Por tanto, el desafío de ampliar las bases de la universidad a los sectores sociales que son excluidos en razón de su género, clase o color, continúa siendo un desafío primordial. Para lo cual, no es suficiente con que se dicten materias, cursos, talleres sobre pensamiento crítico, género y diversidad sexual, tienen que destinarse recursos materiales concretos y ofrecer el acceso a las aulas de docentes y estudiantes de diferentes etnias, género y sectores sociales. Tiene que ser posible docentes trans, travestis dictando clases, mujeres que masivamente ocupen ingenieras, cargos jerárquicos como docentes titulares, cargos de gestión política relevante, etc. Y no sólo que los ocupen, sino que sea en función de las necesidades y demandas de las mujeres y sexualidades disidentes, que puedan enseñar otra versión de la historia y legitimar sus derechos sociales. Pluralizar el conocimiento y al sujeto que conoce.

Asimismo, la universidad debe discutir con urgencia a qué modelo de país pretende contribuir, porque de ese modelo efectivamente depende la Universidad que se tiene y que se puede llegar a tener. Para que los sectores populares accedan al estudio superior, para que se democratice el público universitario, el Estado debe estar presente para garantizar los derechos sociales fundamentales de los/as ciudadanos/as. Un pueblo que no come, que no accede a la salud pública, al ejercicio político, difícilmente pueda y demande educarse.

Referencias

Bard Wigdor, G. (2016) "El ajuste tiene rostro de mujer: a 20 años de la plataforma de Beijing, las desiguales se profundizan". Revista Latinoamericana de Derechos Humanos. Año: 2016 vol. 27. Universidad de Costa Rica. e-ISSN: 2215-4221.

Bard Wigdor, G. (2015). Culturas políticas de mujeres de sectores populares: políticas desde lo cotidiano (Tesis doctoral). Universidad Nacional de Córdoba.

Bard Wigdor, G. y Borchi, A. (2014). La productividad científica en el sistema capitalista: una mirada feminista y decolonial. En P. Peyloubet (Comp.), Reflexiones y experiencias situadas. Una contribución a la pluralización de conocimientos (pp. 230-260). Buenos Aires: Ed. Nobuko.

Bard Wigdor, Gabriela, & Artazo, Gabriela C. (2016). L@s Otr@s de la Universidad Pública: Exclusiones y Desafíos que Persisten en Argentina. Revista latinoamericana de educación inclusiva, 10(2), 183-199. http://www.rinace.net/rlei/numeros/vol10-num2/RLEI_10,2.pdf

Freire, P. (2002). Pedagogía de la esperanza. Buenos Aires: Siglo XXI

Palermo, Alicia Itatí. (2006). El acceso de las mujeres a la educación universitaria. Revista argentina de sociología, 4(7), 11-46. Recuperado en 13 de noviembre de 2017, de: http://www.scielo.org.ar/scielo.php? script=sci_arttext&pid=S1669-32482006000200002&lng=es&tlng=es.

Rodigou, M., Blanes P. y Domínguez, A. (2011). Territorios y Fronteras de Género en la Universidad Nacional de Córdoba. Espacios en Blanco. Revista de Educación, 23(1), 73-97.

Tedesco, J. C. (2000). Educar en la sociedad del conocimiento. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Viveros Vigoya, M. (2009). La sexualización de la raza y la racialización de la sexualidad en el contexto latinoamericano actual. Revista Latinoamericana de Estudios Familiares, 1(4), 63- 81.

2

Cálculo Algebraico

Patricia Kisbye
David Merlo

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

2 | CÁLCULO ALGEBRAICO

Este capítulo busca ofrecer herramientas elementales del Cálculo algebraico y abarca los siguientes temas: Los distintos campos numéricos, operaciones y propiedades; el uso de las letras en el álgebra y el planteo de problemas con lenguaje simbólico; ecuaciones lineales y cuadráticas, y resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Cada sección contiene un desarrollo teórico del tema considerado, variedad de ejemplos y una completa lista de ejercicios de aplicación. Esperamos que los estudiantes lo encuentren accesible y útil para el propósito de revisión de contenidos aprendidos y de introducción a los estudios universitarios tal como fueron pensadas.

SECCIÓN 2.1

Los conjuntos numéricos y sus operaciones

§ Introducción

Aún en las etapas más primitivas de la evolución humana se ha desarrollado en el hombre el sentido del número y la capacidad de contar. Esta habilidad le ha permitido reconocer lo que cambia en un conjunto de elementos, por ejemplo, si se ha extraído o añadido algún objeto.

¿Cómo pudo un hombre, hace 5000 años, saber que en su rebaño no faltaba ninguna de sus 41 ovejas, si ni siquiera sabía contar hasta 10? Una simple solución es la siguiente: llevaba consigo tantas piedritas como ovejas, y al terminar la jornada guardaba por cada oveja una piedrita en su bolsa; si sobraba alguna piedrita sabía que debía buscar una oveja. Establecía una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de objetos.

Mucho tiempo después, los romanos usaron también piedritas para hacer sus cálculos; la palabra "cálculo" significa etimológicamente piedra, y de ahí el origen de la palabra calcular. La actividad de contar y la necesidad de simplificar la tarea de hacer cálculos, implicó la necesidad de utilizar símbolos escritos para representar lo que se había contado. Fue así que surgieron los distintos *sistemas de numeración*. A través de la historia se han usado distintos sistemas, y en cada uno de ellos cada número se representa como un combinación de símbolos. En algunos casos los símbolos representan cantidades y una combinación de símbolos representa la suma de estas cantidades; estos sistemas emplean una descomposición *aditiva*.

En otros casos, como el sistema decimal actual, importa la ubicación del símbolo en la representación del número. Por ejemplo, 21 significa veintiuno, mientras que 12 significa doce. Estos sistemas se llaman *posicionales*.

Algunas culturas usaron una base de 20 símbolos, otros de 60, pero el sistema de numeración que ha predominado y es el que actualmente usamos tiene base 10, y por eso se llama *decimal*. Eso significa que podemos escribir números arbitrariamente grandes con tan sólo diez símbolos: $0, 1, 2, \ldots, 9$. Así es como el número 10 ha dejado sus marcas en nuestra forma de contar y en las palabras para nombrar los números. Así por ejemplo, "dieciséis" está compuesto por las palabras "diez" y "seis", "treinta" hace alusión a "tres" veces 10.

Los números que se usan para contar se llaman números naturales: 1,2, 3, $\ldots$. Fueron los primeros números que aparecieron en la historia de la Matemática. Más adelante surgió la necesidad de agregar el 0 como una forma de representar lo que *no* hay, los números negativos para poder resolver todas las restas, las fracciones para resolver los cocientes, también los números irracionales y los imaginarios. De esta manera quedaron definidos distintos conjuntos numéricos: los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos.

Haremos en este capítulo un recorrido por los distintos conjuntos numéricos, justificando brevemente la necesidad de construir cada uno de ellos.

§ Números naturales

Los números que se usan para contar se llaman *números naturales*. Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra $\mathbb{N}$. Para contar *un* elemento se usa el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente.

A cada número natural le sigue otro natural que se obtiene agregando 1 al anterior. Así aparece la operación de *sumar*. Sumar 1 es nombrar al siguiente número natural. Por ejemplo, el siguiente del 5 es el 6, y por eso $6 = 5+1$. De esta manera y según este orden, los primeros naturales son:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

La operación de suma se extiende a todos los naturales. Así por ejemplo, como $2 = 1+1$, entonces $5+2$ es el "siguiente del siguiente de 5", es decir que $5+2 = 7$.

Para indicar que un número está *antes* que otro se usa el signo $<$, y se lee "menor que". Así por ejemplo, $2 < 5$ se lee "2 es menor que 5", e indica que 2 está antes que el 5. Del mismo modo, el símbolo $>$ se utiliza para indicar que un número está *después* que otro y se lee "mayor que".

La suma repetida de un mismo número se llama *multiplicación*, o también usaremos el término *producto*. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es

$$8+8+8+8+8 = 5\cdot 8 \quad \text{y además}$$

$$\underbrace{8+8+8+8+8}_{5\text{ veces}} = \underbrace{5+5+5+5+5+5+5+5}_{8\text{ veces}}.$$

Así como la multiplicación por un natural es una suma iterada de términos iguales, se conviene en representar la multiplicación iterada como una *potencia*:

$$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 8^4.$$

En este caso, 8 se llama la *base* y 4 el *exponente*. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma.

Notemos por ejemplo que:

$$5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6, \qquad \text{puesto que}$$
$$\underbrace{(5\cdot 5)}_{2}\cdot\underbrace{(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)}_{4} = \underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot}_{6}.$$

> La multiplicación de dos potencias de igual base es otra potencia con la misma base, y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

La *resta* entre dos números, por ejemplo, 10 y 2, es el número que hay que sumarle a 2 para obtener 10. Se denota con el signo $-$. Decimos entonces que

$$10-2=8 \qquad \text{porque} \qquad 8+2=10.$$

§ Números enteros

Ahora consideremos el siguiente problema:

Hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3.

Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si sumamos un natural a 5 obtendremos otro natural *mayor* que 5, y 3 es menor que 5. Este problema es análogo a querer calcular la resta $3-5$. Es decir, ninguna resta en la que el sustraendo sea mayor o igual que el minuendo puede ser resuelta en el conjunto de los naturales.

La introducción de los *números enteros negativos* y el *cero* sirvió para resolver este tipo de problemas. En primer lugar, el 0 es el número que sumado a cualquier natural da el mismo natural:

$$3+0=3, \qquad 125+0=125.$$

Así queda definida la suma de un natural con el 0 y la resta entre dos naturales iguales:

$$3-3=0, \qquad 125-125=0.$$

Además, para cada natural consideramos el *opuesto* como el número que sumado a él da 0. Así por ejemplo, el número que sumado a 1 da como resultado 0 se lo denota $-\mathbf{1}$ y es el *opuesto* al número natural 1. El opuesto de 2 es $-\mathbf{2}$, el de 3 es $-\mathbf{3}$ y así sucesivamente. Todos los opuestos de los números naturales se denominan *enteros negativos*, y a los naturales se los denomina *enteros positivos*. Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los *Números Enteros*.

Además, así como $-\mathbf{3}$ es el opuesto de 3, también decimos que 3 es el opuesto de $-\mathbf{3}$, y que el 0 es el opuesto de sí mismo. Las operaciones de suma y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto, y la resta queda bien definida entre cualquier par de números enteros. En efecto, la resta entre dos números enteros se define como la suma de un número y el opuesto del otro:

$$1-4=1+(-\mathbf{4})=-\mathbf{3}, \qquad -\mathbf{7}-\mathbf{15}=-\mathbf{7}+(-\mathbf{15})=-\mathbf{22}.$$

Si bien la resta es una operación cerrada en el conjunto de los enteros, en el sentido que la resta de dos enteros es nuevamente un entero, *no* cumple con las propiedades asociativa ni conmutativa. Estas propiedades se van a presentar con detalle en la sección de números reales.

Al conjunto de los *números enteros* se lo representa con la letra $\mathbb{Z}$. Así como en los naturales existe un orden natural: $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$, etc, en los enteros también hay un orden compatible con el de los naturales o desde una perspectiva más amplia para los números reales, que serán presentados más adelante. Los enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un *sucesor* que se obtiene sumando 1 al número, y un *antecesor*, que se obtiene restándole 1. Por ejemplo, -7 es el antecesor de -6 pues $-6-\mathbf{1}=-7$, y -5 es el sucesor de -6 pues $-6+\mathbf{1}=-5$. La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots.$$

En el conjunto de los números enteros están definidas entonces las operaciones de suma y de multiplicación, y satisfacen las mismas propiedades que se satisfacen para los números naturales. También la potencia de un número con exponente natural se define como la multiplicación iterada del número tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$. Las potencias con exponente negativo no están definidas para los enteros, excepto para 1 y -1. En el conjunto de los números enteros, destacamos dos elementos que cumplen ciertas propiedades especiales: el 0 y el 1.

Propiedades del número 0

- *Elemento neutro para la suma*: Si lo sumamos con cualquier número se obtiene el mismo número. Por ejemplo: $7+0=7, \quad -4+0=-4$.
- *Multiplicación por* 0: La multiplicación por cero siempre da como resultado cero. Por ejemplo: $6\cdot 0 = 0, \quad (-3)\cdot 0 = 0$.
- *Potencia con exponente* 0: Se conviene definir la potencia de un número no nulo con exponente cero, igual a 1. Por ejemplo: $7^0 = 1$ y $(-5)^0 = 1$.

Propiedades del número 1

- *Elemento neutro para la multiplicación*: Si se lo multiplica por cualquier número se obtiene el mismo número; por ejemplo: $4\cdot 1 = 4$, $(-9)\cdot 1 = -9$ y $0\cdot 1 = 0$.

Más adelante, en las clases de álgebra del primer año, se verá que esto implica la siguiente regla general:

Regla de los signos: La multiplicación entre dos enteros negativos o dos enteros positivos es un entero positivo. La multiplicación entre un entero positivo y uno negativo es un entero negativo.

Los números enteros suelen representarse como puntos de una recta. Esto es, se eligen dos puntos distintos, uno representa el 0 y el otro el 1. Así se tiene un segmento unidad. Transportando este segmento hacia un lado de la recta se representan todos los enteros positivos, y hacia el otro todos los enteros negativos. Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún entero. La Figura 2.1 es una representación de algunos números enteros:

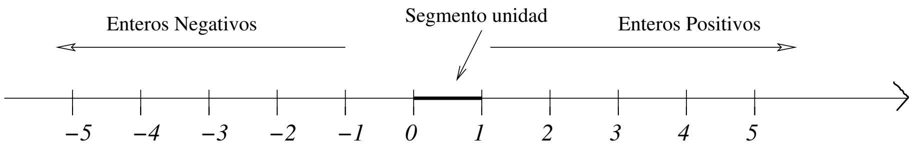


Figura 2.1: Representación de los números enteros en una recta

Valor absoluto

El valor absoluto de un entero positivo o cero es el mismo número, y el valor absoluto de un entero negativo es su opuesto. Se denota encerrando el número entre barras. Por ejemplo: $|3| = 3$, $|-4| = 4$ y $|0| = 0$.

La división entera

Hemos dicho que si se efectúan sumas, restas y multiplicaciones de números enteros se obtienen números enteros, por lo que se dice que este conjunto es *cerrado* respecto a estas operaciones. Existe otra operación en el conjunto de los números enteros llamada la *división entera*. La *división entera* es una operación que sólo tiene sentido en el conjunto de los números enteros y también en el de los naturales si le agregamos el 0. La división entera entre dos números, llamados *dividendo* y *divisor*, permite hallar otros dos números enteros, llamados *cociente* y *resto*. El resto es un entero no negativo y menor que el *valor absoluto* del divisor, y tal que si se le suma el producto entre el divisor y el cociente se obtiene el dividendo.

Por ejemplo, la división entre 27 y 6 tiene como cociente 4 y como resto 3 pues

$$27 = 6 \cdot \mathbf{4} + \mathbf{3}.$$

También, si dividimos -124 por -50, entonces el cociente es 3 y el resto es 26 dado que

$$-124 = (-50) \cdot 3 + 26,$$

o si dividimos 1500 por 125 el cociente es 12 y el resto es 0 puesto que $1500 = 125 \cdot 12 + 0$.

Si el resto de la división es 0 se dice que el divisor *divide* al dividendo, o que el dividendo es *divisible* por el divisor o que el dividendo *es múltiplo* del divisor. Por ejemplo, 8 es divisible por 4, o bien, 4 es divisor de 8, u 8 es múltiplo de 4 puesto que $8 = 4 \cdot 2 + \mathbf{0}$.

Ahora bien, notemos que si bien el cociente entre 27 y 6 es 4, no es cierto que $4 \cdot 6$ sea igual a 27. Por lo tanto la *división entera no es la operación inversa a la multiplicación*. Así como con los naturales no podemos resolver el problema de hallar el número que sumado a 5 dé como resultado 3, en el conjunto de los números enteros no es posible resolver problemas tal como *hallar el número que multiplicado por 6 sea igual a 27*. Para solucionar este problema se introduce un nuevo conjunto numérico en la siguiente sección.

§ Números racionales

Siempre que medimos algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., utilizamos una *unidad de medida*. Así es que *medimos* cuántas veces cabe nuestra unidad en aquello que queremos medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y debemos *fraccionarla*. Es así como surgieron históricamente las *fracciones*. Siglos más tarde, a estas *fracciones* se les dio una categoría de *números*, ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo:

Hallar el número que multiplicado por 5 dé como resultado 2.

La solución de dicho problema es la fracción $\frac{2}{5}$, y se lee ”dos quintos”. Las fracciones se representan como cocientes entre dos enteros, llamados *numerador* y *denominador* respectivamente, siendo el denominador distinto de 0. Por ejemplo

$$\frac{7}{3}, \qquad \frac{-2}{8}, \qquad \frac{0}{-5}, \qquad \frac{3}{3}.$$

Toda fracción multiplicada por su denominador es igual al numerador. Por ejemplo, la fracción $\mathbf{\frac{2}{5}}$ multiplicada por 5 es igual a 2:

$$5 \cdot \mathbf{\frac{2}{5}} = 2. \tag{2.1}$$

Si multiplicamos la ecuación (2.1) en ambos miembros por 2, obtenemos

$$10 \cdot \mathbf{\frac{2}{5}} = 4.$$

Pero la fracción $\mathbf{\frac{4}{10}}$ cumple la misma propiedad:

$$10 \cdot \mathbf{\frac{4}{10}} = 4.$$

Notemos entonces que las fracciones $\mathbf{\frac{2}{5}}$ y $\mathbf{\frac{4}{10}}$ representan ambas al número que multiplicado por 10 es igual a 4. Esto sugiere que las fracciones

$$\mathbf{\frac{2}{5}} \quad \text{y} \quad \mathbf{\frac{4}{10}}$$

resuelven ambas un mismo problema. Es por ello que se dice que estas fracciones son *equivalentes*.

Las *fracciones irreducibles* son aquellas cuyo numerador y denominador no son ambos divisibles por un mismo entero, excepto 1 y -1. Estas fracciones tienen la propiedad que toda fracción equivalente a ella se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por un mismo entero no nulo. Por ejemplo, $\frac{-10}{9}$ es una fracción irreducible, y algunas de sus fracciones equivalentes son:

$$\frac{10}{-9}, \qquad \frac{-20}{18}, \qquad \frac{-30}{27}, \qquad \ldots$$

Los *números racionales* se construyen a partir de los números fraccionarios, considerando a todas las fracciones equivalentes como un solo número. Por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ son distintas, pero todas representan el mismo número racional. Así, como números racionales, tenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Al conjunto de los *números racionales* se lo denota con la letra $\mathbb{Q}$ e incluye al conjunto de números enteros, y por lo tanto a los números naturales. En efecto, cada número entero está representado por una fracción con denominador 1, o una equivalente. Por ejemplo, 2 es el número racional representado por la fracción $\frac{2}{1}$ o $\frac{4}{2}$, o cualquiera de sus equivalentes.

Los números racionales suelen expresarse en notación *decimal*, por ejemplo,

$$\frac{5}{10} = 0,5.$$

Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal *finita*, y se denominan *fracciones decimales*. Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$, por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como $0,28$. Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina período. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como $0,333\ldots$, y su período es 3. Para denotar el período se lo suele marcar con un arco $\frown$ sobre él.

Así tenemos los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100} = 0,06; \qquad \frac{6}{9} = 0,6666\ldots = 0,\overset{\frown}{6}\,; \qquad \frac{3549}{990} = 3,58484\ldots = 3,5\overset{\frown}{84}\,.$$

Una observación es que todas las fracciones decimales también tienen una representación decimal infinita periódica. Por ejemplo, $1 = 0,\overset{\frown}{9}$ ya que

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\overset{\frown}{3} = 0,\overset{\frown}{9}\,.$$

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación decimal finita, o infinita periódica. Así por ejemplo,

$$\frac{7}{4}, \qquad \frac{14}{8}, \qquad \frac{35}{20}, \qquad \frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal finita $1{,}75$. También,

$$\frac{14}{6}, \qquad \frac{21}{9} \qquad \frac{35}{15},$$

se representan en notación decimal con $2,\overset{\frown}{3}\,$.

Operaciones entre racionales

La suma y la resta de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (la resta respectivamente) de los numeradores. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3}.$$

En particular, tenemos que

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

por ello decimos que $\frac{-2}{3}$ es el racional opuesto a $\frac{2}{3}$, y escribimos

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Si los denominadores son distintos el problema de sumar y restar fracciones se reduce a buscar dos fracciones del mismo denominador equivalentes a las dos fracciones dadas, por lo que la metodología se reduce a transformar las fracciones a común denominador. Por ejemplo, para sumar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, buscamos un denominador que sea múltiplo de 2 y de 3, como puede ser el 6:

$$\frac{1}{2} = \frac{3\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{3}{6}, \qquad \frac{1}{3} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{2}{6}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

En este caso el denominador se obtuvo como la multiplicación de los denominadores, pero es suficiente encontrar un denominador que sea múltiplo común de los denominadores. Así, para restar $\frac{7}{12}$ y $\frac{8}{15}$, observamos que 60 es múltiplo de 12 y 15. Entonces

$$\frac{7}{12} - \frac{8}{15} = \frac{7\cdot 5}{12\cdot 5} - \frac{8\cdot 4}{15\cdot 4} = \frac{35}{60} - \frac{32}{60} = \frac{35-32}{60} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

La multiplicación entre dos racionales se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo,

$$\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2\cdot(-4)}{7\cdot 3} = -\frac{8}{21}.$$

Observemos que las siguientes multiplicaciones tienen como resultado el número 1:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1, \qquad \frac{-5}{2}\cdot\frac{-2}{5} = \frac{10}{10} = 1.$$

Un número racional es el ***inverso*** de otro
si la multiplicación entre ambos es igual a 1.

Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como igual a la potencia del inverso con el exponente cambiado de signo. Por ejemplo:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}.$$

La *división* de un número racional por otro debe entenderse como la multiplicación del primero por el inverso del segundo. Por ejemplo, la división del número racional 3 por la fracción $\frac{5}{4}$ consiste en multiplicar 3 por $\frac{4}{5}$.

La operación de división se simboliza con dos puntos $:$ o también con la línea de fracción:

$$3 : \frac{5}{4} = \frac{12}{5}; \qquad \text{o también} \qquad \frac{3}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{12}{5}.$$

La representación de los números racionales en notación decimal simplifica notablemente el cálculo en las operaciones, ya que se opera de manera similar a las operaciones entre enteros, teniendo siempre en cuenta la posición de la coma decimal. Por otro lado, también simplifica la comparación entre dos números racionales. Por ejemplo, no es obvio a simple vista cuál de los siguientes racionales es mayor: $\frac{15}{8}$ o $\frac{17}{10}$. Sin embargo, si los escribimos en notación decimal es sencillo notar que $1{,}875$ (igual a quince octavos) es mayor que $1{,}7$.

Representación de los números racionales en la recta

Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$ se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta.

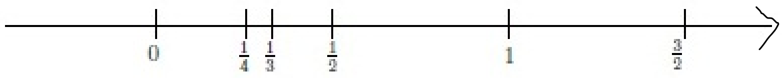


Figura 2.2: Representación de números racionales en una recta

Entre dos números enteros existe sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y -4 hay sólo 8 números enteros; ¿pero cuántos números racionales hay? La respuesta es: ¡infinitos! Lo mismo ocurre para cualquier par de números racionales distintos que tomemos.

Para ver esto basta tomar el promedio entre ambos y al resultado promediarlo con alguno de ellos, repitiendo el proceso indefinidamente. Por ejemplo, tomemos el 0 y el 2. Ambos son números racionales. Su promedio es el número que está entre ambos y equidista de los dos, y es igual a la semisuma de los dos números: $\frac{0+2}{2} = 1$. El número 1 está entre 0 y 2 y es racional. Calculemos ahora el promedio entre 1 y 0: $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Nuevamente obtenemos un número racional; y repitiendo este proceso obtenemos una sucesión infinita de números racionales distintos, todos entre 0 y 2:

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{0+\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}, \quad \frac{0+\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32}\cdots$$

Significa esto que si representamos todos los números racionales en una recta, ¿habremos ”llenado” toda la recta? Veremos que no es así, que cualquiera sea el segmento unidad que usemos, siempre quedarán puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional.

§ Números irracionales

Si pudiéramos marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales advertiríamos que quedarían aún infinitos puntos sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos de la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos:

determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno, y determinar la longitud de una circunferencia de radio uno, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales.

Como sabemos aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Sin embargo no existe ningún número racional que cumpla la propiedad que elevado al cuadrado sea igual a 2. Esto significa que si tomamos al lado del cuadrado como unidad de medida, no es posible fraccionarlo de tal manera que estas fracciones de unidad *entren* un número entero de veces en la diagonal. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama *raíz cuadrada de* 2 y se lo denota $\sqrt{2}$. Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales son menores y cuáles mayores que él. [1]

La Figura 2.3 muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta: el arco de circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con el número $\sqrt{2}$:

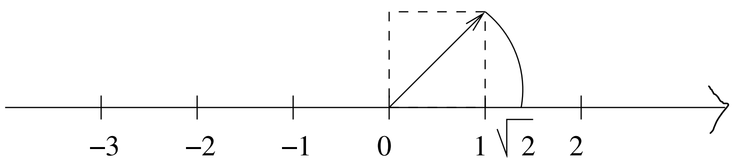


Figura 2.3: Ubicación en la recta numérica de $\sqrt{2}$

Los números irracionales tienen también una representación decimal, y esta expresión decimal es *infinita no periódica*. Por ejemplo, un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo 0 de dos unos , el tercero de tres unos, y así sucesivamente:

$$235,01\,011\,0111\,01111\,011111\,0111111\,01111111\ \ldots$$

representa un número irracional porque no puede identificarse un "período" en la parte decimal del mismo. Si bien parecería poco frecuente estos tipos de números, los mismos constituyen, como dijimos, un conjunto infinito. Algunos de los números irracionales que se utilizan con frecuencia son π: razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro, e: número de Neper y base del logaritmo natural y M: logaritmo en base 10 del número e. Los primeros 15 dígitos decimales de estos números se listan a continuación:

$$\pi = 3,141592653589793\ldots$$

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

$$M = \log_{10}(e) = 0,434294481903252\ldots$$

§ Números reales

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ y está formado por todos los números racionales e irracionales. Este conjunto está en biyección con los puntos de una recta. Esto significa que si consideramos

[1] La demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional no será tema de este Curso, y se estudiará en las asignaturas Álgebra I, Matemática Discreta I y Análisis Matemático I.

una recta, entonces es posible hacer corresponder a cada número real un punto de la recta, y a cada punto de la recta un único número real. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son cerradas en los reales. Además todo número real distinto de cero tiene un inverso. El inverso de un número racional distinto de 0 es un número racional, y el inverso de un número irracional es un número irracional.

Potenciación y radicación

La potencia de un número real con exponente entero se define de la misma manera que para los números racionales. Notemos que las potencias con base no nula y exponente par son siempre positivas, por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9, \qquad (-2)^4 = 16, \qquad 3^4 = 81.$$

En particular, cualquier número y su opuesto elevados a un exponente par dan el mismo resultado. Por lo tanto, si queremos hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 tendremos dos soluciones: 4 y -4. Para distinguir entre ellas, utilizaremos una notación diferente para cada una. Esto es, escribiremos

$$\sqrt{16} = 4, \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{16} = -4.$$

En general, para cualquier número positivo a, definiremos la raíz cuadrada positiva de a como el número *positivo* b tal que $b^2 = a$, y lo denotaremos $b = \sqrt{a}$.

$$b = \sqrt{a} \qquad \text{si } b \text{ es positivo y } b^2 = a.$$

De manera análoga definimos la raíz cuarta positiva, raíz sexta positiva, y demás raíces con índice par. Así por ejemplo,

$$\sqrt[4]{81} = 3, \qquad -\sqrt[6]{64} = -2, \qquad \sqrt{100} = 10.$$

Por otro lado, las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando. Por lo tanto no es necesario hacer la distinción entre la raíz positiva y la negativa. Así por ejemplo

$$\sqrt[3]{64} = 4, \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{-64} = -4.$$

Para denotar la radicación con índice natural también se utiliza la notación con exponente fraccionario:

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}, \qquad \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}},$$

y de esta manera se puede extender la definición de potenciación de un número real <u>*positivo*</u> con cualquier exponente racional:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}, \qquad 12^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{12}\right)^2}.$$

Además, es posible definir la potenciación de un número real positivo con cualquier exponente real, tema que excede a los objetivos de este curso. La potenciación con base real negativa no siempre da como resultado un número real, y sólo se puede dar una definición general en el campo de los números complejos. Conjunto numérico el cual será introducido más adelante.

Es importante notar que la potenciación y la radicación no son distributivas con respecto a la suma y la resta. Por ejemplo $(3+5)^2 = 64$ y $3^2+5^2 = 34$ por lo cual $(3+5)^2 \neq 3^2+5^2$.
Asimismo $(3-5)^2 = 4$ y $3^2-5^2 = -16$ por lo que $(3-5)^2 \neq 3^2-5^2$.

La siguiente propiedad es conocida como **diferencia de cuadrados**: La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos números.

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta, y suele ser muy útil a la hora de realizar ciertos cálculos.

Así por ejemplo,

$$(3^2 - 5^2) = (3-5)(3+5).$$

Para estos números no hay mayor dificultad entre resolver la diferencia de los cuadrados $3^2 - 5^2 = 9 - 25$ o la multiplicación entre la diferencia y la suma de los números $(3-5)(3+5) = (-2)\cdot 8$.

Pero si se desea calcular

$$821^2 - 820^2$$

entonces es más sencillo resolver $(821-820)(821+820) = 1641$ que calcular la diferencia entre los cuadrados de 821 y 820.

Listamos a continuación algunas propiedades de las operaciones en los números reales:

Propiedad conmutativa. Intercambiar el orden de los números en una suma o en una multiplicación no afecta el resultado.

$$5+6 = 6+5 = 11 \qquad \text{y} \qquad 2\cdot 3 = 3\cdot 2 = 6.$$

Propiedad asociativa. El orden en que se agrupan los términos de una suma o los factores en una multiplicación no altera el resultado.

$$2+(3+4) = (2+3)+4 = 9, \qquad 2\cdot(3\cdot 4) = (2\cdot 3)\cdot 4 = 24.$$

Propiedad distributiva. La multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta, en tanto que la potencia es distributiva con respecto al producto y la división.

$$(2+1)\cdot 3 = 2\cdot 3 + 1\cdot 3 \qquad (2-1)\cdot 3 = 2\cdot 3 - 1\cdot 3,$$

$$(3\cdot 4)^2 = 3^2\cdot 4^2, \qquad (6:2)^3 = 6^3 : 2^3.$$

Propiedad de las potencias. El producto y el cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, siendo los exponentes iguales a la suma y a la diferencia de los exponentes, respectivamente.

$$2^3\cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7, \qquad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

Propiedad de las raíces. La radicación es distributiva respecto del producto y el cociente.

$$\sqrt[3]{27\cdot 64} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}, \qquad \sqrt[4]{81:16} = \sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{16}.$$

Recalcamos que cada propiedad se satisface además en los otros conjuntos numéricos, siempre que tengan sentido en el mismo. Por ejemplo:

$$\sqrt{2\cdot 18} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{18},$$

es cierta en el conjunto de los números reales, pero no lo es en el conjunto de los racionales, puesto que ni $\sqrt{2}$ ni $\sqrt{18}$ son racionales.

Valor absoluto

Al igual que lo definimos para los números enteros, el valor absoluto de un número real positivo o cero se define como el mismo número, y el de un número negativo es su opuesto. En cualquier caso se denota encerrando entre barras al número. Así por ejemplo,

$$|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}, \qquad |\pi| = \pi.$$

Podemos además calcular el valor absoluto del resultado de una operación aritmética:

$$|2-5\cdot 3| = |-13| = 13, \qquad |\sqrt[3]{-8}+3| = |-2+3| = 1, \qquad \left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}.$$

El valor absoluto no es distributivo con respecto a la suma, pero sí lo es con respecto al producto y a la potenciación. Entonces por ejemplo se cumple que:

$$|3\cdot(-5)| = |3|\cdot|-5|, \qquad |(-2)^5| = |-2|^5.$$

§ Números complejos

Es importante notar que en el conjunto de los números reales no está definida la raíz cuadrada de un número negativo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de -1 debería ser un número real que al cuadrado sea igual a -1, pero esto no es posible porque el cuadrado de **cualquier número real** es positivo o es 0. Lo mismo ocurre si quisiéramos encontrar un número que al cuadrado sea igual a -2, o -100.

Para superar este problema se define la *unidad imaginaria*, denotada con la letra i, como el *número* con la propiedad que $i^2 = -1$. A partir de este número *imaginario* se construye el conjunto de números *complejos* como el formado por todas las expresiones de la forma $a+b\,i$, donde a y b son números reales. Son ejemplos de números complejos los siguientes:

$$2+3\,i, \quad 4-4\,i, \quad -8+0\,i, \quad 0+7\,i.$$

Al conjunto de los números complejos se lo denota con la letra $\mathbb{C}$.

En un número complejo de la forma $a+b\,i$, se llama *parte real* al número a y *parte imaginaria* al número b. Así por ejemplo, $5-\sqrt{2}\,i$ tiene parte real 5 y parte imaginaria $-\sqrt{2}$. En particular, los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es 0. Por ejemplo $7 = 7+0\,i$. Los números complejos cuya parte real es 0 se denominan *números imaginarios puros*, por ejemplo: $2\,i$. Los números imaginarios puros resuelven el problema de hallar las raíces cuadradas de números reales negativos. Por ejemplo, $2\,i$ y $-2\,i$ son las raíces cuadradas de -4, puesto que $(2\,i)^2 = 2^2\cdot i^2 = -4$ y $(-2\,i)^2 = (-2)^2\cdot i^2 = -4$.

Para cada número complejo $a+bi$, se define su *conjugado* como el número $a-b\,i$, y se lo denota $\overline{a+b\,i}$. Así por ejemplo:

$$\overline{2-3\,i} = 2+3\,i, \qquad \overline{1+7\,i} = 1-7\,i, \qquad \overline{-5+8\,i} = -5-8\,i.$$

Es decir, el conjugado de un número complejo tiene la misma parte real, y la parte imaginaria cambiada de signo. De esta definición se deduce que el complejo conjugado de cualquier número real es el mismo número real; por ejemplo: $\overline{-8} = -8$, mientras que el complejo conjugado de un número imaginario puro es el opuesto; por ejemplo: $\overline{-8\,i} = 8\,i$.

En el conjunto de los números complejos están definidas las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La suma y la resta de dos complejos se realiza sumando (restando) las partes real e imaginaria, respectivamente. Por ejemplo,

$$(3+5\,i)+(2-i) = (3+2)+(5-1)\,i = 5+4\,i,$$

$$(3+5\,i)-(2-i) = (3-2)+(5-(-1))\,i = 1+6\,i.$$

En el caso de la multiplicación, se aplica la propiedad distributiva teniendo en cuenta la propiedad del número i:

$$(3+5\,i)\cdot(2-i) = 3\cdot 2-3\,i+10\,i-5\,i^2 = 6+7\,i+5 = 11+7\,i.$$

Todo número complejo distinto de cero tiene un *inverso*. El inverso del número complejo $a+b\,i$ es $\dfrac{a-b\,i}{a^2+b^2}$. En efecto,

$$(a+b\,i)\cdot\frac{a-b\,i}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Así, el inverso de $3-4\,i$ es $\dfrac{3+4\,i}{3^2+4^2}$, o más precisamente $\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}\,i$.

De esta manera, al igual que para los números reales, se define la división por un número complejo no nulo como la multiplicación por su inverso. Así por ejemplo:

$$\frac{2-3\,i}{3-4\,i} = (2-3\,i)\cdot\frac{3+4\,i}{25} = \frac{(6+12)+(8-9)\,i}{25} = \frac{18-i}{25} = \frac{18}{25}-\frac{1}{25}\,i.$$

Volveremos sobre los números complejos cuando tratemos la resolución de ecuaciones de segundo grado. Allí nos será útil aplicar las siguientes propiedades:

- La suma de un número complejo y su conjugado siempre es un número real.

$$a+b\,i+(a-b\,i) = 2a.$$

- La multiplicación entre un número complejo y su conjugado siempre es un número real, no negativo:

$$(a+b\,i)\cdot(a-b\,i) = a^2+b^2.$$

Ejercicios

1. Realizar los siguientes cálculos.

a) $(5+2\cdot(-4))^2:(-3)-(5\cdot(-4)+(-6))=$

b) $3-(-4+\frac{5}{2})=$

c) $\dfrac{-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5}\right)}{-3}=$

d) $\dfrac{-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}}{-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}=$

e) $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{1}{13}\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}\right)}{(-2)\frac{1}{5}+\frac{3}{5}}=$

f) $\dfrac{-2}{\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)}-\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(-3+\frac{4}{3}\right)}{-\frac{1}{6}}=$

g) $\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)\right)=$

h) $\left(2+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{18}-2\cdot\frac{1}{6}=$

i) $-\frac{1}{6}+\frac{20}{7}\cdot\left(-\frac{14}{5}\right)-\dfrac{\frac{16}{15}}{-\frac{2}{5}}=$

j) $-\dfrac{4}{\frac{1}{5}+6}-\dfrac{-\frac{1}{31}+1}{-\frac{1}{2}}=$

k) $\left(3^{-2}+2^{-1}\right)=$

l) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=$

m) $\left(\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}+1}{1-\dfrac{2}{3-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}}=$

n) $\left(\dfrac{1-\frac{5}{4}}{\sqrt[3]{-\frac{11}{8}-2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}\right)^{-1}=$

2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales y representarlos en una recta numérica:

$$\frac{9}{4};\quad -\frac{2}{3};\quad -\frac{6}{5};\quad \frac{7}{3};\quad -\frac{7}{4}$$

3. Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales y ubicarlos en la recta numérica:

$$\sqrt{\frac{4}{5}};\quad \sqrt{12};\quad \pi;\quad \sqrt{3};\quad 4,\overset{\frown}{3}$$

4. Representar gráficamente en la recta numérica:

   a) los números enteros entre $-5{,}3$ y $10{,}5$,
   b) los números naturales entre $-5{,}3$ y $10{,}5$,
   c) los números racionales entre $-5{,}3$ y $10{,}5$,
   d) los números reales entre $-5{,}3$ y $10{,}5$.

5. Determinar, sin hacer la división de numerador por denominador, cuáles de los siguientes números racionales tienen una representación decimal finita y cuáles no.

$$\frac{37}{5};\quad \frac{19}{3};\quad \frac{57}{6};\quad \frac{270}{75};\quad \frac{28}{700};\quad \frac{17}{4}.$$

6. Realizar los siguientes cálculos.

a) $12121212125^2 - 12121212124^2$,
b) $25000029^2 - 25000031^2$,
c) $(115115115 - 115115114)^2$,
d) $(25299999 - 25300001)^2$.

7. Escribir al menos 10 números racionales que estén comprendidos:

   a) entre 0 y 1
   b) entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$
   c) entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

8. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes:

   a) $(\sqrt{2}-3)^2 + (\sqrt{2}+3)^2$ es un número irracional.
   b) $(\sqrt{2}-3)^2 \cdot (\sqrt{2}+3)^2$ es un número entero.
   c) $(\sqrt[3]{9})^2 - (\sqrt[3]{8})^2 = \big((\sqrt[3]{9}) - (\sqrt[3]{8})\big)\big((\sqrt[3]{9}) - (\sqrt[3]{8})\big)$
   d) $\left(\sqrt[3]{7}+5\right)^2 = \sqrt[3]{49} + 25$.

9. Indicar si las siguientes igualdades son correctas. Para las incorrectas escribir a qué número es igual el miembro izquierdo de la igualdad.

   a) $\sqrt{25+4} = \sqrt{25} + \sqrt{4}$
   b) $(3+8)^2 = 3^2 + 8^2$
   c) $\sqrt{(-4)^2} = -4$
   d) $\frac{3}{4} + \frac{6}{9} = \frac{3+6}{4+9}$
   e) $\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$
   f) $\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$
   g) $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$
   h) $\frac{8}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9}$
   i) $\left(-\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{(-6)^3}$
   j) $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}$
   k) $2^4 \cdot 3^4 = 6^{16}$
   l) $15^{-2} : 5^{-2} = 3^{-2}$
   m) $(-8)^0 = -1$
   n) $\pi^0 = 1$
   ñ) $2^3 = 3^2$

10. Encontrar el error en el siguiente razonamiento:
    $1^2 = (-1)^2$, *entonces vale que* $\sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2}$. *Simplificando, queda* $1 = -1$.

11. Calcular el valor absoluto de los siguientes números:

$$3; \quad -3{,}5; \quad 4{,}32; \quad 0; \quad -0{,}4.$$

12. La distancia entre dos números reales se define como el valor absoluto de su diferencia. Así por ejemplo, la distancia entre -5 y $2{,}3$ es

$$\mathrm{d}(-5;\, 2{,}3) = |-5 - 2{,}3| = 7{,}3.$$

    Usando esta definición, determinar la distancia entre los siguientes pares de números:

    a) $-3{,}5$ y 3
    b) 2 y $9{,}1$
    c) $-3{,}5$ y $-5{,}3$
    d) 0 y $0{,}5$
    e) 0 y $-3{,}4$
    f) -2 y 2

13. Calcular

a) $\left(5^{-2}+12^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} =$ b) $\left(5^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(12^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} =$

14. Resolver sin utilizar calculadora:

a) $27^{\frac{2}{3}} =$ c) $8^{\frac{2}{3}} =$ e) $32^{0,4} =$
b) $49^{\frac{3}{2}} =$ d) $(0,125)^{-\frac{1}{3}} =$ f) $32^{-\frac{3}{5}} =$

15. Resolver las siguientes operaciones de números complejos:

a) $(2+3\,i)+(4-2\,i) =$ d) $(2+5\,i)-\overline{(2+5\,i)} =$ g) $i^4 =$
b) $(2+3\,i)-(4-2\,i) =$ e) $(1+i)\cdot(1-i) =$ h) $(-i)\cdot(2\,i) =$
c) $\overline{(-3+2\,i)}+3 =$ f) $(1+i)\cdot(2-i) =$ i) $(1+i)^6 =$

SECCIÓN 2.2

Expresiones algebraicas

§ Introducción

La importancia relevante del Álgebra es poder, a través de ella, escribir simbólicamente una determinada situación problemática mediante ecuaciones, desigualdades u otras expresiones matemáticas. También permite la generalización de un determinado tipo de problemas o situaciones haciendo uso de "letras" que representan números.

En este punto es conveniente diferenciar desde el principio que existen distintos usos de las letras en el álgebra. En algunos casos representan un número desconocido o *incógnita* que se desea averiguar. En otros casos representan *constantes del problema*, las cuales no cambian en la situación planteada. También están las llamadas *variables* o *indeterminadas*, que como su nombre lo indica, adoptan distintos valores. En general en una misma situación aparecen dos o más variables y éstas están vinculadas por alguna relación.En otros casos las letras se utilizan para *generalizar* números, representando entonces a todo un rango numérico.

En este capítulo presentaremos algunos ejemplos a modo de ilustrar el uso de las letras en el álgebra. En particular nos referiremos a su uso para la generalización de fórmulas y propiedades numéricas, como representación de incógnitas en ecuaciones, y en polinomios en una variable.

Estos no son los únicos usos que se dan a las letras en el álgebra, también pueden representar parámetros, nombres de funciones, vectores, puntos, y muchos más. Más aún, algunos números particulares tienen una representación acordada de manera universal una letra reservada para ellos, como es el caso de algunos números irracionales: π y e. En este capítulo analizaremos algunas situaciones problemáticas y para cada una de ellas plantearemos una expresión algebraica que la represente.

Una *expresión algebraica* es aquella en la que aparecen letras y números ligados con las operaciones numéricas usuales. Algunos ejemplos son:

$$a^3-5x=2, \qquad \Delta=b^2-4ac, \qquad a+b, \qquad x^2\leq y,$$

$$3\sqrt{x}-2, \qquad x^3+30, \qquad 81\left(\sqrt[3]{x}\right)^4+x.$$

Usualmente, para representar constantes o datos se utilizan las primeras letras del abecedario o del alfabeto griego (*a*, *b*, *c*, ..., o $\alpha,\beta,\gamma,$...) , mientras que para representar variables o incógnitas suelen usarse las últimas letras (x, y, z, w, $\ldots$). No obstante recalcamos que la elección de las letras no siempre es esa.

§ Generalización de fórmulas y propiedades numéricas

Para expresar simbólicamente la suma entre los números 5 y 3, escribimos la fórmula $5+3$. Para representar que esta suma es conmutativa, escribimos $5+3=3+5$. Ahora bien, para indicar que la suma es conmutativa cualquiera sean los números que intervengan en la operación, resulta materialmente imposible explicitarlo para cada par de números en particular. Entonces podemos utilizar letras, a y b por ejemplo, para simbolizar los números y escribir:

$$a+b=b+a, \qquad \text{para cualquier par de números } a,b.$$

En esta expresión algebraica a y b representan números, no necesariamente distintos aunque las letras sean distintas. No son incógnitas, puesto que no nos interesa conocer el valor de a ni de b, simplemente nos sirven para *generalizar* una fórmula, $a+b$, y una cierta propiedad numérica que se cumple para los números reales.

Otros ejemplos similares sirven para indicar la **propiedad asociativa del producto**:

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c, \qquad a,b,c \text{ números reales,}$$

o la **propiedad distributiva del producto con respecto a la suma**:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c, \qquad a,b,c \text{ números reales.}$$

Otros enunciados pueden involucrar letras y números en particular. Por ejemplo, decimos que 5 es el siguiente o sucesor de 4 porque $5=4+1$, y para enunciarlo de una forma general decimos que si n es un número natural entonces $n+1$ es su **sucesor**. A su vez, para indicar la suma de un número con su sucesor escribimos $n+(n+1)$.

Observemos que si utilizamos una letra a para representar cualquier número real, entonces a podría asumir un valor positivo, negativo o 0. Así por ejemplo, $2a+1$ puede representar $2\cdot 100+1$ o $2\cdot(-32)+1$. Por otra parte, la expresión $-a$ simboliza al opuesto de a. Entonces si damos a a el valor -3, entonces $-a$ representa al número 3.

§ Incógnitas y ecuaciones

Las incógnitas de un problema son aquellos valores que interesan ser conocidos y no están explícitamente dados en el problema.

Ejemplo 1. Hallar el número que elevado al cubo es igual a 27.

En este problema existe una única incógnita, y tiene la propiedad de que su cubo es 27. Aún cuando es inmediato darse cuenta que se trata del número 3, este número no está dado en el problema explícitamente y por ello es una incógnita. Para plantear algebraicamente el problema simbolizamos con una letra a la incógnita, por ejemplo, x. Entonces x tiene la siguiente propiedad:

$$x^3=27. \tag{2.2}$$

No nos interesará en este capítulo resolver estas ecuaciones, sino comprender el uso de las letras para representar incógnitas. Veamos el siguiente caso.

Ejemplo 2. El área de un cuadrado menos el doble de lo que mide el lado es igual a 3. ¿Cuánto mide el lado?

Este problema aparenta tener dos incógnitas: el área del cuadrado y la longitud del lado. Pero debemos recordar de la geometría que el área de un cuadrado es igual a la longitud del lado elevada al cuadrado. Así, si denotamos con x a la longitud del lado nuestro problema se plantea algebraicamente de la siguiente manera:

$$x^2 - 2 \cdot x = 3. \qquad (2.3)$$

Las expresiones (2.2) y (2.3) que hemos obtenido en los ejemplos anteriores: $x^3 = 27$, y $x^2 - 2x = 3$, no son identidades que se cumplen para todo valor de x sino que sólo son ciertas para algunos valores de x, o quizás para ninguno. La presencia del signo $=$ no indica que las expresiones a cada lado sean iguales. Por el contrario, se pretende hallar los valores de las incógnitas que hagan cierta dicha identidad, y este tipo de igualdades se denominan ecuaciones.

> Una *ecuación* es una igualdad entre expresiones algebraicas que involucra una o más incógnitas. Los valores de las incógnitas que verifican la igualdad son las *soluciones* de la ecuación.

Así tenemos que 3 es una solución de la ecuación (2.2), mientras que 3 y -1 son soluciones de la ecuación (2.3)[2]. Pero ¡atención!, sólo 3 es solución del segundo problema, porque -1 es negativo y no puede ser la medida del lado de un cuadrado. Esto es importante, al resolver la expresión algebraica, debemos asegurarnos que estas soluciones tengan sentido en nuestro problema.

En algunos casos la ecuación puede involucrar letras que no son incógnitas sino que generalizan números. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - ax = 0, \qquad a \text{ un número real cualquiera,}$$

representa en realidad una familia de ecuaciones, una para cada valor de a. Vemos en este caso que a y 0 son soluciones de la ecuación. Esto significa que si tomamos un valor de a específico, por ejemplo $a = 5$, entonces

$$x^2 - 5x = 0$$

tiene dos soluciones: 5 y 0. Pero para un valor diferente de a, por ejemplo $a = -2$, las soluciones de $x^2 + 2x = 0$ son -2 y 0.

Ejemplo 3. Dar el área de un rectángulo conocida la longitud de un lado y una diagonal.

Si bien no hay datos numéricos en el problema, lo que se busca es hallar una relación entre el área del rectángulo A y la medida de un lado l y una diagonal d. En principio sabemos que el área A es igual al producto de las longitudes de dos lados consecutivos del rectángulo, digamos

$$A = L \cdot l.$$

A uno de estos lados (cualquiera de ellos) se lo denomina *base* y al otro *altura*.

[2] La resolución de ecuaciones de segundo grado es tema de un capítulo posterior.

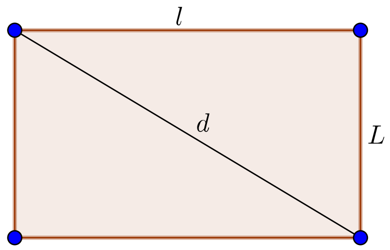


Figura 2.4: Ejemplo 4

Por el Teorema de Pitágoras sabemos que $L^2 + l^2 = d^2$, y por lo tanto $L = \sqrt{d^2 - l^2}$. Así, la fórmula $A = l \cdot \sqrt{d^2 - l^2}$ nos permite determinar el área A de un rectángulo en términos de un lado y una diagonal, cualquiera sea el rectángulo.

Ejemplo 4. En la compra de un libro de Física y uno de Álgebra se gastaron $ $4{,}000$, pero el de Física costó $ $1{,}000$ más que el de Álgebra. ¿Cuál fue el precio de cada libro?.

Aquí aparecen dos incógnitas a resolver, el precio de libro de Álgebra y el precio del libro de Física. Convengamos en representar la primera incógnita con la letra a y la segunda con la letra f.

Dado que los dos libros cuestan $ $4{,}000$, significa que la *suma* de sus precios es 4000. Esto lo simbolizamos: $f + a = 4000$.

Asimismo, como el precio del libro de Física es $ $1{,}000$ más que el de Álgebra, lo simbolizamos $f = a + 1000$, o también $f - a = 1000$.

El planteo del problema exige que ambas ecuaciones sean satisfechas, y por lo tanto algebraicamente debemos plantear un *sistema de ecuaciones*, que aprenderemos a resolver más adelante:

$$\begin{cases} f + a = 4000 \\ f - a = 1000 \end{cases}$$

En las ecuaciones las incógnitas pueden estar afectadas por potencias, radicaciones, o presentarse en un cociente, como en los siguientes casos:

$$3\sqrt{x} - 2 = 10, \qquad \frac{1}{x^3 + 30} = 3, \qquad 81\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 + 2 = 18.$$

Ejemplos similares a estos serán retomados cuando tratemos la resolución de expresiones algebraicas fraccionarias.

Despejar incógnitas

Con cierta frecuencia nos encontramos con el problema de tener que obtener el valor de una determinada incógnita, la cual se encuentra combinada con números y/o constantes en una misma ecuación. Por ejemplo, queremos determinar la incógnita x en la ecuación

$$2n + x = \sqrt[5]{x - 7}, \tag{2.4}$$

siendo n una constante del problema.

No siempre es sencillo determinar la incógnita, en particular (2.4) es una fórmula un tanto complicada. De hecho, no existe ninguna receta o procedimiento estándar que permita despejar la incógnita en cualquier ecuación. Los pasos a seguir dependerán de la estructura y de las operaciones algebraicas involucradas. Por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{1}{x+2} = 3 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{x} + 2 = 3$$

involucran los mismos números, letras y operaciones, pero la estructura en la que aparecen son distintas, y por lo tanto el procedimiento para despejar la incógnita será diferente.

En todos los casos, la manera de determinar el valor de la incógnita es realizar distintas operaciones en ambos miembros de la ecuación respetando la *propiedad uniforme de la igualdad*, hasta obtener una ecuación en la que la incógnita aparezca "sola" en uno de los miembros y no aparezca en el otro miembro. En este punto diremos que hemos *despejado* la incógnita.

> **Propiedad uniforme:** Si a ambos miembros de una igualdad se les suma o se los multiplica por un mismo número, la igualdad se mantiene.

Al aplicar la propiedad uniforme es frecuente decir que *llevamos* o *pasamos* un término de un miembro al otro. Debemos recordar siempre que la acción de *pasar de miembro* en una ecuación es un resultado de aplicar la propiedad uniforme de la igualdad.

Por ejemplo, es frecuente cometer errores como el siguiente. En la ecuación

$$\frac{1}{x+2} = 3 \tag{2.5}$$

x "está sumando", y por lo tanto "pasa restando", resultando la ecuación

$$\frac{1}{2} = 3 - x.$$

Eso no es correcto, ya que si restamos x en el segundo miembro debimos restar x en el primero. Pero:

$$\frac{1}{x+2} - x \neq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto no se trata de tener en cuenta la operación en la que está directamente involucrada la incógnita, sino de la estructura y las prioridades de las operaciones que aparecen en el miembro de la ecuación correspondiente.

Una forma de no equivocarse en el procedimiento de despejar la incógnita es analizar la expresión de afuera hacia dentro, como en "cáscaras de cebollas". Así, en el miembro izquierdo de la ecuación (2.5) la operación principal es una división, y la incógnita aparece en el divisor. Entonces es conveniente multiplicar por el divisor en ambos miembros:

$$\frac{1}{x+2} \cdot (x+2) = 3 \cdot (x+2).$$

De este modo resulta la ecuación $1 = 3\cdot(x+2)$, o bien $1 = 3x+6$. Ahora x está afectada a una multiplicación. Sin embargo la operación fundamental en el miembro en que figura x es la suma. Restamos en ambos miembros el término 6 y obtenemos $-5 = 3x$, y dividiendo ambos miembros por 3 llegamos a la solución $x = -\frac{5}{3}$.

Ejemplo 5. Despejar a de la siguiente expresión: $y = -25 + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1}\right)$.

Notemos que la letra a despejar, a, se encuentra en el segundo miembro de la ecuación. Miramos entonces a este miembro como un todo, y notamos que es una suma de dos términos:

$$y = \left(-25+8\left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1}\right)\right)$$

Luego restamos a ambos miembros el término que no contiene a la incógnita, y así este término dejará de aparecer en el segundo miembro: $y-(-25) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1}\right)$

Ahora en el segundo miembro tenemos una multiplicación entre el número 8 y una expresión fraccionaria que involucra a la incógnita a despejar. Por lo tanto dividimos ambos miembros de la ecuación por 8, o lo que es lo mismo, multiplicamos por su inverso: $\frac{y+25}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1}\right)$

Si estas dos expresiones a ambos lados del signo "=" son iguales, entonces también son iguales sus inversos. Entonces: $\frac{8}{y+25} = \frac{a^3+1}{\sqrt{2}}$

Ahora corresponde multiplicar ambos miembros por $\sqrt{2}$, de modo que resulta: $\frac{8\sqrt{2}}{y+25} = a^3+1.$

Ya lo que resta por hacer es muy simple. Restamos 1 en ambos miembros y extraemos la raíz cúbica a ambos miembros. Queda entonces la incógnita despejada de la siguiente manera:

$$a = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{2}}{y+25}-1}.$$

§ Polinomios

Las expresiones algebraicas formadas por el producto entre un número real y una potencia de una letra x con exponente natural o cero se denominan *monomios* en x. El número real que multiplica a la potencia de x es el *coeficiente* del monomio y la letra es la *indeterminada*. Por ejemplo, $3x^5$, $-x^7$ son monomios en x, mientras que $3z^5$, z^7 son monomios en z. Para simplificar la notación en esta sección trabajaremos sólo con monomios en la indeterminada x.

Un número real es un monomio en el cual la indeterminada x tiene exponente 0:

$$3 = 3\,x^0,$$

en particular, si el coeficiente es 0 el monomio resulta 0:

$$0x^2 = 0, \qquad 0x^7 = 0.$$

Las potencias de x también son monomios, con coeficiente 1:

$$x^7 = 1x^7.$$

Llamaremos *grado* de un monomio al exponente de x, a excepción del monomio 0 al cual no le asignaremos grado.

- $3x^7$ es un monomio de grado 7.
- $2x$ tiene grado 1.
- 8 tiene grado 0.
- 0 no tiene grado.

La multiplicación o producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados. Por ejemplo,

$$3x^7 \cdot 4x^3 = (3 \cdot 4)x^{7+3} = 12x^{10}.$$

El cociente entre dos monomios es otro monomio siempre que el grado del monomio divisor sea menor o igual al grado del otro monomio. En ese caso, el cociente es un monomio cuyo coeficiente es el cociente entre los coeficientes, y el grado es la diferencia entre los grados. Por ejemplo:

$$\frac{7x^5}{4x^3} = \frac{7}{4}x^{5-3} = \frac{7}{4}x^2, \qquad \frac{12x^5}{3x^5} = \frac{12}{3}x^{5-5} = 4.$$

Si sumamos dos monomios del *mismo* grado cuyos coeficientes no son opuestos, obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes:

$$3x^7 + 5x^7 = (3+5)x^7 = 8x^7,$$

mientras que

$$3x^7 + (-3)x^7 = 0.$$

Del mismo modo, si restamos dos monomios distintos del *mismo* grado obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la resta de los coeficientes:

$$4x^4 - 5x^4 = (4-5)x^4 = -x^4.$$

Pero si sumamos o restamos dos monomios de distinto grado, el resultado no es un monomio. Por ejemplo

$$x^2 + 5x$$

no puede ser expresado como un monomio en x. A este tipo de expresiones se las denomina *polinomios*.

> Un polinomio es una expresión algebraica que resulta
> de la suma de uno o más monomios de distinto grado.

Las siguientes expresiones son ejemplos de polinomios en la indeterminada x:

$$x^5 - 2x^3 + 8, \qquad 3 + 7x^2, \qquad 5x^6.$$

Para denotar a los polinomios en la indeterminada x usaremos notaciones como $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, etc. Llamaremos *grado* de un polinomio $P(x)$ al mayor de los grados de los monomios que lo componen, y lo denotaremos $\mathrm{gr}(P(x))$. Por ejemplo,

- Si $P(x) = 2x^5 - 2x^3 + 8$, entonces $\mathrm{gr}(P(x)) = 5$ porque el monomio de mayor grado es $2x^5$.

- Si $Q(x) = 7-3x^{15}+12x^2$, entonces gr$(Q(x)) = 15$ porque el monomio de mayor grado es $-3x^{15}$.

Igual que para los monomios, no le asignaremos grado al polinomio 0.

En un polinomio no nulo, se denomina *coeficiente principal* al coeficiente del término de mayor grado. Por ejemplo, -3 es el coeficiente principal del polinomio $Q(x) = 7-3x^{15}+12x^2$.

En el conjunto de los polinomios sí es posible definir las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en el sentido que el resultado de estas operaciones entre polinomios es también un polinomio.

Operaciones entre polinomios

> La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando los monomios del mismo grado.

Por ejemplo, para sumar

$$P(x) = x^4-2x^3+8x \qquad \text{y} \qquad Q(x) = 3x^4+x^3-3x^2+x+2$$

sumamos agrupando los monomios del mismo grado:

$$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= (x^4+3x^4)+(-2x^3+x^3)+(0x^2-3x^2)+(8x+x)+(0+2) = \\ &= 4x^4-x^3-3x^2+9x+2 \end{aligned}$$

> La resta de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene restando los monomios del mismo grado.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son como antes, entonces

$$\begin{aligned} P(x)-Q(x) &= (x^4-3x^4)+(-2x^3-x^3)+(0x^2-(-3x^2))+(8x-x)+(0-2) \\ &= -2x^4-3x^3+3x^2+7x-2. \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Dar la suma entre los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3-2x+7x^2+9x^3, \qquad Q(x) = 3-2x+7x^2-9x^3.$$

Notemos que en este caso, como los coeficientes principales de sendos polinomios son 9 y -9 respectivamente, esto hace que los monomios correspondientes se cancelen en la suma, y que el polinomio resultante tenga grado menor que 3. Entonces:

$$P(x)+Q(x) = (3+3)+(-2x-2x)+(7x^2+7x^2)+(9x^3-9x^3) = 6-4x+14x^2.$$

> La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando todos los monomios de uno por todos los monomios del otro.

Esto no es una regla arbitraria sino que resulta de aplicar la propiedad de distributividad de la multiplicación respecto de la suma. Por ejemplo, tomemos $P(x) = 2+x^2$ y $Q(x) = 3+x+x^3$. Entonces

$$\begin{aligned}
P(x)\cdot Q(x) &= (2+x^2)\cdot(3+x+x^3)\\
&= 2\cdot(3+x+x^3)+x^2\cdot(3+x+x^3)\\
&= 2\cdot 3+2\cdot x+2\cdot x^3+x^2\cdot 3+x^2\cdot x+x^2\cdot x^3
\end{aligned}$$

Resolviendo las multiplicaciones entre monomios y sumando los del mismo grado resulta

$$P(x)\cdot Q(x) = 6+2x+3x^2+3x^3+x^5.$$

Notemos que el grado de la multiplicación de dos polinomios es siempre la suma de los grados de los dos polinomios, a menos que uno de los dos sea el polinomio nulo.

La operación de *división* entre polinomios es análoga en cierto modo a la división de números naturales. Esto es, cuando dividimos dos naturales, por ejemplo 26 y 3, decimos que el cociente entre ambos es 8 y el resto es 2. Esto significa que

$$26 = 3\cdot 8+2.$$

El resto tiene la propiedad de ser un número natural o cero y menor que el divisor.

> Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$, siempre existen dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ llamados cociente y resto respectivamente, con la propiedad que
>
> $$P(x) = D(x)\cdot Q(x)+R(x)$$
>
> y tales que, el polinomio resto $R(x)$ es el polinomio nulo ó es un polinomio de grado menor que el grado del polinomio divisor $D(x)$.

Para calcular el cociente y el resto de la división entre dos polinomios existe un algoritmo muy similar al usado en la división entera. Si el polinomio divisor tiene grado mayor que el dividendo, entonces el cociente es el polinomio 0 y el resto es igual al dividendo. Por ejemplo, si

$$P(x) = x^2-3, \qquad \text{y} \qquad D(x) = x^3+x-4,$$

entonces

$$Q(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad R(x) = x^2-3.$$

$$\underbrace{x^2-3}_{P(x)} = \underbrace{(x^3+x-4)}_{D(x)}\cdot\underbrace{0}_{Q(x)}+\underbrace{(x^2-3)}_{R(x)}.$$

Recordemos que algo similar ocurre con el cociente entre números naturales. Si el dividendo es menor que el divisor, por ejemplo, 3 dividido 8, entonces el cociente es 0 y el resto es 3.

Ahora, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el del divisor $D(x)$, entonces el cociente no será el polinomio nulo. Tomemos como ejemplo

$$P(x) = 2x^4-x^3+7x^2-2x-2, \qquad D(x) = 2x^2-x+1.$$

En primer lugar se dividen los monomios de mayor grado de ambos polinomios. En este caso, $2x^4$ y $2x^2$. Como

$$2x^4 = \boxed{x^2} \cdot 2x^2,$$

escribimos x^2 en el cociente. Multiplicamos $D(x)$ por x^2, y restamos el polinomio resultante a $P(x)$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3}
- & 2x^4 - x^3 + x^2 & \mathbf{x^2} \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 - 2x - 2 &
\end{array}$$

Como el polinomio $6x^2 - 2x - 2$ es de grado 2 y 2 no es menor que el grado del polinomio $D(x)$, seguimos dividiendo. Ahora los monomios de mayor grado son $6x^2$ y $2x^2$. Como $6x^2 = 2x^2 \cdot \mathbf{3}$, sumamos 3 al cociente, multiplicamos por 3 al divisor y restamos el polinomio resultante a $6x^2 - 2x - 2$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3}
- & 2x^4 - x^3 + x^2 & \boxed{x^2 + 3} \longleftarrow \text{Cociente} \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 - 2x - 2 & \\
- & 6x^2 - 3x + 3 & \\ \cline{2-2}
 & \boxed{x - 5} \longleftarrow \text{Resto} &
\end{array}$$

Ahora $x-5$ es de grado menor que $D(x)$, y por lo tanto $Q(x) = x^2 + 3$ es el cociente de la división y $R(x) = x - 5$ es el resto. Esto significa que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

es decir

$$\underbrace{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2}_{P(x)} = \underbrace{(2x^2 - x + 1)}_{D(x)}\underbrace{(x^2 + 3)}_{Q(x)} + \underbrace{x - 5}_{R(x)}.$$

Si en una división entre polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ el resto de la división es 0 entonces resulta

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x),$$

es decir, $P(x)$ se escribe como producto de dos polinomios. En ese caso decimos que hemos *factorizado* al polinomio $P(x)$. Por ejemplo, si dividimos $P(x) = x^4 - x^2$ por $D(x) = x^2 - 1$, el resto de la división es 0 y concluimos que $P(x)$ se puede factorizar como producto de dos polinomios

$$x^4 - x^2 = (x^2 - 1) \cdot x^2.$$

Podemos aún factorizar x^2 y $x^2 - 1$ y escribir entonces a $P(x)$ como $x^4 - x^2 = x \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$.

Valor numérico de un polinomio

En un polinomio, la letra x representa una variable o indeterminada. Si a esa variable la reemplazamos por un número real, por ejemplo 5, decimos que hemos *evaluado o determinado el valor numérico del polinomio* en 5.

Ejemplo 7. Calcular el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x + 2$, en $a = 5$ y en $a = 3$.

$$P(5) = 5^3 - 5 + 2 = 125 - 5 + 2 = 122.$$

$$P(3) = 3^3 - 3 + 2 = 27 - 3 + 2 = 26.$$

Por otro lado, si hacemos las cuentas correspondientes, veremos que al dividir $P(x)$ por $x - 5$ obtenemos como resto 122, y si dividimos $P(x)$ por $x - 3$ el resto es 26, que justamente son los números $P(5)$ y $P(3)$ respectivamente o lo que es equivalente, el valor numérico de P en $x = 5$ y el valor numérico de P en $x = 3$. Esto se debe a que

$$P(x) = (x - 5) \cdot Q(x) + R(x),$$

luego

$$P(5) = (5 - 5) \cdot Q(5) + R(5) = R(5).$$

Esto nos dice que $P(5) = R(5)$, y como $R(x)$ es un número entonces no depende de x, y por lo tanto

$$R(x) = R(5) = 122.$$

Este último resultado se llama *Teorema del Resto* y se enuncia así:

Teorema del Resto: Sea a un número y $P(x)$ un polinomio.
La evaluación o valor numérico de $P(x)$ en $x = a$,
es igual al resto de dividir a $P(x)$ por el polinomio $D(x) = x - a$

Si $P(a) = 0$, o equivalentemente, si el resto de la división del polinomio $P(x)$ por $x - a$ es 0, decimos que a es una *raíz* del polinomio $P(x)$.

Ejemplo 8. Si consideramos el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, vemos que

$$P(1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$$

Por lo tanto 1 es raíz del polinomio $P(x)$. Significa que podemos escribir $P(x) = (x - 1)Q(x)$.
Para hallar $Q(x)$ dividimos $P(x)$ por $x - 1$, y así obtenemos la factorización

$$P(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

Nuevamente, podemos ver ahora que $P(-2) = 0$, ya que -2 anula el polinomio $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Significa que podemos escribir $P(x) = (x - 1)(x + 2)S(x)$, donde $S(x)$ se obtiene de la división de $Q(x)$ por $x + 2$. Así llegamos a

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1).$$

Ejercicios

1. Escribir algebraicamente los siguientes enunciados.
   a) El doble de un número.
   b) El opuesto de un número.
   c) La suma de un número y su inverso.
   d) El producto de tres números.
   e) El cuadrado de la suma de dos números.
   f) La diferencia entre el triplo de un número y su doble.
2. Escribir un enunciado que se traduzca en la expresión algebraica dada:
   a) $a-a^2$
   b) $a-b^2$
   c) $|x|$
   d) x^2+5
   e) $(x+5)^2$
   f) $(x+y)^2$
3. Suponiendo que en todos los casos se trata de números enteros, escribir algebraicamente los siguientes enunciados:
   a) La suma de dos números enteros consecutivos.
   b) El producto de tres números enteros consecutivos.
   c) Un número par.
   d) La suma de un número par y uno impar.
   e) La suma de un número par y el impar siguiente.
   f) El doble de un número impar.
4. Escribir una expresión algebraica que represente a los siguientes enunciados:
   a) El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado de uno de ellos, más el cuadrado del otro más el doble producto de ambos.
   b) El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto.
   c) La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de los mismos.
   d) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
5. Escribir una ecuación que represente a los siguientes problemas. Identifique cuál o cuáles son las incógnitas en el problema. Finalmente, encontrar el conjunto solución.
   a) Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo en términos de su cateto menor, sabiendo que un cateto mide el doble que el otro.
   b) El cuadrado de un número es igual al triple del mismo número.
   c) ¿Existen tres enteros consecutivos cuya suma sea 121?
6. Despejar y en las siguientes ecuaciones:
   a) $y=3x+2y+1$
   b) $xy=5$
   c) $x^2+2xy=y-5$
7. Despejar la incógnita que se muestra encerrada entre $\{\ \}$ en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\{n\}$ $\quad I = \dfrac{nE}{R+nr}$

b) $\{S\}$ $\quad T = \sqrt{\dfrac{R-S}{S}}$

c) $\{R\}$ $\quad I = E\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}$

d) $\{M\}$ $\quad B = \dfrac{1}{2}(M+\sqrt{M^2+T})$

8. Para cada uno de los siguientes polinomios, indicar el grado y el coeficiente principal.

   a) $-7x^3+8x^2+20x^5+x$
   b) $1+x^2-x^6+3$
   c) $2^3+3^3x+4^3x^2+5^3x^3$

9. Dados los polinomios $P(x)=3x^2-2x-1$ y $Q(x)=x^3-3x+3$, resolver las siguientes operaciones y dar el grado del polinomio resultante.

   a) $P(x)+Q(x)$
   b) $P(x)-Q(x)$
   c) $P(x)\cdot Q(x)$
   d) $Q(x)\cdot(x-1)$
   e) $P^2(x)-Q^2(x)$
   f) $3\cdot Q(x)-x\cdot P(x)$

10. Calcular el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por $D(x)$.

    a) $P(x)=x^4+x^2+x+1, \quad D(x)=x^2+x+1.$
    b) $P(x)=2x^4-2, \quad D(x)=x-1.$

11. Sin hacer la división, decir cuál es el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $x-a$:

    a) $P(x)=x^3-x+1, \quad a=2.$
    b) $P(x)=x^4+x^3-6x^2+x+3, \quad a=-3.$

12. Los siguientes polinomios son divisibles por $x-a$. Calcular el valor de b en cada caso:

    a) $P(x)=3x^5-2x^3+bx^2-7, a=1.$
    b) $P(x)=x^6-bx^5+3x^2-4x+1, a=-1/2.$

13. Determinar el valor de b para el cual el polinomio $M(x)=x^6+bx^3-5x^2-7$ tiene resto 3 en la división por $x+2$.

14. Escribir un polinomio de grado 5 que sea divisible por x^2-2.

15. Escribir uno o más polinomios de grado 6 cuyo resto en la división por x^5 sea $x+8$.

SECCIÓN 2.3

Ecuaciones lineales

§ Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación es una expresión algebraica que involucra una igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde una o más letras son las llamadas incógnitas. Esto significa que la ecuación no es una identidad cierta para todos los valores de la incógnita sino para algunos, o quizás para ninguno. Por ejemplo, si escribimos:

$$(a+1)^2 = a^2+2a+1,$$

esto no es propiamente una ecuación pues la identidad se cumple cualquiera sea el valor de a. En cambio, si escribimos

$$(a+1)^2 = 9,$$

esta igualdad se cumple sólo si $a = 2$ o si $a = -4$. Es una ecuación con una incógnita.

Las ecuaciones

$$2x - y = 3, \qquad 3x + y = 2z, \qquad t = 2u,$$

tienen la propiedad de que las incógnitas x, y, z y u aparecen sin estar afectadas por una potencia, radicación, ni multiplicadas unas con otras, ni en un denominador. Se dice que estas ecuaciones son **lineales** en cada una de esas incógnitas. Por ejemplo, $2x - y = 3$ es lineal en x y en y, y $t = 2u$ es lineal en t y en u.

En algunas ecuaciones podría estar involucrada una letra que no es una incógnita sino que representa una constante. Por ejemplo, la ecuación

$$ax + 3 = 5,$$

donde a representa un número real cualquiera y x es la incógnita. También en este caso diremos que la ecuación es lineal en x. En cambio, las siguientes no son ecuaciones lineales en las incógnitas x, y y z:

$$2\sqrt{x} + 3x = 8, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad 3xy + 2 = z.$$

Esto es porque en el primer caso, la incógnita x aparece afectada por una raíz. En el segundo caso, las variables están elevadas al cuadrado, y en el tercer caso las incógnitas x e y aparecen multiplicadas entre sí. En esta sección estudiaremos ecuaciones lineales en una y dos incógnitas.

> Las ecuaciones lineales con una incógnita son aquéllas que pueden escribirse de la forma
>
> $$ax + b = c,$$
>
> donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$ y x es la incógnita.

Resolver una ecuación lineal $ax + b = c$ significa encontrar la solución de la ecuación, es decir, el valor de x para el cual la ecuación es cierta. Por ejemplo, 4 no es solución de $3x + 2 = 20$, pues

$$3 \cdot \mathbf{4} + 2 = 14 \neq 20.$$

En cambio 6 sí es solución pues

$$3 \cdot \mathbf{6} + 2 = 20.$$

Dos ecuaciones lineales con una incógnita son equivalentes si tienen la misma solución. Por ejemplo,

$$3x + 2 = 20, \qquad\qquad 7x - 4 = 38$$

son ecuaciones equivalentes pues ambas tienen solución $x = 6$.

Las siguientes operaciones transforman una ecuación en otra equivalente:

- Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero,
- sumar o restar a ambos miembros de la ecuación un número cualquiera.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$2x + 3 = 7,$$

y multiplicamos por 3 ambos miembros, obtenemos

$$6x+9=21,$$

y si le restamos 7 a cada miembro resulta

$$2x-4=0.$$

Notemos que las tres ecuaciones tienen la misma solución $x=2$, por lo que son equivalentes.

Para resolver una ecuación lineal, lo que debemos hacer es aplicar a ambos miembros de la ecuación distintas operaciones que la transformen en una ecuación equivalente donde de un lado de la igualdad aparezca la incógnita y del otro un número que será la solución buscada. De ese modo habremos *despejado* la incógnita.

Ejemplo 1. Despejar la incógnita y resolver la ecuación lineal

$$5x+4=19.$$

Restamos a ambos miembros 4 y obtenemos la ecuación equivalente

$$5x=15.$$

Ahora dividimos ambas por 5 y obtenemos la solución:

$$x=3.$$

En efecto,

$$5\cdot \mathbf{3}+4=19.$$

También podríamos haber dividido primero por 5 y luego haber restado $\frac{4}{5}$ en ambos miembros. La solución es la misma:

$$x+\frac{4}{5}=\frac{19}{5}, \qquad x=\frac{19-4}{5}=\frac{15}{5}=\mathbf{3}.$$

> Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.

§ Sistemas de ecuaciones lineales

Analicemos ahora las ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo:

$$2x-y=3.$$

Encontrar una solución es dar un par de números que satisfagan la ecuación. La diferencia con las ecuaciones lineales con una incógnita es que ahora tendremos infinitas soluciones. Notemos que si despejamos la incógnita y en la ecuación, obtenemos

$$y=2x-3.$$

Entonces para cada valor de x que demos, tendremos un valor de y y este par de números será una solución.

Por ejemplo los siguientes pares de números son solución de la ecuación $2x-y=3$:

$$x=0, \qquad y=-3,$$
$$x=1, \qquad y=-1,$$
$$x=\frac{5}{2}, \qquad y=2.$$

En efecto, si reemplazamos estos valores en la ecuación $y=2x-3$ veremos que se satisface la igualdad:

$$2\cdot\mathbf{0}-(-\mathbf{3})=3, \qquad 2\cdot\mathbf{1}-(-\mathbf{1})=3, \qquad 2\cdot\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}-\mathbf{2}=3.$$

Un *sistema de ecuaciones* es un conjunto formado por una o más ecuaciones. Lo que caracteriza al *sistema* es que se busca una o más soluciones que sean soluciones de *todas* las ecuaciones planteadas en el sistema. En esta sección estudiaremos sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas.

Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x-y &= 3 \\ x+4y &= 8 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x &= 7 \\ x+y &= 6. \end{cases}$$

son dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

No es necesario que las incógnitas aparezcan todas en todas las ecuaciones. Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x &= 3 \\ 4y &= 8 \end{cases}$$

también es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

> Una solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de números que son solución de *ambas* ecuaciones.

Por ejemplo,

$$x=3, \qquad y=5,$$

es una solución del sistema

$$\begin{cases} x+y &= 8 \\ y-x &= 2 \end{cases} \qquad \text{ya que} \qquad \begin{cases} 3+5 &= 8 \\ 5-3 &= 2. \end{cases}$$

En cambio $x=2$, $y=6$ no es solución porque $2+6=8$ pero $6-2\neq 2$.

Puede ocurrir que un sistema no tenga solución, por ejemplo

$$\begin{cases} 3x+y &= 3 \\ 3x+y &= 1. \end{cases}$$

ya que es imposible que exista un par de números x e y para los cuales $3x+y$ sea igual a 3 y a 1 simultáneamente.

Dos sistemas de ecuaciones se dicen *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x-5y &= 16 \\ x+3y &= -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x+y &= 13 \\ x+y &= 1 \end{cases}$$

son equivalentes porque ambos tienen la solución (única) $x=3$, $y=-2$. Notemos que no es necesario que las ecuaciones de uno y otro sistema sean equivalentes.

Por otro lado, los sistemas

$$\begin{cases} 2x-5y &= 16 \\ x+3y &= -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x+5y &= 5 \\ x+y &= 1 \end{cases}$$

no son equivalentes, puesto que si bien $x=3$, $y=-2$ es solución en ambos sistemas, el segundo sistema tiene otras soluciones que no lo son del primero. Por ejemplo, $x=0$, $y=1$

§ Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se realizan distintas transformaciones que lo hagan más simple y faciliten su resolución. Estas transformaciones deben conservar las soluciones del sistema, es decir, deben transformar un sistema a otro equivalente. Las siguientes transformaciones son válidas:

- Cambiar una ecuación por otra equivalente.
- Reemplazar una de las ecuaciones por la que se obtiene sumando o restando las dos ecuaciones.

Para determinar la solución de un sistema pueden usarse varios métodos. En esta sección veremos los siguientes: el método de sustitución, el de igualación y el de reducción.

Método de sustitución. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones, y se reemplaza la expresión resultante en la segunda ecuación y se despeja la segunda incógnita.

Método de igualación. Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones. Se igualan las expresiones resultantes y se despeja la otra incógnita.

Método de reducción. Se consigue que una de las incógnitas tenga el mismo (u opuesto) coeficiente en las 2 ecuaciones, luego se restan (o suman) para eliminar dicha incógnita y reducir a una sola ecuación lineal.

Ahora, resolveremos el siguientes sistema de ecuaciones usando cada uno de estos métodos

$$\begin{cases} 3x-y &= 7 \\ 2x+3y &= 1. \end{cases}$$

Método de sustitución: Si despejamos y en la primera ecuación, obtenemos $y = 3x - 7$. Ahora reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación:

$$2x + 3(3x - 7) = 1, \qquad \text{es decir} \qquad 11x - 21 = 1.$$

La solución de esta ecuación es $x = 2$. Reemplazamos este valor de x en la ecuación $y = 3x - 7$ y obtenemos $y = 3 \cdot 2 - 7 = -1$. Luego

$$x = 2, \qquad y = -1$$

es una solución del sistema. En efecto, si reemplazamos estos valores en el sistema vemos que se verifican ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - (-1) & = 7 \\ 2 \cdot 2 + 3(-1) & = 1. \end{cases}$$

Método de igualación: Si despejamos y en cada una de las dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} y & = 3x - 7 \\ y & = \dfrac{1 - 2x}{3} \end{cases}$$

Notemos que hemos obtenido un sistema equivalente ya que reemplazamos cada ecuación por otra equivalente. Ahora notemos que si x e y son soluciones entonces debe ser

$$y = 3x - 7, \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1 - 2x}{3},$$

es decir

$$3x - 7 = \frac{1 - 2x}{3}.$$

Esta es una ecuación lineal que sabemos resolver y que tiene solución $x = 2$. Reemplazamos ahora este valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera, y obtenemos el valor de y:

$$3 \cdot (2) - y = 7,$$

que tiene solución $y = -1$. Por lo tanto el sistema tiene la solución

$$x = 2, \qquad y = -1.$$

Método de reducción: Si a la primera de las ecuaciones la multiplicamos por 3, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9x - 3y & = 21 \\ 2x + 3y & = 1. \end{cases}$$

De esta manera, la incógnita y tiene los coeficientes -3 y 3 respectivamente. Así, si sumamos las dos ecuaciones llegamos a la ecuación lineal

$$11x = 22$$

que tiene como solución $x = 2$. Ahora reemplazamos este valor de x en una de las ecuaciones lineales, y obtenemos el valor para la otra incógnita: $y = -1$.

Debemos dejar en claro que no siempre pueden aplicarse cualquiera de estos métodos, como por ejemplo los casos en los que el coeficiente de una de las incógnitas es 0. Afortunadamente, estos casos son aún más fáciles de resolver. Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{cases} 3x = 2 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

podemos despejar x en una ecuación pero no en la otra, y lo mismo ocurre con la incógnita y. Tampoco podemos igualar los coeficientes de las incógnitas porque ninguna de ellas aparece en ambas ecuaciones. Sin embargo la solución se obtiene resolviendo separadamente cada una de las dos ecuaciones. En la primera obtenemos $x = \frac{2}{3}$ e y puede tomar cualquier valor, mientras que en la segunda debe ser $y = \frac{3}{2}$ y x puede ser cualquiera. Como la solución del sistema debe satisfacer ambas ecuaciones, esta debe ser $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{3}{2}$.

§ Sistemas compatibles e incompatibles

No todos los sistemas de ecuaciones tienen una solución única. Puede ocurrir que un sistema tenga infinitas soluciones, o también que no tenga ninguna. Si el sistema tiene alguna solución se dice que es un sistema *compatible*, de lo contrario se dice *incompatible*. En el caso de ser compatible, puede ocurrir que tenga una única solución o que tenga infinitas soluciones. Si sólo tiene una se dice que es un sistema *determinado*, y si tiene más de una, es decir, infinitas, se dice *indeterminado*.

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6. \end{cases}$$

Si despejamos x en cada una de las ecuaciones obtenemos $x = 3 - y$ en cualquiera de las dos. Es decir que debemos igualar

$$3 - y = 3 - y$$

que es claramente cierto cualquiera sea el valor de y. Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 0.$$

Hemos llegado a algo cierto, pero no hemos encontrado una solución. Esto en realidad significa que el sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones se obtienen dándole valores a x y obteniendo los correspondientes valores de y. Para nuestro ejemplo, las soluciones serán todos los pares de números cuya suma es 3:

$$x = 1, y = 2, \quad x = 2, y = 1, \quad x = 4, y = -1, \quad x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}, \ldots$$

> Un sistema de ecuaciones se dice *compatible* si tiene solución e *incompatible* si no tiene solución. Un sistema compatible se dice *determinado* si tiene una única solución e *indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 3. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y &= 3 \\ 6x + 3y &= 1. \end{cases}$$

Si despejamos la variable y en cada una de las ecuaciones obtenemos $y = 3-2x$ e $y = \frac{1}{3} - 2x$. Igualando resulta

$$3-2x = \frac{1}{3} - 2x,$$

es decir

$$3 = \frac{1}{3}$$

Si despejamos y en la primera ecuación obtenemos $y = 3-2x$. Reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación y resulta $6x+3(3-2x) = 1$, es decir

$$9 = 1$$

Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 3 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 8$$

Estas expresiones inconsistentes o absurdas nos indican que el sistema no tiene solución posible, es un sistema incompatible.

Resumiendo, al resolver un sistema de ecuaciones por medio de uno de los métodos que hemos presentado, pueden ocurrir una de las siguientes situaciones:

1. Llegar a una contradicción, por ejemplo $0 = 9$, $1 = 3$, lo cual significa que el sistema es incompatible, no existen soluciones.
2. Llegar a una igualdad obvia, por ejemplo $0 = 0$, $-5 = -5$, lo cual significa que el sistema es compatible, pero indeterminado, es decir, existen infinitas soluciones. Éstas se obtienen dando valores a una de las incógnitas y calculando el valor de la otra.
3. Llegar a una solución única del sistema; es un sistema compatible y determinado.

Ejercicios

1. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales en x y cuáles no:

   a) $x^2+x-5y+2=0$,
   b) $x^2+y^2+2xy=10$
   c) $x-y+z=1$
   d) $\sqrt{3x}-2y=4$
   e) $\sqrt{3}x-2y=4$
   f) $x+3zy-y=0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

   a) $2x+5=0$
   b) $\dfrac{3x}{7}-2=4$
   c) $\dfrac{3x-2}{7}=4$
   d) $\sqrt{2}x+3=1$
   e) $\pi+\sqrt{3}x=2\pi$
   f) $\dfrac{3}{4}y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, reemplazando el valor de x en la ecuación:

   a) $x=3$ es solución de $x^2-3=6$
   b) $x=\sqrt{2}$ es solución de $x^2-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

c) $x=\sqrt{2}+1$ es solución de $(x-1)\sqrt{2}=2$

4. Los sistemas de ecuaciones dados en $a)$, $b)$ y $c)$ son equivalentes al sistema

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$$

Explicar cuál es la transformación que los hace equivalentes.

a) $\begin{cases} 2x+2y=10 \\ 6x-3y=21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x=12, \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{3}{2}y=\frac{3}{2} \\ 2x=7+y \end{cases}$

5. Decidir cuáles de las siguientes transformaciones conducen a un sistema de ecuaciones equivalente.

a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de las dos ecuaciones.
b) Reemplazar cada una de las dos ecuaciones por la suma de las dos.
c) Reemplazar una de las ecuaciones por la suma de las dos.
d) Reemplazar una de las ecuaciones por la resta entre las dos.
e) Multiplicar los dos miembros por 0.
f) Sumarle $2x+5$ al primer miembro de cada ecuación.

6. Resuelve los siguientes problemas e indicar si es necesario en cuáles de ellos debiste plantear una ecuación lineal, cuadrática o un sistema de ecuaciones:

a) El área de un cuadrado es 125m^2. ¿Cuál es la medida del lado?
b) Hallar dos números sabiendo que su suma es 62 y su diferencia es 4.
c) Determinar el perímetro de un rectángulo cuyo lado mayor es 1 cm más largo que el menor, y el lado menor es la mitad del mayor.
d) El triple del cuadrado de un número es 75, ¿Cuál es dicho número?
e) En una parcela, la piscina ocupa 25 metros cuadrados, la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos metros cuadrados ocupan la casa, piscina y jardín juntos?

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y también los del ejercicio 4) que no hayas resuelto. Indica para cada uno de ellos si es compatible o incompatible. Si tiene solución indica si es determinado o indeterminado.

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-4y=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y-3=-x \\ 2x+5y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+\frac{1}{2}y=13 \\ -\frac{1}{3}x-3y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ 6y+4x=12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+6y=14 \\ x-7=-3y \end{cases}$

8. Un grupo de personas va a un restaurante a cenar. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas en cada mesa, queda una mesa vacía. ¿Cuántas personas y cuántas mesas hay?

9. En una granja hay varios conejos y varias jaulas, de forma que si se coloca un conejo en cada jaula, queda un conejo sin jaula y si se colocan dos conejos en cada jaula, queda una jaula vacía. Cuántos conejos y cuántas jaulas hay?

10. La suma de dos números es 123 y uno es el doble del otro. ¿De qué números se trata?

11. En un bolso hay 40 monedas, todas de 25 y 50 centavos. Si en total hay \$16,50, ¿Cuántas monedas de cada valor hay?
12. Un grupo de estudiantes tiene varios libros y mochilas, de modo que si colocan seis libros en cada mochila, queda una mochila vacía y si colocan cinco libros en cada mochila, quedan dos libros sin guardar. ¿Cuántos libros y cuántas mochilas hay?
13. Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron \$80 por persona sola y \$150 por pareja. Si a la fiesta asistieron en total 144 personas y se recaudaron \$10.980 por venta de entradas, ¿Cuántas parejas y cuántas personas solas asistieron a la fiesta?
14. Encontrar todos los números naturales de dos cifras, que al sumarle 27 se obtiene el mismo número pero con las cifras invertidas.

SECCIÓN 2.4

Resolución de ecuaciones de segundo grado

§ Introducción

Hemos estudiado cómo resolver ecuaciones lineales, que son aquellas que podemos escribir de la forma

$$ax+b=0.$$

Si el coeficiente a es distinto de 0, entonces este tipo de ecuaciones tiene una única solución, $x=-\frac{b}{a}$.

En los casos en que una ecuación involucre hasta potencias de orden 2 de la incógnita, se dice que es una ecuación de segundo grado. Por ejemplo,

$$2x^2-3=x, \quad \text{o} \quad x^2-4x=-4$$

Recordemos que un número x_0 es solución de la ecuación si al reemplazar a la incógnita por el número obtenemos una igualdad. A diferencia de las ecuaciones lineales, no todas las ecuaciones de segundo grado tienen una solución real pero sí es posible resolverla en el conjunto de los números complejos. A su vez, puede ocurrir que tengan una única solución o que tengan dos soluciones diferentes.

Una *ecuación de segundo grado* es una ecuación que se puede escribir de la forma

$$ax^2+bx+c=0,$$

siendo x la incógnita, y a, b y c números reales, $a\neq 0$.

Damos a continuación algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $2x^2-5=0$.

Aquí se trata simplemente de despejar x^2,

$$x^2=\frac{5}{2}$$

y determinar los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$x=\sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad \text{y} \qquad x=-\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $2x^2+4x+2=0$.

Observemos que si extraemos el factor común 2, resulta ser el cuadrado de un binomio:

$$2x^2+4x+2=2(x^2+2x+1)=2(x+1)^2,$$

por lo que debemos resolver la ecuación

$$2(x+1)^2=0.$$

Esa ecuación tiene como única solución el valor $x=-1$.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $2x^2+5x-3=0$.

En este caso no se trata de extraer una raíz cuadrada como en el Ejemplo 1, ni tampoco consiste en el cuadrado de un binomio como en el Ejemplo 2. Sin embargo, podemos operar algebraicamente para obtener el cuadrado de un binomio.

Para ello, dividimos ambos miembros por el coeficiente de x^2, en este caso es 2:

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0.$$

Notemos que $\frac{5}{2}x=2\,\frac{5}{4}x$, así que si en el miembro izquierdo tuviéramos el término $(\frac{5}{4})^2$, entonces podríamos *armar* el cuadrado del binomio $(x+\frac{5}{4})$:

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=x^2+2\cdot\frac{5}{4}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

Pero como este término no aparece explícitamente, entonces lo sumamos y lo restamos en la expresión del miembro izquierdo:

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=x^2+2\frac{5}{4}x+\boldsymbol{\left(\frac{5}{4}\right)^2}-\boldsymbol{\left(\frac{5}{4}\right)^2}-\frac{3}{2},$$

y de esta manera hemos *completado* la expresión de modo que aparezca el cuadrado de un binomio:

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{3}{2}=0.$$

Esta ecuación se resuelve de manera mucho más simple. En efecto, queremos hallar los valores de x tales que

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$$

y estos valores son

$$x=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad x=-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=-3.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación (3) son $x_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=-3$.

§ El discriminante

Consideremos ahora la forma general de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2+bx+c=0, \tag{2.6}$$

donde a, b y c son números reales arbitrarios y a es distinto de cero. Nuestro objetivo es determinar cuáles son las soluciones de esta ecuación.

Si dividimos ambos miembros por a obtenemos la siguiente expresión de la ecuación:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \tag{2.7}$$

Un artificio matemático muy utilizado, y que será de uso habitual en nuestra iniciación matemática universitaria, es la suma y resta de una misma expresión numérica o algebraica conveniente. Algo similar a lo que efectuamos en el Ejemplo 3 al sumar y restar el término $(\frac{5}{4})^2$.

Así, si sumamos y restamos la expresión $\dfrac{b^2}{4a^2}$ en el miembro izquierdo de la ecuación (2.7), habremos completado el desarrollo del cuadrado de un binomio. Veamos esto.

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= x^2+\frac{b}{a}x+\frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{4a^2}}-\frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{4a^2}}+\frac{c}{a} && (2.8)\\ &= x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} && (2.9)\\ &= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2} && (2.10)\end{aligned}$$

Así, la ecuación (2.7) puede escribirse como

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0. \tag{2.11}$$

La expresión b^2-4ac recibe el nombre de *discriminante*, y se lo simboliza con la letra griega delta mayúscula Δ:

$$\Delta=b^2-4ac \tag{2.12}$$

Entonces, para hallar las soluciones o *raíces* de la ecuación de segundo grado (2.6) debemos resolver la ecuación

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \tag{2.13}$$

o equivalentemente

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{2.14}$$

Para resolver la ecuación (2.14) tendremos en cuenta tres casos: $\boxed{\Delta>0,\ \Delta=0 \text{ y } \Delta<0.}$

Si $\boxed{\Delta > 0,}$ entonces existen dos soluciones reales. En efecto, si x es una solución, entonces x satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{o} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Finalmente, despejando x obtenemos que en este caso las raíces son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a.}$$

Estas soluciones suelen resumirse en la fórmula siguiente, conocida también como la *fórmula de Bhaskara*:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.15}$$

El símbolo $\pm$ indica que hay dos soluciones, una con el signo $+$ y la otra con el signo $-$.

Si $\boxed{\Delta = 0,}$ entonces la única solución es

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

En el caso en que $\boxed{\Delta < 0,}$ la ecuación (2.14) tiene soluciones en el campo de los números complejos. No es posible hallar raíces reales ya que el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Recordemos que el número imaginario i es tal que $i^2=-1$. Así, una solución x_0 de la ecuación (2.14) para el caso $\Delta < 0$ satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{o} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)=-i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

§ Clasificación de las raíces

Resumimos entonces qué tipo de raíces se obtienen en una ecuación de segundo grado según sea el signo del discriminante.

Si $\boxed{b^2-4ac=\Delta>0}$, entonces hay **dos raíces reales y distintas**, dadas por

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.16}$$

Si $\boxed{b^2-4ac=\Delta=0}$, entonces hay **una única raíz real doble**, dada por

$$x_0=-\frac{b}{2a} \tag{2.17}$$

Se dice que esta raíz es *doble*, o que la ecuación posee dos raíces iguales, pues en este caso la ecuación original (2.6) puede escribirse de la forma

$$a(x-x_0)^2 = 0.$$

Si $\boxed{b^2-4ac=\Delta<0}$, entonces hay **dos raíces complejas conjugadas y distintas**, dadas por

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \tag{2.18}$$

Ejemplo 4. Analicemos las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$$a)\ x^2-x-6=0, \qquad b)\ 3x^2-6x+3=0, \qquad c)\ x^2+1=0.$$

Los discriminantes respectivos son:

$$a)\ \Delta = 1+4\cdot 6 = 25, \qquad b)\ \Delta = 36-4\cdot 3\cdot 3 = 0, \qquad c)\ \Delta = 0-4 = -4.$$

Esto nos dice que la ecuación dada en (a) tiene dos raíces reales distintas:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2,$$

la ecuación dada en (b) tiene una única raíz doble:

$$x_0 = \frac{6-\sqrt{0}}{6} = 1,$$

y la ecuación dada en (c) tiene dos raíces complejas *conjugadas*:

$$x_1 = \frac{0+i\sqrt{4}}{2} = i, \qquad x_2 = \frac{0-i\sqrt{4}}{2} = -i.$$

Ejemplo 5. La ecuación de segundo grado $x^2-2x+10=0$ tiene una raíz compleja igual a $1-3i$. ¿Existe otra solución de la ecuación?

La respuesta es sí, porque la raíz dada es un número complejo con parte imaginaria no nula. La otra solución de la ecuación es el conjugado de $1-3i$, es decir, $1+3i$.

§ Propiedades de las raíces

A partir de las expresiones dadas en (2.16), (2.17) y (2.18), calcularemos la suma y la multiplicación de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$.

Sea $\boxed{\Delta\geq 0}$, al sumamos las raíces x_1 y x_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)+\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} \end{aligned}$$

lo que conduce a la siguiente relación:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \tag{2.19}$$

Ahora, si multiplicamos las raíces x_1 y x_2 obtenemos

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= \frac{(-b)(-b)+(-b)(-\sqrt{\Delta})+(-b)\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}(-\sqrt{\Delta})}{(2a)^2} \\
&= \frac{b^2+b\sqrt{\Delta}-b\sqrt{\Delta}-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

lo que conduce a la siguiente relación:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \tag{2.20}$$

Por otra parte, si $\boxed{\Delta < 0}$ se obtiene la mismas relación (2.19) para la suma de raíces. En efecto, porque

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right) + \left(\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right) \\
&= \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Similarmente, se obtiene la relación (2.20) para la multiplicación de las raíces. En efecto, porque el producto de una de ellas con su conjugado es igual a la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria respectivamente:

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right) \\
&= \frac{(-b)^2+(4ac-b^2)}{(2a)^2} = \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Una vez conocidas estas relaciones entre las raíces de una ecuación de segundo grado podemos reescribir ésta en una forma más simple, y en muchos casos conveniente. En efecto, notemos que reescribiendo la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ de la forma

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

aparecen como coeficiente de x y como término independiente las expresiones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$, que hemos visto que son iguales a

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Por lo tanto, podemos reemplazar dichos coeficientes por sus expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + (x_1 \cdot x_2)\right) \\ &= a\left(x^2 - x\,x_1 - x\,x_2 + x_1 \cdot x_2\right) \\ &= a\,(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) \end{aligned}$$

y como $(x - x_1)$ es un factor común, esto resulta:

$$\boxed{a\,(x - x_1)(x - x_2) = 0.}$$

Ejemplo 6. La ecuación $2x^2 - 2x - 12 = 0$ tiene raíces $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, siendo $a = 2$, $b = -2$ y $c = -12$.

Podemos verificar las relaciones anteriores:

$$3 + (-2) = -\frac{-2}{2}, \qquad 3 \cdot (-2) = \frac{-12}{2}, \qquad 2x^2 - 2x - 12 = 2\,(x-3)\,(x+2).$$

§ Resolución de ecuaciones de grado 4 con exponentes pares

Otro conjunto particular de ecuaciones, a las cuales se les puede aplicar la teoría desarrollada en este capítulo, son las ecuaciones polinomiales de grado 4 con exponentes pares. En las mismas, un adecuado cambio de variable permite reducir el cálculo a la resolución de una ecuación de segundo grado.

Por ejemplo, Consideremos la siguiente ecuación de cuarto grado:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \tag{2.21}$$

Notemos que esta ecuación puede escribirse de la forma

$$(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0,$$

es decir, es una ecuación de segundo grado con incógnita x^2. Denotemos provisoriamente a x^2 con la letra u. Entonces, la ecuación (2.21) se escribe en términos de u como:

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $u_1 = 4$ y $u_2 = 1$, y por lo tanto las soluciones de (2.21) deben satisfacer $x^2 = 4$ o $x^2 = 1$. Los valores posibles de x son entonces $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$.

Ejercicios

1. Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas,
   - calcular el discriminante Δ,
   - determinar si tiene 2 raíces reales distintas, una única raíz doble o dos raíces complejas,
   - calcular las raíces x_1 y x_2, y escribir cada ecuación de la forma $a(x-x_1)(x-x_2)$.

   a) $x^2-5x-5=0$
   b) $x^2+x-1=0$
   c) $4x^2+4=5x$
   d) $32x^2-20x+3=0$
   e) $x^2-28x+192=0$
   f) $x^2+7x-9=0$
   g) $3x^2-5x+2=0$
   h) $9x^2-8x+1=0$
   i) $2x^2+3x=7x+4$

2. Escribir una ecuación de segundo grado de la forma $2x^2+bx+c=0$ sabiendo que la suma de sus raíces es 2 y su producto también. Calcular dichas raíces.

3. Escribir 3 o más ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean de igual valor absoluto pero de distinto signo, (por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$). ¿ Qué forma tienen estas ecuaciones?

4. Una ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene una raíz igual a $2+3i$. ¿Cuál es la otra raíz?

5. Considerar la ecuación de segundo grado $\quad cx^2+12x+c=0$.
   a) Calcular el valor de c si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y positivas.
   b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor de c obtenido en el inciso anterior.

6. La ecuación de segundo grado $ax^2+10x+a=0$ tiene dos raíces iguales.
   a) Indique cuál es el valor de a sabiendo que las raíces son negativas.
   b) Calcule las raíces de la ecuación para el valor de a calculado en el inciso anterior.

7. Considerar la ecuación de segundo grado $\quad 18x^2+bx+2=0$.
   a) Calcular el valor de b si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y negativas.
   b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor de b obtenido en a).

8. La ecuación de segundo grado $x^2-3bx+9b=0$ tiene dos raíces iguales.
   a) Indique cuál es el valor de b sabiendo que las raíces son positivas.
   b) Calcule las raíces de la ecuación para el valor de b calculado en el inciso anterior.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados. Verifica la respuesta.

   a) $x^2+4x-4=0$
   b) $x^2-8x-20=0$
   c) $9x^2+36x+20=0$

10. La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es -1 y su producto es -6. Si la ecuación es de la forma $x^2+bx+c=0$, encuentra el valor de b y c.

11. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que sus raíces son -1 y 3. ¿Es la única ecuación de segundo grado posible con esa propiedad? ¿Por qué?

12. Para cada una de las ecuaciones siguientes se da el valor de una raíz. Determinar el valor de la constante y el valor de la otra raíz:

a) $x^2 - Kx + 6 = 0 \qquad x_1 = 3$

b) $y^2 + 6y + K = 0 \qquad y_1 = 3$

c) $w^2 + Kw + 4 = 0 \qquad w_1 = -2$

d) $K\beta^2 - 3\beta + 4 = 0 \qquad \beta_1 = 1$

13. Resolver las siguientes ecuaciones. Verifica que las soluciones obtenidas satisfagan la ecuación.

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ b) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

SECCIÓN 2.5

Expresiones algebraicas fraccionarias

§ Expresiones fraccionarias

Una expresión algebraica fraccionaria es un cociente entre expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$\frac{x}{2x+3}, \qquad \frac{1-ab+b^2}{a+b}, \qquad \frac{\sqrt{3-z}}{z^3}.$$

En este capítulo estudiaremos ecuaciones en las cuales la incógnita aparece en una expresión algebraica fraccionaria. Usualmente la forma de resolverlas es transformando esta ecuación en una expresión sin fracciones, de modo que se trate de resolver una ecuación lineal, o de segundo grado, o de un grado mayor.

Por otro lado, en muchos casos es conveniente simplificar estas expresiones algebraicas para facilitar la resolución de la ecuación en cuestión. Analizaremos varios ejemplos con distintos grados de complejidad a la vez que mostraremos la forma de resolver estas ecuaciones, pero previamente nos referiremos a la simplificación de expresiones.

§ Simplificación de expresiones fraccionarias

Si en una expresión algebraica fraccionaria aparece un factor común en el numerador y en el denominador, entonces podemos *simplificarla*. Por ejemplo en la siguiente expresión:

$$\frac{x^2+x}{3x-5x^3} \tag{2.22}$$

x es un factor común en el numerador y en el denominador. Esto es, $x^2+x = x\,(x+1)$ y $3x-5x^3 = x\,(3-5x^2)$. Luego (2.22) puede escribirse como:

$$\frac{x\,(x+1}{x\,(3-5x^2)}.$$

Si dividimos numerador y denominador por x, la expresión se *simplifica*:

$$\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(3-5x^2)} = \frac{x+1}{3-5x^2}. \tag{2.23}$$

En otros casos la expresión por la que se divide es un polinomio de grado mayor que 1, y para ello hay que detectar que se trata de un *factor común* del numerador y del denominador. Por ejemplo, en la siguiente expresión

$$\frac{x^3+2x}{x^2+2} \tag{2.24}$$

x^2+2 divide al numerador y al denominador, pues $x^3+2x=(x^2+2)\,x$, y $x^2+2=(x^2+2)\cdot 1$. Es decir:

$$\frac{x^3+2x}{x^2+2}=\frac{(x^2+2)\,x}{(x^2+2)\,1}.$$

Luego podemos simplificar la expresión (2.24) dividiendo numerador y denominador por x^2+2:

$$\frac{\cancel{(x^2+2)}\,x}{\cancel{(x^2+2)}\,1}=x$$

Simplificar una expresión fraccionaria es dividir numerador y denominador por un mismo polinomio no nulo.

Ahora bien, es importante tener en cuenta lo siguiente. Al simplificar una expresión no obtenemos una expresión equivalente. Es decir, si reemplazamos las letras por números no siempre es igual la expresión antes que después de haber simplificado. Por ejemplo, para (2.23),

$$\frac{x(x+1)}{x(3-5x^2)}=\frac{x+1}{3-5x^2}.$$

el primer miembro no está definido en $x=0$, y el segundo sí. Esto ocurre porque hemos dividido numerador y denominador por el polinomio x, que justamente se anula en $x=0$. Por lo tanto, la igualdad entre expresiones es válida sólo para los valores de x distintos de 0.

Si simplificamos una expresión dividiendo por un polinomio $P(x)$ obtenemos otra expresión equivalente *excepto* para los valores de x en los que se anula el polinomio.

En la expresión (2.22) simplificamos dividiendo por el polinomio x, ya que éste aparece en cada sumando del numerador y del denominador. En (2.24) fue fácil ver que x^2+2 es un factor común al numerador y denominador. Pero no siempre es tan evidente darse cuenta cuál es el polinomio por el que habría que dividir para simplificar la expresión.

Para reconocerlo, es útil recordar algunas identidades algebraicas tales como la diferencia de cuadrados, las potencias de un binomio, etc. Repasaremos algunos casos mediante ejemplos.

Ejemplo 1. Simplificar la expresión

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x}. \tag{2.25}$$

En este caso podemos observar que en el numerador aparece una *diferencia de cuadrados*:

$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Asimismo, el denominador puede escribirse como $x(x+2)$, y así la expresión (2.25) se puede simplificar:

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x},$$

obteniendo una expresión equivalente *excepto* para $x=-2$.

Las sucesivas *potencias de un binomio* están dadas por

$$\begin{aligned}
(x+a)^2 &= x^2+2ax+a^2\\
(x+a)^3 &= x^3+3ax^2+3a^2x+a^3\\
(x+a)^4 &= x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4\\
(x+a)^5 &= x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5
\end{aligned}$$

Como puede verse, hay una cierta simetría en cada uno de los polinomios resultantes. Por lo tanto, si en una expresión algebraica aparece un polinomio de grado n, podemos analizar si se trata o no de una potencia de un binomio.

Ejemplo 2. Simplificar la expresión

$$\frac{2x^3-4x^2}{3x^5-30x^4+120x^3-240x^2+240x-96}. \tag{2.26}$$

En el denominador de esta expresión tenemos un polinomio de grado 5, y el numerador es fácilmente factorizable como $2x^2(x-2)$. Podríamos analizar entonces si en el denominador aparece una potencia de $x-2$. En primer lugar, es conveniente extraer como factor común el coeficiente de x^5, es decir 3, de modo que la expresión resulte

$$\frac{2x^2(x-2)}{3(x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32)}.$$

En efecto, si calculamos la potencia quinta de $x-2$ obtenemos la expresión entre paréntesis, y por lo tanto podremos simplificar la expresión (2.26):

$$\frac{2x^2(x-2)}{3(x-2)^5} = \frac{2x^2}{3(x-2)^4}.$$

¡Atención! Ninguna de las dos expresiones esta definida para $x=2$.

En expresiones tales como

$$2x+x^3, \quad 100x^5-300x^3+50, \quad 5a^2+17ax+a$$

se puede detectar fácilmente un factor común en cada término de la expresión:

$$\begin{aligned}
2x+x^2 &= x(2+x),\\
100x^5-300x^3+50 &= 50(2x^5-60x^3+1),\\
5a^2+17ax+a &= a(5a+17x+1).
\end{aligned}$$

Pero en algunos casos una suma algebraica puede tener *grupos de términos* en los cuales puede extraerse un factor común diferente, y tal que todas las expresiones resultantes sean iguales. Para clarificar ideas, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Simplificar la expresión
$$\frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x-1}{6x^2+12x-18}. \tag{2.27}$$
En el numerador podríamos agrupar los términos de a dos, y extraer el factor común x^5, x^3 y 1 en cada grupo:
$$(x^6-x^5)+(x^4-x^3)+(x-1)=x^5(x-1)+x^3(x-1)+1.(x-1).$$
Podemos ver que resulta una suma de tres términos, y en cada uno aparece el factor $(x-1)$. Luego la expresión (2.27) puede escribirse como
$$\frac{(x-1)(x^5+x^3+1)}{6x^2+12x-18}.$$
En el denominador tenemos un polinomio de grado 2, con raíces 1 y -3, y por lo tanto podemos factorizarlo y simplificar la expresión:
$$\frac{(x-1)(x^5+x^3+1)}{6(x-1)(x+3)}=\frac{x^5+x^3+1}{6(x+3)}.$$
¡Atención! Las dos expresiones son equivalentes *excepto* para $x=1$.

Estos son sólo algunos ejemplos en los cuales hemos mostrado cómo simplificar una expresión algebraica fraccionaria. Sin embargo el lector debe saber que pueden presentarse muchos otros casos, y que sólo la práctica en la resolución de este tipo de ejercicios ayudará a conocerlos. En la siguiente sección nos referimos a la resolución de ecuaciones con una incógnita, en las cuales la misma aparece involucrada en una expresión algebraica fraccionaria.

§ Ecuaciones con expresiones fraccionarias

En el caso de la resolución de ecuaciones en las que la incógnita aparece involucrada en una expresión fraccionaria, es conveniente llevar a la misma a una expresión sin fracciones. Para ello aplicamos la propiedad uniforme multiplicando ambos miembros por las expresiones que aparezcan en un denominador o también simplificando las expresiones. Presentamos algunos ejemplos de resolución de este tipo de ecuaciones. El lector debiera prestar especial atención a las consideraciones realizadas en cada ejemplo.

Ejemplo 4. Hallar el valor de x que satisface la ecuación
$$\frac{x^2+x}{x+1}=3x-2 \tag{2.28}$$
Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $(x+1)$ resulta
$$x^2+x=(3x-2)(x+1). \tag{2.29}$$
Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos las soluciones $x=1$ y $x=-1$. Pero notemos que $x=-1$ no es solución de (2.28) puesto que resulta una indeterminación en el

primer miembro. Es decir, (2.29) y (2.28) no son ecuaciones equivalentes pues no tienen las mismas soluciones. Esto ocurre justamente porque hemos multiplicado por $x+1$ que es una expresión que se anula en $x=-1$. Por lo tanto el procedimiento es válido excepto para $x=-1$.

Así, la única solución de (2.28) es $x=1$.

> Si multiplicamos ambos miembros de una ecuación por un polinomio, obtenemos una ecuación con las mismas soluciones *a excepción* de los valores de x que anulan ese polinomio.

En el Ejemplo 4 vemos además que $x=-1$ anula el numerador y el denominador; eso significa que ambos son divisibles[3] por $x+1$. Entonces también podríamos simplificar la expresión dividiendo por $x+1$ al numerador y al denominador:

$$\frac{x(x+1)}{x+1} = 3x-2, \tag{2.30}$$

y resolver la ecuación

$$x = 3x-2. \tag{2.31}$$

La ecuación (2.31) se ha obtenido a partir de una simplificación en (2.28), y por lo tanto es equivalente a esta última. Su única solución es $x=1$.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación

$$\frac{1}{2x+3} = 8. \tag{2.32}$$

En este caso no hay posibilidad de simplificar la expresión, y el denominador se anula sólo en $x=-\frac{3}{2}$. Puesto que este valor de x no resuelve la ecuación, entonces podemos multiplicar ambos miembros por $2x+3$, llevando a la ecuación

$$1 = 8\,(2x+3),$$

que es equivalente excepto para $x=-\frac{3}{2}$. Esta es una ecuación lineal y su solución es $x=-\frac{23}{16}$. Efectivamente es una solución de (2.32), ya que

$$\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{23}{16}\right)+3} = 8.$$

Con un razonamiento similar podremos resolver ecuaciones como las siguientes:

$$\frac{x}{3x-1} = 10, \qquad \frac{2x+3}{x-5} = 0, \qquad 2x+3 = \frac{3}{x}.$$

Estas ecuaciones pueden ser transformadas en ecuaciones lineales o de segundo grado equivalentes multiplicando por la expresión del denominador, y teniendo en cuenta siempre que el valor de x que anula el denominador no es una solución de la ecuación.

En algunas situaciones la incógnita aparece afectada por una potencia o en un radicando. En algunos casos estas ecuaciones no son mucho más difíciles que resolver que una sencilla ecuación lineal. Mostraremos algunos ejemplos y la forma de resolverlos.

[3] Repasar el Teorema del Resto.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - 2 = 10 \tag{2.33}$$

Nuestra primera preocupación será hallar el valor de $\sqrt{x}$, y a partir de este valor podremos conocer la incógnita. Consideremos la ecuación

$$3y - 2 = 10. \tag{2.34}$$

La ecuación (2.34) es similar a (2.33), donde hemos reemplazado a $\frac{1}{\sqrt{x}}$ por y. Se suele decir que se hace un *cambio de variable*:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Por lo tanto hallaremos el valor de y que resuelve la ecuación (2.34) y luego despejaremos x en la ecuación $\frac{1}{\sqrt{x}} = y$. Como $y = 4$ es la solución de $3y - 2 = 10$, resta hallar los valores de x para los cuales

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 4,$$

y así llegamos a que $\frac{1}{x} = 16$, y por lo tanto $x = \frac{1}{16}$ es la solución de (2.33).

Ejemplo 7. Hallar las soluciones de la ecuación

$$\frac{x^3}{x^3 + 18} = 3. \tag{2.35}$$

En este caso la incógnita x aparece con un exponente 3. Denotamos con y a x^3 y resolvemos la ecuación

$$\frac{y}{y+18} = 3,$$

que es equivalente a

$$y = 3y + 54.$$

Esta ecuación tiene solución $y = -27$. Para hallar la solución de (2.35) despejamos x de la ecuación $x^3 = -27$ y concluimos que $x = -3$ es la solución de (2.35).

Ejemplo 8. Hallar las soluciones de

$$\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = 5. \tag{2.36}$$

Si denotamos con y a $\sqrt[3]{x^2}$, se trata de resolver la ecuación $y + \frac{4}{y} = 5$. Multiplicando ambos miembros por y se obtienen las soluciones como las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Las soluciones son $y = 1$ e $y = 4$. Reemplazando estos valores de y en la relación $y = \sqrt[3]{x^2}$, obtenemos las siguientes soluciones de (2.36).

$$x = 8, \qquad x = -8, \qquad x = 1, \qquad x = -1.$$

Cancelación de factores

En algunos casos una misma expresión algebraica aparece en ambos miembros de una ecuación. Por ejemplo

$$(x+5)x^2 = \frac{x^3}{x-5}, \qquad \frac{(3x+2)^2}{4x-5} - (3x+2) = \frac{3x+2}{x}.$$

Resulta tentador simplificar los factores comunes a ambos miembros, o lo que usualmente decimos *cancelar*, y resolver la ecuación resultante:

$$x+5=\frac{x}{x-5}, \qquad \frac{3x+2}{4x-5}-1=\frac{1}{x}.$$

Sin embargo, al cancelar estos factores no llegamos a una ecuación equivalente. Veamos en un ejemplo por qué.

Ejemplo 9. Resolver la ecuación

$$\frac{(3x+2)^2}{4x-5}-(3x+2)=\frac{3x+2}{x}. \tag{2.37}$$

Resolver la ecuación (2.37) es hallar aquellos valores de x que hacen cierta la igualdad. Si cancelamos dividiendo por el polinomio $3x+2$ en ambos miembros, obtenemos la ecuación

$$\frac{3x+2}{4x-5}-1=\frac{1}{x}.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$x^2-3x-5=0$$

cuyas únicas soluciones son

$$x_1=\frac{3+\sqrt{29}}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{3-\sqrt{29}}{2}.$$

Sin embargo, estas no son las únicas soluciones de la ecuación (2.37). La otra solución es la que corresponde a $3x+2=0$, ya que en ese caso ambos miembros de la ecuación se anulan. Por lo tanto $x=-2/3$ es también solución de la ecuación (2.37).

Ejemplo 10. Resolver las siguientes ecuaciones

$$\frac{x}{x^2-\frac{x}{2}} = 2x \tag{2.38}$$
$$\frac{x}{3x-5} = 7x. \tag{2.39}$$

En las dos ecuaciones el factor x aparece en ambos miembros, pero esto no significa que $x=0$ sea solución de ambas ecuaciones.

Notemos que en la ecuación (2.38) aparece el factor x en el denominador y por lo tanto no es posible evaluar la expresión del miembro izquierdo en $x=0$. Simplificamos entonces dividiendo por el polinomio x

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-\frac{1}{2})}=2x, \tag{2.40}$$

y resolvemos

$$\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=2x. \tag{2.41}$$

Así, las soluciones de (2.38) son las soluciones de (2.41). Ésta se resuelve multiplicando ambos miembros por $x-\frac{1}{2}$, teniendo presente que $x=\frac{1}{2}$ no es una solución. Las soluciones de la ecuación son

$$x=1 \qquad \text{y} \qquad x=-\frac{1}{2}.$$

En cambio, en la ecuación (2.39) vemos $x=0$ anula ambos miembros de la ecuación, no hay indeterminación en ninguno de los dos miembros. Luego $x=0$ es una solución y las otras soluciones se obtienen dividiendo ambos miembros por x, y multiplicar ambos miembros por $3x-5$. Luego, concluimos que las soluciones de (2.39) son

$$x=\frac{12}{7} \qquad \text{y} \qquad x=0.$$

Ejemplo 11. Resolver la ecuación

$$54\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}-12=2\sqrt[3]{x-2}. \tag{2.42}$$

En este caso no es la incógnita x quién está afectada por la radicación sino una expresión en x. Por lo tanto podemos sustituir

$$y=\sqrt[3]{x-2}$$

y resolver la ecuación

$$54\frac{1}{y}-12=2y.$$

Como $y=0$ no es solución, entonces multiplicamos ambos miembros por y y nos quedará resolver la ecuación cuadrática

$$54-12y=2y^2, \qquad \text{o bien} \qquad 2y^2+12y-54=0.$$

Esta ecuación tiene las soluciones

$$y=3 \quad \text{e} \qquad y=-9.$$

Para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación (2.42) resolvemos:

$$\sqrt[3]{x-2}=3 \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{x-2}=-9.$$

Las soluciones son respectivamente:

$$x=29 \qquad \text{y} \qquad x=-727.$$

Queda como ejercicio verificar que efectivamente estos dos valores son solución de la ecuación (2.42).

Ejercicios

1. Simplificar las siguientes expresiones:

   a) $\dfrac{x^2-x}{2x-2}$

   b) $\dfrac{x^3+7x^2-2x}{x^5-3x^4+x}$

   c) $\dfrac{4x^4+2x^3+2x^2+x}{2x^2+x}$

   d) $\dfrac{x^5+7x^3-3x^2}{(2x+x^2)(x-x^3)}$

e) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$

f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

g) $\dfrac{x^3-x^2-2x+2}{x^2+4x-5}$

h) $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x-3}=8$

b) $\dfrac{4}{x-3}=x$

c) $\dfrac{2x-4}{x-2}=-7$

d) $\dfrac{2x-4}{x-2}=-7x$

e) $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4}$

f) $-3x+1=-\dfrac{1}{3x-1}$

g) $\dfrac{x^2-1}{3x+2}=4(x-1)$

h) $\dfrac{(x+1)^2}{3x+2}=\dfrac{4(x+1)}{7x-3}$

3. Efectuar un cambio de variable adecuado para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x=13\sqrt{x}-36$

b) $(\sqrt{y}-1)^2=5-\sqrt{y}$

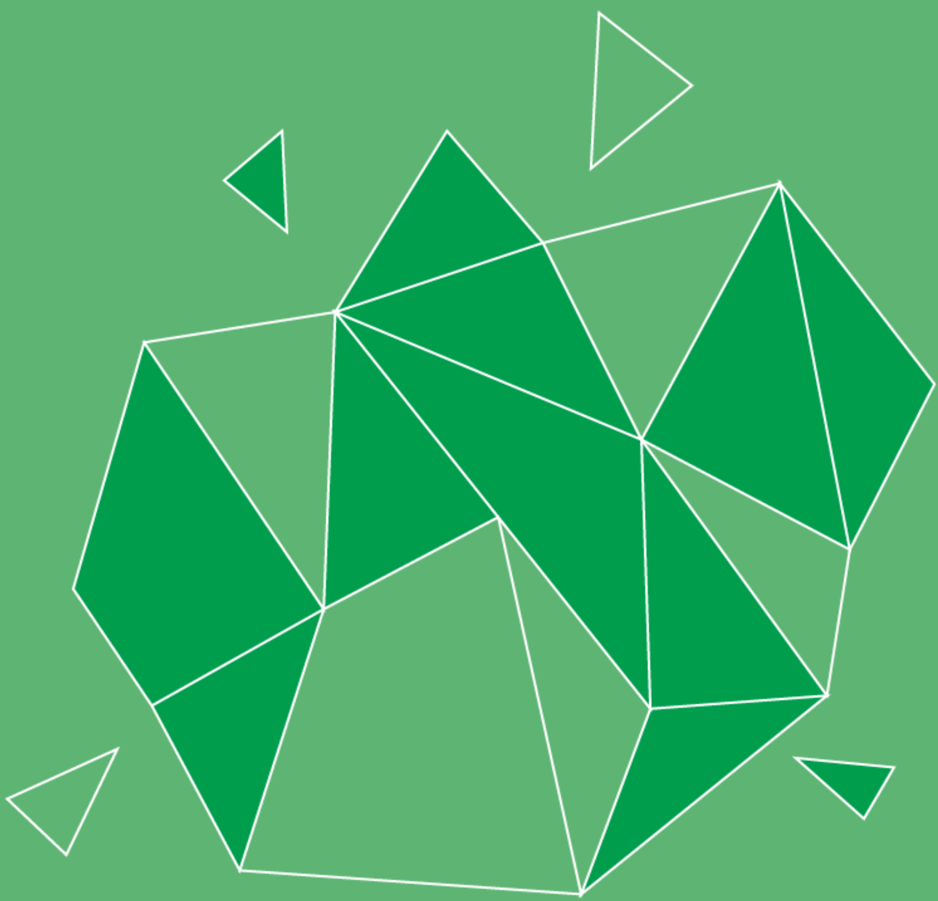
c) $\dfrac{1}{x}=\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^2$

d) $\sqrt{x^3}-9=\dfrac{-8}{\sqrt{x^3}}$

3

Lógica y teoría de conjuntos

Patricia Kisbye
Daniel Fridlender
Alejandro L. Tiraboschi



Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

3 | LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Este capítulo se elabora a partir de las Notas para el Curso de Ingreso a FaMAF 2012 elaboradas por los Dres. Patricia Kisbye y Alejandro Tiraboschi quienes, para esas Notas toman contenidos y ejercicios de los primeros capítulos del texto de su autoría: *Elementos de Lógica y Computación* (Trabajos de Informática, No. 1/99). Desde el año 2015, el Dr. Daniel Fridlender, viene realizando modificaciones a contenidos y ejercicios presentados en las Notas originales, tales modificaciones se hacen evidente en el presente capítulo.

Este texto se caracteriza por presentar ideas y conocimientos introductorios al estudio de Lógica y Conjuntos los cuales resultan nuevos para la mayoría de Ustedes pero representan ideas básicas para el trabajo en Matemática, en Ciencias de la Computación y ofrece modos de reconstruir conocimientos y argumentar no sólo para las ciencias antes citadas sino también para el trabajo en Física o Astronomía.

Los principales contenidos tratados se refieren a proposiciones, conectivos lógicos, nociones básicas de conjuntos, operaciones entre conjuntos, producto cartesiano y cuantificadores. La introducción y tratamiento de estos conceptos se ilustra con ejemplos y se acompañan con un conjunto de ejercicios de aplicación.

Si bien se reconoce que estos temas pueden causar un poco de desconcierto por lo nuevo, también se parte de la idea que ellos son una introducción a cuestiones básicas para comprender algunas definiciones o argumentaciones que se darán en capítulos posteriores y ofrece una entrada a una escritura formal que se puede aplicar a otros temas del curso o materias de primer año. De los temas presentados, las nociones básicas sobre conjuntos resultan esenciales para el resto del curso de ingreso o cursos posteriores. Este capítulo resulta importante para los estudiantes de las distintas carreras que ofrece FAMAF y tiene una especial relevancia para los estudiantes interesados en Ciencias de la Computación.

En este capítulo se busca en primera instancia ofrecer un material importante para el resto del curso de ingreso y en segunda instancia achicar la brecha con el trabajo a desarrollar en las materias de primer año.

SECCIÓN 3.1

Elementos de lógica

§ Introducción

La *lógica* es la ciencia de la *inferencia*, es decir, de la adquisición de nuevos conocimientos a partir de conocimientos previos por medio del razonamiento. Identificamos principalmente dos tipos de objetos que estudia la lógica: los conocimientos y los razonamientos. Para expresar conocimientos se utilizan ciertas frases que denominaremos *proposiciones*.

§ Proposiciones

Una *proposición* es una frase susceptible de ser considerada verdadera o falsa. También podríamos decir que una proposición es una sentencia declarativa que expresa una propiedad para un individuo o ente, o que expresa la validez de una relación entre individuos o entes.

Ejemplo 1. Algunos ejemplos de proposiciones son:

- Los triángulos tienen cuatro vértices.
- $25+24=49$.
- La edad del universo supera los catorce mil millones de años.

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:

¡Viva la patria!,

¿Está lloviendo?

Oprima la tecla ⟨ ENTER ⟩

no son proposiciones puesto que no tiene sentido declararlas como verdaderas o falsas.

La veracidad (V) o falsedad (F) de una proposición se llama *valor de verdad* de la proposición. Las dos primeras proposiciones del ejemplo 1 tienen valor de verdad F y V respectivamente.

La última frase del ejemplo puede dar lugar a diferentes posiciones: algunos expertos pueden asegurar que es falsa, otros, por el contrario, afirmar que es verdadera. También puede haber quienes manifiesten que aún no se sabe con certeza, y por qué no, otros que sostengan que es imposible establecer su valor de verdad. Pero no debería haber ninguna duda sobre el carácter declarativo de la frase: la misma expresa una propiedad y tiene perfecto sentido afirmar su veracidad (o falsedad). Esto alcanza para que la frase sea considerada una proposición.

Concluimos entonces que cada proposición tiene un único valor de verdad, V ó F, aunque es posible que, en algunos casos, ignoremos cuál es ese valor. Con frecuencia diremos que una proposición "es V" (o F) como abreviatura de que su valor de verdad es V (o F).

§ Conectivos lógicos

En lógica se suelen utilizar letras minúsculas como p, q, r, para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos se denominan *variables proposicionales* y pueden combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a *proposiciones compuestas*. Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación: (no) $\neg$, la conjunción: (y) $\wedge$, la disyunción: (o) $\vee$, la disyunción exclusiva: (o bien) $\underline{\vee}$, la implicación: (entonces) $\Rightarrow$ y la implicación doble: (si y sólo si) $\Leftrightarrow$. La negación se aplica a *una* proposición y por lo tanto se dice que es *1-aria* o *unitaria*. Los restantes conectivos se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.

Los ejemplos que siguen ilustran el uso correcto de los símbolos introducidos.

Ejemplo 2. Consideremos las proposiciones p: "4 es positivo" y q: "$\sqrt{2}$ es racional". Algunas posibles combinaciones de p y q por conectivos lógicos son:

$\neg p$: 4 **no** es positivo.
$p \wedge q$: 4 es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.
$\neg p \wedge q$: 4 **no** es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.
$p \vee q$: 4 es positivo **o** $\sqrt{2}$ es racional.
$p \Rightarrow q$: Si 4 es positivo **entonces** $\sqrt{2}$ es racional.
$p \Leftrightarrow q$: 4 es positivo **si y sólo si** $\sqrt{2}$ es racional.

A continuación, se analizan con más detalle cada uno de los conectivos lógicos.

§ Negación

Si p es una proposición, simbolizamos con $\neg p$ a su negación.

Ejemplo 3. Si p simboliza la proposición *estoy en la clase de Álgebra*, entonces $\neg p$ es *no estoy en la clase de Álgebra*.

La *negación* se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad de la proposición que se niega. Esto es, si p es verdadera entonces $\neg p$ es falsa, y si p es falsa entonces $\neg p$ es verdadera. Esta relación entre los valores de verdad de p y $\neg p$ se expresa esquemáticamente en la *tabla de verdad de la negación*:

p	$\neg p$
V	F
F	V

La tabla de verdad posee una línea por cada caso posible de p (V o F), y en la columna correspondiente a $\neg p$ se escribe el valor de verdad de $\neg p$ en cada uno de esos casos. La tabla de verdad de la negación expresa un método para determinar el valor de verdad de una proposición cualquiera de la forma $\neg p$: determinar primero el valor de verdad de p y luego revertirlo para obtener el de $\neg p$.

Ejemplo 4. Consideremos la proposición

p: "10 es múltiplo de 5".

Sabemos que el valor de verdad de p es V. Por lo tanto, su negación que es la proposición

$\neg p$: "10 no es múltiplo de 5"

tiene valor de verdad F.

§ Conjunción

La *conjunción* es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos proposiciones. Una conjunción de proposiciones es verdadera si y sólo si cada una de ellas es verdadera. Basta que una de ellas sea falsa para que toda la conjunción sea falsa. En castellano, normalmente la conjunción se expresa por medio de la 'y', de comas o de una combinación de éstas, o palabras como 'pero'. Así, por ejemplo, la proposición compuesta *Córdoba tiene sierras y tiene ríos* es verdadera porque cada parte de la conjunción es verdadera. No ocurre lo mismo con la proposición *Córdoba tiene sierras y tiene costa al mar*. Esta proposición es falsa porque Córdoba no tiene costa al mar.

La siguiente tabla corresponde a la *tabla de verdad de la conjunción*:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Como observáramos en el caso de la negación, la tabla de verdad posee una línea por cada caso posible, que ahora son cuatro según las posibles combinaciones de valores de verdad de p y q. La columna correspondiente a $p \wedge q$ registra el valor de verdad de la conjunción en cada caso.

Nuevamente la tabla de verdad expresa un método para determinar el valor de verdad de una proposición cualquiera de la forma $p \wedge q$: determinar primero los valores de verdad de p y de q; si ambos son V, entonces el de $p \wedge q$ también lo es. En caso contrario, el valor de verdad de $p \wedge q$ es F.

Ejemplo 5. Si p es $2 < 5$, q es $6 < 3$ y r es $5 < 11$, entonces $p \wedge q$ expresa $2 < 5$ y $6 < 3$, que es falso ya que 6 no es menor que 3. Por otro lado la proposición $p \wedge r$ que dice $2 < 5$ y $5 < 11$ (también puede escribirse $2 < 5 < 11$) es verdadera pues es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

§ Disyunción

Existen dos operadores de disyunción: La *disyunción exclusiva o excluyente* y *la disyunción inclusiva o incluyente*.

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera si sólo una de las proposiciones es verdadera, y la indicamos con el símbolo $\underline{\vee}$. La disyunción inclusiva entre dos proposiciones es verdadera incluso si ambas proposiciones son verdaderas y se indica con el símbolo $\vee$.

En el lenguaje coloquial y en matemática es más frecuente el uso de la disyunción inclusiva, también llamada el "o inclusivo". A veces el contexto de una frase indica si la disyunción es exclusiva o inclusiva. Un ejemplo de disyunción de tipo inclusivo es:

Los alumnos de este curso son inteligentes o estudian mucho.

En este caso, los alumnos pueden cumplir cualquiera de los dos requisitos, o también cumplir los dos. Pero por ejemplo, si hablando de un viejo amigo decimos "tenía un bar que quedaba en la calle Sucre o Jujuy" normalmente significa que era en una de esas dos calles (tal vez no recordamos cuál), pero no las dos.

Frecuentemente y cuando no es claro en el contexto de la oración se indica que una disyunción es inclusiva (resp. exclusiva) terminando la frase con *o ambas* (resp. *pero no ambas*).

Las siguientes tablas resumen los valores de verdad de $p \;\veebar\; q$ y $p \vee q$:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por *disyunción* nos referiremos habitualmente a la disyunción inclusiva y por *tabla de verdad de la disyunción*, a la tabla de arriba a la derecha. Nuevamente la tabla de verdad expresa un método para determinar el valor de verdad de una disyunción $p \vee q$: determinar primero los valores de verdad de p y de q; si ambos son F, entonces el de $p \vee q$ también lo es. En caso contrario, el de $p \vee q$ es V.

Ejemplo 6. Si p es $2 = 5$, q es $2 < 5$ y r es $2 > 5$, entonces $p \vee q$ expresa $2 = 5$ ó $2 < 5$, que también puede escribirse $2 \leq 5$ y es verdadero ya que 2 es menor que 5. Por otro lado la proposición $p \vee r$ que dice $2 = 5$ ó $2 > 5$ (y también puede escribirse $2 \geq 5$) es falsa pues es la disyunción de dos proposiciones falsas.

§ Propiedades de la conjunción y la disyunción

Se dice que dos proposiciones son *lógicamente equivalentes* cuando tienen los mismos valores de verdad independientemente del valor de verdad de las variables proposicionales involucradas. Usamos el símbolo $\equiv$ para afirmar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes y el símbolo $\not\equiv$ para expresar que dos proposiciones no lo son.

Para la disyunción y para la conjunción se cumple la *propiedad conmutativa*:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p.$$

También se cumple la *propiedad asociativa*:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

Estas propiedades dicen que si combinamos tres o más proposiciones utilizando uno de estos conectivos, no importa en qué orden se realicen las operaciones. Incluso pueden suprimirse repeticiones y negaciones dobles, dada la *propiedad de idempotencia* y de *negación doble*:

$$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p \qquad \neg\neg p \equiv p.$$

En cambio, si utilizamos conectivos distintos, no se cumple la asociatividad en todos los casos. Por ejemplo, la expresión

$$(p \wedge q) \vee r$$

indica que se efectúa primero $p \wedge q$ y luego la disyunción con r; mientras que en la expresión

$$p \wedge (q \vee r)$$

se efectúa la conjunción de p con $q \vee r$. Notemos por ejemplo que si p es F, q es V y r es V, entonces $(p \wedge q) \vee r$ es V y $p \wedge (q \vee r)$ es F, por lo tanto $(p \wedge q) \vee r \not\equiv p \wedge (q \vee r)$.

En el caso de esas expresiones se cumple, sin embargo, la siguiente *propiedad distributiva*:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Con la negación obtenemos las siguientes *Leyes de De Morgan*:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Todas estas propiedades pueden comprobarse construyendo las tablas de verdad correspondientes y verificando que los valores de verdad de ambas proposiciones coinciden en todos los casos.

Por ejemplo, para comprobar la propiedad distributiva de la disyunción respecto a la conjunción, construimos las tablas de verdad de $(p \wedge q) \vee r$ y de $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$, y vemos que sus valores de verdad coinciden en todos los casos.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**
V	F	V	F	**V**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	F	**V**
F	V	F	F	**F**
F	F	V	F	**V**
F	F	F	F	**F**

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	**V**
V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	**F**
F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	**F**
F	F	V	V	V	**V**
F	F	F	F	F	**F**

En total hay ocho casos posibles que resultan de combinar los posibles valores de verdad V y F para cada una de las tres variables proposicionales p, q y r que aparecen. La cuarta columna de la tabla de la izquierda se obtiene aplicando la tabla de verdad de la conjunción a las primeras dos columnas. La quinta columna, aplicando la tabla de verdad de la disyunción a la cuarta y la tercera columnas. Un análisis similar puede hacerse con la tabla de la derecha.

Al comparar dos tablas de verdad de esta manera es imprescindible listar los ocho casos en el mismo orden en ambas tablas y así evitar posibles confusiones. Otra posibilidad es confeccionar una única tabla en que aparezcan las dos proposiciones que se desea comparar, evitando asimismo el trabajo de repetir las primeras tres columnas:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**	V	V	**V**
V	F	V	F	**V**	V	V	**V**
V	F	F	F	**F**	V	F	**F**
F	V	V	F	**V**	V	V	**V**
F	V	F	F	**F**	F	V	**F**
F	F	V	F	**V**	V	V	**V**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Otras propiedades verificables con tablas de verdad son: $p \wedge \neg p$ es siempre F (esto nos está confirmando que ninguna proposición p puede ser V y F a la vez) y $p \vee \neg p$ es siempre V (esto confirma que toda proposición p es V o F, que no hay otra posibilidad).

Ejercicios

1. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indicar si la correspondiente proposición a la derecha es o no su negación. Si no lo es, escribir correctamente la negación.

a) El dado arrojó un número par.	*a*) El dado arrojó 3.
b) 4 es múltiplo de 8.	*b*) 4 no es múltiplo de 8.
c) La ecuación $x^2 - 9 = 0$ no tiene solución real.	*c*) La ecuación $x^2 - 9 = 0$ tiene dos soluciones reales.
d) La ecuación $2x + 3 = 0$ no tiene solución real.	*d*) La ecuación $2x + 3 = 0$ tiene al menos una solución real.
e) m es múltiplo de n.	*e*) n es múltiplo de m.

2. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indicar si la correspondiente proposición a la derecha es o no *equivalente* a su negación.

a) $a \leq b$	*a*) $a > b$
b) $a \geq b$	*b*) $a \leq b$
c) $a < b \leq c$	*c*) $a > b \geq c$
d) $a < b \leq c$	*d*) $a \geq b$ o $b > c$
e) h es divisible por 2 y por 3.	*e*) h no es divisible por 2 ni por 3.
f) 2 y 3 dividen al número f.	*f*) 2 no divide a f o 3 no divide a f.

3. Evaluar cada proposición para el caso en que p es F, q es V y r es F.

a) $p \vee q$	*c*) $\neg p \vee q$	*e*) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$
b) $\neg p \vee \neg q$	*d*) $p \vee \neg(q \wedge r)$	*f*) $\neg p \wedge (q \vee r)$

4. Comprobar a través de las tablas de verdad, la propiedad asociativa de la disyunción, la distributiva de la conjunción respecto a la disyunción, y las leyes de De Morgan.

SECCIÓN 3.2

Otros conectivos

§ Condicional o implicación

Otra forma de conectar dos proposiciones p y q es diciendo: *si se cumple p entonces se cumple q*, es decir por medio de una implicación. Este conectivo lógico se llama *condicional* o *implicación* y se simboliza con $\Rightarrow$.

Ejemplo 1. Para obtener el certificado de estudios secundarios es necesario aprobar todas las materias del plan de estudios. Ana fue alumna de una escuela secundaria hasta el año pasado. Podemos conectar las proposiciones p: *"Ana ha obtenido el certificado de estudios secundarios"*,

q: *" Ana ha aprobado matemática"*,

con el conectivo condicional $\Rightarrow$:

$p \Rightarrow q$: *"Si Ana ha obtenido el certificado entonces ha aprobado matemática."*

¿Es verdadera la proposición p? ¿Y la proposición q? ¿Y la proposición $p \Rightarrow q$?

No tenemos información suficiente para responder si la proposición p es verdadera. Posiblemente algunos alumnos obtuvieron el certificado y otros no, y no sabemos en cuál de los dos grupos se encuentra Ana. Lo mismo ocurre con el valor de verdad de q: algunos alumnos aprobaron matemática y otros no, no sabemos cuál de los dos es el caso de Ana. Ignoramos, pues, los valores de verdad de p y de q.

Sin embargo, deberíamos poder convencernos de que la proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera, ya que su veracidad se deduce de los requisitos necesarios para obtener el certificado. Esa proposición debería ser cierta para Ana y también para cualquier otro alumno: si el alumno obtuvo el certificado, necesariamente debe haber aprobado todas las materias, entre ellas matemática.

La implicación es tal vez el conectivo de mayor dificultad para comprender, porque su uso difiere del habitual en el que frecuentemente existe una relación de causalidad entre p y q. Según esa relación, el ejemplo 1 tal vez haya sorprendido porque la obtención del certificado no es la causa de que haya aprobado matemática. Más bien se podría decir que haber aprobado matemática (entre otras materias) sería la causa, y la obtención del certificado, su efecto.

En lógica, sin embargo, la veracidad de $p \Rightarrow q$ significa que si p es verdadero, q también debe serlo. Ese significado se ve reflejado en la *tabla de verdad del implica*,

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esta tabla de verdad indica que si se quiere verificar que $p \Rightarrow q$ es V, alcanza con comprobar que si p es V, q también lo es. El único caso falso de $p \Rightarrow q$ es que p sea V y q sea F. En el ejemplo, sería el caso en que Ana obtuvo el certificado sin haber aprobado matemática, lo que es imposible pues violaría el requisito para la obtención del certificado.

§ La implicación y el razonamiento deductivo

Es usual en matemática que un teorema tome la forma de una implicación: si p entonces q. Una forma posible de demostración es aceptar p como verdadera y comprobar, a través de una secuencia de pasos de razonamiento, que q es verdadera. Por ejemplo, podemos demostrar que

$$a < b \Rightarrow a+1 < b+1$$

es V, aceptando que $a < b$ es V y comprobando que $a+1 < b+1$ es V pues el $<$ se mantiene cuando se suma 1 a ambos miembros.

Notar que la implicación ha sido demostrada para cualquier par de números reales a y b. En particular, hemos demostrado que $1 < 2 \Rightarrow 2 < 3$ es V y también que $2 < 1 \Rightarrow 3 < 2$ es V, que ilustran los casos de la primera y de la última línea de la tabla de verdad del implica.

De la misma manera podemos ilustrar el caso de la tercera línea demostrando que

$$2 = 1 \Rightarrow 0 = 0$$

es V. En efecto, si aceptamos que $2 = 1$ es V, multiplicando ambos miembros por 0 se obtiene $2 \cdot 0 = 1 \cdot 0$ que es equivalente a $0 = 0$.

§ Recíproca y contrarrecíproca

En la implicación $p \Rightarrow q$, p se llama *antecedente* y q *consecuente*. La proposición $p \Rightarrow q$ se lee de diferentes maneras:

- p implica q.
- Si p entonces q.
- q si p.

Si $p \Rightarrow q$ es una implicación, entonces $q \Rightarrow p$ es la *recíproca*, $\neg p \Rightarrow \neg q$ es la *inversa* y $\neg q \Rightarrow \neg p$ es la *contrarrecíproca*, y se puede deducir que sus tablas de verdad son:

p	q	$q \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observemos que los valores de verdad de una implicación $p \Rightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ son los mismos para todos los valores de p y q posibles, es decir, son lógicamente equivalentes
$(p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p)$.

Ejemplo 2. Volvamos al ejemplo 1 y analicemos la recíproca de $p \Rightarrow q$, es decir, $q \Rightarrow p$: *si Ana aprobó matemática entonces obtuvo el certificado*. ¿Podemos asegurar que es verdadera esta proposición? Para responder esta pregunta uno puede remitirse a la tabla de verdad de la recíproca, donde se observa que hay un caso en que la misma sería falsa: que p sea F y q sea V, es decir, que Ana no obtuvo el certificado pero aprobó matemática. Evidentemente, es una situación posible.

§ Bicondicional o implicación doble

El bicondicional entre p y q se simboliza $p \Leftrightarrow q$ y se lee p *si y sólo si* q, y es verdadero en los casos en que ambas proposiciones tengan el mismo valor de verdad. El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

La siguiente tabla es la *tabla de verdad de la implicación doble*:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Queda como ejercicio comprobar la equivalencia lógica $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Ejemplo 3. Supongamos que para aprobar un parcial de Álgebra la nota debe ser mayor que 4. Entonces con las proposiciones simples p: "Apruebo un parcial",

q: "La nota es mayor que 4",

y el conectivo $\Leftrightarrow$ formamos la proposición compuesta

$p \Leftrightarrow q$: " Apruebo un parcial si y sólo si la nota es mayor que 4".

§ Reglas de precedencia para los conectivos lógicos

Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Por ejemplo

$$p \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r \tag{3.1}$$

puede ser interpretada como $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$ o como $(p \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r)$, o también hay otras posibilidades. Por lo tanto expresiones como (3.1) no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas y difíciles de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos. Estas reglas son llamadas *reglas de prioridad* o *de precedencia*. Generalmente cada conectivo tiene una prioridad dada, y las conexiones con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que las conexiones con una prioridad más baja. El conectivo $\neg$ tiene la prioridad más alta. Por ejemplo, la proposición $\neg p \vee q$ debe ser entendida como $(\neg p) \vee q$, y no como $\neg(p \vee q)$. En el caso de los conectivos binarios el orden de prioridades, de mayor a menor, es $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Pese a que la prioridad de $\wedge$ es mayor que la de $\vee$, suele no hacerse distinción entre ellos y escribir los paréntesis correspondientes para evitar confusiones. Lo mismo puede decirse de la relación entre $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Veamos ejemplos donde se aplica el uso de las prioridades: $p \Rightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $p \Rightarrow (p \wedge q)$. La expresión $p \vee \neg r \Leftrightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $(p \vee (\neg r)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$. Pese a estas reglas algunas expresiones requieren el uso de paréntesis. Por ejemplo, la expresión (3.1) es ambigua, y debe distinguirse si se trata de $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$, o bien de $p \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

Ejemplo 4. Ahora estamos en condiciones de evaluar el valor de verdad de cualquier proposición compuesta teniendo en cuenta los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos lógicos. Por ejemplo, podemos dar la tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \wedge (q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee r)$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \wedge \neg r$	$p \vee r$	$q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee r)$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

Ejercicios

1. Sean p, q, r las proposiciones siguientes:
   - p: "está lloviendo"
   - q: "el sol está brillando"
   - r: "hay nubes en el cielo".

   Traducir lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.

   a) Está lloviendo y el sol está brillando.
   b) Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.
   c) Si no está lloviendo, entonces el sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
   d) El sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.
   e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el sol está brillando.

2. Sean p, q y r como en el ejercicio anterior. Traducir lo siguiente a oraciones en español.

   a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   b) $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$
   c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
   d) $\neg (p \Leftrightarrow (q \vee r))$
   e) $\neg (p \vee q) \wedge r$
   f) $\neg(p \Rightarrow q)$

3. Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. En base a esta única suposición, ¿cuáles de las siguientes proposiciones puedes asegurar que son verdaderas y cuáles no puedes asegurar?

   a) Si llueve entonces Juan usa paraguas.
   b) Si Juan usa paraguas entonces llueve.
   c) Si Juan no usa paraguas entonces no llueve.
   d) Si no llueve entonces Juan no usa paraguas.
   e) Si no llueve entonces Juan usa paraguas.

4. Escribir la contrarrecíproca de cada una de las siguientes implicaciones:

   a) Si 4 es par entonces $1 > 0$.
   b) $2+3=5$ si $1+1<3$.
   c) Si 4 es impar entonces $1 > 0$.
   d) Si $1+1<3$ entonces $2=4$.

5. Indicar para qué valores de verdad de p y q resulta verdadera la proposición compuesta

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p).$$

6. Suponiendo que $p \Rightarrow q$ es falso, indicar los valores de verdad para

   a) $p \wedge q$
   b) $p \vee q$
   c) $q \Rightarrow p$

7. Sabiendo que la proposición compuesta $(\neg q) \vee (q \Rightarrow p)$ es falsa, indicar cuál es el valor de verdad de las proposiciones p y q.

8. Utilizar tablas de verdad para comprobar la equivalencia lógica $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

SECCIÓN 3.3

Teoría básica de conjuntos

§ Introducción

Al hablar de conjuntos nos referiremos a cualquier colección de objetos, individuos o entes. En el contexto de la matemática, el término *conjunto* no tiene una definición sino que es un concepto primitivo. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, el de los televisores de la ciudad de Córdoba y el de los peces en los océanos. En este curso nos referiremos específicamente a los conjuntos formados por números y cómo trabajar con ellos desde un punto de vista formal de la matemática. Esta teoría elemental de conjuntos es fundamental en matemática y también de suma importancia en la definición de conceptos básicos de informática.

§ Conjuntos y pertenencia

Un *conjunto* está integrado por objetos y los objetos que integran el conjunto se llaman *elementos* de ese conjunto. Ejemplos de conjuntos son los siguientes:

- El conjunto de los números enteros.
- El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.
- El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.
- El conjunto formado por los estudiantes de primer año de la FAMAF.

Como mencionamos anteriormente, trabajaremos con conjuntos cuyos elementos son números como es el caso de los dos primeros ejemplos. En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si a es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee a *pertenece a* A o a *es un elemento de* A. Si a no es un elemento del conjunto A se escribe $\neg(a \in A)$ o $a \notin A$ y se lee a *no pertenece a* A o a *no es elemento de* A. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales.

De hecho la forma en que los estamos denotando acá, es la misma con la que se denotaron en el capitulo anterior (ver pg 22), o como se representaron en la escuela.

Definir un conjunto es describir de una manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son los elementos de dicho conjunto. Existen distintas maneras de definir un conjunto. La forma más simple, pero que no siempre es posible, es listar todos los elementos del conjunto separados por comas y encerrando todo entre llaves. Por ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 5, \pi\}, \qquad B = \{0\}, \qquad M = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

En este caso decimos que el conjunto está definido *por extensión*. El orden en que los elementos se listan es irrelevante, como así también lo sería una eventual (e innecesaria) repetición de elementos. Así, el conjunto A podría haberse definido también por $A = \{1, 3, 5, 2, 3, 5, \pi\}$.

Ejemplo 1. Definir por extensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto T de los números naturales menores que 3.

b) El conjunto S de los números naturales mayores que 3.

En el caso del conjunto T, la definición por extensión es $T = \{1, 2\}$.

En el caso del conjunto S, resulta imposible listar todos los elementos porque hay una cantidad infinita. Esto muestra que no todos los conjuntos pueden definirse por extensión. De todas maneras suele utilizarse una notación similar escribiendo $S = \{3, 4, 5, \dots\}$.

Otra manera de definir un conjunto es enunciando una propiedad que caracteriza a los elementos que lo integran dentro de un cierto universo de elementos que denotamos $\mathcal{U}$, es decir:

$$A = \{x \in \mathcal{U} \mid x \text{ cumple la propiedad } P\}.$$

Esto se lee: *el conjunto formado por los x en $\mathcal{U}$ tales que x cumple la propiedad P*.

Esta forma de definir al conjunto se llama *por comprensión*. De esta manera, los conjuntos T y S del Ejercicio 1 se definen como

$$T = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$$
$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$$

Ejemplo 2. El conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 2^6 \wedge x \text{ es potencia de } 2\}$$

es el conjunto formado por los elementos 2, 4, 8, 16, 32 y 64 y se define por extensión como

$$C = \{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}.$$

Una forma alternativa de definir por comprensión al conjunto C es

$$C = \{2^k \mid k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq 6\},$$

donde indicamos que los elementos de C son de la forma 2^k, siendo k un natural entre 1 y 6. Esto es, los elementos de C son 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 y 2^6.

Ejemplo 3. Describir por extensión los siguientes conjuntos:

$$M = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}, \qquad Q = \left\{\frac{k}{2} \mid k \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq k < 8\right\}$$

Los elementos de M son de la forma $2x + 1$, donde x es un natural menor que 6. Por lo tanto los elementos de M son

$$2 \cdot 1 + 1, \quad 2 \cdot 2 + 1, \quad 2 \cdot 3 + 1, \quad 2 \cdot 4 + 1, \quad 2 \cdot 5 + 1,$$

es decir:

$$M = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$$

En el caso de Q, sus elementos son racionales de la forma $\frac{k}{2}$, donde k es un natural menor que 8 y mayor o igual a 2. Por lo tanto sus elementos son

$$\frac{2}{2},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{2},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{6}{2},\quad \frac{7}{2}.$$

Es decir:

$$Q = \{1,\ \frac{3}{2},\ 2, \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2}\}$$

El conjunto vacío

En la teoría de conjuntos es necesario considerar los conjuntos sin elementos. Veamos el siguiente ejercicio:

Ejemplo 4. Definir por extensión el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < 0\}.$$

Notemos que los elementos de este conjunto cumple la propiedad de ser mayores que 0, y menores que 0. Como no existen números con esa propiedad, decimos que el conjunto A *vacío* y lo denotamos

$$A = \emptyset \qquad \text{o} \qquad A = \{\ \}.$$

§ Subconjuntos

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1,3,5\}, \qquad \text{y} \qquad B = \{1,2,3,4,5\}.$$

Como podemos ver, los elementos de A: $1,3$ y 5, también son elementos de B. Decimos entonces que A es un *subconjunto* de B, o que A está *incluido en* B.

> Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B.
> Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está *incluido* o *contenido* en B.

En particular, todo conjunto está incluido en sí mismo: $A \subseteq A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen los mismos elementos, es decir, si los elementos de A son elementos de B, y viceversa. En términos de la inclusión de conjuntos, A y B son iguales si $A \subseteq B$ y también $B \subseteq A$.

> Dos conjuntos A y B son *distintos* si no son iguales.

No siempre es sencillo detectar la igualdad de dos conjuntos.

Ejemplo 5. Consideremos los conjuntos

$$A = \{1,3\} \qquad \text{y} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 4n = -3\}.$$

En principio A y B están definidos de manera diferente, por lo cual no resulta evidente si son iguales o distintos. Los elementos de A son 1 y 3. Notemos que 1 y 3 verifican la propiedad que define a B. En efecto

$$1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 \qquad \text{y} \qquad 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3.$$

Luego podemos afirmar que

$$A \subseteq B.$$

Además, los elementos de B son los números naturales que satisfacen la ecuación

$$n^2 - 4n + 3 = 0,$$

y esta ecuación tiene exactamente como raíces a 1 y 3 (para verificar que éstas son las raíces podés resolver esta ecuación cuadrática usando lo visto en tu escuela). Por lo tanto también es cierto que todo elemento de B es un elemento de A, es decir

$$B \subseteq A.$$

Concluimos entonces que $A = B$.

Notemos que dos conjuntos pueden ser distintos pero tener uno o más elementos en común. Por ejemplo, $A = \{2,4\}$ y $B = \{1,4,6\}$ son distintos pero el 4 es un elemento de ambos conjuntos.

Dos conjuntos se dicen *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo 6. Los conjuntos $C = \{2,4,6\}$ y $D = \{1,3,5,7\}$ son disjuntos.

Si A es un subconjunto de B, pero distinto de B,
se dice que A es un *subconjunto propio* de B, y se denota $A \subset B$.

Ejemplo 7. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par y } x < 10\}$ y $B = \{2,4,6,8,10\}$. En este caso, todo elemento de A es un elemento de B, y por lo tanto A es un subconjunto de B: $A \subseteq B$. Además se cumple que 10 pertenece a B pero no pertenece a A, por lo cual A y B no son los mismos conjuntos. Decimos entonces que A es un subconjunto propio de B y lo escribimos $A \subset B$.

Ejemplo 8. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$.

El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos. En efecto, si A es un conjunto cualquiera, entonces la proposición

Si $x \in \emptyset$ entonces $x \in A$

es verdadera, ya que el antecedente de la implicación ($x \in \emptyset$) es falso[1]. Es decir que para todo conjunto A se verifica que $\emptyset \subseteq A$.

Intervalos de números reales

Un *intervalo* de números reales es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tiene la siguiente propiedad: dados dos números a y b en el intervalo, todos los números comprendidos entre a y b también pertenecen al intervalo. Gráficamente, un intervalo se identifica en la recta real con un segmento o una semirrecta, con o sin sus extremos, o con toda la recta real.

Ejemplo 9. El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como un segmento con extremos 2 y 8, como se ilustra en la Figura 3.1 donde se lo destaca con un trazo más grueso.

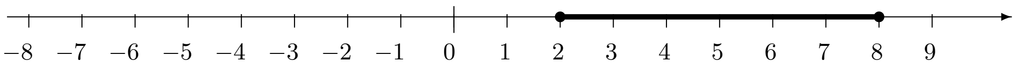


Figura 3.1: El intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$.

También se lo puede graficar con una línea paralela a la recta real, evitando la superposición con la misma para mayor claridad, como en la Figura 3.2.

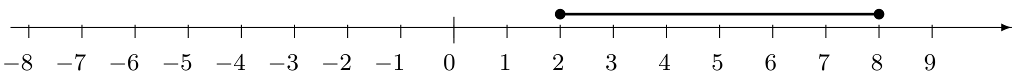


Figura 3.2: El intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$.

Los extremos resaltados del segmento indican que el 2 y el 8 pertenecen al intervalo.

Ejemplo 10. El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como una semirrecta, con origen en -5, sin contar este extremo, como se ilustra en la Figura 3.3.

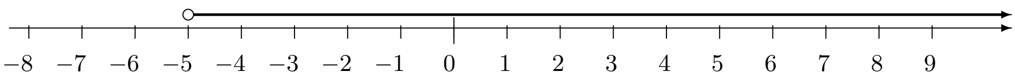


Figura 3.3: El intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$.

En este caso el circulito vacío en el extremo izquierdo indica que el número -5 no pertenece al intervalo, y la flecha a la derecha, que el intervalo no posee extremo derecho, este intervalo se grafica como una semirrecta.

Para los intervalos se utiliza una notación específica, y se los clasifica además en intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos. Los distintos tipos de intervalos se definen a continuación y se ilustran en la Figura 3.4.

El intervalo cerrado $[a,b]$, con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

[1]Recordar que si p es falso, entonces la implicación $p \Rightarrow q$ es verdadera.

En particular, a y b son elementos de $[a,b]$.

El intervalo abierto (a,b), con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

En este caso, a y b no son elementos de (a,b). Los subconjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ y $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, también se llaman intervalos abiertos, y para éstos se utiliza la notación (a,∞) y $(-\infty,a)$, respectivamente. Al símbolo ∞ se lo denomina *símbolo de infinito*. El conjunto $\mathbb{R}$ es también un intervalo abierto, que se denota $(-\infty,\infty)$.

Por último, los intervalos semiabiertos se denotan de la forma $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,\infty)$ y $(-\infty,b]$, siendo a y b números reales. Se definen por comprensión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \ R \mid a < x \leq b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}
\end{aligned}$$

En la Figura 3.4 se ilustran los distintos tipos de intervalos, asumiendo que a y b son números reales tales que $a < b$.

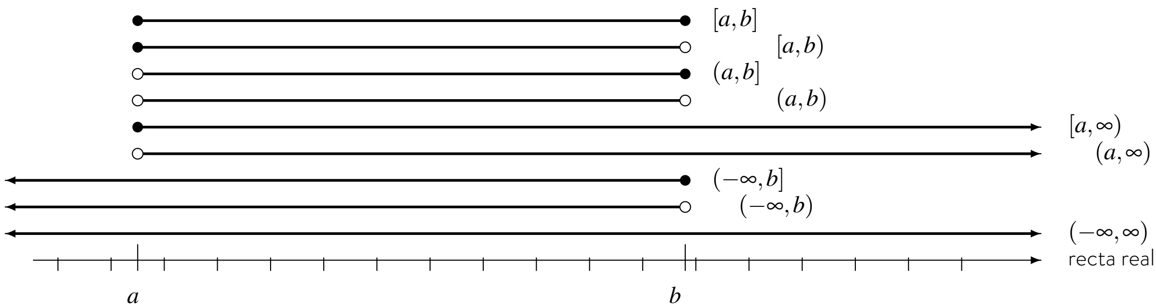


Figura 3.4: Intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.

Ejemplo 11. Los intervalos $(-2,3]$ y $[-2,3)$ se grafican en la Figura 3.5.

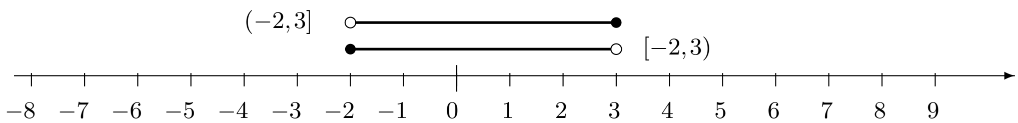


Figura 3.5: Intervalos $(-2,3]$ y $[-2,3)$.

Ejemplo 12. Si tomamos $a = b$ el intervalo cerrado $[a,b] = [a,a]$ tiene un sólo elemento: a. Por ejemplo para $a = b = 5$,

$$[5,5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 5\} = \{5\},$$

y este conjunto representa un punto en la recta real como se muestra en la Figura 3.6.

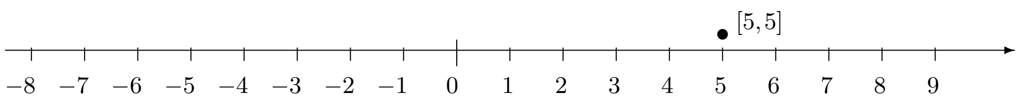


Figura 3.6: El intervalo $[5,5]$.

§ El conjunto universal

Cuando trabajamos con conjuntos es habitual considerar que los elementos pertenecen a un universo de elementos determinado. Por ejemplo, cuando considerábamos intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos, todos ellos eran conjuntos de números reales, sus elementos pertenecían al universo de números reales $\mathbb{R}$. Cuando hablamos de conjuntos de números pares, de conjuntos de potencias de un número natural, de conjuntos de múltiplos de un número natural, de conjuntos de números primos, etc., habitualmente nos referimos a elementos del universo de los números naturales o del universo de los números enteros. A dicho conjunto se lo llama *conjunto universal* y se lo denota por $\mathcal{U}$.

§ Diagramas de Venn

Es frecuente utilizar ciertos diagramas, llamados diagramas de Venn, para representar a los conjuntos. Un conjunto se representa con una línea curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. La Figura 3.7 ilustra el diagrama de Venn para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

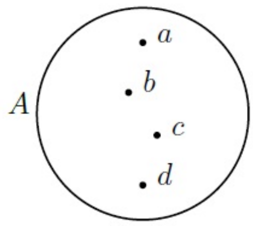


Figura 3.7: Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

En un diagrama de Venn el conjunto universal se representa con un rectángulo y el conjunto que nos interesa representar, digamos A, se denota con una curva cerrada dentro del rectángulo. En la Figura 3.8, el diagrama de la izquierda ilustra el caso general.

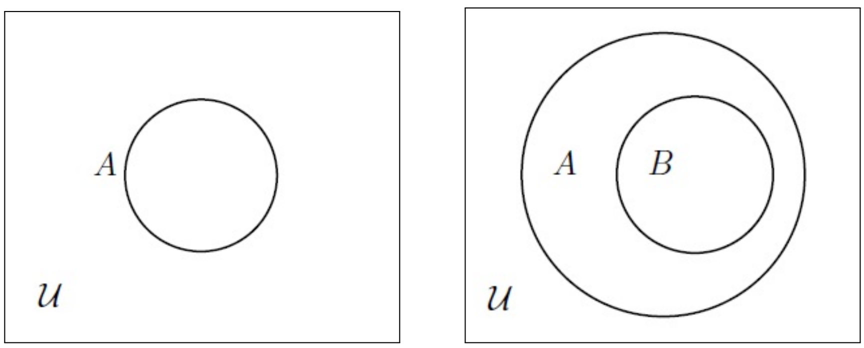


Figura 3.8: Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

Una de las propiedades más útiles de los diagramas de Venn es que dan una forma grafica de visualizar las relaciones entre conjuntos, por ejemplo, en la Figura 3.8, el diagrama de la derecha representa que todo elemento de B, es también elemento de A. Cuando en un diagrama de Venn se desea enfatizar un conjunto es usual sombrear el interior de la curva cerrada que lo denota. Veremos ejemplos de esto al estudiar operaciones entre conjuntos, en el próximo capítulo.

Ejercicios

1. Definir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, en caso que sea posible.

   a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 4\}$
   b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ es múltiplo de $3\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid (3x-1)(x+2) = 0\}$
   d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (3x-1)(x+2) = 0\}$
   e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 4\}$
   f) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < |n| < 7\}$

2. Enumerar tres elementos cualesquiera de cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ es divisible por $5\}$
   b) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n$ es primo $\}$
   c) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   d) $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r < 1\}$

3. Describir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos o escribe $\emptyset$ si son vacíos:

   a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 9\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$
   c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < |n| < 7\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \wedge x \geq 2\}$

4. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos A y B decir si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, ambas o ninguna de las anteriores.

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es par $\wedge x^2 \leq 140\}$ $\quad B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,
   b) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1$ es par $\wedge x \leq 12\}$,
   c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es impar $\wedge x^2 \leq 140\}$ $\quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   d) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ es un múltiplo de 6$\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ es múltiplo de 3$\}$

5. Representar en la recta real cada uno de los siguientes intervalos, y describirlos por comprensión:

   a) $[1, 5]$
   b) $(-2, 4)$
   c) $[-1, \infty)$
   d) $(-\infty, 5]$
   e) $(2, 7]$
   f) $[-4, 0)$

SECCIÓN 3.4

Operaciones entre conjuntos

§ Introducción

Así como pueden definirse diversas operaciones entre números, como la adición, la sustracción, la multiplicación, etc., también existen operaciones entre conjuntos. Fijemos un conjunto universal $\mathcal{U}$ y consideremos todos los subconjuntos de $\mathcal{U}$. Entre estos conjuntos están definidas las operaciones de unión, intersección y diferencia. Además, para cada conjunto se define el complemento. El resultado de cada una de estas operaciones es un subconjunto de $\mathcal{U}$.

§ Unión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

> *La unión $A \cup B$ de A con B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B.*

Por comprensión, la unión entre los conjuntos A y B se define así:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \vee x \in B\}$$

En particular, A y B son subconjuntos de $A \cup B$, pues todos los elementos de A y todos los elementos de B pertenecen a $A \cup B$. En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos (ver Figura 3.9).

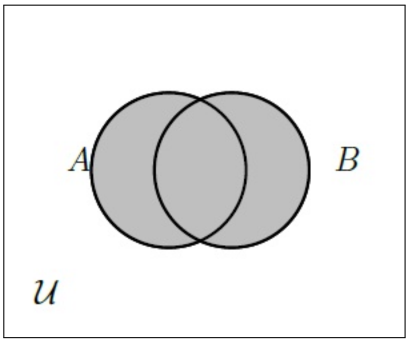


Figura 3.9: La unión de los conjuntos A y B.

Ejemplo 1. Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

Ejemplo 2. Si consideramos el intervalo abierto $(0, 1)$ y el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$, entonces

$$(0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1]$$

Si A es un subconjunto de B, esto es, $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$, tal como lo ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Sean $A = \{1, 4, 9\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces la unión entre A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B.$$

Ejemplo 4. Si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 5\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 10\}$, entonces

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 5\},$$

puesto que todo número múltiplo de 10 es también múltiplo de 5. En este caso, $B \subseteq A$.

Como $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq \mathcal{U}$, las siguientes igualdades valen en general

$$A \cup A = A, \qquad A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

§ Intersección de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

> La *intersección* $A \cap B$ entre A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B.

Por comprensión, la intersección de los conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

En particular, $A \cap B$ es subconjunto de A y de B, pues todos los elementos de $A \cap B$ pertenecen a A y a B. En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa por la región que está determinada por el interior común de las curvas cerradas que determinan los dos conjuntos. A esta región se la destaca con un sombreado (ver Figura 3.10).

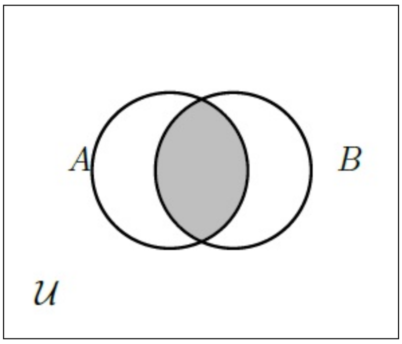


Figura 3.10: Intersección de A y B.

Ejemplo 5. Sean

$$\mathcal{U} = \mathbb{N}, \qquad A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 11\},$$
$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es primo}\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar } \wedge n \leq 20\}$$

Entonces,

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, \quad A \cap P = \{2, 3, 5, 7, 11\}, \quad B \cap P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

Ejemplo 6. Si consideramos los intervalos $[0,5)$ y $(3,6]$, entonces

$$[0,5) \cup (3,6] = [0,6] \qquad \text{y} \qquad [0,5) \cap (3,6] = (3,5).$$

Ejemplo 7. La intersección del intervalo $(0,1)$ con el conjunto $\{0,1\}$ no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío:

$$(0,1)\cap\{0,1\}=\emptyset,$$

es decir que $(0,1)$ y $\{0,1\}$ son conjuntos disjuntos.

En general, dos conjuntos son *disjuntos* si y sólo si su intersección es vacía. Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y sólo si no hay elementos comunes entre ellos. Esto se grafica con dos curvas cerradas que no se cortan.

Las siguientes igualdades valen en general,

$$A\cap A=A, \qquad A\cap\emptyset=\emptyset, \qquad A\cap\mathcal{U}=A.$$

Un caso muy particular de la intersección se obtiene cuando A es un subconjunto de B, de la siguiente forma,

- Si $A\subseteq B$, entonces $A\cap B=A$.
- El reciproco de esta afirmación también es verdadero, esto es, si $A\cap B=A$, entonces $A\subseteq B$.

§ Complemento de un conjunto

Fijemos $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A un subconjunto de $\mathcal{U}$.

El complemento *de A con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A y se denota por A^c.*

En símbolos,

$$A^c=\{x\in\mathcal{U}\mid x\notin A\}.$$

En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un subrayado o sombreado. (ver Figura 3.11).

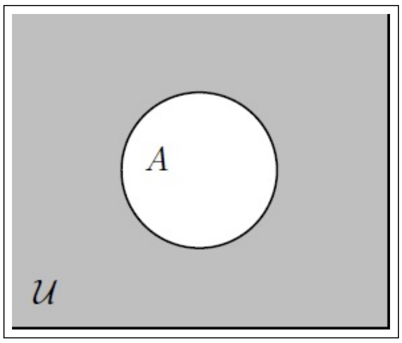


Figura 3.11: Complemento de A.

Ejemplo 8. Si $\mathcal{U}=\mathbb{N}$ y P es el conjunto de los números naturales pares, entonces P^c es el conjunto de los números naturales impares.

Ejemplo 9. Si $\mathcal{U}$ es un plano, y P es un punto en el plano, entonces $\{P\}^c$ es el plano sin el punto P.

La operación de complementación satisface las siguientes igualdades:

$$\emptyset^c = \mathcal{U}, \qquad \mathcal{U}^c = \emptyset, \qquad (A^c)^c = A.$$

§ Diferencia de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

> *La diferencia o complemento relativo $A - B$ entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.*

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos A y B, destacando la región que es interior a A y exterior a B (ver Figura 3.12).

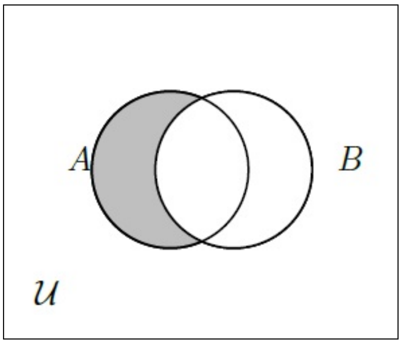


Figura 3.12: Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.

Ejemplo 10. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}$.

Ejemplo 11. $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5\}$

Ejemplo 12. $[-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$

Dejemos por un momento el mundo de los conjuntos numéricos para ver que la teoría de conjuntos puede servir para modelar y analizar situaciones del mundo real.

Ejemplo 13. Un relevamiento realizado entre los 143 alumnos del tercer año de la Licenciatura en Astronomía de esta Facultad arrojó el siguiente resultado: 48 de ellos son usuarios de twitter, 94 de facebook y 25 de instagram (y son las únicas tres redes sociales que utilizan). La mitad de los usuarios de twitter no usan ninguna otra red social. De la otra mitad, 15 usan también facebook y 12 usan también instagram. Hay solo 5 alumnos que tienen a instagram como única red social. Llamemos T, F e I respectivamente, a los conjuntos de alumnos usuarios de cada una de esas redes sociales. Podemos expresar toda esta información utilizando el lenguaje de la teoría de conjuntos. Por ejemplo:

a) Que la mitad de los usuarios de twitter no usen ninguna otra red social, nos dice que $T-(F\cup I)$ tiene 24 elementos.

b) Que de la otra mitad (los otros 24), 15 usan también facebook y 12 usan también instagram, nos dice que $F\cap T$ tiene 15 elementos, que $T\cap I$ tiene 12 elementos, y que , $I\cap T\cap F$ tiene 3 elementos.

Podemos volcar la información obtenida en un diagrama de Venn:

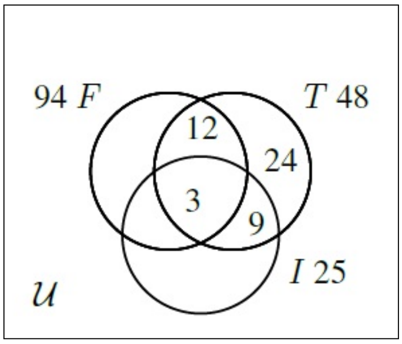


Figura 3.13: Los números indican cantidades de elementos.

Usando toda la información disponible, se deja como ejercicio completar el diagrama de la Figura 3.13 respondiendo las siguientes preguntas:

1. ¿cuántos alumnos pertenecen a $I-(F\cup T)$?
2. ¿cuántos pertenecen a $(F\cap I)-T$?
3. ¿cuántos pertenecen a $F-(I\cup T)$?
4. ¿cuántos alumnos no utilizan ninguna de las tres redes sociales?

§ Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Resumimos a continuación las propiedades que cumplen las operaciones de unión, intersección y complementación:

Propiedad conmutativa

$$A\cap B=B\cap A,\qquad A\cup B=B\cup A.$$

Propiedad asociativa

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\qquad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

Idempotencia y complemento doble

$$A\cap A=A,\qquad A\cup A=A,\qquad (A^c)^c=A.$$

Propiedad distributiva

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), \qquad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Leyes de De Morgan

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c, \qquad (A\cup B)^c=A^c\cap B^c.$$

Los siguientes ejemplos ilustran estas propiedades.

Ejemplo 14. Si

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{2,3,4\} \text{ y } C=\{1,3,5\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap C &= \{2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{3\}\\ A\cap(B\cap C) &= \{1,2,3\}\cap\{3\}=\{3\}.\\ (A\cup B)\cup C &= \{1,2,3,4\}\cup\{1,3,5\}=\{1,2,3,4,5\}\\ A\cup(B\cup C) &= \{1,2,3\}\cup\{1,2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 15. Sean

$$\mathcal{U}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ A=\{0,2,4,6,8\},\ B=\{0,3,6,9\} \text{ y } C=\{1,3,5,7,9\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A\cap C) &= \{0,6\}\cup\emptyset=\{0,6\},\\ A\cap(B\cup C) &= \{0,2,4,6,8\}\cap\{0,1,3,5,6,7,9\}=\{0,6\},\\ (A\cup B)\cap(A\cup C) &= \{0,2,3,4,6,8,9\}\cap\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=\{0,2,3,4,6,8,9\},\\ A\cup(B\cap C) &= \{0,2,4,6,8\}\cup\{3,9\}=\{0,2,3,4,6,8,9\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 16. Si A, B y $\mathcal{U}$ son como en el Ejemplo 15, entonces

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c &= \{0,2,3,4,6,8,9\}^c=\{1,5,7\},\\ A^c\cap B^c &= \{1,3,5,7,9\}\cap\{1,2,4,5,7,8\}=\{1,5,7\},\\ (A\cap B)^c &= \{0,6\}^c=\{1,2,3,4,5,7,8,9\},\\ A^c\cup B^c &= \{1,3,5,7,9\}\cup\{1,2,4,5,7,8\}=\{1,2,3,4,5,7,8,9\}.\end{aligned}$$

Destacamos que en estos ejemplos sólo hemos hecho una comprobación en un caso particular, eso no basta para demostrar que la misma se cumple para todo par de conjuntos A y B.

§ Relación con la lógica proposicional

El paralelo entre las propiedades que acabamos de enunciar para operaciones entre conjuntos, y las propiedades que enunciáramos oportunamente para los conectivos lógicos es asombroso. No ocurre por casualidad, sino que es consecuencia de las siguientes propiedades de las operaciones de intersección, unión y complementación:

$$x \in A \cap B \text{ si y sólo si } x \in A \wedge x \in B$$
$$x \in A \cup B \text{ si y sólo si } x \in A \vee x \in B$$
$$x \in A^c \text{ si y sólo si } x \notin A$$

La intersección se define en términos de la conjunción, la unión en términos de la disyunción y la complementación en términos de la negación. Habiendo hecho esta observación, es comprensible que compartan tantas propiedades.

Sea F una proposición que es siempre falsa y V una proposición que es siempre verdadera, se cumplen las equivalencias

$$p \wedge \neg p \equiv F, \qquad p \vee \neg p \equiv V, \qquad p \wedge F \equiv F, \qquad p \wedge V \equiv p, \qquad p \vee F \equiv p, \qquad p \vee V \equiv V,$$

que nuevamente se corresponden a las siguientes igualdades de conjuntos

$$A \cap A^c = \emptyset, \qquad A \cup A^c = \mathcal{U}, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cap \mathcal{U} = A, \qquad A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

Además de maravillarnos, esta relación entre los conectivos lógicos y las operaciones entre conjuntos habituales permite demostrar las igualdades presentadas en este capítulo, utilizando las propiedades respectivas de la lógica. Recordemos que las de la lógica, a su vez, se pueden demostrar de manera mecánica confeccionando la tabla de la verdad correspondiente.

Ejercicios

1. Dados $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ el conjunto universal y $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, definir por extensión los siguientes conjuntos:

    a) $A \cup B$
    b) $A - B$
    c) A^c
    d) $B^c \cap (C - A)$
    e) $(A \cap B)^c \cup C$
    f) $B \cap C$
    g) $A \cap (B \cup C)$
    h) $(A \cap B) \cup C$
    i) $(A \cap B) - C$
    j) $(A \cup B) - (C - B)$

2. En diagramas de Venn como el de la figura, sombrear los conjuntos siguientes:

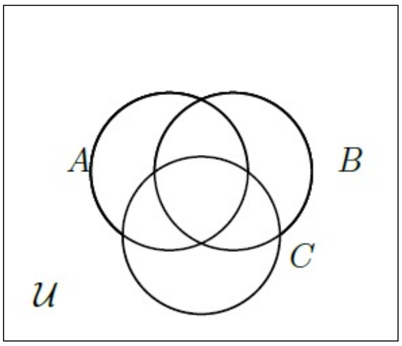


Figura 3.14: Diagrama de Venn

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $(A \cup C) \cap B$

d) $A \cap B \cap C$

e) $(A \cup C)^c$

f) $(A - B) \cap C$

g) $(A \cap C) \cup C^c$

h) $(A \cap B \cap C)^c$

i) $(A - B) - C$

3. De un total de 64 alumnos de un colegio:

   - 15 estudian solamente francés,
   - 11 estudian solamente francés e inglés;
   - 12 estudian solamente alemán;
   - 8 estudian solamente francés y alemán;
   - 10 estudian solamente inglés;
   - 5 estudian solamente inglés y alemán; y
   - 3 los tres idiomas.

   Ayudandote de un diagrama de Venn como el del ejercicio anterior, determina:

   a) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?

   b) ¿Cuántos estudian alemán?

   c) ¿Cuántos estudian alemán e inglés?

   d) ¿Cuántos estudian francés?

4. Describir por comprensión el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y graficarlo en la recta real. Indicar si el conjunto obtenido es un intervalo, y en tal caso representarlo en la notación de intervalos.

   a) $[-1, \infty) \cap (-3, 2)$.

   b) $(-\infty, 2) \cup [0, \infty)$

   c) $(-3, 1] \cap (2, \infty)$

   d) $(-2, 3] \cup (-\infty, 1)$

   e) $[-3, 0) \cap (-2, 3)$

5. Utilizando las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la intersección y la unión, y las Leyes de De Morgan, comprobar las siguientes identidades. Ilustrar cada caso con un diagrama de Venn. Recordar que $A - B = A \cap B^c$.

   a) $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$

   b) $A \cap (B \cup A)^c = \emptyset$

   c) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

   d) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$

   e) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

6. Simplificar la expresión de modo que A, B y C aparezcan a lo sumo una vez:

   a) $((A^c \cup C^c) \cap B)^c \cup (A \cup (C \cap B)^c \cup C)^c$

   b) $(A \cup (B \cup C)^c)^c \cap (A^c \cup (B \cap C)^c)^c$

SECCIÓN 3.5

Cuantificadores

§ Funciones proposicionales

Consideremos las siguientes proposiciones:

q : "El perro es un animal."
r : "La rosa es un animal."
s : "La vaca es un animal."

Las tres proposiciones tienen en común el *predicado lingüístico* "es un animal", y tienen diferente el *sujeto*. La frase "es un animal" está dando una propiedad del sujeto. Si escribimos:

x es un animal

obtenemos una oración que, para cada sujeto x constituye una proposición diferente. Así, si a x le damos el valor $x =$ "El perro" se obtiene la proposición

El perro es un animal

que es verdadera, mientras que si a x le damos el valor $x =$ "La rosa" obtenemos la proposición

La rosa es un animal

que es falsa. En este ejemplo, la frase

x es un animal

es una *función proposicional*, y la variable x toma valores en un conjunto llamado *universo del discurso*. A la operación que reemplaza la variable por un valor en ese conjunto la llamamos *instanciación de la variable x*. Entonces, las funciones proposicionales son funciones que para cada valor de un cierto universo devuelven una proposición, que se obtiene instanciando la variable en dicho valor. A las funciones proposicionales las denotamos con una letra mayúscula seguida de la variable entre paréntesis. Por ejemplo:

$P(x)$: x es un animal.

Gracias a nombrar $P(x)$ a esta función proposicional, también podemos nombrar a sus instancias. Por ejemplo, P(El perro) es la instancia "El perro es un animal" de la función proposicional $P(x)$.

§ Cuantificadores

Hemos visto que las funciones proposicionales permiten construir proposiciones por instanciación de sus variables. Los *cuantificadores* nos permiten construir otras proposiciones a partir de funciones proposicionales ya sea particularizando o generalizando. Ejemplifiquemos esto. Si consideramos la función proposicional

$$P(x) : x \text{ es mayor que } 0,$$

podemos particularizar esto diciendo:

Existe un número real que es mayor que 0,

que es una proposición verdadera, o generalizarlo diciendo

Todos los números reales son mayores que 0,

que es una proposición falsa. Notemos que tanto en la particularización como en la generalización se especifica un conjunto en donde toma valores la variable, en este ejemplo el conjunto de los números reales.

Existe una notación específica para la particularización y la generalización:

$$\exists x \in \mathbb{R} \ | \ x > 0,$$

que se lee *existe un* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* x *es mayor que 0*; mientras que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x > 0$$

se lee *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que* x *es mayor que* 0.

El símbolo $\forall$ se llama *cuantificador universal*
y el símbolo $\exists$ se llama *cuantificador existencial*

Como ya lo hemos afirmado, un cuantificador transforma una función proposicional en una proposición, que tiene un valor de verdad.

Ejemplo 1. Consideremos la función proposicional $P(n)$: *4 n es par*. Entonces la proposición

$$p : \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n)$$

es decir, "para todo n natural se cumple que $4n$ es par", equivale a enunciar la conjunción

$$4 \cdot 1 \text{ es par y } 4 \cdot 2 \text{ es par y } 4 \cdot 3 \text{ es par y } 4 \cdot 4 \text{ es par y } \ldots$$

La proposición p es verdadera ya que cada una de las proposiciones de la conjunción es verdadera.

Ejemplo 2. Dada la función proposicional

$$P(n) \text{: } n \text{ es un número mayor que } 1,$$

entonces la proposición

$$q : \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n)$$

está enunciando que para todo n natural, se cumple que n es mayor que 1, que equivale a enunciar la conjunción

1 es mayor que 1 y 2 es mayor que 1 y 3 es mayor que 1 y 4 es mayor que 1 y ...

que es falso ya que la primera proposición de la conjunción es falsa, 1 no es mayor que 1. Entonces la proposición q es falsa, no importa que para todos los demás valores de n $(2,3,4,\ldots)$ la proposición $P(n)$ sea verdadera.

Si aplicamos el cuantificador existencial y enunciamos

$$r : \exists n \in \mathbb{N} \mid P(n),$$

equivale a enunciar la disyunción

1 es mayor que 1 o 2 es mayor que 1 o 3 es mayor que 1 o 4 es mayor que 1 o ...

La proposición r es verdadera, pues al menos una de las proposiciones de la disyunción, por ejemplo la tercera, es verdadera, es decir, 3 es mayor que 1.

> Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
> $\forall x \in A,\ P(x)$
> es verdadera si y sólo si la instancia $P(a)$ es verdadera para *todos* los $a \in A$.

De esta forma, para demostrar que la proposición $\forall x \in A,\ P(x)$ es verdadera debo ver que $P(a)$ es verdadera para todas las instancias posibles. Para demostrar que es falsa, en cambio, basta con encontrar un elemento $a \in A$ tal que $P(a)$ sea falsa. En este caso, a suele denominarse un *contraejemplo* de $\forall x \in A,\ P(x)$.

Ejemplo 3. Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y la función proposicional

$$P(n)\colon n^2 \leq 40$$

entonces la proposición $\forall n \in A,\ P(n)$ es V pues se verifica que el cuadrado de todos los números naturales entre 1 y 6 es menor que 40, mientras que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ es F, dado que no vale $P(7)$. El número 7 en este caso es un contraejemplo.

> Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
> $\exists x \in A \mid P(x)$
> es verdadera si y sólo si la instancia $P(a)$ es verdadera para *algún* $a \in A$.

Ejemplo 4. Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y la función proposicional entonces la proposición $\exists n \in \mathbb{N} \mid Q(n)$ es V puesto que vale $Q(7)$, mientras que $\exists n \in A \mid Q(n)$ es F, dado que ninguno de los elementos $n \in A$ satisface $Q(n)$.

$$Q(n)\colon n^2 > 40$$

Ejemplo 5. Sea $A = \emptyset$. Entonces, cualquiera sea la función proposicional $P(x)$, se tiene que $\forall x \in A,\ P(x)$ es V mientras que $\exists x \in A \mid P(x)$ es F.

§ Negación de proposiciones cuantificadas

La negación de una proposición cuantificada es también una proposición, que a su vez puede describirse con un cuantificador. Sea p la proposición $\forall x \in A,\ P(x)$. Recordando lo que aprendimos sobre la negación, $\neg\, p$ es una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, y verdadera siempre que p sea falsa. Entonces $\neg\, p$ es verdadera si y sólo si p es falsa. ¿Y cuándo es falsa p? Cuando no sea cierto que para todos los $a \in A$ se cumpla $P(a)$, es decir, cuando para alguno de ellos, $P(a)$ no se cumpla. Esto último equivale a que para algún $a \in A$, $\neg\, P(a)$ sea verdadero. Luego

$$\neg\,(\forall x \in A,\ P(x)) \equiv \exists x \in A \mid \neg\, P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición ”todos los números naturales son primos” equivale a la proposición ”existe un número natural que no es primo”, que es verdadera. Análogamente, la negación de la proposición $\exists x \in A\ \mid P(x)$ será verdadera si y sólo si $P(a)$ es falsa para todo $a \in A$. Equivalentemente, $\neg(\exists x \mid P(x))$ es verdadera si $\neg P(a)$ es verdadera para todo $a \in A$. Luego

$$\neg(\exists x \in A\ \mid P(x)) \equiv \forall x \in A,\ \neg P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición ”existe un planeta que está habitado” equivale a la proposición ”todos los planetas están deshabitados” (que se puede enunciar también como ”ningún planeta está habitado”).

§ Funciones proposicionales de varias variables

Además de los ejemplos de funciones proposicionales como los que hemos visto, con una sola variable, es posible encontrar otros con varias variables, por ejemplo

$$R(x,y) : x \text{ es menor o igual que } y.$$

Para obtener una proposición por instanciación, debemos instanciar ambas variables. Por ejemplo, $R(1,3)$ es la proposición ”1 es menor o igual que 3”, que es verdadera, mientras que $R(4,2)$, es la proposición ”4 es menor o igual que 2” que es falsa.

Si queremos obtener una proposición utilizando los cuantificadores, también debemos cuantificar ambas variables. Por ejemplo, si $R(x,y)$ es la función proposicional recientemente definida, entonces

- $p : \forall x \in \mathbb{N},\ (\exists y \in \mathbb{N}\ \mid\ R(x,y))$ es la proposición que afirma que todo numero natural es alcanzado o superado por algún otro, la cual es V.
- $q : \exists x \in \mathbb{N}\ \mid\ (\forall y \in \mathbb{N},\ R(x,y))$ es la proposición que afirma que hay un número natural que es más chico o igual que todos los demás, la cual también es V.
- $r : \exists y \in \mathbb{N}\ \mid\ (\forall x \in \mathbb{N},\ R(x,y))$ es la proposición que afirma que hay un número natural que es más grande o igual que todos los demás, la cual es F.

§ Renombre de variables

Los nombres de las variables que estamos usando junto a los cuantificadores normalmente no aparecen en el lenguaje coloquial. Proposiciones tales como ”para todo número natural existe uno mayor” es representada por $\forall x \in \mathbb{N},\ (\exists y \in \mathbb{N}\ \mid x < y)$ que requirió que se introdujeran las variables x e y. La elección de esos nombres fue arbitraria, la misma proposición podría representarse por $\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists m \in \mathbb{N}\ \mid n < m)$ y cualquier otro par de nombres que eligiéramos para esas variables.

Siempre que una proposición pueda obtenerse a partir de otra solamente reemplazando los nombres de las variables cuantificadas, diremos que las dos proposiciones son equivalentes. Debe tenerse cuidado con reemplazar consistentemente todas las ocurrencias de una variable por la misma variable, y que no se reemplacen dos variables por una misma, o una que ya se esté utilizando en la proposición.

Por ejemplo, $\forall x \in \mathbb{N},\ (\exists y \in \mathbb{N} \mid x < y)$ es equivalente a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists m \in \mathbb{N} \mid n < m)$$

y también a

$$\forall y \in \mathbb{N},\ (\exists x \in \mathbb{N} \mid y < x).$$

Sin embargo, no es equivalente a

$$\forall y \in \mathbb{N},\ (\exists x \in \mathbb{N} \mid x < y),$$

ni a

$$\forall i \in \mathbb{N},\ (\exists j \in \mathbb{N} \mid j < i)$$

ni tampoco a

$$\forall z \in \mathbb{N},\ (\exists z \in \mathbb{N} \mid z < z).$$

Al reemplazo correcto de los nombres de las variables cuantificadas por otros nombres llamamos *renombre de variables*.

Ejercicios

1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, se define la relación $R(x,y)$ por medio la función proposicional "x es múltiplo de y". Representar cada una de las siguientes frases utilizando cuantificadores.
   a) Algún número entero es múltiplo de 2020.
   b) 2020 es múltiplo de algún número entero.
   c) Todos los múltiplos de 170 son múltiplos de 17.
   d) Algún múltiplo de 11 es múltiplo de 27
   e) Todos los números enteros son múltiplos de 1.
   f) Existe al menos un número entero que es múltiplo de $3, 5, 11$ y 17, en simultaneo.
2. Analizar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.
   a) $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 > 0$.
   b) $\forall x \in \mathbb{Z},\ (x \in \mathbb{N} \vee x \leq 0)$.
   c) $\forall x \in \mathbb{N}, (\exists y \in \mathbb{N} \mid x < y)$.
   d) $\exists y \in \mathbb{Z} \mid (\forall x \in \mathbb{N},\ y < x)$.
3. Calcular la negación de cada una de las siguientes proposiciones.
   a) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{\pi}$.
   b) $\forall x \in \mathbb{Q},\ 1/x \in \mathbb{Q}$.
   c) $\forall x \in \mathbb{Q},\ (\exists y \in \mathbb{Q} \mid xy = 1)$.
   d) $\exists x \in \mathbb{Q} \mid (\forall y \in \mathbb{Q},\ xy = x)$.
4. Sobre renombre de variables cuantificadas:
   a) Renombrar x por z en $\exists x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{\pi}$.
   b) Renombrar x por i e y por j en $\exists x \in \mathbb{Q} \mid (\forall y \in \mathbb{Q},\ xy = x)$.
   c) Renombrar x por z e y por x en $\exists x \in \mathbb{Q} \mid (\forall y \in \mathbb{Q},\ xy = x)$.

SECCIÓN 3.6

Producto cartesiano

§ Pares ordenados y producto cartesiano

Dos elementos dados en cierto orden forman un *par ordenado*. Por ejemplo, un punto geográfico está determinado por las coordenadas latitud y longitud, una fecha en el año está dada por dos números: el mes y el día. En general, si x e y son dos objetos, se puede formar el par ordenado de x e y, y este par se denota como (x,y). De esta manera, la fecha $(10,03)$ significa ”3 de octubre”, mientras que $(03,10)$ indica el ”10 de marzo”. Como vemos, el orden en que se dan los elementos del par ordenado es relevante. Se los llama *primera* y *segunda coordenadas*.

Los elementos que forman un par ordenado pueden o no pertenecer a un mismo conjunto. Por ejemplo, en el caso de las fechas, la primera coordenada es un número natural entre 1 y 12, mientras que la segunda es un natural entre 1 y 31. También podemos formar los pares ordenados de la forma

(apellido, nro. de documento),

donde la primera coordenada de cada par es un apellido tomado de un conjunto de personas, y la segunda coordenada es un número. En este caso, las coordenadas son de distinta naturaleza.

> *Sean A y B dos conjuntos. El conjunto de todos los pares ordenados tales que el primer miembro del par ordenado es un elemento de A y el segundo miembro es un elemento de B, se llama el* producto cartesiano *de A por B y se escribe $A\times B$.*
>
> *Si $A=B$, se puede escribir indistintamente $A\times A$ o A^2.*

En símbolos, $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ y } b\in B\}$.

Ejemplo 1. Si $A=\{2,4,6\}$ y $B=\{4,5,6\}$, el producto cartesiano de A por B es

$$A\times B=\{(2,4),\ (2,5),\ (2,6),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}$$

Ejemplo 2. Si $A=\{\alpha,\ \beta\}$ y $B=\{1,\ 2,\ 3\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
A\times B &= \{(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3),\ (\beta,1),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\}\\
B\times A &= \{(1,\alpha),\ (1,\beta),\ (2,\alpha),\ (2,\beta),\ (3,\alpha),\ (3,\beta)\}\\
A^2 &= \{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha),(\beta,\beta)\}\\
B^2 &= \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}.
\end{aligned}$$

Si los conjuntos tienen una cantidad finita de elementos puede resultar útil el uso de una tabla de doble entrada, como la siguiente:

$A\times B$	1	2	3
α	$(\alpha,1)$	$(\alpha,2)$	$(\alpha,3)$
β	$(\beta,1)$	$(\beta,2)$	$(\beta,3)$

$B\times A$	α	β
1	$(1,\alpha)$	$(1,\beta)$
2	$(2,\alpha)$	$(2,\beta)$
3	$(3,\alpha)$	$(3,\beta)$

Así, en la primera tabla del producto cartesiano $A\times B$, tenemos que la fila correspondiente al elemento α de A contiene todos los pares ordenados de $A\times B$ cuya primera coordenada es α, mientras que la columna correspondiente al elemento 1 de B contiene todos los pares ordenados de $A\times B$ cuya segunda coordenada es 1. Con este mismo criterio, se llena la tabla para los demás elementos de $A\times B$. De manera similar se construye la tabla correspondiente a $B\times A$.

§ Representación en ejes cartesianos

Si los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales, entonces resulta útil la representación gráfica del producto cartesiano en *ejes cartesianos*. Los ejes cartesianos están formados por dos rectas perpendiculares, donde una de ellas representa el *eje de las abscisas* y el otro el *eje de las ordenadas*. En ambas rectas se representan los números reales y el punto de intersección de ambas corresponde *usualmente* al origen de coordenadas, es decir, al 0 en ambos ejes. Al lado de cada eje se deja indicada una letra que sugiere qué coordenada se representa en dicho eje. Las ”flechas” dibujadas indican el sentido creciente en cada una de las rectas (Figura 3.15).

Dado un punto P en el plano, trazamos las rectas perpendiculares a cada uno de estos ejes por el punto P. Los puntos de intersección de cada una de estas rectas con los ejes de las abscisas y de las ordenadas se denominan *abscisa* y *ordenada* del punto P, respectivamente, o también primera y segunda coordenada. De este modo, cada punto P del plano está en correspondencia con un par ordenado (x,y), donde x es la abscisa de P e y es la ordenada. A su vez, a cada par ordenado (a,b) le corresponde un punto del plano cuya abscisa es a y cuya ordenada es b.

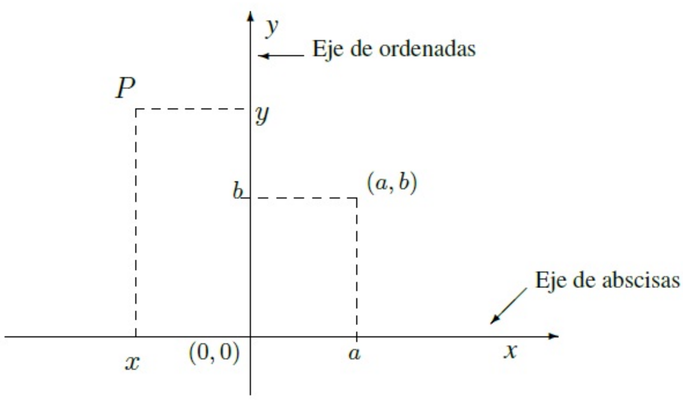


Figura 3.15: Representación de puntos en ejes cartesianos

En la Figura 3.16 podemos ver la representación gráfica en ejes cartesianos de (una parte de) los siguientes conjuntos:

$$C=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \ \mid m=n^2\} \qquad\qquad L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \mid y=x+1\}$$

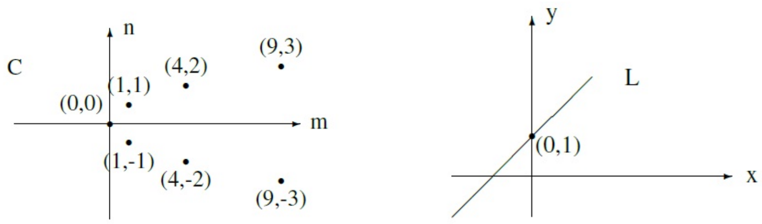


Figura 3.16: Representación gráfica de los conjuntos C y L

Notemos que C es un conjunto infinito de puntos *separados*, pues sus coordenadas son números enteros, mientras que L es una recta continua de puntos. También podemos graficar regiones del plano, como muestra la Figura 3.17, siendo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

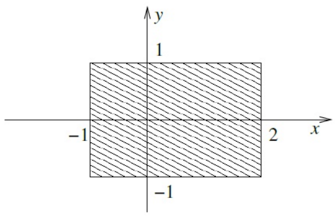


Figura 3.17: Representación gráfica del conjunto R.

Pueden ser también regiones no acotadas. Por ejemplo, la banda infinita

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < 3\},$$

representada en la Figura 3.18.

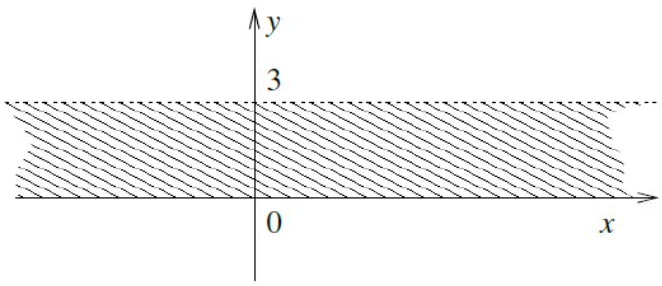


Figura 3.18: Representación gráfica del conjunto A.

La línea punteada en el borde superior de la banda indica que los puntos con segunda coordenada igual a 3 no pertenecen a A, mientras que la línea llena inferior indica que los puntos con segunda coordenada igual a 0 sí pertenecen.

Observación: Cada punto del plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ que no este sobre el eje x ni el eje y, pertenece a uno de los cuatro *cuadrante* del plano, según se ilustra en la Figura 3.19.

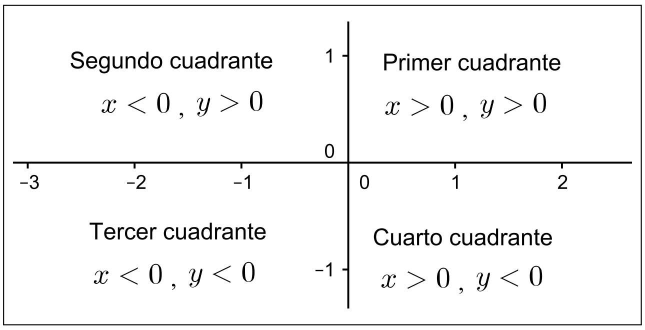


Figura 3.19: Cuadrantes en el plano

Ejercicios

1. Sea $A = \{a,\ b,\ c\}$ y $B = \{a,\ b,\ d\}$.

   a) Listar los pares ordenados de $A \times A$.

   b) Listar los pares ordenados de $A \times B$.

   c) Listar los elementos del conjunto $\{(x,y) \in A \times B \mid x = y\}$

2. Sean los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{2,5,10\}$. Describir por extensión los siguientes conjuntos:

   a) $\{(a,b) \in A \times B | a+b < 11\}$.

   b) $\{(a,b) \in A \times B | a+b \geq 11 \wedge a+b$ es par$\}$.

3. Definir por comprensión los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ representados en la Figura 3.20:

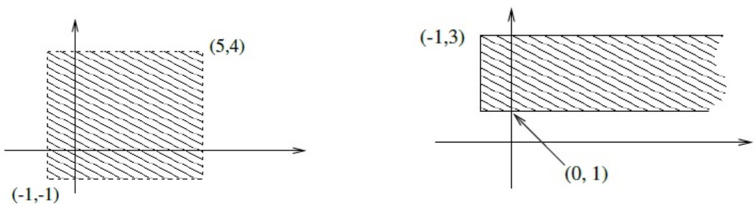


Figura 3.20

4. Graficar en ejes cartesianos las siguientes regiones o conjuntos:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ 0 \leq x \leq 2, -2 < y < 3\}$

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x = 2\}$

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x \leq y\}$

   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x > 2\}$

   e) $\{(x,y) \in \ R^2 \ | \ y < 3\}$

5. Describir por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

   a) El conjunto de puntos que en un sistema cartesiano forman el eje de las ordenadas.

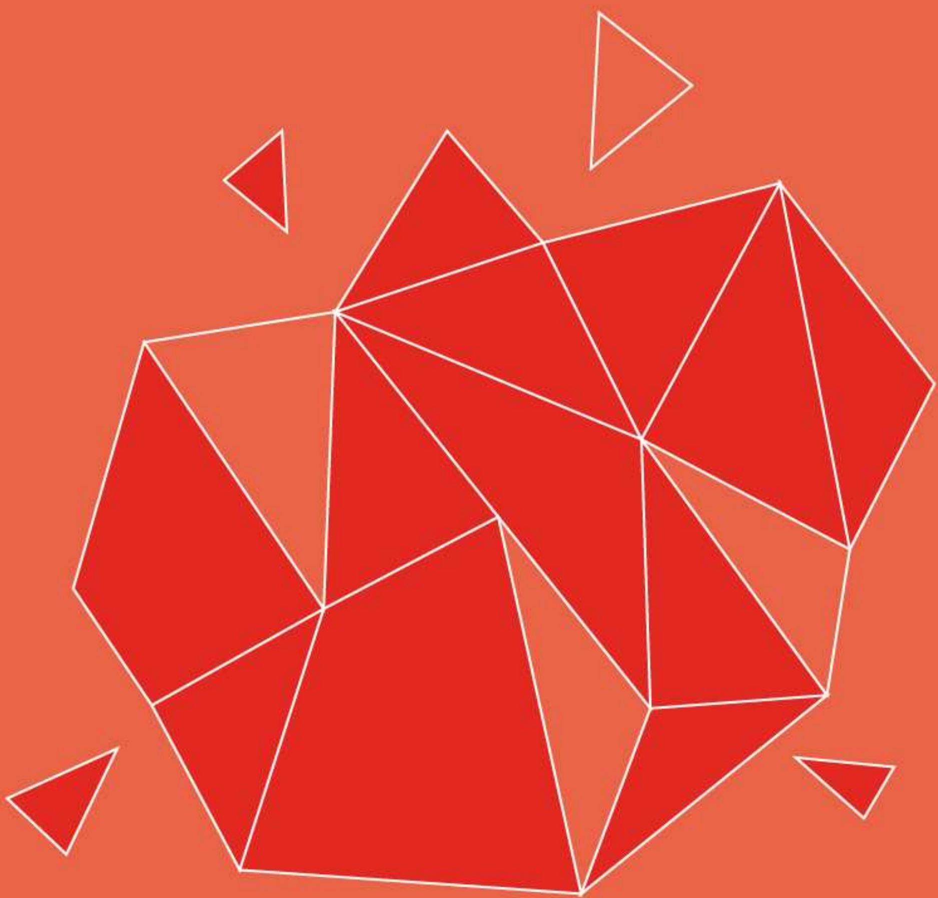
   b) El conjunto de puntos que en un sistema cartesiano forman el eje de las abcisas.

   c) El conjunto de puntos que en un sistema cartesiano forman el segundo cuadrante.

4

Funciones

Patricia Kisbye
Elvio A. Pilotta



Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

4 | FUNCIONES

En este capítulo se presentan y discuten nociones fundamentales vinculadas con el concepto de *función* y se desarrollan las principales ideas relacionadas con *funciones lineales y cuadráticas*. Si bien en este capítulo se retoman y recrean conocimientos presentes en los Diseños Curriculares para la Escuela Secundaria, se busca presentar con detalles las ideas principales de modo tal que los lectores puedan seguir la lectura de los mismos sin mayores dificultades.

La primera parte del capítulo aborda las nociones básicas relativas a funciones, definiciones relevantes y gráficos de funciones. A partir de estos conceptos, se trabaja con dos casos particulares de funciones: lineales y cuadráticas. Finalmente, se plantean un conjunto de problemas de aplicación de las principales ideas matemáticas tratadas.

Los conceptos y problemas discutidos en estas notas recuperan conocimientos ya trabajados en los dos capítulos anteriores. En particular, las ideas relativas a conjuntos, pertenencia, como así también el uso de notación simbólica, están presentes en el desarrollo de las nociones básicas de función. Del mismo modo, a lo largo de los ejemplos y problemas presentados, se recuperan las ideas de números, operaciones y ecuaciones ya trabajadas en el primer capítulo.

Cabe mencionar que los contenidos presentados en este capítulo serán de gran utilidad en los cursos de Análisis Matemático e Introducción a la Física de primer año.

SECCIÓN 4.1

Conceptos generales

§ Introducción

En términos matemáticos, una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro conjunto. Por ejemplo, al ingresar a la Universidad, a cada estudiante se le otorga un número único de legajo. Luego, podríamos decir que *legajo* es una función que le asigna a cada alumno un número. Otro ejemplo sería asignar a cada alumno su mes de cumpleaños, y así *mes de cumpleaños* es una función del conjunto de alumnos al conjunto de meses del año. El hecho que dos alumnos cumplan años en el mismo mes no invalida que sea una función, ya que a cada estudiante es posible asignarle solo un mes de cumpleaños. De este modo, al conjunto de alumnos de un curso en particular se le asigna uno de los 12 elementos del conjunto *meses del año*. Del mismo modo, la función *legajo*, a cada estudiante del conjunto *Alumnos de la Facultad* le asigna un único número del conjunto *Números de legajo*.

En este capítulo daremos la definición y ejemplos de funciones en general, pero luego nos concentraremos particularmente con funciones entre conjuntos de números que serán las que más se trabajarán al inicio de sus carreras.

§ Definición y propiedades

Definimos a las funciones de la siguiente manera:

> Dados dos conjuntos A y B, una **función** de A en B es una regla que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.

A se llama **dominio** de la función, y B es el **conjunto de llegada**. En este texto denotaremos a las funciones con letras minúsculas: f, g, h. En particular, para indicar que f es una función del conjunto A en el conjunto B lo simbolizamos:

$$f : A \to B.$$

A cada elemento a de A le corresponde un único elemento b de B. A este elemento b lo llamamos **imagen** de a por f, y lo denotamos $f(a)$.

> Al subconjunto de B formado por todas las imágenes de los elementos de A se lo denomina **imagen de** f, y lo denotamos $\text{Im}(f)$.

Ejemplo 1. Sean $A = \{\text{primavera, verano, otoño, invierno}\}, B = \{\text{meses del año}\}$, y la función h que a cada estación del año le asigna el mes en que comienza. Entonces, como la primavera comienza en el mes de setiembre, escribimos:

$$h(\text{primavera}) = \text{setiembre},$$

y para las demás estaciones tenemos

$$h(\text{verano}) = \text{diciembre}, \quad h(\text{otoño}) = \text{marzo}, \quad h(\text{invierno}) = \text{junio}$$

El dominio de h es A, y la imagen de h es

$$\text{Im}(h) = \{\text{setiembre, diciembre, marzo, junio}\}.$$

En este caso, la imagen de h es un subconjunto de B.

Ejemplo 2. Sean $A = \{\text{agosto, setiembre, octubre}\}, B = \{30,\ 31\}$. Consideramos la función g que a cada mes le asigna su cantidad de días. Entonces la imagen de cada elemento de A está dada por:

$$g(\text{agosto}) = 31, \qquad g(\text{setiembre}) = 30, \qquad g(\text{octubre}) = 31.$$

Así la imagen de g es el conjunto:

$$\text{Im}(g) = \{30,\ 31\},$$

es decir, en este caso la imagen de g coincide con el conjunto B. Notemos que los elementos *agosto* y *octubre* tienen la misma imagen, y que cada uno tiene una única imagen.

En los casos en que A y B son conjuntos de números, es frecuente que la regla que determina a la función pueda ser expresada como una fórmula o expresión algebraica que indica cuál es la correspondencia. Por ejemplo, si consideramos la función f que a cada número le asigna su cuadrado, la regla se puede escribir:

$$f(x) = x^2.$$

En esta fórmula, x representa a cualquier elemento de A. Entonces, la imagen de un número en particular se obtiene aplicando la fórmula:

$$\begin{array}{rcl} f(3) = 9 & \text{dado que} & 3^2 = 9 \\ f(-3) = 9 & \text{dado que} & (-3)^2 = 9 \\ f(-0{,}2) = 0{,}04 & \text{ya que} & (-0{,}2)^2 = 0{,}04. \end{array}$$

Ejemplo 3. Si f es la función que a cada número natural le asigna su siguiente, tenemos que f es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), y la fórmula que define a la función f se puede escribir como:

$$f(x) = x + 1.$$

Ejemplo 4. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función que a cada número le asigna el doble de su cubo, la fórmula que define a g es:

$$g(x) = 2x^3.$$

En los casos en que la función está definida por una fórmula, se suele sobreentender que el dominio está dado por el conjunto de números en el que la fórmula se puede aplicar.

Ejemplo 5. Consideremos la función f que a cada número real le asigna su raíz cuadrada:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Como la raíz cuadrada está definida sólo para los números positivos o el 0, entonces el dominio de f está dado por

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Ejemplo 6. Si g es la función que a cada número le asigna su inverso:

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

entonces $g(x)$ se puede calcular siempre que x sea distinto de 0. Recordemos que el 0 es el único número real que no tiene inverso. Luego

$$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.$$

Ejemplo 7. Si h es la función que a cada número entero le asigna su opuesto,

$$h(x) = -x,$$

entonces h se puede calcular para cualquier número entero. Por lo tanto

$$Dom(h) = \mathbb{Z}.$$

§ Gráficos de funciones

Si f es una función de A en B, y A y B son subconjuntos de números, entonces podemos representar a la función f con un gráfico en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para ello consideramos un sistema de ejes coordenados que denominamos *eje* x y *eje* y, y por cada punto x del dominio dibujamos el par $(x, f(x))$.

Si A y B son conjuntos de números, y $f : A \to B$ es una función, el **gráfico de** f está determinado por todos los puntos del plano de la forma $(x, f(x))$, con $x \in A$.

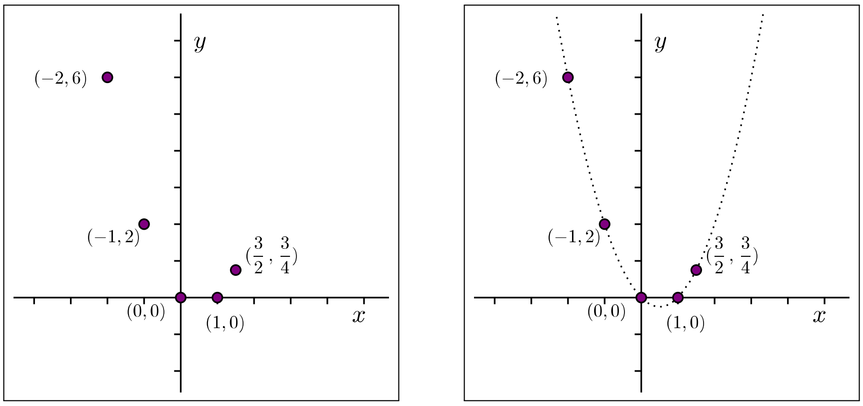
Ejemplo 8. Si f es la función determinada por la fórmula $f(x) = x^2 - x$, entonces para encontrar algunos puntos del gráfico elegimos elementos del dominio. Por ejemplo, elegimos -2, 0, 1, $\frac{3}{2}$. Con una tabla determinamos los puntos:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	6	$(-2, 6)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	0	$(0, 0)$
1	0	$(1, 0)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

Tabla 4.1: Tabla de valores de f

Los valores de la Tabla 4.1 están representados en la Figura 4.1a.

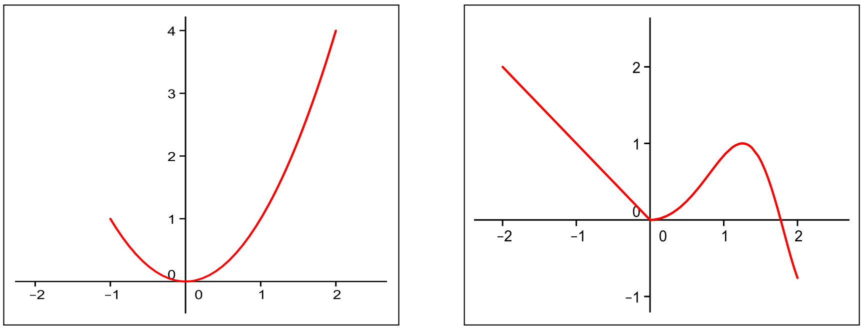
En la Figura 4.1b se han representado muchos más puntos del gráfico de f. En general no es fácil determinar el gráfico de una función con sólo marcar algunos puntos, a menos que tengamos otra información sobre la función. Por ejemplo, más adelante veremos que determinadas funciones, llamadas funciones lineales, tienen un gráfico en forma de recta. Luego con marcar dos puntos, ya conocemos todo el gráfico.



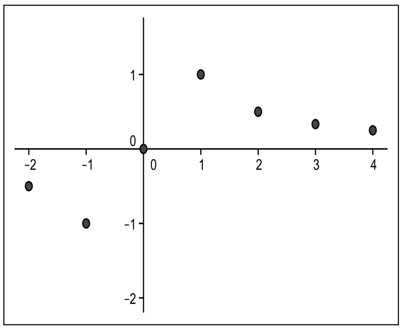
(a) Puntos de la tabla (b) Más puntos del gráfico

Figura 4.1: Gráfico de la función f

El gráfico de una función puede ser una línea curva, una poligonal, una combinación de ambas, o puntos aislados. Pero en ningún caso puede haber dos puntos con la misma coordenada x. Algunos ejemplos de gráficos de funciones están dados en la Figura 4.2.



(a) (b)



(c)

Figura 4.2: Gráficos de funciones

Notemos que en la Figura 4.2c el dominio es un conjunto de números que no es un intervalo real

$$\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$$

por eso su gráfico es un conjunto de puntos aislados y no una línea continua. Veamos cómo mejorar esta idea. Si en un gráfico hay dos puntos con la misma coordenada x, entonces no es el gráfico de una función. Esto es así pues si (a,b) y (a,c), con $b \neq c$, pertenecieran al gráfico de una función f tendría que ser $f(a)=b$ y

$f(a) = c$, y esto no es posible pues, por definición, f le asigna un único valor a a. (Ver Figura 4.3)

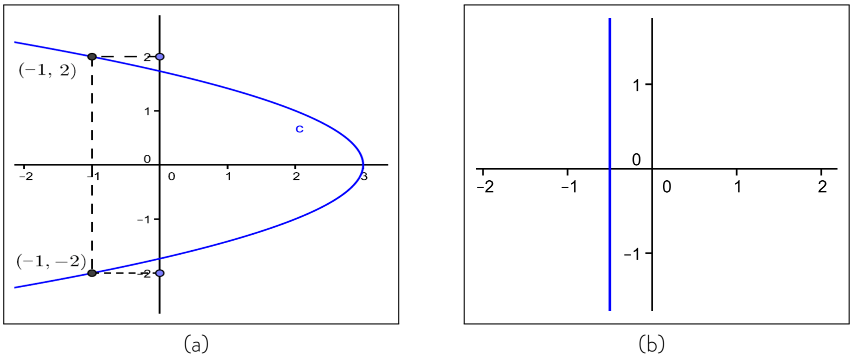


Figura 4.3: Gráficos que no corresponden a funciones

Veamos algunos ejemplos de gráficos de funciones.

Ejemplo 9. Consideremos la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2$$

Entonces el gráfico de f son todos los puntos del plano de la forma $(x,2)$, con $x \in [0,3]$. Algunos de estos puntos son:

$$(0,2), (\frac{3}{2}, 2), (3,2).$$

y el gráfico es como en la Figura 4.4:

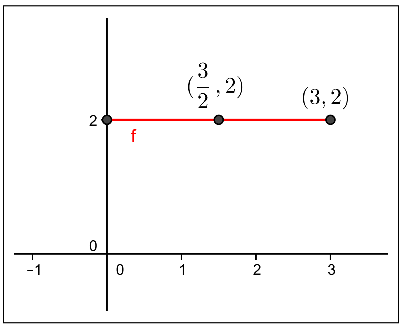


Figura 4.4: Gráfico de $f(x) = 2$

Ejemplo 10. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$. En este caso, no es posible representar a g completamente porque su dominio son todos los números reales. Pero podemos dar el gráfico de g para un intervalo, por ejemplo, para $[-1,3]$. Su gráfico está conformado por todos los puntos del plano de la forma (x,x), es decir, que tienen las dos coordenadas iguales. Algunos de los puntos del gráfico son $(0,0), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (2,2)$: (ver Figura 4.5)

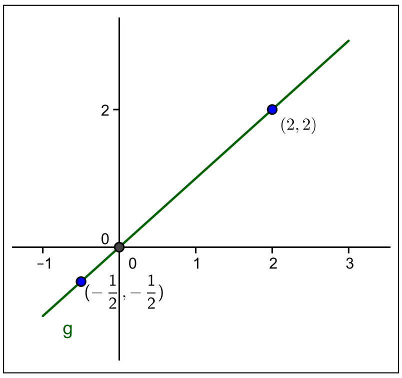


Figura 4.5: Gráfico de $g(x) = x$

Ejemplo 11. Consideremos la función dada por la fórmula

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

Los puntos del gráfico serán de la forma $(x, \frac{1}{x})$. En principio no resulta simple darse cuenta cuál es la forma del gráfico, así que nos ayudamos con una tabla y representamos algunos puntos:

x	$h(x)$	$(x,h(x))$
-3	$-\frac{1}{3}$	$(-3,-\frac{1}{3})$
-2	$-\frac{1}{2}$	$(-2,-\frac{1}{2})$
-1	-1	$(-1,-1)$
1	1	$(1,1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2,\frac{1}{2})$
3	$\frac{1}{3}$	$(3,\frac{1}{3})$

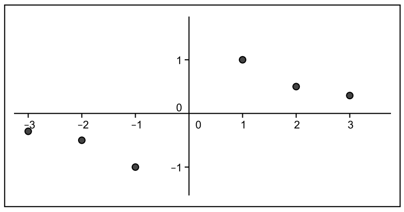


Figura 4.6: Algunos puntos del gráfico $h(x) = \frac{1}{x}$

¿Alcanzan estos puntos para graficar toda la función? ¿Cómo es el gráfico entre los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$? Es conveniente considerar algunos puntos más del dominio, por ejemplo $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{100}$, $\frac{1}{100}$. Continuando con la tabla, obtenemos algunos puntos más del gráfico:

x	$h(x)$	$(x,h(x))$
$-\frac{1}{2}$	-2	$(-\frac{1}{2},-2)$
$-\frac{1}{3}$	-3	$(-\frac{1}{3},-3)$
$\frac{1}{3}$	3	$(\frac{1}{3},3)$
$\frac{1}{2}$	2	$(\frac{1}{2},2)$
$-\frac{1}{100}$	-100	$(-\frac{1}{100},-100)$
$\frac{1}{100}$	100	$(\frac{1}{100},100)$

No hemos representado en el gráfico los puntos $(-\frac{1}{100},-100)$ y $(\frac{1}{100},100)$, pero nos ayuda a comprender cómo los valores de la función se hacen muy grandes (positivos o negativos) cuando nos aproximamos al 0. Con una línea continua se ha representado el gráfico de h:

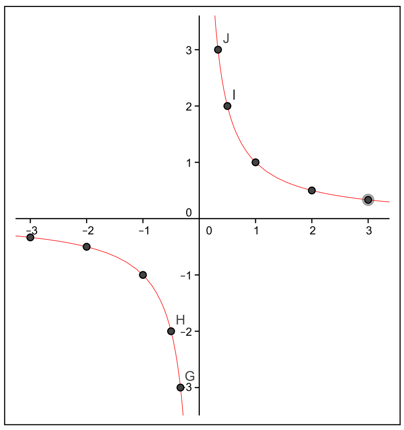


Figura 4.7: Gráfico de $h(x) = \frac{1}{x}$

Interpretación de gráficos

Más adelante veremos cómo graficar determinadas funciones, como por ejemplo las funciones lineales, cuadráticas, trigonométricas. En estos casos, la fórmula que define a estas funciones nos da suficiente información para dar un gráfico bastante aproximado.

Ahora bien, ¿por qué querríamos graficar una función? ¿Nos aporta alguna información importante el gráfico o alguna información que no se puede hacer evidente sólo con la fórmula o regla de asignación? La respuesta es que sí. A partir del gráfico y sin conocer su fórmula, podemos deducir varias propiedades de la función. Por ejemplo, el gráfico nos puede dar información sobre el dominio, la imagen, para qué valores en el dominio la función es positiva, o negativa, o mayor que 1, o igual a -2, o cuál es el valor máximo que alcanza la función, o el valor mínimo.

Ejemplo 12. Consideremos el gráfico de una función f, como se muestra de la Figura 4.8 (a 4.12).

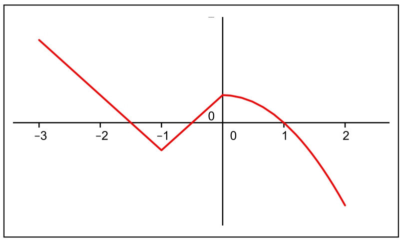


Figura 4.8: Gráfico de f

Si bien no conocemos la fórmula de la función, observando el gráfico podemos deducir algunas propiedades:

1. El dominio de f: es el conjunto de puntos en el eje x que están por debajo o por encima del gráfico. (Ver el trazo grueso sobre el eje x en la Figura 4.9). Así, el dominio de f se visualiza **sobre el eje** x, y en particular x está en el dominio si la recta vertical que pasa por x corta al gráfico.

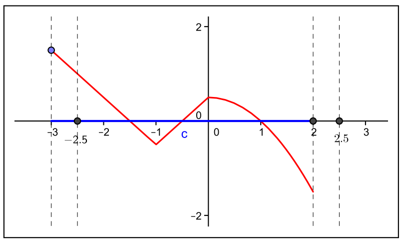


Figura 4.9: Dominio de $f = [-3, 2]$

Por ejemplo, en la Figura 4.9 podemos observar que $-\frac{5}{2}$ pertenece al dominio de la función, y en cambio $\frac{5}{2}$ no pertenece.

2. La imagen de f: Determinar la imagen de una función a partir de su fórmula no suele ser una tarea sencilla. Pero el gráfico nos permite visualizarlo como aquellos puntos **sobre el eje** y tales que si trazamos una recta horizontal ésta corta al gráfico de la función. Si trazamos rectas horizontales por los extremos del gráfico, la imagen de la función quedará encerrada, en el eje y, entre dichas rectas. (Ver Figura 4.10)

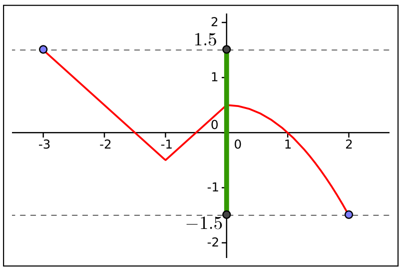


Figura 4.10: Imagen de $f = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

$\boxed{3.}$ Los valores de x para los cuales $f(x) \geq 0$: Para esto observamos las partes del gráfico que corresponden a $f(x) \geq 0$, es decir, la segunda coordenada es positiva o cero. Los valores que estamos buscando son aquellos x que quedan por debajo de esa parte del gráfico:

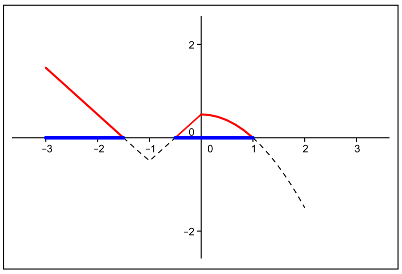


Figura 4.11: $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$

En la Figura 4.11 vemos que $f(x) \geq 0$ si x pertenece al intervalo $[-3, -\frac{3}{2}]$ o al intervalo $[-\frac{1}{2}, 1]$. En caso que quisiéramos determinar para qué valores de x se cumple $f(x) > 0$, tendremos que excluir los puntos donde la función vale 0. Como $f(x) = 0$ para $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$, resulta

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} = [-3, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1).$$

Si ahora queremos ver para qué valores de x se cumple $f(x) = \frac{1}{2}$, trazamos la recta $y = \frac{1}{2}$ y marcamos los puntos de intersección con el gráfico de f. En este caso, son los puntos $(0, \frac{1}{2})$ y $(-2, \frac{1}{2})$. Luego $f(x) = \frac{1}{2}$ para $x = -2$ y para $x = 0$. (Ver Figura 4.12)

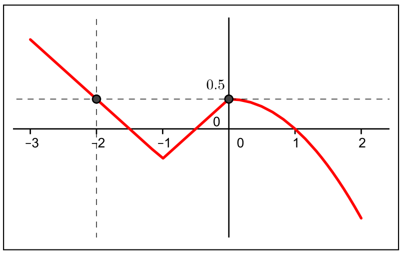


Figura 4.12: Imagen de f

Ejemplo 13. Consideremos una función g con el gráfico de la Figura 4.13.

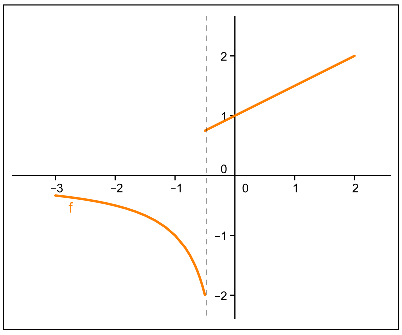
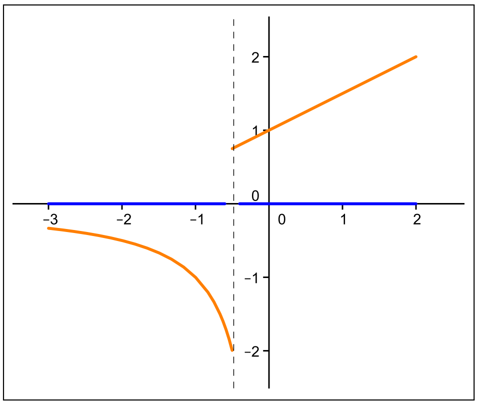
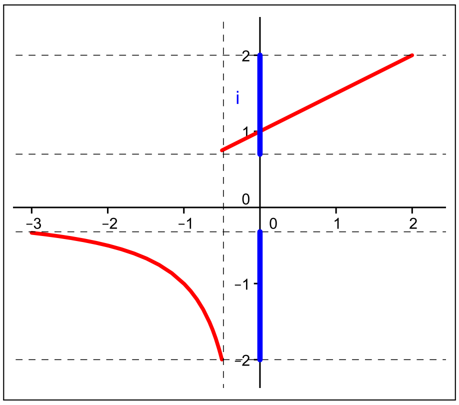


Figura 4.13: Gráfico de la función g

En este gráfico, la recta vertical $x = -\frac{1}{2}$ no interseca al gráfico de g. Esto nos indica que el punto $(-\frac{1}{2})$ no pertenece al dominio de g.



(a) Dominio de g



(b) Imagen de g

Figura 4.14: Dominio e imagen de g

En la Figura 4.14a vemos que

$$\text{Dom}(g) = [-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 2].$$

Con respecto a la imagen, recordemos que se visualiza sobre el eje y. En este ejemplo, observamos que si bien el gráfico queda encerrado entre las rectas $y = -2$ e $y = 2$, los puntos entre $(-\frac{1}{3})$ y $\frac{3}{4}$ no pertenecen a la imagen de g. La Figura 4.14b nos muestra que

$$\text{Im}(g) = [-2, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{4}, 2]$$

Por último, si quisiéramos conocer para qué valores de x se cumple que $g(x) = -\frac{1}{2}$, podemos proceder así: trazamos la recta $y = -\frac{1}{2}$, y marcamos todos los puntos de intersección con el gráfico. En este caso hay un solo punto. La coordenada x de dicho punto ($x = -2$) verifica $g(-2) = -\frac{1}{2}$.

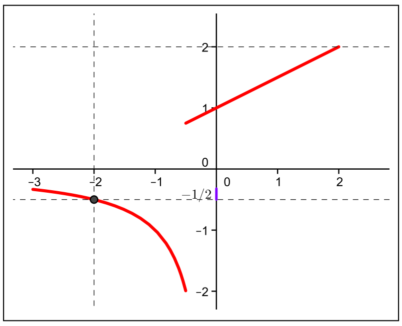


Figura 4.15: $g(-2) = -\frac{1}{2}$

§ Desplazamientos y reflexiones de gráficos

Si conocemos el gráfico de una función f, podemos determinar fácilmente el gráfico de cualquiera de estas funciones:

$$g(x) = f(x) + c, \qquad h(x) = f(x) - c, \tag{4.1}$$

$$k(x) = f(x+c), \qquad l(x) = f(x-c) \tag{4.2}$$

donde c es un número positivo. En el caso (4.1), se trata de sumar o restar a los valores de $f(x)$ una constante positiva, mientras que en el caso (4.2) esta constante se suma o se resta a los valores de x. Para las funciones dadas en (4.1) y (4.2), se dice que el gráfico se obtiene por un desplazamiento del gráfico de f. También es sencillo determinar el gráfico de las siguientes funciones:

$$g(x) = -f(x) \qquad \text{y} \qquad h(x) = f(-x). \tag{4.3}$$

En este caso, la función g toma los mismos valores que f pero con diferente signo, mientras que la función h evaluada en x toma el mismo valor que f en $-x$. Para las funciones dadas en (4.3), el gráfico se trata de una reflexión del gráfico de f respecto del eje x o del eje y. Ilustraremos estas situaciones con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14. Consideremos el gráfico de la Figura 4.16, con dominio en $[-2, 2]$ y que corresponde a

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2}$$

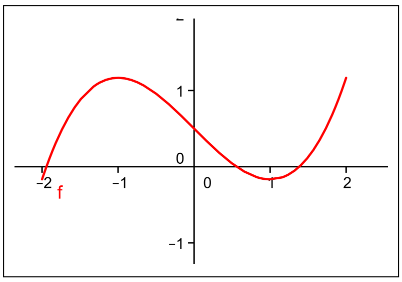


Figura 4.16: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2}$

Desplazamientos verticales

Si modificamos nuestra función sumándole una constante positiva c:

$$g(x) = f(x) + c$$

el gráfico de la función g tendrá la misma forma que la de f, pero desplazada c unidades hacia arriba. Tomemos como ejemplo $c = 1$, de modo que

$$g(x) = f(x) + 1.$$

Vemos que $f(2) = \frac{7}{6}$, por lo que el punto $(2, \frac{7}{6})$ pertenece al gráfico de f. Como $g(2) = f(2) + 1 = \frac{13}{6}$, entonces el punto $(2, \frac{13}{6})$ está en gráfico de g.

x	$f(x)$	$g(x) = f(x) + 1$	Puntos en f $(x, f(x))$	Puntos en g $(x, g(x))$
-1	$\frac{7}{6}$	$\frac{13}{6}$	$(-1, \frac{7}{6})$	$(-1, \frac{13}{6})$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$	$(0, \frac{3}{2})$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{25}{24}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{24})$	$(\frac{1}{2}, \frac{25}{24})$
1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$(1, -\frac{1}{6})$	$(1, \frac{5}{6})$

Tabla 4.2: Puntos del gráfico de f y del gráfico g

En la Tabla 4.2, consideramos otros valores de x y los correspondientes puntos en el gráfico de f y en el gráfico de g. Notemos que en cada fila los puntos del gráfico de f y de g tienen la misma coordenada x, mientras que en la segunda coordenada difieren en una unidad.

En general, para un valor de c cualquiera, por cada punto $(a, f(a))$ en el gráfico de f tenemos el punto $(a, f(a) + c) = (a, g(a))$ en el gráfico de g. Ambos tienen la misma coordenada x pero difieren en c unidades en la segunda coordenada. (Ver Figura 4.17a). Análogamente, el gráfico de la función que se obtiene restando una constante positiva c a f:

$$h(x) = f(x) - c,$$

tiene la forma del gráfico de f pero desplazada c unidades hacia abajo (Ver Figura 4.17b).

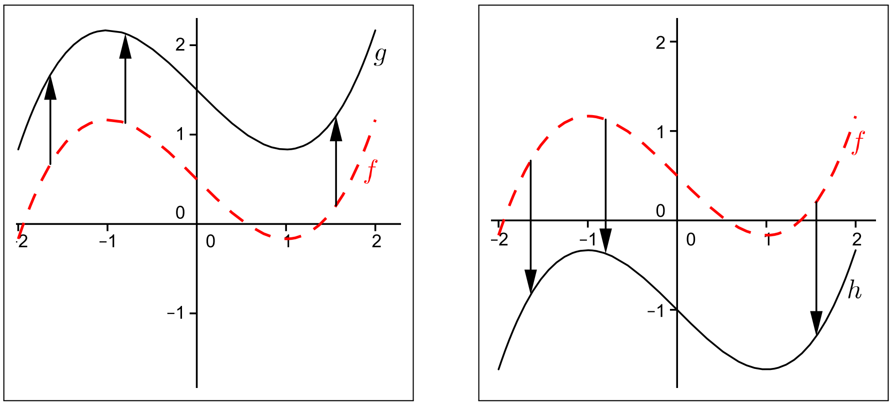
Por ejemplo, si tomamos $c = \frac{3}{2}$, entonces

$$h(x) = f(x) - \frac{3}{2}.$$

Para $x = 1$, tenemos que $f(1) = -\frac{1}{6}$ y $h(1) = f(1) - \frac{3}{2} = -\frac{5}{3}$. Luego el punto $(1, -\frac{1}{6})$ pertenece al gráfico de f mientras que $(1, -\frac{5}{3})$ está en el gráfico de h. En la Tabla 4.3 calculamos puntos del gráfico de f para algunos valores de x, y los correspondientes puntos en el gráfico de h:

x	$f(x)$	$h(x) = f(x) - \frac{3}{2}$	Puntos en f $(x, f(x))$	Puntos en h $(x, h(x))$
-1	$\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$(-1, \frac{7}{6})$	$(-1, -\frac{1}{3})$
0	$\frac{1}{2}$	-1	$(0, \frac{1}{2})$	$(0, -1)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{35}{24}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{24})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{35}{24})$
1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}$	$(1, -\frac{1}{6})$	$(1, -\frac{5}{3})$

Tabla 4.3: Puntos del gráfico de f y del gráfico h



(a) $g(x) = f(x) + 1$ (b) $h(x) = f(x) - \frac{3}{2}$

Figura 4.17: Desplazamientos verticales

Desplazamientos horizontales

Consideremos ahora la función $k(x) = f(x+c)$, y tomemos el caso en que $c = 1$:

$$k(x) = f(x+1).$$

Entonces, si calculamos $k(-1)$, obtendremos el mismo valor que para $f(0)$, pues

$$k(-1) = f(-1+\mathbf{1}) = f(0).$$

Del mismo modo, podemos ver que $k(-3)$ es igual a $f(-2)$ y que $k(-\frac{1}{2})$ es igual a $f(\frac{1}{2})$:

$$k(-3) = f(-3+\mathbf{1}) = f(-2), \qquad \text{y} \qquad k\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}+\mathbf{1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

x	Valores de f en x	Valores de k en $x-1$
0	$f(0) = \frac{1}{2}$	$k(-1) = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$	$k(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$
-2	$f(-2) = -\frac{1}{6}$	$k(-3) = -\frac{1}{6}$

Tabla 4.4: Valores de f y k

Resumimos esto en la Tabla 4.4. En general, el valor que toma f en un punto a es el mismo que toma k en el punto $a-1$, pues

$$k(a-1) = f((a-1)+\mathbf{1}) = f(a).$$

Así, como $f(0) = \frac{1}{2}$, entonces el punto $(0, \frac{1}{2})$ está en el gráfico de f y el punto $(-1, \frac{1}{2})$ está en el gráfico de k. Análogamente, como $f(-2) = -\frac{1}{6}$, entonces $(-2, -\frac{1}{6})$ está en el gráfico de f y $(-3, -\frac{1}{6})$ pertenece al gráfico de k. Notemos que el punto $(-1, \frac{1}{2})$ se obtiene desplazando al punto $(0, \frac{1}{2})$ una unidad hacia la izquierda, porque se le resta a la coordenada x una unidad. Algo similar ocurre con los puntos $(-2, -\frac{1}{6})$ y $(-3, -\frac{1}{6})$. Esto hace que el gráfico de k tenga la misma forma que el de f pero desplazado una unidad **hacia la izquierda**. (Ver Figura 4.18a).

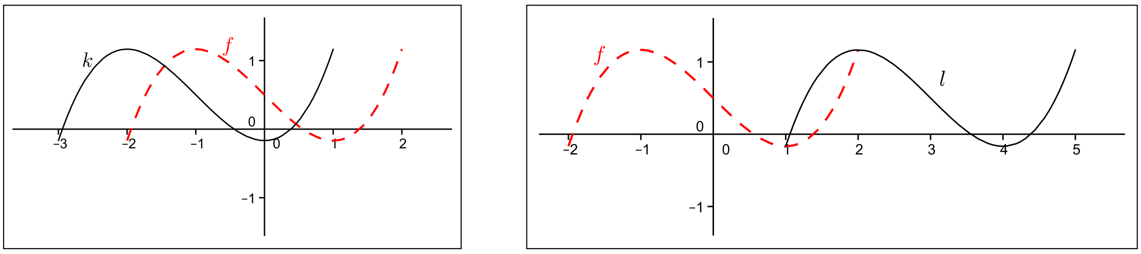
Análogamente, si ahora restamos a los valores de x una constante positiva

$$l(x) = f(x - c),$$

entonces el valor que toma f en un punto a es el mismo que toma la función l en el punto $a + c$, pues

$$l(a + c) = f((a + c) - c) = f(a).$$

Por esto, el gráfico de l tiene la misma forma que el de f pero desplazada c unidades **hacia la derecha**. (Ver Figura 4.18b)



(a) $k(x) = f(x+1)$ (b) $l(x) = f(x-3)$

Figura 4.18: Desplazamientos horizontales

Con el Ejemplo 14 hemos ilustrado el desplazamiento del gráfico de una función según sumemos o restemos una constante a los valores de $f(x)$ o a los valores de x. Resumimos esto en la siguiente conclusión.

Si f es una función, y c es una constante positiva, entonces:

- El gráfico de $g(x) = f(x) + c$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia arriba**.
- El gráfico de $h(x) = f(x) - c$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia abajo**.
- El gráfico de $k(x) = f(x + c)$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia la izquierda**.
- El gráfico de $l(x) = f(x - c)$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia la derecha**.

Reflexiones

Nos resta ver qué relación existe entre el gráfico de f y los gráficos de las funciones dadas por $g(x) = -f(x)$ y $h(x) = h(-x)$. Comencemos con la función g:

$$g(x) = -f(x).$$

Debe notarse que el signo *menos* no indica que g sea negativa, sino que los valores que toma g tienen el signo opuesto a los que toma f. Por ejemplo, como $f(0) = \frac{1}{2}$ entonces $g(0) = -\frac{1}{2}$. Luego $(0, \frac{1}{2})$ está en el gráfico de f y $(0, -\frac{1}{2})$ está en el gráfico de g. Del mismo modo, como $f(1) = -\frac{1}{6}$, entonces $g(1) = \frac{1}{6}$. Así, $(1, -\frac{1}{6})$ pertenece al gráfico de f y $(1, \frac{1}{6})$ pertenece al gráfico de g.

En general, si consideramos un punto $(a, f(a))$ en el gráfico de f, como $g(a) = -f(a)$ se cumple que $(a, -f(a))$ está en el gráfico de g. Así, si $f(a)$ es positivo, entonces $(a, f(a))$ es un punto por encima del eje x y $(a, g(a))$ está por debajo del eje x. Recíprocamente, si $f(b)$ es negativo, entonces $(b, f(b))$ está por debajo del eje x y $(b, g(b))$ está por encima. (Ver Figura 4.19)

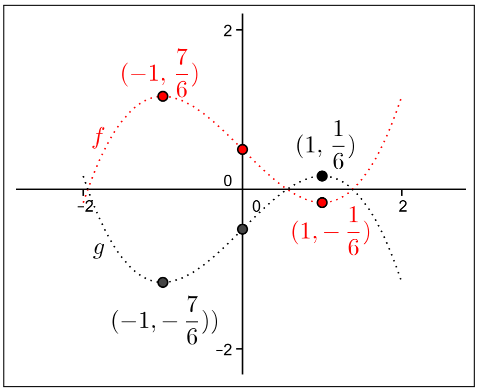


Figura 4.19: $g(x) = -f(x)$

Esto hace que el gráfico de g sea como el gráfico de f pero **reflejado** con respecto al eje x. (Ver Figura 4.21a).

Consideremos ahora la función

$$h(x) = f(-x).$$

Insistimos nuevamente en que $-x$ denota el opuesto de x. Así por ejemplo, -1 es el opuesto de 1, y $\frac{1}{2}$ es el opuesto de $-\frac{1}{2}$. Por lo tanto, para calcular $h(1)$ necesitamos conocer $f(-1)$, y para $h(-\frac{1}{2})$ debemos conocer $f(\frac{1}{2})$. Así, $h(1) = \frac{7}{6}$ pues $f(-1) = \frac{7}{6}$, y $h(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$ pues $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$. Esto en particular implica que el punto $(-1, \frac{7}{6})$ está en el gráfico de f y $(1, \frac{7}{6})$ en el gráfico de h. Estos dos puntos tienen la misma coordenada y pero sus coordenadas x tienen diferente signo.

Análogamente, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{24})$ y $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{24})$ son puntos del gráfico de f y h respectivamente, con la misma coordenada y pero con distinto signo en la coordenada x. (Ver Figura 4.20)

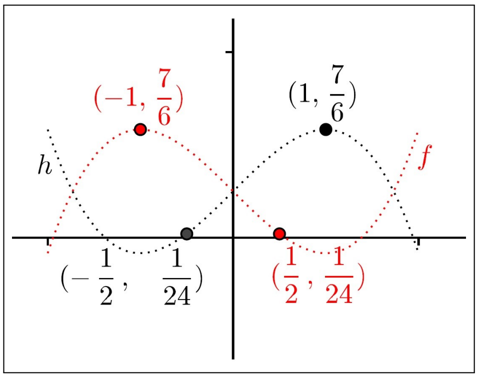
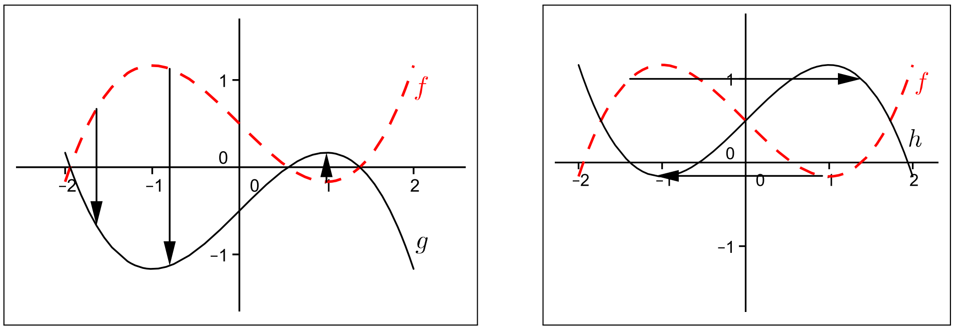


Figura 4.20: $h(x) = f(-x)$

En general, por cada punto $(x, f(x))$ en el gráfico de f, el punto $(-x, f(x))$ está en el gráfico de h. Luego el gráfico de h se obtiene a partir del gráfico de f reflejando respecto al eje y. La Figura 4.21b ilustra comparativamente los gráficos de f con g, y f con h, para este ejemplo.



(a) $g(x) = -f(x)$ (b) $h(x) = f(-x)$

Figura 4.21: Reflexiones respecto al eje x y al eje y

Si f es una función, entonces:

- El gráfico de $g(x) = -f(x)$ es el gráfico de f **reflejado respecto del eje** x.
- El gráfico de $h(x) = f(-x)$ es el gráfico de f **reflejado respecto del eje** y.

SECCIÓN 4.2

Funciones lineales

§ Definición y propiedades

En la naturaleza y en la vida diaria existe una gran cantidad de fenómenos que pueden explicarse y representarse mediante una función lineal. Del mismo modo, las funciones lineales pueden ser aplicadas a una diversidad de contextos. En este sentido, surge la necesidad e importancia de estudiar funciones lineales buscando reconocer las expresiones de las mismas como su representación gráfica. Con ese fin, a continuación se define y caracterizan tales funciones.

Una función de la forma $f(x) = ax + b$,
con a y b números reales fijos, es llamada **función lineal**.
La constante a es llamada **pendiente** y la constante b es la **ordenada al origen**.

Ejemplos de funciones lineales

a) $f(x) = x$;
b) $f(x) = 2x$;
c) $f(x) = 2x + 1$;
d) $f(x) = -x$;
e) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
f) $f(x) = 3$.

De acuerdo a la definición dada, todas estas expresiones tienen la forma descripta antes y en ese sentido todas serán funciones lineales. Si ahora observamos el ejemplo b) podemos afirmar que $a = 2$ y que $b = 0$, en el ejemplo e) a toma el valor $-\frac{1}{2}$ y b es igual a 3. ¿Cuáles son los valores de a y b en los otros ejemplos?

Es claro que la expresión de una función lineal es válida para cualquier número real y de esa manera podríamos afirmar que el dominio de cualquier función lineal es el conjunto de todos los números reales: $\mathbb{R}$.

Observación: en algunos textos, se suele denominar función de proporcionalidad a una función de la forma $f(x) = ax$ (con $b = 0$) y función afín a $f(x) = ax + b$, con b diferente de 0. Sin embargo, nosotros denominamos función lineal a $f(x) = ax + b$, independientemente del valor que tome b, como se definió anteriormente.

§ Gráfico de funciones lineales

Dada una función lineal $f(x) = ax + b$, podemos asociarla con la ecuación lineal $y = ax + b$ (**ecuación de la recta**), donde la variable x se denomina **variable independiente** e y **variable dependiente**.

función lineal: $f(x) = ax + b$	$\Leftrightarrow$	**ecuación de la recta:** $y = ax + b$

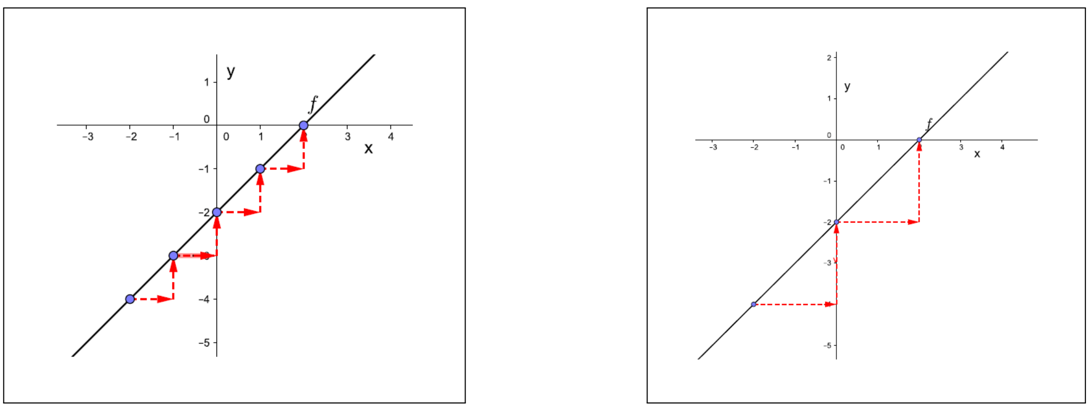
El gráfico de una función lineal $f(x) = ax + b$ en un sistema de coordenadas cartesianas está determinado por el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $y = f(x)$, es decir, que satisfacen la ecuación lineal $y = ax + b$. Veamos algunos ejemplos de gráficos de funciones lineales:

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x - 2$, donde $a = 1$ y $b = -2$.

Para graficar, por ahora, tomemos como ayuda una tabla de valores de puntos en el plano como la que está a continuación:

x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-4	$(-2, -4)$
-1	-3	$(-1, -3)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	0	$(2, 0)$

De acuerdo con los valores presentados en la tabla anterior, notar que, si la abscisa (esto es, x) aumenta una unidad, la ordenada (esto es, y) también aumenta una unidad. Si la abscisa aumenta dos unidades, la ordenada aumenta dos unidades, como se evidencia en las Figuras 4.22 (a) y (b) respectivamente.



(a) aumentos de una unidad en x

(b) aumentos de dos unidades en x

Figura 4.22

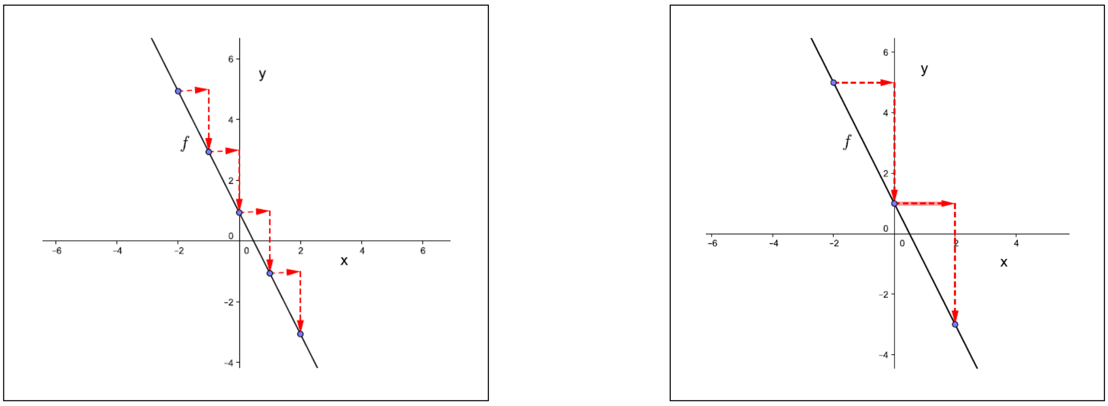
Notar en los cálculos de abajo que los cocientes entre la variación de la ordenada (en este caso 1 ó 2) y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

$$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=1=a.$$

Ejemplo 2. Sea $f(x)=-2x+1$, donde $a=-2$ y $b=1$, con una tabla de valores como la siguiente y gráfico tal como se muestra en las Figuras 4.23 (a) y (b).

x	$y=f(x)$	(x,y)
-2	5	$(-2,5)$
-1	3	$(-1,3)$
0	1	$(0,1)$
1	-1	$(1,-1)$
2	-3	$(2,-3)$

Observar en este caso que si la abscisa crece una unidad, la ordenada decrece dos unidades. Si la abscisa crece dos unidades, la ordenada decrece cuatro unidades.



(a) aumentos de una unidad en x

(b) aumentos de dos unidades en x

Figura 4.23

Nuevamente, notemos que los cocientes entre la variación de la ordenada (-2, -4 o -6 en este caso) y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

$$-\frac{2}{1}=-\frac{4}{2}=-\frac{6}{3}=-2=a.$$

Ejemplo 3. Sea $f(x)=2$, donde $a=0$ y $b=2$.

x	$y=f(x)$	(x,y)
-2	2	$(-2,2)$
-1	2	$(-1,2)$
0	2	$(0,2)$
1	2	$(1,2)$
2	2	$(2,2)$

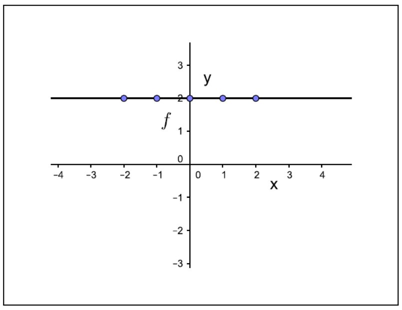


Figura 4.24: gráfico de $f(x)=2$.

Observar en este ejemplo, que, si la abscisa crece una unidad, la ordenada se mantiene igual (dicho de manera gráfica **no sube ni baja**). Si la abscisa crece dos unidades, la ordenada también se mantiene igual.

Ahora calculamos los cocientes entre las variaciones de la ordenada (siempre sin cambio o cambio nulo) y la abscisa (1, 2 ó 3 en este caso), notamos otra vez que son constantes e iguales al valor de la pendiente:

$$\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=0=a.$$

Teniendo en cuenta esta relación entre la función lineal $f(x)=ax+b$ y la ecuación de la recta $y=ax+b$, concluimos que el gráfico de una función lineal es una línea recta con pendiente igual a a y que pasa por el punto $P=(0,b)$ pues $f(0)=b$ (lo que es equivalentemente a decir que el punto $(0,b)$ satisface la ecuación de la recta).

En los gráficos presentados en las Figuras 4.25 (a), (b) y (c) podemos observar las representaciones gráficas de tres funciones lineales distintas y cómo se pone en evidencia la relación entre el valor de la pendiente a y el tipo de gráfico. Así, cuando $a>0$, el ángulo entre el gráfico de la función lineal y el eje x será agudo (menor a $90°$ grados), en cambio si $a<0$ el ángulo entre el gráfico de la función lineal y el eje x será obtuso (mayor a $90°$ grados). Por último si $a=0$, el gráfico de la función lineal será una recta paralela al eje x.

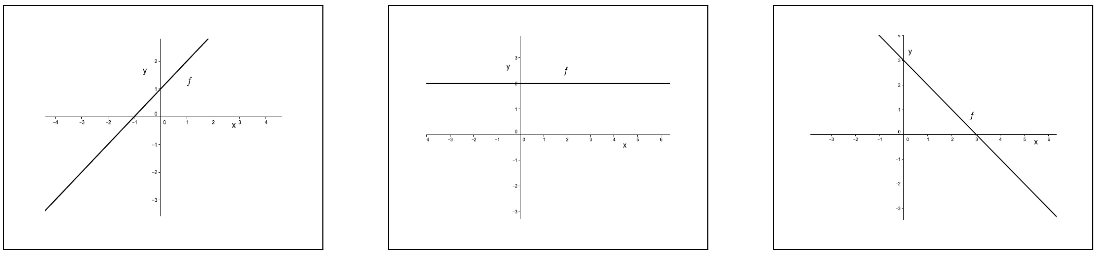

(a) $a>0$ (b) $a=0$ (c) $a<0$

Figura 4.25

A partir de los ejemplos anteriormente tratados podemos observar que, dados dos puntos arbitrarios $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$ sobre una recta, con x_1 distinto de x_2, es posible determinar la pendiente correspondiente de esta manera:

$$\boxed{a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

Si bien no lo vamos a tratar aquí, esta relación se puede deducir usando semejanza de triángulos.

Recordemos que la ecuación de una recta vertical, paralela al eje y y que pasa por (x_1,y_1) está dada por $x=x_1$ (esto vale para cualquier valor de y), sin embargo es importante notar que tal recta no representa el gráfico de una función pues no satisface la definición de función, tal como fue tratada en la Sección 4.1.

Otra forma útil de representar la ecuación de una recta se obtiene conociendo la pendiente de la recta y un punto por donde pasa la recta. Por ejemplo, supongamos que se tiene una recta que tiene pendiente $a = \frac{2}{5}$ y pasa por el punto $P = (3,2)$ entonces cualquier otro punto sobre esa recta tiene la forma $Q = (x,y)$ y debe cumplir que:

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{2}{5},$$

y despejando obtenemos:

$$y-2 = \frac{2}{5}(x-3),$$

o lo que es equivalente

$$y = \frac{2}{5}(x-3)+2.$$

En general, la ecuación de la recta que pasa por un punto dado (x_1,y_1) y tiene pendiente a está dada por:

$$\boxed{y-y_1 = a(x-x_1)} \Leftrightarrow \boxed{y = a(x-x_1)+y_1.}$$

Ahora, dados dos puntos de una recta no vertical (x_1,y_1) y (x_2,y_2) podemos determinar la función que define esa recta. Para determinar la función que define esa recta basta encontrar el valor de la pendiente a y usar la observación anterior con alguno de los puntos dados:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-x_1)+y_1 \\ f(x) &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1. \end{aligned}$$

Sabiendo que el gráfico de una función lineal se corresponde con una recta en el plano, cabe preguntarse, ¿Cómo graficar una función lineal $f(x) = ax+b$ utilizando la menor cantidad de puntos posibles?

Sabemos que dados dos puntos cualesquiera en el plano, por ellos pasa una única recta, por lo tanto es suficiente evaluar la función en dos valores x_1 y x_2, marcar los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ en el plano y por último, trazar la recta que pasa por ellos. Un punto posible puede ser $(0, f(0)) = (0,b)$. Por ejemplo: para graficar la función lineal $f(x) = 3x-2$ podemos considerar $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, obteniendo así los puntos $(0,-2)$ y $(1,1)$. Marcamos estos dos puntos en el plano cartesiano y finalmente trazamos la recta que los contiene a ambos o que pasa por ellos dos. Esto es, trazamos la recta correspondiente tal como se muestra en la Figura 4.26 y finalmente trazamos la recta correspondiente.

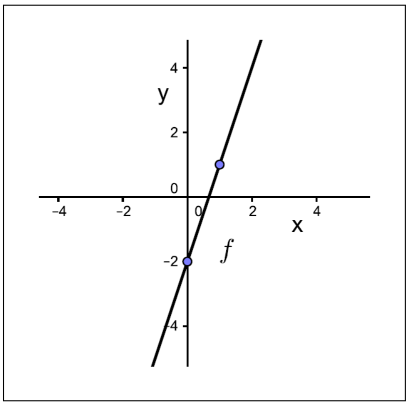


Figura 4.26: Gráfico de $f(x) = 3x-2$.

Rectas paralelas y perpendiculares

En esta oportunidad analizaremos relaciones entre dos rectas. Particularmente estudiaremos rectas paralelas y rectas perpendiculares.

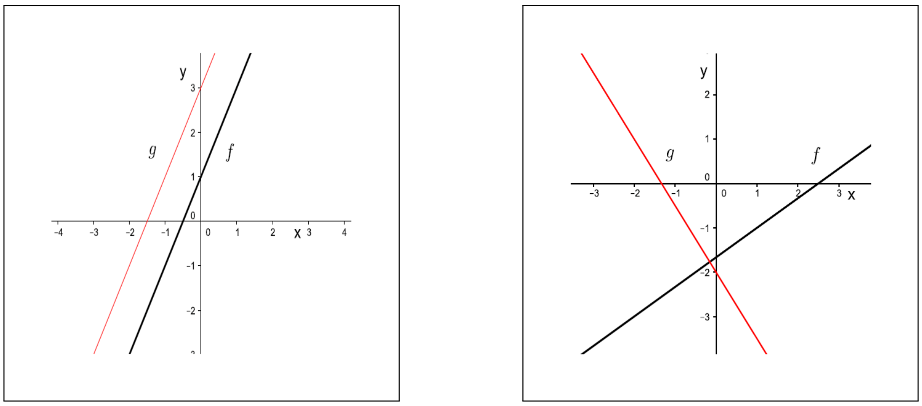
Dos rectas no verticales son **paralelas**
si y sólo si
tienen la misma pendiente.

Por ejemplo, las rectas $y = 2x+1$ e $y = 2x+3$, correspondientes a las funciones lineales $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = 2x+3$ respectivamente, son paralelas pues tienen la misma pendiente $a = 2$. El gráfico de la segunda recta está 2 unidades más arriba que el de la primera.

Notar que las ecuaciones de las rectas: $-2x+3y+12 = 0$ y $4x-6y = 5$ también son paralelas, pues si se calculan sus pendientes se puede verificar que son iguales (para ambas rectas $a = \frac{2}{3}$). (Ver Figura 4.27a.)

Dos rectas no verticales son **perpendiculares**
si y sólo si
sus pendientes son recíprocas negativas una de la otra.

Por ejemplo, las rectas $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$ son perpendiculares, pues $-\frac{4}{3}$ es el recíproco negativo de $\frac{3}{4}$. También es fácil ver que las rectas $2x-3y = 5$ y $3x+2y = -4$ son perpendiculares calculando las pendientes correspondientes. (Ver Figura 4.27b.)



(a) 2 rectas paralelas (b) 2 rectas perpendiculares

Figura 4.27

SECCIÓN 4.3

Funciones cuadráticas

§ Definición y propiedades

Al igual que las funciones lineales, las funciones cuadráticas aparecen frecuentemente en muchos problemas de la vida diaria (trayectoria de una pelota que es lanzada hacia arriba, arco de un puente, etc.) y en otros problemas más complejos, por lo que es muy importante saber graficarlas e interpretarlas con cuidado.

> Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$,
> con a, b, c números reales fijos y $a \neq 0$,
> es llamada **función cuadrática**.

Es claro que el dominio de las funciones cuadráticas es el conjunto de todos los números reales.

§ Gráfico de funciones cuadráticas

El gráfico de las funciones cuadráticas es una curva llamada **parábola**. Para graficar las funciones cuadráticas vamos a comenzar considerando un caso muy simple en el que $a = 1, b = 0$ y $c = 0$: $f(x) = x^2$ cuando x toma valores en el intervalo $[-3, 3]$. Primero marquemos algunos puntos en el sistema de ejes cartesianos evaluando la función en algunos valores de x en el intervalo dado. Podría ser tentador unir esos puntos por segmentos de rectas pero eso no correspondería al gráfico de una parábola. Evaluando la función en más puntos en el intervalo $[-3, 3]$ y uniéndolos con una curva **suave** en la Figura 4.28 podemos observar que el gráfico de la parábola $y = f(x) = x^2$ tiene la forma siguiente:

x	$y = x^2$	(x, y)
-3	9	$(-3, 9)$
$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$(-\frac{5}{2}, \frac{25}{4})$
-2	4	$(-2, 4)$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$
-1	1	$(-1, 1)$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
0	0	$(0, 0)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
1	1	$(1, 1)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$
2	4	$(2, 4)$
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$(\frac{5}{2}, \frac{2}{4})$
3	9	$(3, 9)$

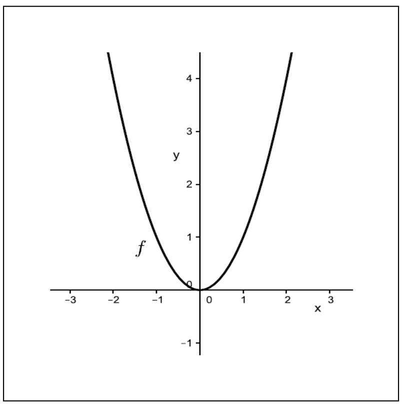


Figura 4.28: Gráfico de $f(x) = x^2$.

Si ahora consideramos la misma función cuadrática $f(x) = x^2$ al hacer variar x en el intervalo $[-5, 5]$ o $[-10, 10]$ observamos que la forma de la parábola se mantiene, por lo que podemos suponer que también se mantiene este comportamiento si extendemos el gráfico evaluando en diferentes puntos de la recta real.

Para ilustrar con más detalles lo referido a función cuadrática, a continuación consideraremos ejemplos que pueden ser vistos como variantes de la parábola graficada en la Figura 4.28.

Ejemplo 1. Sea $g(x) = -x^2$.

Para graficar esta función sólo se debe reflejar el gráfico de $f(x) = x^2$ con respecto al eje x (recordar que esta idea de reflejar un gráfico ya fue discutida en secciones anteriores) tal como se muestra en la Figura 4.29.

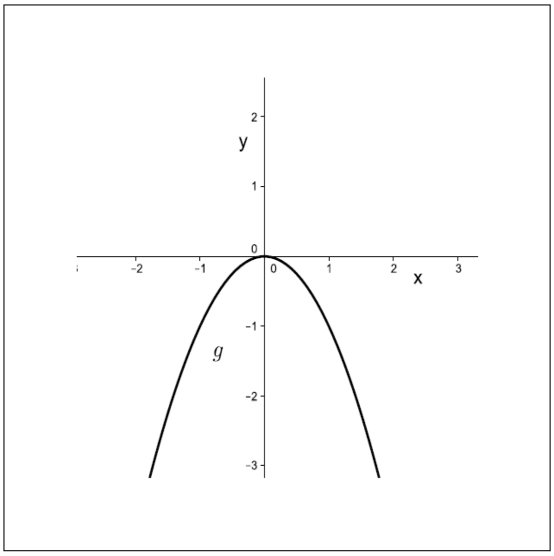


Figura 4.29: Gráfico de $g(x) = -x^2$.

Observación: el signo de a, el coeficiente que acompaña a x^2, indica hacia donde apuntan las ramas de la parábola: si $a > 0$ entonces las ramas de la parábola apuntan hacia arriba (como en $f(x) = x^2$), en cambio si $a < 0$, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo (como en $g(x) = -x^2$). Además, si $0 < a < 1$ (ver gráfico de $g(x)$, en Figura 4.30) las ramas de la parábola serán más abiertas que en el caso $a = 1$ y si $a > 1$ (ver gráfico de $h(x)$, en Figura 4.30) las ramas de la parábola serán más cerradas que en el caso $a = 1$.

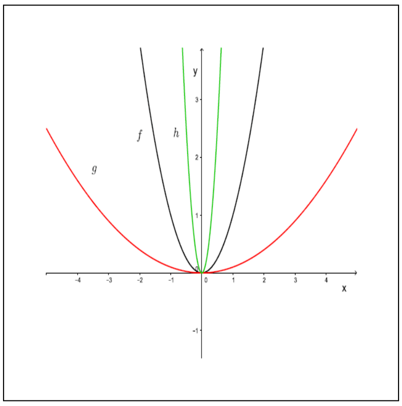


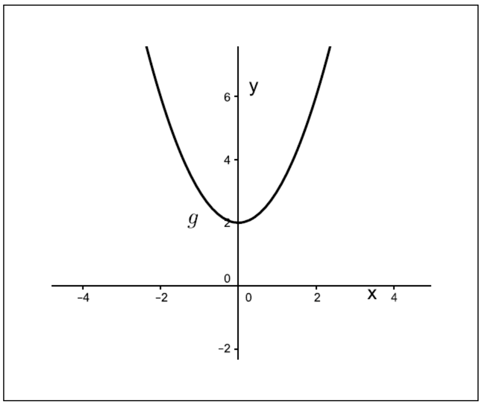
Figura 4.30: Gráfico de $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{10}x^2$ y $h(x) = 10x^2$.

Ejemplo 2. Sea $g(x) = x^2 + 2$.

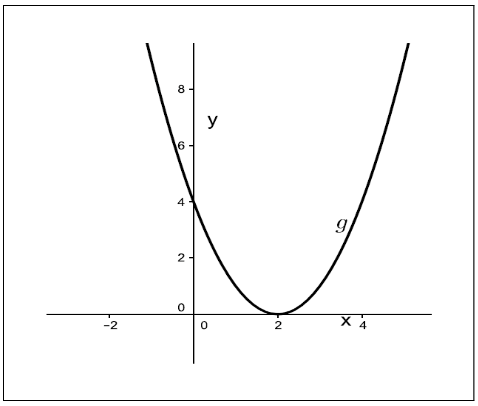
Para graficar esta función sólo se debe trasladar el gráfico de $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba. Ver Figura 4.31a (recordar lo visto en secciones anteriores sobre desplazamientos y reflexión de gráficos).

Ejemplo 3. Sea $g(x)=(x-2)^2$.

Para graficar esta función sólo se debe trasladar el gráfico de $f(x)=x^2$ dos unidades hacia la derecha, pues cuando $x=2$, tenemos $g(2)=0$. Recordar el apartado sobre desplazamiento de gráficos dado en secciones anteriores. Ver Figura 4.31b.



(a) $g(x)=x^2+2$



(b) $g(x)=(x-2)^2$

Figura 4.31

Ejemplo 4. Sea $g(x)=x^2-4x+4$.

Para graficar esta función basta notar que $x^2-4x+4=(x-2)^2$, es decir que es la misma función cuadrática del ejemplo anterior, por lo tanto, el gráfico será el mismo.

Ejemplo 5. Sea $g(x)=x^2-4x+6$.

Para graficar esta función basta notar que si completamos cuadrados:

$$x^2-4x+6=x^2-2\cdot 2\cdot x+6=x^2-2\cdot 2\cdot x+4-4+6=(x-2)^2+2,$$

y tomando en cuenta los Ejemplos 2 y 3, podemos graficar g desplazando la parábola de $f(x)=x^2$ dos unidades hacia arriba y dos unidades hacia la derecha.

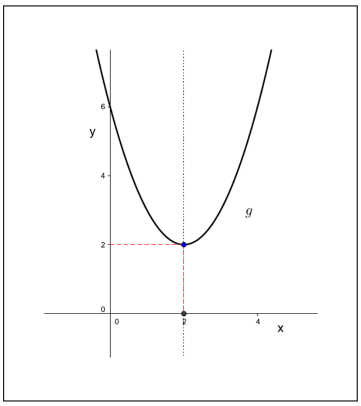


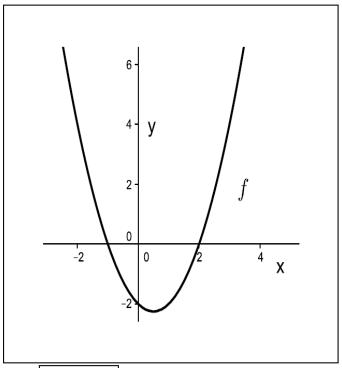
Figura 4.32: Gráfico de $g(x)=x^2-4x+6$.

¿Cómo graficar una función cuadrática?

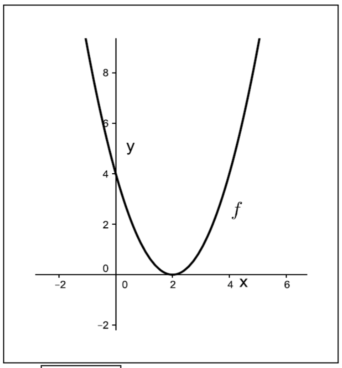
En general, para graficar una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ se deben tener en cuenta algunos puntos característicos:

$\boxed{1.}$ la intersección con el eje de las ordenadas: el punto $(0, f(0))$.

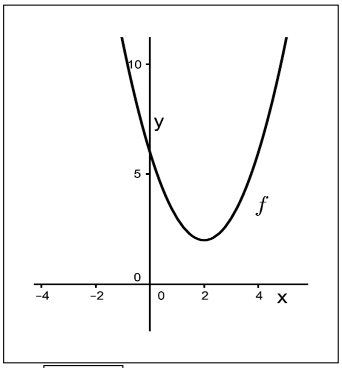
$\boxed{2.}$ la intersección con el eje de las abscisas. Estos puntos corresponden a raíces de $f(x) = 0$. Recordemos que una ecuación cuadrática puede tener: i) dos raíces reales y distintas (el gráfico de la cuadrática debe atravesar el eje x); ii) dos raíces reales e iguales (el gráfico de la cuadrática toca el eje x pero no lo atraviesa); iii) dos raíces complejas conjugadas (el gráfico de la cuadrática no toca al eje x). En la Figura 4.33 se ilustran los tres casos anteriores.



(a) $\boxed{\Delta > 0}$ Dos raíces reales y distintas.



(b) $\boxed{\Delta = 0}$ Dos raíces reales iguales.



(c) $\boxed{\Delta < 0}$ Dos raíces complejas conjugadas.

Figura 4.33

$\boxed{3.}$ el vértice (mínimo o máximo) de la cuadrática. Las coordenadas de este punto son:

$$\boxed{(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)}$$

Las coordenadas del vértice pueden deducirse completando cuadrados:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Si $a > 0$, el vértice será denominado el **mínimo** de la parábola y se alcanza cuando $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v) = -\frac{b^2}{4a} + c$. Por otro lado, si $a < 0$, el vértice será denominado el **máximo** de la parábola y se alcanza cuando $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v) = -\frac{b^2}{4a} + c$. Es fácil ver que la coordenada x_v determina el **eje de simetría de la parábola** $(x = x_v)$ y puede obtenerse también como el promedio de las raíces:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}.}$$

Ejemplo 6. Determinar las coordenadas del vértice, el eje de simetría y realizar el gráfico de la función $f(x) = x^2 - 3x + 3$.

Completando cuadrados, podemos escribir:

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Notemos que como el coeficiente de x^2 es positivo, el gráfico de f tendrá las ramas hacia arriba y por lo tanto el vértice será un mínimo de la parábola. Además, hemos escrito a f como una suma de dos términos: $(x-\frac{3}{2})^2$ el cual es mayor o igual a cero y otro término $\frac{3}{4}$, el cual es positivo. Por lo tanto, el menor valor de f se alcanzará cuando el primer término sea igual a cero, y esto ocurre si $x=\frac{3}{2}$, y en este caso, $f(\frac{3}{2})=\frac{3}{4}$. Utilizando la fórmula dada arriba, se puede comprobar que $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$ corresponde a las coordenadas del vértice. Luego, el eje de simetría es $x=x_v=\frac{3}{2}$.

Para realizar el gráfico de f, calculemos el discriminante de la cuadrática: $\Delta=b^2-4ac=9-12=-3<0$, por lo tanto la cuadrática no tiene raíces reales y no cortará el eje de las abscisas. Luego para dibujar la cuadrática basta utilizar el eje de simetría $(x=\frac{3}{2})$ junto con el punto determinado por la intersección con el eje de las ordenadas: $(0,3)$. Precisamente, debido a la propiedad de simetría podemos determinar que la parábola también debe pasar por el punto $(3,3)$. Con toda esta información podemos realizar el gráfico de f, como se muestra en la Figura 4.34:

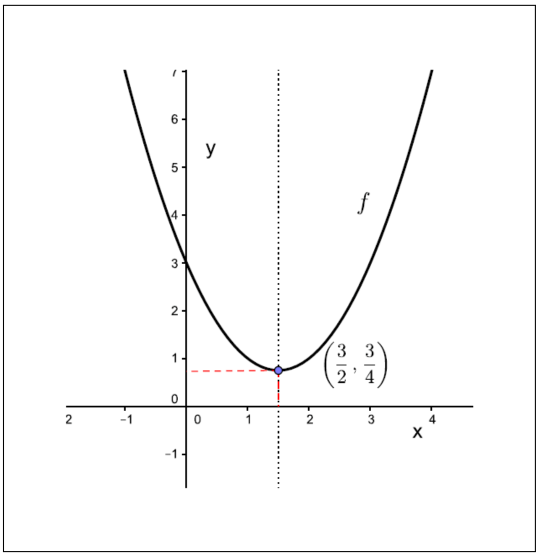


Figura 4.34: Gráfico de $f(x)=x^2-3x+3$.

Ejemplo 7. Hallar la intersección de la parábola $y=2x^2-3x+2$ y la recta $y=3x-2$.

Como los primeros miembros de las dos ecuaciones son iguales, por un lado: $y=2x^2-3x+2$ y por otro: $y=3x-2$, entonces los segundos miembros también lo son, es decir:

$$2x^2-3x+2=3x-2.$$

Luego, agrupando todos los términos en el lado izquierdo obtenemos:

$$2x^2-6x+4=0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos las raíces: $x_1=1$ y $x_2=2$. Estos números corresponden a las primeras coordenadas de los puntos de intersección entre la parábola y la recta. Para determinar las respectivas segundas coordenadas es suficiente evaluar x_1 y x_2 en las ecuaciones que definen la parábola o la recta. Es decir, si $x_1=1$, entonces $y_1=3(1)-2=1$, y si $x_2=2$ entonces $y_2=3(2)-2=4$. Luego las coordenadas de los puntos de intersección son $(x_1,y_1)=(1,1)$ y $(x_2,y_2)=(2,4)$. Gráficamente 4.35:

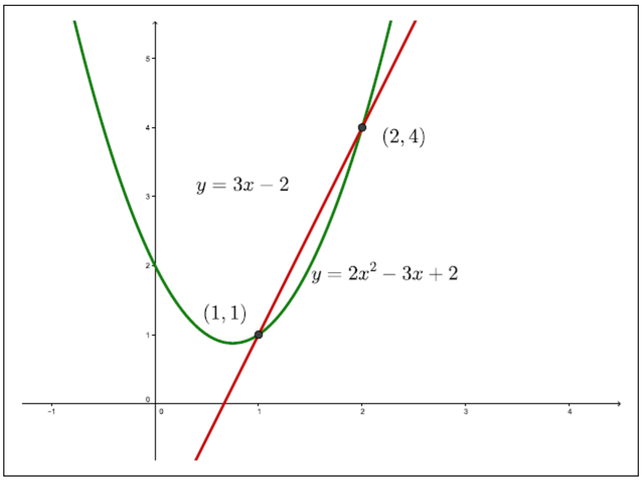


Figura 4.35: Gráficos de $y = 2x^2 - 3x + 2$ e $y = 3x - 2$.

SECCIÓN 4.4

Funciones definidas por partes

§ Definición y propiedades

Una función definida por partes es una función donde la regla que la define cambia dependiendo del valor de la variable independiente. Formalmente, su definición está dada sobre varios conjuntos disjuntos de su dominio.

Ejemplo 1. Un ejemplo conocido de una función definida por partes es la función valor absoluto, cuyo dominio es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Así para valores de x menores que 0 la función f se define como $f(x) = -x$, en cambio para valores de x mayores o iguales que 0, se define $f(x) = x$. Ver el gráfico que se presenta en la Figura 4.36.

Veamos otros ejemplos:

Ejemplo 2. Sea

$$g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3. Por último, veamos un ejemplo de una función definida por partes, donde la regla que define la función cambia en un único punto.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notemos que el gráfico de la función corresponde a una parábola excepto en el punto $x = 0$, donde h vale 1. (Ver el gráfico en la Figura 4.37b).

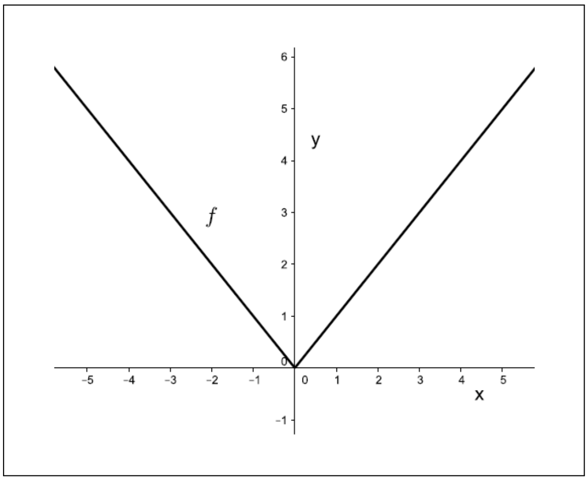
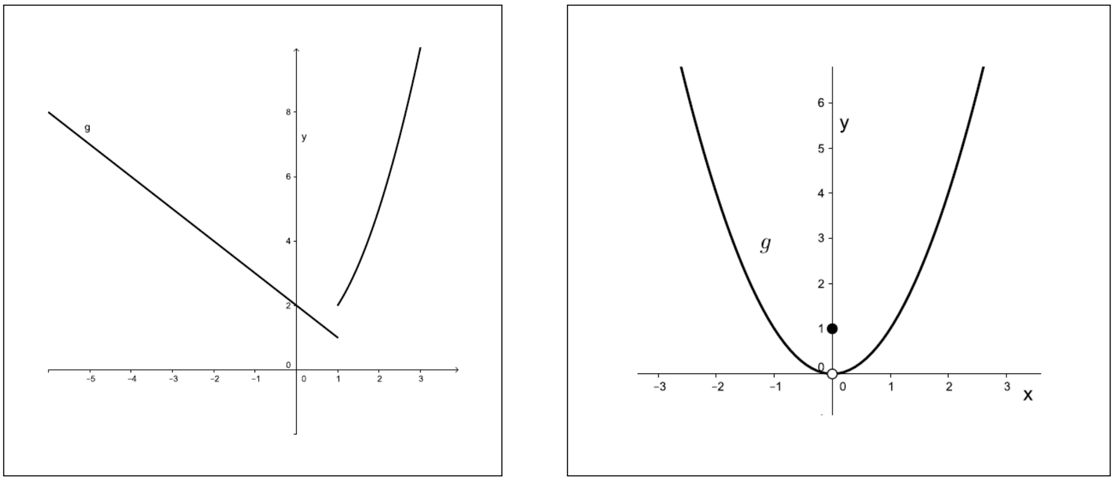


Figura 4.36: gráfico de $f(x) = |x|$.



(a) Ejemplo 2 (b) Ejemplo 3

Figura 4.37

Ejercicios

1. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x+7$

b) $h(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

c) $j(x) = \dfrac{3x-5}{x^2+x+1}$

d) $n(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

e) $i(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

f) $s(x) = \sqrt{1-x}$

g) $m(x) = 1-\sqrt{x}$

h) $k(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)}$

i) $r(x) = \sqrt{1-x^2}$

j) $l(x) = \sqrt{|x|}$

k) $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

2. Dadas las siguientes funciones, evaluar cada una de ellas en el punto indicado a:

   a) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad a = \frac{1}{4}$
   b) $g(x) = \frac{1}{x+5}$, $\quad a = \frac{1}{4}$
   c) $h(x) = x+1$, $\quad a = -1$
   d) $l(x) = \frac{1}{x}$, $\quad a = \frac{2}{3}$
   e) $m(x) = 3x-2$, $\quad a = 0$
   f) $t(x) = x^2$, $\quad a = -\frac{4}{3}$

3. La Figura 4.38 muestra el gráfico de una función f. A partir de este gráfico determinar:

   a) El dominio de f.
   b) La imagen de f.
   c) $f(3)$
   d) Los valores de x donde $f(x) \leq 3$.
   e) Los valores de x donde $f(x) > 3$.

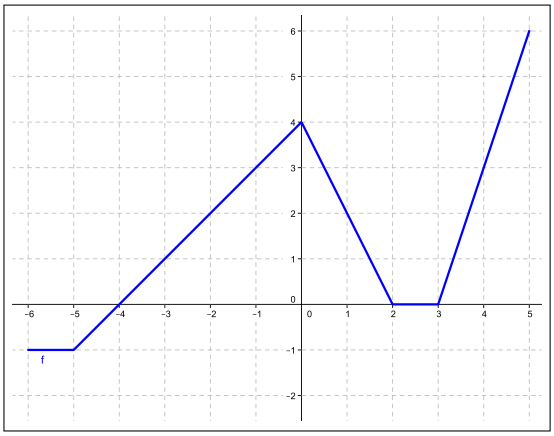


Figura 4.38: (Ejercicio 3)-Gráfico de f.

4. A partir del gráfico de la función g dada en la Figura 4.39, esbozar los gráficos de las funciones:

   a) $f(x) = g(-x)$
   b) $h(x) = -g(x)$
   c) $k(x) = g(x+1)$
   d) $p(x) = g(x)+1$

5. A partir del gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, visto en el Ejemplo 11 , esbozar el gráfico de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = \frac{1}{x-2}$
   b) $z(x) = \frac{x+1}{x}$
   c) $h(x) = \frac{2}{x-1}$

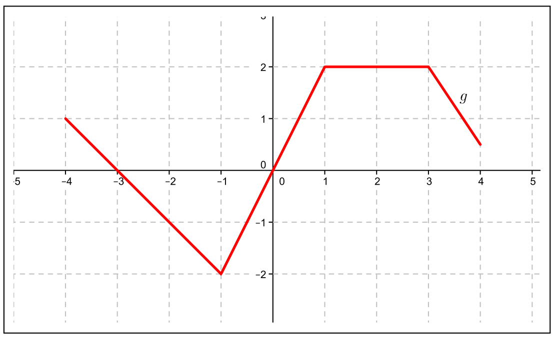


Figura 4.39: (Ejercicio 4)-Gráfico de g.

6. Realizar el gráfico de las siguientes funciones lineales:

   a) $f(x) = 3x+1$ b) $g(x) = -2x+5$ c) $h(x) = -x$

7. Graficar el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes ecuaciones. Indicar en qué casos este gráfico es una recta, y en qué casos se corresponde al gráfico de una función lineal.

   a) $y-1 = 3x$
   b) $y = |x|+1$
   c) $y = 3$
   d) $x = 2$
   e) $x+1 = 2y$
   f) $|y| = |x|$

8. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (-5,0)$ y $Q = (0,2)$. Determinar la pendiente y la ordenada al origen.

9. El gráfico de la función lineal $f(x) = ax+b$ pasa por los puntos $(1,-3)$ y $(3,1)$. Determinar los coeficientes a y b.

10. Las rectas determinadas por las ecuaciones $y = ax+16$ e $y = -7x+b$ se intersecan en el punto $(-3,17)$.

    a) Calcular los coeficientes a y b para cada una de estas rectas.
    b) Graficar ambas rectas.

11. Considerar la recta dada por la ecuación $y = 3x+\frac{2}{3}$:

    a) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a la dada y que pasa por el punto $P = (4,-1)$.
    b) Determinar el punto de intersección entre ambas rectas.

12. a) Escribir la ecuación de la función lineal f tal que $f(1) = 0$ y $f(-1) = 2$.
    b) Determinar para qué valor de x se cumple $f(x) = 4$.
    c) Indicar si la recta determinada por $y = f(x)$ es perpendicular a la recta $y = \dfrac{1}{2}x$.
    d) Esbozar un gráfico de cada una de las rectas.

13. Dada la recta con ecuación $y = \dfrac{3}{4}(1-x)$:

    a) Escribir la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto $(1,-1)$.
    b) Dar la ecuación de la recta perpendicular que pasa por $(1,-1)$.

14. Para cada una de las siguientes funciones determinar

    - Las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico con los ejes coordenados.
    - La ecuación de la recta que es eje de simetría de la parábola.
    - Las coordenadas del vértice de la parábola.

    a) $f(x) = x^2-5x+4$
    b) $g(x) = -2x^2+x+3$
    c) $h(x) = 2x^2+2+4x$
    d) $F(x) = -(x-1)(x+2)$
    e) $G(x) = -x^2-1$
    f) $H(x) = (x-2)^2+3$

15. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = -3x^2+bx+2$ corta al eje x en $-\frac{1}{3}$ y 2.

    a) Dar las coordenadas del vértice del gráfico de f.
    b) Calcular el valor de b.
    c) Dibujar el gráfico de f.

16. Para la función cuadrática $f(x) = 5x^2 + 3x$.
    a) Dar las coordenadas (x_v, y_v) del vértice de la parábola y las coordenadas (x, y) de los puntos de intersección de la parábola con el eje x y con el eje y.
    b) Indicar si el punto $(-1, 2)$ pertenece o no al gráfico de la parábola.
    c) Con la información obtenida en 16a), realizar un gráfico a escala de la función cuadrática.

17. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ determina una parábola que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(4, 2)$, y su vértice tiene coordenadas $(x_v, 0)$.
    a) Calcular la coordenada x_v del vértice de la parábola.
    b) Calcular los coeficientes a, b y c.
    c) Indicar si f tiene dos raíces distintas, una o ninguna.
    d) Con la información obtenida, esbozar el gráfico de la parábola.

18. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + 2x$ tiene vértice en $(1, 1)$.
    a) Dar los puntos de intersección del gráfico con los ejes coordenados.
    b) Calcular el valor de a.
    c) Trazar el gráfico de f.

19. Determinar el dominio de las siguientes funciones y realice su gráfico:
    a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
    b) $g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 3 \\ x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
    c) $h(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
    d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
    e) $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
    f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
    g) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

20. Considerar la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 4 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } 4 \leq x \leq 7 \\ x^2 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

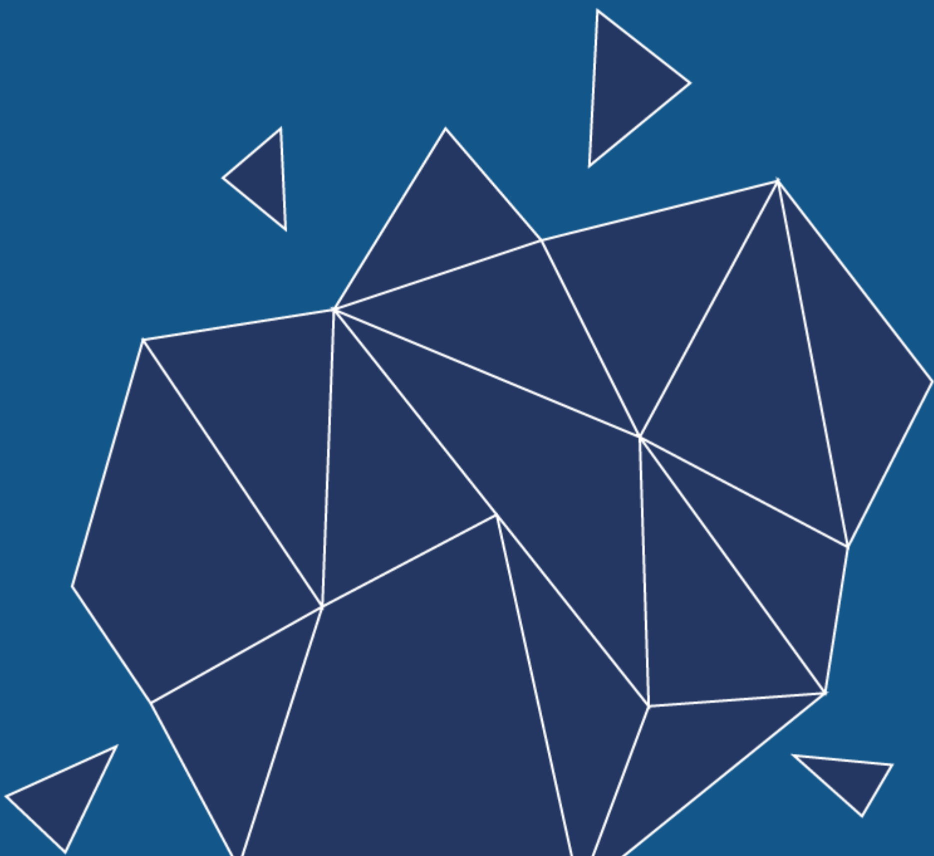
    a) evaluar $f(-10), f(4), f(\frac{9}{2}), f(\frac{31}{5}), f(7)$ y $f(10)$.
    b) determinar el dominio de f y realizar su gráfico.

21. Obtener la intersección de las siguientes funciones y dibujar la región encerrada por ellas:
    a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ y $g(x) = x + 10$
    b) $f(x) = (x-2)(x+1)$ y $g(x) = -x(x-3)$
    c) $f(x) = 2x + 1,\ g(x) = -x + 3$ y $h(x) = 1$
    d) $f(x) = 2x,\ g(x) = x$ y $h(x) = -x + 6$

5

Trigonometría

Mónica Oddone
Patricia Kisbye



Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

5 | TRIGONOMETRÍA

Etimológicamente, la palabra trigonometría significa *medición de triángulos*. En términos generales, la Trigonometría es un área de la matemática que surge del estudio de la relación entre los lados y ángulos de un tríangulo rectángulo y de las cuerdas y arcos de una circunferencia. Actualmente la trigonometría y las funciones trigonométricas han sobrepasado su fin original para convertirse en elementos matemáticos estudiados en sí mismos y con aplicaciones en los campos más diversos. En particular, se extiende a geometrías no euclidianas, como son la geometría esférica y la geometría hiperbólica, en las que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor o menor a $180°$, respectivamente.

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en Física, Astronomía, Náutica, Cartografía, Telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos y muchas otras aplicaciones.

La historia de la Trigonometría y de las funciones trigonométrica se remonta a las matemáticas producidas por las culturas egipcias y babilónicas, quienes conocían ya los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes. Los egipcios fueron los primeros en usar la división en grados, minutos y segundos para la medida de ángulos. Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas y los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste. Entre las numerosas aplicaciones se encuentran las técnicas de triangulación que son usadas en Astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en los sistemas globales de navegación por satélites.

El Occidente se familiarizó con la Trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. A principios del siglo XVII, se desarrolló el concepto de logaritmo y, gracias a esto, los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje. A mediados del siglo XVII, *Newton* y *Leibniz* desarrollaron el calculo diferencial e integral. Y en el siglo XVIII, el matemático suizo *Euler* demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y, además, definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

En este capítulo se presenta una introducción a las funciones trigonométricas, con una discusión detallada de sus definiciones y de las principales propiedades. El texto se acompaña con una variedad de figuras y ejemplos con la intención de aportar mayor claridad al contenido matemático.

En este capítulo se introduce al estudio de la Trigonometría a partir del análisis de las funciones trigonométricas y de los elementos necesarios para definirlas y caracterizarlas. A partir de estos elementos básicos se aproxima con detalles a las definiciones de tales funciones y sus principales propiedades. Las ideas presentadas se acompañan con una variedad de figuras y ejemplos con la intención de aportar mayor claridad al contenido matemático. Finalmente se presentan algunas aplicaciones para la resolución de triángulos rectángulos. Cabe mencionar que los contenidos presentados en este capítulo serán de gran utilidad en los cursos de Análisis Matemático e Introducción a la Física de primer año.

SECCIÓN 5.1

Funciones trigonométricas

§ Introducción

A continuación estudiaremos una cierta clase de funciones, llamadas funciones trigonométricas. Estas funciones se caracterizan por tener un comportamiento periódico, es decir, su gráfico se repite de a intervalos constantes.

Las funciones trigonométricas reciben este nombre porque generalizan algunas relaciones existentes entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Veremos esta particularidad hacia el final del capítulo. Sin embargo la importancia de estas funciones excede ampliamente las propiedades geométricas de los triángulos, y son fundamentales para la modelización matemática de fenómenos físicos y de la naturaleza, y para la resolución de problemas matemáticos avanzados.

Antes de definir estas funciones, necesitaremos introducir el concepto de distancia en el plano y posteriormente la definición de circunferencia.

§ Distancia en el plano y circunferencia

La distancia entre dos puntos en la recta real, a y b, se define como el valor absoluto de la diferencia entre ellos.

$$d(a,b) = |a-b|$$

En el caso de dos puntos en el plano, $A = (x_A, y_A)$, y $B = (x_B, y_B)$, la distancia $d(A,B)$ se define como la longitud del segmento que une los puntos A y B. Esto es:

$$d(A,B) = |\overline{AB}|$$

donde las barras $|*|$ simbolizan longitud.

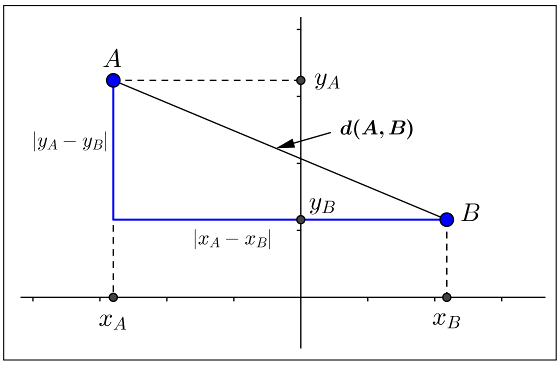


Figura 5.1: Distancia entre puntos en el plano

En el caso en que los puntos A y B tengan distinta ordenada y distinta abscisa, como en la Figura 5.1, la distancia se calcula a partir del Teorema de Pitágoras, como la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se observa en la figura. Notemos que la longitud de uno de los catetos es igual a la distancia entre las abscisas de ambos puntos: $|x_A - x_B|$, y el del otro cateto es la distancia entre las ordenadas: $|y_A - y_B|$. La expresión para la distancia entre los puntos A y B viene dada entonces por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Si las ordenadas de ambos puntos son iguales, ($y_A = y_B$), entonces la distancia entre los puntos es igual a la distancia en la recta entre sus abscisas:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|,$$

mientras que si sus abscisas coinciden ($x_A = x_B$), entonces la distancia entre A y B es la distancia en la recta entre sus ordenadas:

$$d(A,B) = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B|.$$

En cualquiera de los casos se cumple que:

> La distancia entre dos puntos $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$ del plano está dada por la ecuación
>
> $$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \tag{5.1}$$

Ejemplo 1. La distancia entre los puntos $A = (1,3)$ y $B = (-2,4)$ es

$$d(A,B) = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Ejemplo 2. La distancia entre los puntos $B = (-2,4)$ y $C = (3,4)$ es

$$d(B,C) = \sqrt{(-2-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{25+0} = 5$$

Una circunferencia en el plano es un conjunto de puntos que equidistan, o están una misma distancia, de otro, llamado centro.

> La circunferencia de centro A y radio r, $r > 0$, es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia al punto A es r.

Dados dos puntos $P = (x,y)$ y $A = (a,b)$, y $r \geq 0$, es equivalente decir que la distancia entre ellos es r:

$$d(P,A) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

a enunciar que su distancia al cuadrado es r^2:

$$(d(P,A))^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Así, la circunferencia de radio r, y centro en el punto $A = (a,b)$, se define como

$$C(A,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}.$$

Ilustramos esta definición en la Figura 5.2.

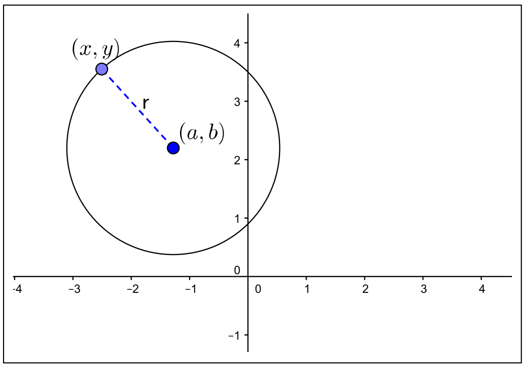


Figura 5.2: Circunferencia de centro $A=(a,b)$ y radio r

Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas $O=(0,0)$, su representación es

$$C(O,r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x^2+y^2=r^2\}.$$

La longitud L de una circunferencia es proporcional a su diámetro d, y esta constante de proporcionalidad es el número π:

$$\frac{L}{d}=\pi.$$

Esto significa que para cualquier circunferencia de diámetro d, su longitud será $L=\pi\cdot d$. Como el diámetro de una circunferencia es dos veces el radio r, entonces se cumple que:

La longitud de una circunferencia de radio r es $L=2\pi\cdot r$.

Arcos y ángulos

Consideremos dos circunferencias centradas en A, de distinto radio, $s<r$. Dos semirrectas con origen en A determinan sendos arcos sobre las circunferencias, uno con extremos P y Q y otro con extremos C y D. (Ver Figura 5.3).

La longitud de estos arcos es proporcional al radio de la circunferencia. Es decir,

$$\frac{|\overset{\frown}{PQ}|}{r}=\frac{|\overset{\frown}{CD}|}{s}.$$

Ahora bien, ambos arcos abarcan un mismo ángulo θ. Entonces tiene sentido definir la medida del ángulo θ como:

$$|\theta|=\frac{|\overset{\frown}{PQ}|}{r}.$$

Decimos que *tiene sentido* la definición, porque es independiente de la circunferencia que tomemos, siempre que esté centrada en el punto A. Es decir, también vale que

$$|\theta|=\frac{|\overset{\frown}{CD}|}{s},$$

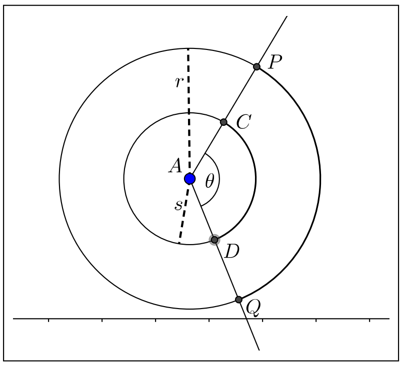


Figura 5.3: Arcos y ángulos

En particular, si la longitud del arco $\overset{\frown}{PQ}$ es igual al radio de la circunferencia, entonces la medida de θ es 1. Llamamos a esta unidad *un radián*. (Ver Figura 5.4).

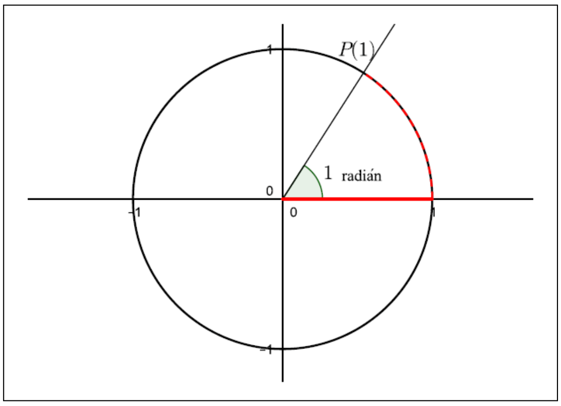


Figura 5.4: El radián

Así, el ángulo llano se corresponde con un arco que mide la mitad que la circunferencia: $\pi \cdot r$, y por lo tanto el ángulo llano mide

$$\frac{\pi \cdot r}{r} = \pi \text{ radianes.}$$

Un ángulo recto se corresponde con un arco que mide un cuarto de circunferencia, es decir, $\frac{\pi \cdot r}{2}$, y por lo tanto el ángulo recto mide:

$$\frac{\frac{\pi \cdot r}{2}}{r} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes.}$$

Existe otro sistema de medición de ángulos, que es el *sistema sexagesimal* y cuya unidad de medida es el *grado sexagesimal*. En este sistema, el ángulo llano mide 180° y el ángulo recto 90°. En general, se tiene la siguiente relación entre radianes y grados sexagesimales:

> Dado un ángulo θ, si su medida en grados es g y su medida en radianes es h, entonces se cumple que $\pi \cdot g = 180 \cdot h$.

Ejemplo 3. Consideremos un ángulo de 45°, esto es, $g = 45$. Entonces su medida en radianes es:

$$h = \frac{\pi \cdot 45}{180} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo 4. Un ángulo que mide $\frac{2\pi}{3}$ radianes, mide $120°$, pues

$$h = \frac{2\pi}{3}, \qquad g = \frac{180 \cdot h}{\pi} = 120.$$

Para definir las funciones trigonométricas trabajaremos con una circunferencia con centro en $O = (0,0)$ y de radio 1. En este caso, la medida de un ángulo en radianes será igual a la medida del arco abarcado, ya que

$$|\theta| = \frac{|\overset{\frown}{PQ}|}{1} = |\overset{\frown}{PQ}|.$$

§ La circunferencia unitaria o trigonométrica

Se denomina circunferencia unidad, unitaria o *trigonométrica*, a la circunferencia de radio 1, con centro en el origen de coordenadas $O = (0,0)$, es decir, $C(O,1)$. A partir de ahora trabajaremos con esta circunferencia, y la denotaremos con C_1. Notemos que la condición $x^2 + y^2 = 1^2$ es equivalente $x^2 + y^2 = 1$, por lo que C_1 está definida por:

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

En la Figura 5.5 se ha representado a la circunferencia C_1 y a un punto genérico (x,y).

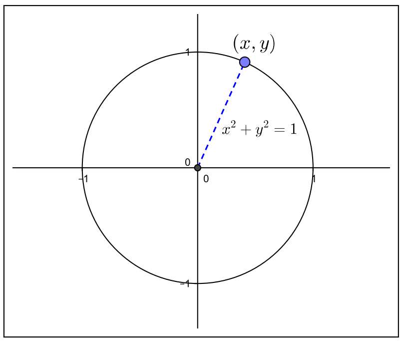


Figura 5.5: Circunferencia unitaria o trigonométrica

Consideremos ahora un punto P en la circunferencia C_1. Por un lado, este punto queda determinado por sus coordenadas cartesianas (x,y). Por otra parte, si consideramos el arco de circunferencia entre el punto $(1,0)$ y (x,y), tomado en sentido antihorario, entonces P también queda determinado por la longitud t de dicho arco. (Ver Figura 5.6). Para señalar la dependencia del punto P con la longitud del arco t, escribimos

$$P = P(t) = (x(t), y(t)).$$

Dado que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi \cdot r$, en el caso de la circunferencia unitaria la longitud es 2π. Luego la longitud t de un arco es un número entre 0 y 2π.

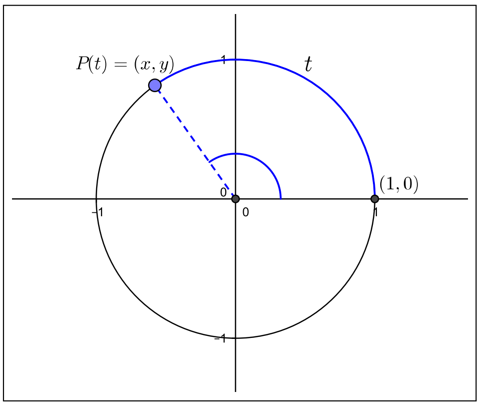


Figura 5.6: Circunferencia unitaria.

Así, para cada t tal que $0 \leq t < 2\pi$, queda determinado un único punto $P(t)$ en C_1. Recíprocamente, todo punto de C_1 se corresponde con un arco de longitud t, y por lo tanto $P = P(t)$ para algún t, $0 \leq t < 2\pi$.

Ahora bien, podemos extender la definición de un punto $P(t)$ para cualquier número real t. Veamos esto. Dado un valor de t positivo, podemos imaginar un recorrido en sentido antihorario sobre la circunferencia de longitud t. Así, para $t = 2\pi$, tendremos que $P(2\pi)$ es el punto $(1,0)$, y para t con $2\pi \leq t < 4\pi$, volvemos a recorrer toda la circunferencia. Así sucesivamente, cada valor de t de la forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, $P(2k\pi)$ corresponde al punto $(1,0)$, y se vuelve a recorrer la circunferencia en sentido antihorario y da una vuelta completa cuando t recorre el intervalo $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

Por otro lado, para los valores de t negativos ($t < 0$), definimos $P(t)$ como el punto en C_1 cuyo arco tiene longitud $|t|$, medido desde $(1,0)$ en sentido horario. (Ver Figura 5.7).

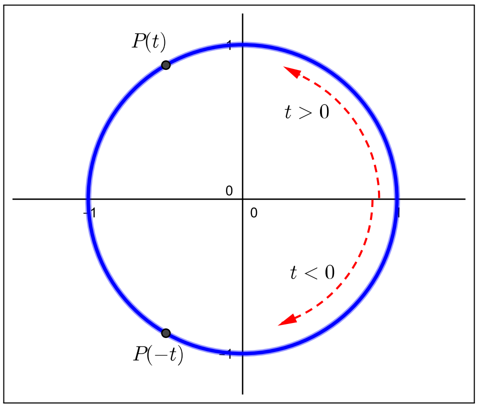


Figura 5.7: Recorrido en la circunferencia.

Los siguientes ejemplos ilustran la relación entre las coordenadas (x,y) de un punto $P(t)$, para algunos valores de t. Antes de presentarlos, hacemos la siguiente observación:

Ejemplo 5. Para $t = \frac{\pi}{2}$, corresponde a un arco equivalente a un cuarto de circunferencia. Las coordenadas cartesianas de $P(t)$ son:

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1).$$

Ejemplo 6. Si $t = \pi$, el arco equivale a media circunferencia, o a un ángulo de π radianes. Luego,

$$P(\pi) = (-1,0).$$

Ejemplo 7. Si $t = \frac{3\pi}{4}$, el punto $P(t)$ se ubica en el punto medio del arco de circunferencia que pertenece al segundo cuadrante. Luego su distancia a los ejes x e y es la misma, y por lo tanto la abscisa x y la ordenada y del punto $P(t)$ satisfacen $y = -x$. Como la distancia del punto $P(t)$ al origen es 1, y $P(t) = (x, y)$ con $y = -x$, por Pitágoras se cumple que:

$$1^2 = |x|^2 + y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2.$$

Por lo tanto $x^2 = \frac{1}{2}$. Como $P(t)$ está en el segundo cuadrante y $x = -y$, entonces debe ser

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Ver Figura 5.8).

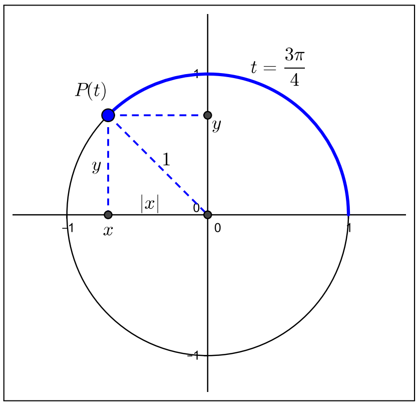


Figura 5.8: El punto $P(\frac{3\pi}{4})$

Ejemplo 8. Consideremos $t = \frac{\pi}{3}$. Para encontrar las coordenadas de $P(t)$ notemos que $\frac{\pi}{3}$ es un sexto de la longitud total de la circunferencia. Los puntos $(1,0)$, $P(t)$ y el origen $(0,0)$ forman un triángulo isósceles, ya que los dos lados con vértice en $(0,0)$ miden 1. Esto implica que los ángulos opuestos a estos lados son iguales entre sí. Por otro lado, la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es un ángulo llano, y por lo tanto igual a π radianes o 180°. Luego los dos ángulos iguales suman $\frac{2\pi}{3}$, o 120°, y por lo tanto todos los ángulos del triángulo miden $\frac{\pi}{3}$ (o 60°), y el triángulo resulta equilátero. (Ver Figura 5.9). De tal manera, la coordenada x de $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ es el pie de la altura del triángulo por el vértice $P(t)$, y por ser un triángulo equilátero es el punto medio del lado opuesto. Es decir, $x = \frac{1}{2}$. Como $x^2 + y^2 = 1$ e $y > 0$, resulta

$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

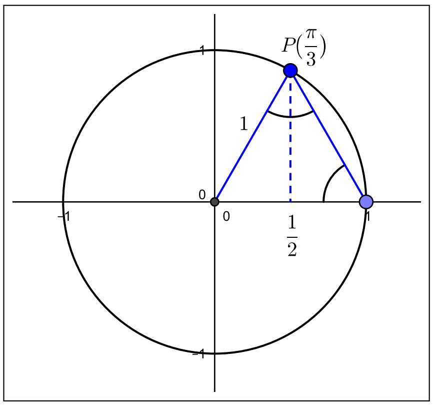


Figura 5.9: Coordenadas de $P(\frac{\pi}{3})$

En la Tabla 5.10 se dan algunos ejemplos de la medida del arco t y las correspondientes coordenadas (x,y) del punto $P(t)$.

t	$P(t) = (x,y)$
0	$(1,0)$
$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$
π	$(-1,0)$
$\frac{4\pi}{3}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{5\pi}{6}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
2π	$(1,0)$
$-\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$-\frac{\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
$-\frac{\pi}{2}$	$(0,-1)$

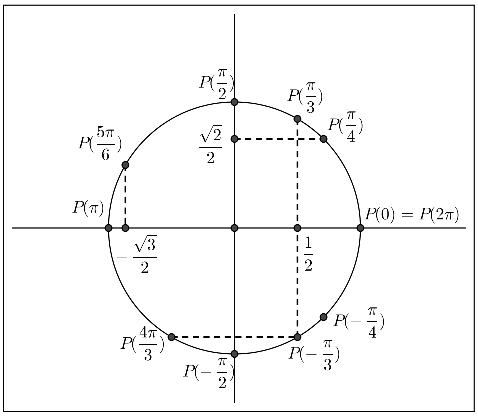


Figura 5.10: Coord.(x,y) para algunos valores de t

SECCIÓN 5.2

Las funciones seno y coseno

§ Definición y propiedades

Hemos definido para cada número real t un punto $P(t)$ en la circunferencia unitaria. Estamos en condiciones de definir las funciones trigonométricas *seno* y *coseno*.

Recordemos que para cada $t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ es un punto en la circunferencia unitaria con coordenadas (x,y). Dado que estas coordenadas dependen del valor de t, escribimos

$$\boxed{P(t) = (x(t), y(t))}$$

Estas coordenadas, vistas como funciones de t, reciben el nombre de *coseno* y *seno*, respectivamente, y se denotan

$$\boxed{x(t) = \text{cos}(t)} \quad \boxed{y(t) = \text{sen}(t)}$$

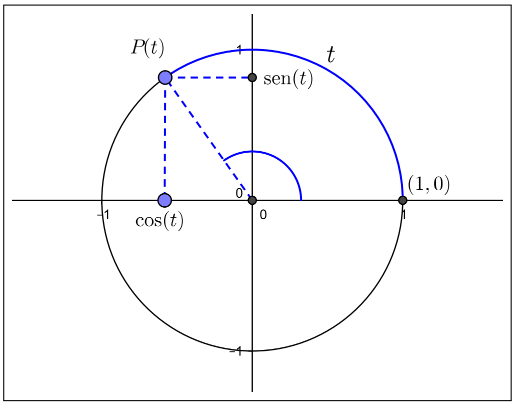


Figura 5.11: Representación del seno y el coseno de t.

A partir de la Tabla 5.10 podemos calcular el coseno y el seno para algunos valores particulares de t, como por ejemplo:

$\text{cos}(0) = 1$	$\text{cos}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{cos}(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
$\text{sen}(0) = 0$	$\text{sen}(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$

Veamos algunas propiedades importantes de estas funciones, que podemos deducir de los conceptos ya trabajados:

1. El dominio de las funciones cos y sen es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, ya que hemos definido $P(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t))$ para cada t real.

2. La abscisa de un punto de la circunferencia unitaria puede ser cualquier número entre -1 y 1, y lo mismo ocurre con la ordenada. Por lo tanto la imagen de ambas funciones es el intervalo $[-1,1]$. Simbolizamos estos dos resultados así:
$$\text{cos} : \mathbb{R} \to [-1,1] \qquad \text{sen} : \mathbb{R} \to [-1,1].$$

3. Recordemos que $P(t)$ recorre la circunferencia unitaria en sentido antihorario, y que este recorrido se repite en intervalos de longitud 2π. Es decir,
$$P(t + 2k\pi) = P(t),$$
para cualquier número entero k. En consecuencia lo mismo ocurre con las coordenadas $\text{cos}(t)$ y $\text{sen}(t)$.
$$\boxed{\text{cos}(t + 2k\pi) = \text{cos}(t)} \quad \boxed{\text{sen}(t + 2k\pi) = \text{sen}(t)}$$
Decimos que cos y sen son funciones periódicas, con período 2π.

Las funciones coseno y seno son funciones periódicas, de período 2π, definidas para todos los reales y su imagen es el intervalo $[-1,1]$.

4. Los puntos $P(t)$ y $P(-t)$ tienen igual abscisa, pero sus ordenadas tienen distinto signo (o son ambas iguales a 0). Es decir que:

$$\cos(t) = \cos(-t), \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(t) = -\operatorname{sen}(-t).$$

Esto en particular significa que la función cos es par, y la función sen es impar.

5. La función coseno toma valores decrecientes en el intervalo $[0,\pi]$, comenzando en 1 (la abscisa del punto $P(0)$), hasta -1 (la abscisa del punto $P(\pi)$). En el intervalo $[\pi,0]$ el coseno toma valores crecientes, entre -1 y 1.

6. La función seno toma valores crecientes en el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$, comenzando en 0 (la ordenada de $P(0)$) hasta 1 (la ordenada de $P(\frac{\pi}{2})$). Luego decrece en el intervalo $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$, y vuelve a crecer en $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$.

§ Gráficos e identidades trigonométricas

En las Figuras 5.12 y 5.13 se muestran los gráficos de las funciones cos y sen, resaltando la traza sobre el intervalo $[0,2\pi]$.

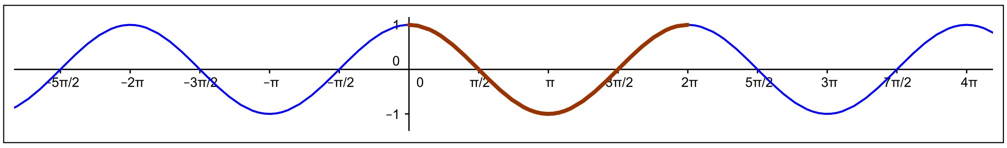


Figura 5.12: La función cos

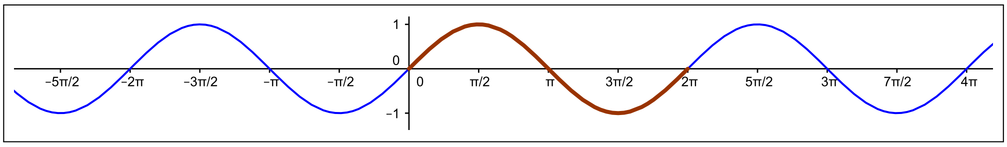


Figura 5.13: La función sen

De los puntos que hemos analizado y de los gráficos de las funciones sen y cos, podemos deducir otras identidades trigonométricas.

1. La relación quizás más simple, es observar que $\cos(t)$ y $\operatorname{sen}(t)$ son las coordenadas de un punto $P(t)$ sobre la circunferencia unitaria. Por lo tanto:

$$\boxed{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1.}$$

2. La Figura 5.14 permite ver que una traslación del gráfico del cos en $\frac{\pi}{2}$ unidades, en el sentido positivo de las x, se superpone con el gráfico del seno.

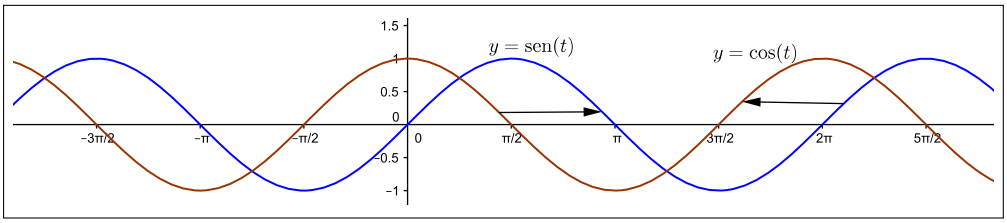


Figura 5.14: Traslaciones del seno y del coseno en π unidades

Equivalentemente, una traslación del gráfico del sen en $\frac{\pi}{2}$ unidades, pero en el sentido negativo de las x, se superpone con el gráfico de cos. Esto se traduce en fórmulas como:

$$\boxed{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(t)} \qquad \boxed{\text{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)}$$

Esta propiedad también puede analizarse a partir de la circunferencia unitaria y la representación de los puntos $P(t)$ y $P(t-\frac{\pi}{2})$. Si $P(t)$ está sobre uno de los ejes cartesianos, el resultado es simple.

Si $P(t)$ pertenece a uno de los cuadrantes, observamos que $P(t)$ y $P(t-\frac{\pi}{2})$ forman un ángulo recto con el origen de coordenadas (ver Figura 5.15). Los triángulos rectángulos que se observan en la figura son todos congruentes entre sí, pues tienen sus tres ángulos congruentes y la hipotenusa mide 1 en todos los casos. En la Figura 5.15 se ilustra el caso en que $P(t)$ pertenece al segundo cuadrante. Invitamos al lector a considerar otros casos a fin de convencerse de la relación entre los signos de $\cos(t)$, $\text{sen}(t-\frac{\pi}{2})$ y $\cos(t)$ y $\text{sen}(t-\frac{\pi}{2})$.

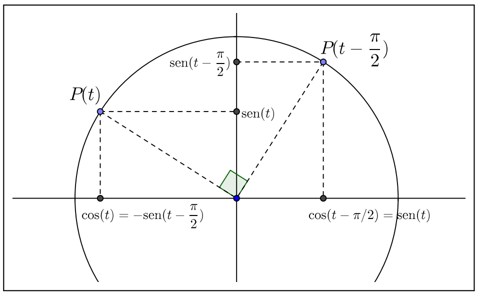


Figura 5.15: Puntos $P(t)$ y $P(t-\frac{\pi}{2})$

3. A partir de la circunferencia trigonométrica puede notarse que los puntos $P(t)$ y $P(t+\pi)$ (o $P(t)$ y $P(t-\pi)$), pertenecen a cuadrantes opuestos con respecto al origen O. Es decir, sus abscisas y ordenadas tienen signos opuestos. (Ver Figura 5.16). Luego, como

$$P(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)) \qquad \text{y} \qquad P(t+\pi) = (\cos(t+\pi), \text{sen}(t+\pi)),$$

obtenemos las siguientes identidades:

$$\boxed{\cos(t+\pi) = -\cos(t)} \qquad \boxed{\text{sen}(t+\pi) = -\text{sen}(t)}$$

4. En general, para cualquier par s y t en $\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes identidades para el coseno de la suma y de la diferencia:

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(t-s) = \cos(t)\cos(s) + \text{sen}(t)\,\text{sen}(s) \\[2ex] \cos(t+s) = \cos(t)\cos(s) - \text{sen}(t)\,\text{sen}(s)\end{array}} \qquad \text{Si } t = s, \text{ entonces} \qquad \boxed{\cos(2\,t) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t)}$$

De estas dos fórmulas, y de la relación $\cos(t-\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(t)$ se deducen las siguientes fórmulas para el seno de la suma y la diferencia de sus argumentos:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}(t+s) &= \text{sen}(t)\cos(s)+\text{sen}(s)\cos(t) \\ \text{sen}(t-s) &= \text{sen}(t)\cos(s)-\text{sen}(s)\cos(t) \end{aligned}}$$

Si $t = s$, entonces $\boxed{\text{sen}(2\,t) = 2\,\text{sen}(t)\cos(t)}$

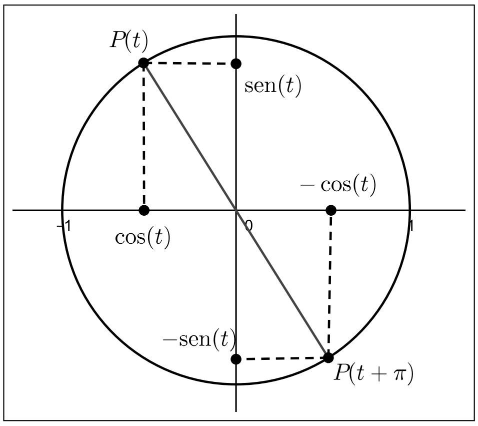


Figura 5.16: Puntos $P(t)$ y $P(t+\pi)$

En la sección 5.5 de este capítulo se ha desarrollado la demostración de estas identidades trigonométricas.

§ Amplitud y período del seno y del coseno

Ya hemos analizado los desplazamientos de una función f en el sentido horizontal o vertical, sumando o restando una constante al argumento de la función o al valor de la función: $f(x \pm c)$, $f(x) \pm c$. También analizamos los gráficos de las funciones $y = -f(x)$ e $y = f(-x)$, que resultan una reflexión con respecto al eje x y al eje y, respectivamente.

En el caso de las funciones trigonométricas, y especialmente para el seno y el coseno, resulta interesante analizar además la transformación del gráfico cuando multiplicamos a la función o a su argumento por una constante. Esto es, estudiar el comportamiento de funciones como:

$$h(t) = a\cos(t), \qquad k(t) = a\,\text{sen}(t), \qquad a \neq 0.$$

$$f(t) = \cos(bt), \quad g(t) = \text{sen}(bt), \qquad b \neq 0,$$

Las constantes a y b están relacionadas con estiramientos o contracciones del gráfico en el sentido vertical u horizontal, respectivamente.

Consideremos en primer lugar el caso en que las constantes a o b son positivas. La Figura 5.17 muestra el efecto de multiplicar a la función cos por una constante ($3\cos(t)$ y $\frac{1}{2}\cos(t)$). La función $y = \cos(t)$ está graficada en línea discontinua. Como podemos ver, la periodicidad de la función no cambia, los valores donde se anula son los mismos, pero se modifica su *amplitud*. Cuanto mayor es el valor de a, mayor es la amplitud de la función.

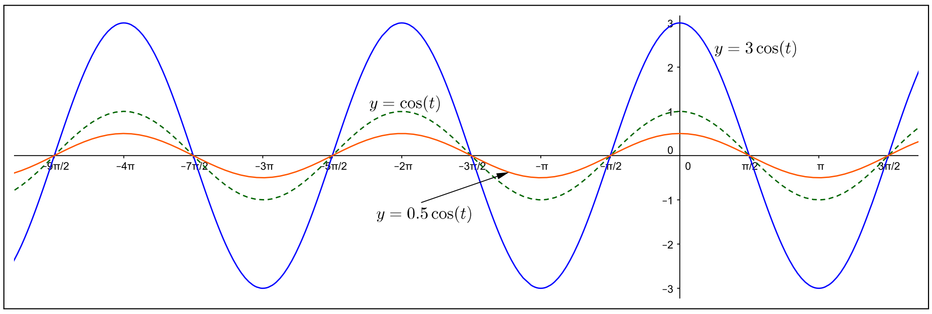


Figura 5.17: Gráficos de $y = 3\cos(t)$, $y = \frac{1}{2}\cos(t)$

Por otra parte, si multiplicamos el argumento de la función por una constante b positiva, lo que se modifica es la periodicidad de la función (Ver Figura 5.18). Por ejemplo, la función $c(t) = \cos(2t)$ tiene periodicidad π, y la función $h(t) = \cos(\frac{1}{2}t)$ tiene periodicidad 4π. En general, la función $y = \cos(bt)$ tiene un *período* $\frac{2\pi}{b}$.

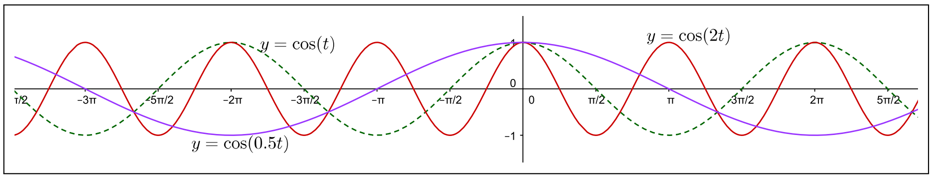


Figura 5.18: Las funciones $y = \cos(2t)$, $y = \cos(\frac{1}{2}t)$

Un comportamiento análogo ocurre modificando la función *seno*. Por otra parte, si consideramos los valores de a o b negativos, los correspondientes gráficos también muestran cambios de amplitud o de período, pero además existe una reflexión con respecto a uno de los ejes coordenados. En particular el período de la función resulta igual a $\frac{2\pi}{|b|}$

SECCIÓN 5.3

La función tangente

§ Definición y propiedades

La función tangente se define como el cociente entre las funciones seno y coseno, en los puntos en que este cociente es posible. Esto es:

$$\boxed{\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

donde k es cualquier número entero.

Ejemplo 1. Calculamos los valores de $\tan(t)$ para $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$.

$$
\begin{aligned}
\tan(0) &= \frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0 \\
\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\
\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \\
\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Una interpretación geométrica de $\tan(t)$ es la siguiente, consideremos la recta paralela al eje y que pasa por el punto $(1,0)$. Esta recta es *tangente* a la circunferencia unitaria ya que sólo la interseca en este punto. (Ver Figura 5.19). Dado un punto $P = P(t)$ sobre C_1, y que no esté sobre el eje y, consideramos la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $P(t)$. Esta recta interseca a la recta *tangente* en un único punto Q, cuyas coordenadas cartesianas son $(1, \tan(t))$. Para esto basta observar que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son hipotenusas de dos triángulos rectángulos semejantes, y por lo tanto sus lados son proporcionales. En particular, si llamamos $U = (1,0)$, entonces:

$$\frac{|\operatorname{sen}(t)|}{|\overline{UQ}|} = \frac{|\cos(t)|}{1},$$

de donde resulta $|\overline{UQ}| = |\tan(t)|$. Hemos tomado el valor absoluto para tener en cuenta los signos de $\operatorname{sen}(t)$ y $\cos(t)$ en cada cuadrante. Observando que $\tan(t)$ y $\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}$ tienen siempre el mismo signo, concluimos que:

$$\boxed{\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}}$$

El dominio de la función tan es $\mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$, esto es, para definir el dominio de la función ***tan***, basta que a $\mathbb{R}$ le quitamos todos aquellos valores de t que anulan a la función coseno.

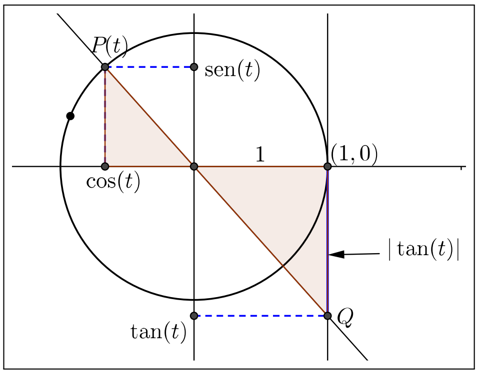


Figura 5.19: Interpretación geométrica de la tangente

La interpretación geométrica de la tangente es interesante no sólo por el sentido geométrico propiamente dicho sino para poner en evidencia la vinculación entre seno, coseno y tangente, por lo tanto ofrece pistas para definir el dominio de la función tangente como se indica a continuación.

La imagen de esta función es el conjunto $\mathbb{R}$. Aunque no es tan evidente deducirlo a partir de su fórmula, la interpretación geométrica (Figura 5.19) ayuda a comprenderlo. La Figura 5.20 ilustra el gráfico de esta función. Las líneas de puntos no corresponden al gráfico, e indican que el gráfico se aproxima a estas rectas pero en ningún caso las interseca.

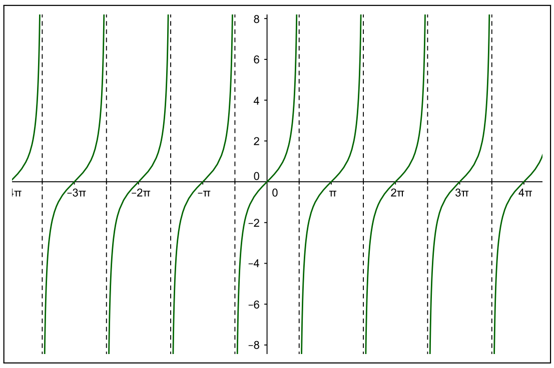


Figura 5.20: La función tangente

De las propiedades $\operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen}(t)$ y $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ observamos que

$$\boxed{\tan(t+\pi) = \tan(t)}$$

por lo cual la tangente es una función periódica, con período π. Notemos que para valores de t próximos a $\frac{\pi}{2}+k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, el coseno se aproxima a 0, ya sea con valores positivos o negativos, mientras que el seno se acerca a 1 o a -1. Esto trae como consecuencia que la función tangente toma valores muy grandes en valor absoluto cerca de los puntos $t = \frac{\pi}{2}+k\pi$. Decimos que la tangente *tiende asintóticamente* a más o menos infinito en estos puntos. La Figura 5.21 muestra los gráficos de las funciones cos y tan, donde puede observarse esta situación.

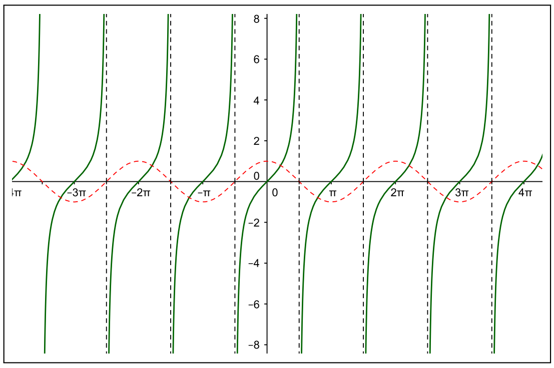


Figura 5.21: Comportamiento asintótico de la función tangente

También observamos que como sen es una función impar y cos es par, entonces

$$\boxed{\tan(-t) = \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)}$$

es decir, la función tangente es impar.

Relación entre la tangente y la pendiente de una recta

Consideremos la ecuación de una recta en el plano, $y = ax+b$, con a un número real. Esta recta es paralela a la recta $y = ax$ que pasa por el origen de coordenadas. La recta $y = ax$ corta a la circunferencia unitaria en dos puntos $P(t)$ y $P(t+\pi)$. La Figura 5.22 ilustra esta situación. El punto $P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ pertenece a la recta y por lo tanto se cumple que

$$\operatorname{sen}(t) = a\cos(t).$$

Por otra parte, de la definición de función tangente tenemos que $\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}$. De estas ecuaciones deducimos que

$$a = \tan(t).$$

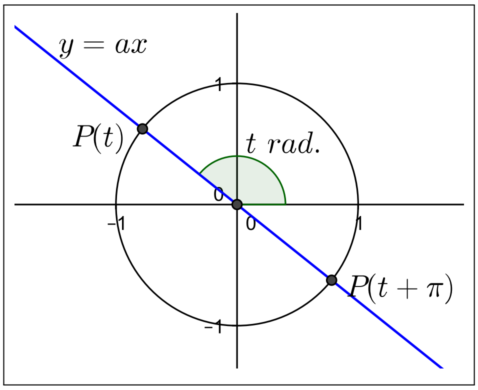


Figura 5.22: Recta $y = ax$

Recordemos que t también es la medida en radianes del ángulo que forma la recta $y = ax$ con el semieje positivo de las x. Así podemos afirmar que:

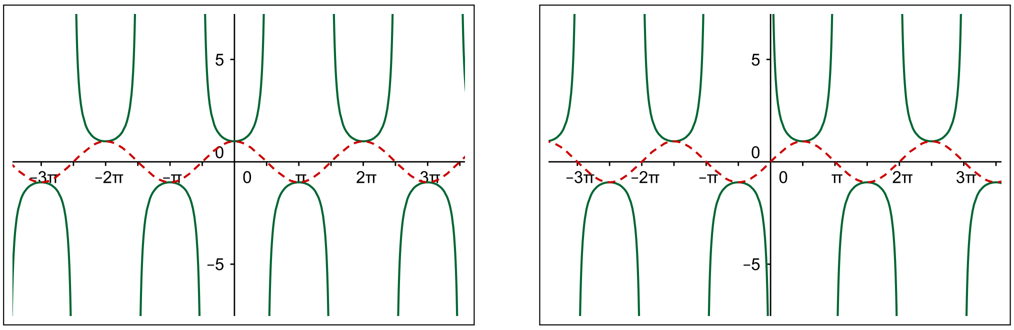
> La pendiente de la recta $y = ax + b$
> es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las x
> $a = \tan(t)$

§ Funciones secante, cosecante y cotangente

Las funciones trigonométricas *secante* (sec), *cosecante* (cosec) y *cotangente* (cot) están definidas por:

$$\boxed{\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}, \qquad \operatorname{cosec}(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}, \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}}$$

siempre sobre el dominio en que estén definidos estos cocientes. Las Figuras 5.23 a, 5.23 b y 5.24 muestran los gráficos de las tres funciones trigonométricas *coseno*, *seno* y *tangente* en línea de puntos, y de la *secante*, *cosecante* y *cotangente* respectivamente, en línea continua.



(a) Coseno y Secante (b) Seno y Cosecante

Figura 5.23: Gráficos de Secante y Cosecante

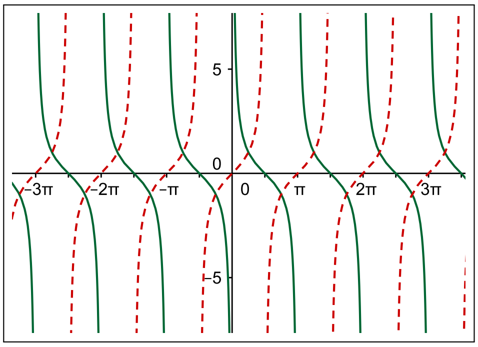
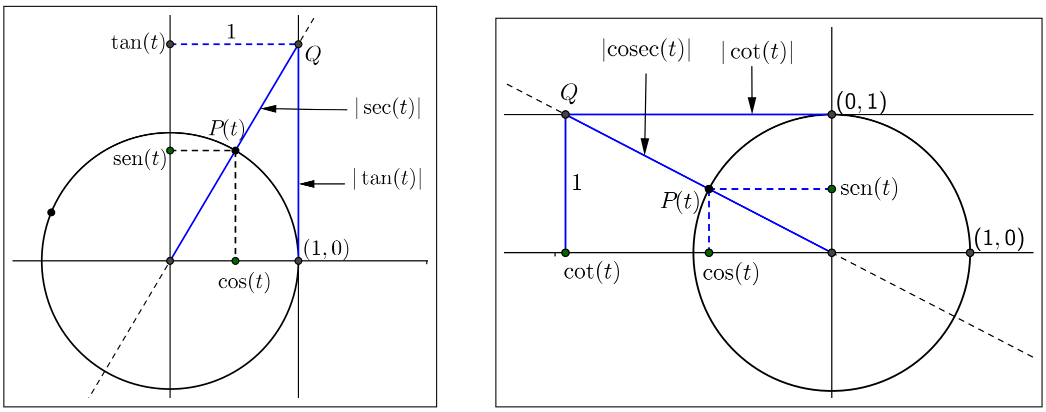


Figura 5.24: La función cotangente y la tangente

La Figura 5.25 muestra la representación geométrica de las funciones trigonométricas en relación a la circunferencia unitaria.



(a) Tangente y Secante (b) Cotangente y Cosecante

Figura 5.25: Funciones trigonométricas en C_1

Notemos que, al igual que la tangente, la función cotangente tiene período π. Está definida para todos los números reales excepto en aquellos donde el seno se anula: $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La función cotangente es una función periódica, de período π, cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es el conjunto $\mathbb{R}$.

Notemos que las funciones sen y cos son periódicas con período 2π y toman valores entre -1 y 1. Por lo tanto las funciones sec y cosec también son periódicas con período 2π y toman valores mayores o iguales a 1 o menores o iguales a -1, en su dominio. Esto es:

$$|\sec(t)| = \left|\frac{1}{\cos(t)}\right| \geq 1, \qquad |\operatorname{cosec}(t)| = \left|\frac{1}{\operatorname{sen}(t)}\right| \geq 1.$$

La función cosecante es una función periódica, de período 2π, cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es el conjunto $\{t \mid |t| \geq 1\}$.

La función secante es una función periódica, de período 2π, cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es el conjunto $\{t \mid |t| \geq 1\}$.

SECCIÓN 5.4

Aplicación sobre triángulos rectángulos

§ Triángulos rectángulos y razones trigonométricas

Recordemos que en la circunferencia unitaria, la medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco de circunferencia que lo abarca. Por lo tanto tiene sentido definir las funciones trigonométricas para ángulos entre 0 y 2π (radianes), o equivalentemente, entre $0°$ y $360°$. En particular, si tenemos un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ con ángulos α, β y γ, tiene sentido calcular $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, y demás funciones trigonométricas en α, y lo mismo para los demás ángulos.

Ahora bien, en el caso que el triángulo sea rectángulo, estos valores trigonométricos pueden calcularse a partir de la medida de sus lados, y reciben el nombre de *razones trigonométricas*. Para ver esto, consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ recto en B, y una circunferencia centrada en A (vértice de α), de radio 1. Si la hipotenusa $\overline{AC}$ mide 1 (ver Figura 5.26), entonces $\cos(\alpha)$ es la abscisa del punto C y $\operatorname{sen}(\alpha)$ es la ordenada de C. Ahora bien, la abscisa de C es igual a la longitud del cateto $\overline{AB}$, y la ordenada de C es la longitud de $\overline{BC}$. Esto es:

$$\cos(\alpha) = |\overline{AB}| \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = |\overline{BC}|.$$

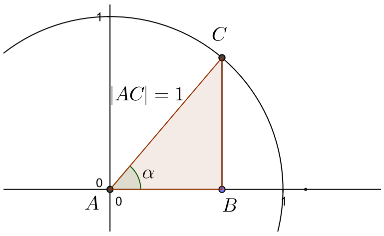


Figura 5.26: Triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, recto en B

Si en cambio la hipotenusa $\overline{AC}$ no mide 1, entonces consideramos las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Estas semirrectas intersecan a la circunferencia unitaria en sendos puntos P y Q respectivamente, y entonces tenemos que:

$$\text{sen}(\alpha) = |\overline{PQ}|, \qquad \cos(\alpha) = |\overline{AP}|. \tag{5.2}$$

Pero el Teorema de Tales nos dice que los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{APQ}$ son semejantes, y por lo tanto sus lados son proporcionales. (Ver Figura 5.27).

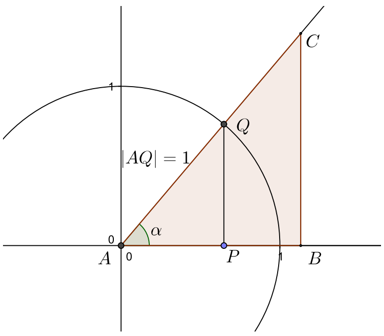


Figura 5.27: Triángulos semejantes: $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{APQ}$

Esto es:

$$\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AQ}|}.$$

De estas relaciones, obtenemos también las siguientes:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{AQ}|}, \qquad \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{AQ}|}. \tag{5.3}$$

Ahora bien, el triángulo $\overset{\triangle}{APQ}$ tiene su hipotenusa igual a 1 ($|\overline{AQ}| = 1$), por lo que combinando las ecuaciones (5.2) y (5.3) obtenemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}, \qquad \text{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.$$

De esta manera podemos ver que sen(α) y cos(α) pueden calcularse como el cociente o *razón* entre las longitudes de dos lados del triángulo, y lo mismo ocurre con $\tan(\alpha)$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}}{\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\text{cateto adyacente}|}{|\text{hipotenusa}|}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{|\text{cateto opuesto}|}{|\text{hipotenusa}|}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{|\text{cateto opuesto}|}{|\text{cateto adyacente}|}$$

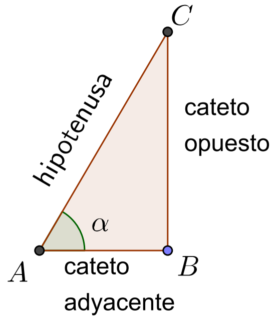


Figura 5.28: Razones trigonométricas

Si α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, entonces

- $\cos(\alpha)$ es el cociente entre las longitudes del cateto adyacente a α y de la hipotenusa:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}.$$

- $\operatorname{sen}(\alpha)$ es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto a α y de la hipotenusa:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.$$

- $\tan(\alpha)$ es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto y el cateto adyacente:

$$\tan(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}.$$

Ejemplo 1. En el triángulo de la Figura 5.29, el lado $\overline{BC}$ mide 5 cm, el lado $\overline{AC}$ mide 3 cm y el lado $\overline{AB}$ mide 4 cm. Calcular el seno y el coseno de los ángulos β y γ.

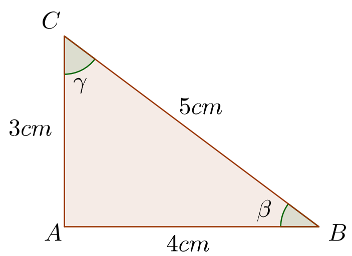


Figura 5.29: Triángulo del Ejemplo 1

Primero identificamos cuál es el cateto adyacente y cuál el cateto opuesto para cada ángulo.

En el caso del ángulo β, el cateto adyacente es el lado $\overline{AB}$ y el cateto opuesto es el lado $\overline{AC}$; mientras que para el ángulo γ el cateto adyacente es el lado $\overline{AC}$ y el cateto opuesto es el lado $\overline{AB}$. La hipotenusa es el lado $\overline{BC}$. Entonces :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sen}(\beta) = \frac{|\text{cateto opuesto}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} & \text{sen}(\gamma) = \frac{|\text{cateto opuesto}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} \\ \cos(\beta) = \frac{|\text{cateto adyacente}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} & \cos(\gamma) = \frac{|\text{cateto adyacente}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} \end{array}}$$

Por lo que resulta:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sen}(\beta) = \frac{3}{5} = 0,6 & \text{sen}(\gamma) = \frac{4}{5} = 0,8 \\ \cos(\beta) = \frac{4}{5} = 0,8 & \cos(\gamma) = \frac{3}{5} = 0,6 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \text{sen}(\beta) = 0,6 & \cos(\beta) = 0,8 \\ \text{sen}(\gamma) = 0,8 & \cos(\gamma) = 0,6 \end{array}}$$

Notemos que en este ejemplo se cumple que $\text{sen}(\beta) = \cos(\gamma)$ y $\cos(\beta) = \text{sen}(\gamma)$. Esto no es casual, sino que se debe a que $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Luego,

$$\text{sen}(\beta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos(\gamma), \qquad \cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \text{sen}(\gamma).$$

En analogía a las funciones trigonométricas, para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es posible definir también su *cotangente*, *secante* y *cosecante*. La Tabla 5.1 resume estas definiciones:

Razón trigonométrica	Razón inversa
$\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\lvert\text{cateto opuesto}\rvert}{\lvert\text{hipotenusa}\rvert}$	$\text{cosec}(\alpha) = \dfrac{\lvert\text{hipotenusa}\rvert}{\lvert\text{cateto opuesto}\rvert}$
$\cos(\alpha) = \dfrac{\lvert\text{cateto adyacente}\rvert}{\lvert\text{hipotenusa}\rvert}$	$\sec(\alpha) = \dfrac{\lvert\text{hipotenusa}\rvert}{\lvert\text{cateto adyacente}\rvert}$
$\tan(\alpha) = \dfrac{\lvert\text{cateto opuesto}\rvert}{\lvert\text{cateto adyacente}\rvert}$	$\cot(\alpha) = \dfrac{\lvert\text{cateto adyacente}\rvert}{\lvert\text{cateto opuesto}\rvert}$

Tabla 5.1: Razones trigonométricas

En la Tabla 5.2 se dan los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos notables.

Rad.	Grados	cos	sen	tan	sec	cosec	cot
0	$0°$	1	0	0	1	$-$	$-$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	0	1	$-$	$-$	1	0

Tabla 5.2: Razones trigonométricas para ángulos notables

§ Problemas de aplicación

Ejemplo 2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de sus ángulos mide $30°$. ¿Cuánto miden los otros lados?

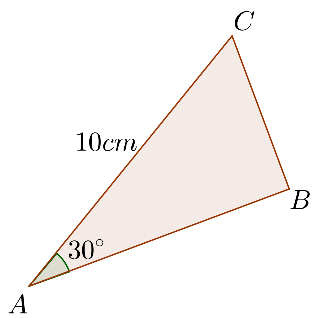


Figura 5.30: Triángulo del Ejemplo 2

Para resolver este problema, denotamos A, B y C a los vértices del triángulo, y donde B es el vértice del ángulo recto y A es el vértice del ángulo de $30°$, que llamamos α. (Ver Figura 5.30). Entonces tenemos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}, \qquad \text{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.$$

Como $|\overline{AC}| = 10$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, tenemos que los otros lados del triángulo miden:

$$|\overline{AB}| = 5\sqrt{3}, \qquad |\overline{BC}| = 5.$$

Dado que la unidad de medida es el centímetro, tenemos que el cateto adyacente mide $5\sqrt{3}$ cm y el cateto opuesto mide 5 cm.

Es importante que todas las longitudes se expresen en una misma unidad de medida. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. En el triángulo isósceles de la figura, los lados iguales miden 1 m, y la altura con respecto al lado restante mide 50 cm. ¿Cuál es la medida de los ángulos?

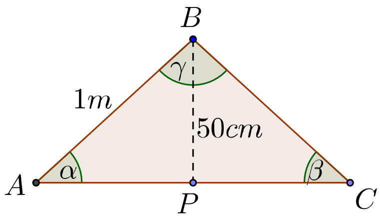


Figura 5.31: Triángulo del Ejemplo 3

Si denominamos α y β a los ángulos iguales, y P es el pie de la altura con respecto al lado $\overline{AC}$, entonces

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{AB}|}.$$

Ahora bien, la longitud de $\overline{BP}$ está expresada en centímetros y la longitud de $\overline{AB}$ en metros. Para calcular sen(α) debemos expresar estas longitudes en una misma unidad de medida, cualquiera sea. Si consideramos centímetros, obtenemos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

e idéntico resultado si consideramos metros:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{0{,}5}{1} = \frac{1}{2}.$$

A partir de la Tabla 5.2 concluimos que $\alpha = \beta = 30°$, y el ángulo restante es de $120°$.

Ejemplo 4. Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas la parte superior de una torre, bajo ángulos de $45°$ y $60°$ con respecto al suelo. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas y sobre la línea que las une. Hallar $|\overline{CH}|$, la altura de la torre. [1]

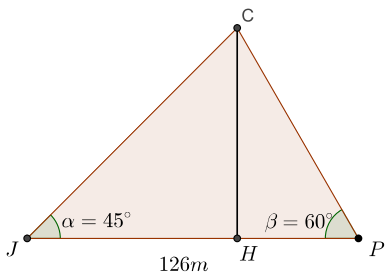


Figura 5.32: Triángulo del Ejemplo 4

La Figura 5.32 ilustra gráficamente este problema. El vértice J del triángulo representa la casa de Juan, P la de Pedro, y C es la parte superior de la torre. La altura con respecto al lado $\overline{JP}$, es decir, $\overline{HC}$, determina dos triángulos rectángulos: $\overset{\triangle}{JHC}$ y $\overset{\triangle}{PHC}$. Entonces tenemos que

$$\tan(45°) = \frac{|\overline{HC}|}{|\overline{JH}|}, \qquad \tan(60°) = \frac{|\overline{HC}|}{|\overline{HP}|}$$

es decir

$$|\overline{HC}| = |\overline{JH}|\tan(45°), \qquad |\overline{HC}| = |\overline{HP}|\tan(60°).$$

[1] Extraído de http://www.vadenumeros.es/cuarto/trigonometria-distancias.htm

Pero además tenemos que

$$|\overline{JH}| + |\overline{HP}| = |\overline{JP}| = 126.$$

Para simplificar la escritura, llamamos $x = |\overline{JH}|$ y $h = |\overline{HC}|$. Entonces $|\overline{HP}| = 126 - x$, y resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h = x \cdot \tan(45^\circ) \\ h = (126 - x) \cdot \tan(60^\circ). \end{cases}$$

De la Tabla 5.2 vemos que $\tan(45^\circ) = 1$ y $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, por lo cual $h = x$ y entonces

$$h = (126 - h) \cdot \sqrt{3}.$$

Luego

$$h = \frac{126\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \sim 79{,}9$$

Luego la altura de la torre es aproximadamente $\boxed{79{,}9\ m.}$

SECCIÓN 5.5

Apéndice de fórmulas

§ Fórmula para $\cos(t - s)$

Si consideramos dos puntos $P(t)$ y $P(s)$ sobre la circunferencia unitaria, entonces la longitud del arco entre estos puntos es igual a la longitud del arco entre $P(0)$ y $P(t-s)$. (Ver Figura 5.33). Esto implica que las correspondientes *cuerdas* $\overline{P(0)P(t-s)}$ y $\overline{P(t)P(s)}$ tienen la misma longitud.

Ahora bien, la longitud de estas cuerdas es igual a la distancia entre los extremos, por lo tanto tenemos que:

$$d(P(t), P(s)) = d(P(t-s), P(0)). \tag{5.4}$$

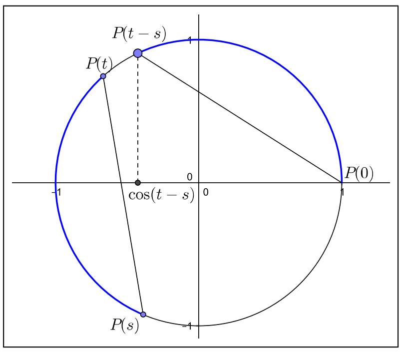


Figura 5.33: $\cos(t - s)$

Las coordenadas x e y de estos puntos son:

$$P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \quad P(s) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s)), \quad P(t-s) = (\cos(t-s), \operatorname{sen}(t-s)), \quad P(0) = (1, 0).$$

Recordando la expresión (5.1) para el cálculo de la distancia entre puntos, la igualdad (5.4) puede escribirse como:

$$(\cos(t)-\cos(s))^2+(\operatorname{sen}(t)-\operatorname{sen}(s))^2=(\cos(t-s)-1)^2+(\operatorname{sen}(t-s)-0)^2. \tag{5.5}$$

El miembro izquierdo de (5.5) es igual a:

$$\cos^2(t)-2\cos(t)\cos(s)+\cos^2(s)+\operatorname{sen}^2(t)-2\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s)+\operatorname{sen}^2(s)$$

El miembro derecho de (5.5) es igual a:

$$\cos^2(t-s)+1-2\cos(t-s)+\operatorname{sen}^2(t-s).$$

Ahora bien, dado que para cualquier $x\in\mathbb{R}$ se cumple que $\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)=1$, la ecuación (5.5) resulta:

$$2-2\cos(t)\cos(s)-2\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s)=2-2\cos(t-s).$$

Así concluimos que:

$$\boxed{\cos(t-s)=\cos(t)\cos(s)+\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s).}$$

Para el cálculo del coseno de la suma, $\cos(t+s)$, observamos que

$$\cos(t+s)=\cos(t-(-s)).$$

Usando que $\cos(-s)=\cos(s)$ y $\operatorname{sen}(-s)=-\operatorname{sen}(s)$ concluimos:

$$\begin{aligned}\cos(t+s)&=\cos(t)\cos(-s)+\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(-s)\\&=\cos(t)\cos(s)-\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s)\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(t+s)=\cos(t)\cos(s)-\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s)}$$

§ **Fórmula para** $\operatorname{sen}(t+s)$

Recordemos que para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple que

$$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\operatorname{sen}(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2})=-\cos(x).$$

Luego:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(t+s)&=\cos(t+s-\frac{\pi}{2})\\&=\cos(t)\cos(s-\frac{\pi}{2})-\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s-\frac{\pi}{2})\\&=\cos(t)\operatorname{sen}(s)+\operatorname{sen}(t)\cos(s).\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(t+s)=\operatorname{sen}(t)\cos(s)+\cos(t)\operatorname{sen}(s)}$$

Para la fórmula de $\operatorname{sen}(t-s)=\operatorname{sen}(t+(-s))$ usamos que $\cos(-s)=\cos(s)$ y $\operatorname{sen}(-s)=-\operatorname{sen}(s)$, de donde resulta

$$\boxed{\operatorname{sen}(t-s)=\operatorname{sen}(t)\cos(s)-\cos(t)\operatorname{sen}(s)}$$

Ejercicios

1. Calcular la distancia entre P y Q:

   a) $P = (-2,3), \quad Q = (-2,5)$ b) $P = (0,0), \quad Q = (3,-3)$ c) $P = (1,2), \quad Q = (2,-3)$

2. Escribir la ecuación de la circunferencia centrada en A y con radio r en cada uno de los siguientes casos. Representarla gráficamente.

   a) $A = (1,1), \quad r = 1$ b) $A = (2,0), \quad r = 2$ c) $A = (0,0), \quad r = 3$

3. Convertir de radianes a grados sexagesimales, o de grados sexagesimales a radianes, según corresponda:

   a) $150°$ b) $\frac{\pi}{5}$ rad. c) $72°$ d) $\frac{3}{2}\pi$ rad.

4. Determinar las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos de la circunferencia unidad:

   a) $P(3\pi)$ b) $P(\frac{11\pi}{2})$ c) $P(\frac{-7\pi}{4})$ d) $P(\frac{\pi}{6})$

5. Dar los valores de:

   a) $\cos(\frac{5\pi}{4})$
   b) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})$
   c) $\cos(-\pi)$
   d) $\operatorname{sen}(\frac{21}{3}\pi)$
   e) $\cos(-\frac{5\pi}{6})$
   f) $\operatorname{sen}(-\frac{8\pi}{3})$

6. Sabemos que $\cos(t) = -1$ para todo t en el conjunto $\{t = (2k+1)\pi, \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
   Describir de manera análoga las soluciones de:

   a) $\operatorname{sen}(t) = 0$
   b) $\operatorname{sen}(t) = -1$
   c) $\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   d) $\cos(t) = \operatorname{sen}(t)$

7. a) Si $\operatorname{sen}(t) = \frac{2}{5}$, ¿qué valores puede tener $\cos(t)$?
   b) Sabiendo que $P(t)$ está en el cuarto cuadrante y que $\operatorname{sen}(t) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, ¿qué valor tiene $\cos(t)$?

8. Sabiendo que $\operatorname{sen}(t) = -\frac{1}{3}$ y $\cos(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$:

   a) Indicar en qué cuadrante se encuentra $P(t)$.
   b) Calcular $\operatorname{sen}(-t)$ y $\cos(\pi - t)$.

9. Usar la igualdad $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, para calcular:

   a) $\cos(\frac{1}{12}\pi)$. b) $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{12}\pi\right)$.

10. Dibujar los gráficos de las siguientes funciones.

    a) $f(t) = \text{sen}(2t)$
    b) $g(t) = 3\,\text{sen}(t)$
    c) $h(t) = \cos(\pi - t)$
    d) $m(t) = \text{sen}(\pi + t)$
    e) $n(t) = \text{sen}(-t)$
    f) $k(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2t)$

11. Utilice la fórmula para $\cos(t+s)$ y el hecho que $\cos(2t) = \cos(t+t)$ para deducir que:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1.$$

12. Determinar la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, con B el vértice del ángulo recto, en cada uno de los siguientes casos. El ángulo α tiene vértice en A.

    a) Los catetos son iguales y la hipotenusa mide $\sqrt{20}$ cm.
    b) $\alpha = 60°$ y el cateto adyacente mide 10 cm.
    c) $\alpha = 45°$ y el cateto opuesto mide 2 cm.
    d) La hipotenusa mide 30 cm y $\alpha = 30°$.

13. Sabiendo que $\cos(42°) = 0,74$. Calcular:

    a) $\text{sen}(222°) =$
    b) $\tan(138°) =$
    c) $\cos(48°) =$
    d) $\text{sen}(318°) =$
    e) $\text{sen}(132°) =$

14. Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1200 m y el ángulo de observación desde la torre es de $30°$. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide 40 m de altura? La Figura 5.34 ilustra la situación.

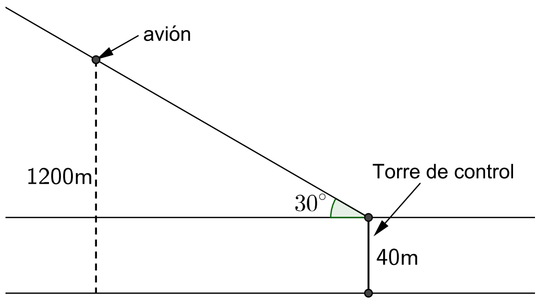


Figura 5.34: Esquema del ejercicio 14

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

ISBN 978-950-33-1331-2

www.famaf.unc.edu.ar
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria
CP: X5000HUA, Córdoba, Argentina
Tel: +54 351 4334051 (rotativas)
Fax: +54 4334054

Ejercicios Adicionales Cap. 5.3

Relación entre la tangente y la pendiente de una recta

1. Dada la ecuación de la recta $y = ax - 1$, si el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas es de $30°$, ¿cuál es el valor de la pendiente? Utilizando el ángulo dado y el valor de la ordenada al origen, graficar la recta.

2. Dada la ecuación de la recta $y = ax$, si el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas es de $-\frac{\pi}{4}$, ¿cuál es el valor de la pendiente? Graficar la recta.

3. Considerar la ecuación de la recta $y = -\sqrt{3}x + 2$.¿Qué ángulo forma la recta con el eje de las abscisas? Expresar la respuesta en grados y en radianes.

Funciones Secante, Cosecante y Cotangente

4. Ubicar los ángulos en la circunferencia unitaria y dar los valores de las siguientes funciones (*Ayuda: se pueden utilizar resultados encontrados en los problemas 4 y 5 del cuadernillo*)

   (a) $\sec\left(5\frac{\pi}{4}\right)$

   (b) $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

   (c) $\operatorname{cotan}\left(-7\frac{\pi}{4}\right)$

   (d) $\sec(3\pi)$

   (e) $\operatorname{cosec}\left(11\frac{\pi}{2}\right)$

   (f) $\operatorname{cotan}\left(-5\frac{\pi}{6}\right)$

CURSO DE NIVELACIÓN - **Ingreso 2023**
Trigonometría - Capítulo 5
Ejercicios adicionales

1. Los puntos $A = (-1, -1)$, $B = (3, 2)$, $C = (2, -1)$ y $D = (3, -1)$ definen tres triángulos en el plano: los triángulos ABC, ABD y BCD. Utilizando las distancias entre los puntos, calcule los perímetros y las áreas de los tres triángulos.

   AYUDA: para las áreas puede comenzar con las de los triángulos rectángulos, y luego usarlas para calcular el área restante. Puede ayudarse con la Figura 1.

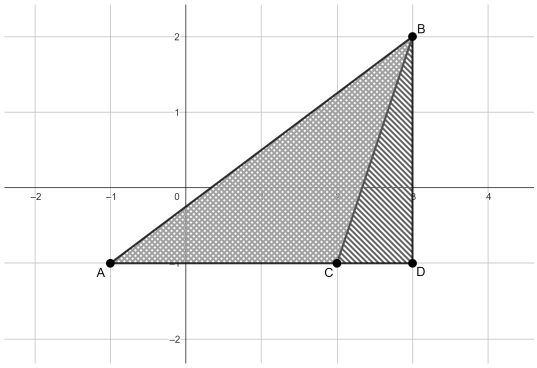


Figura 1: Ayuda gráfica para el ejercicio 1

2. En cada inciso, determine si los dos puntos en la circunferencia unidad coinciden:

   a) $P(3\pi)$ y $P(15\pi)$ *b*) $P(\frac{3\pi}{4})$ y $P(\frac{23\pi}{4})$ *c*) $P(\frac{-5\pi}{4})$ y $P(\frac{3\pi}{4})$ *d*) $P(-\frac{\pi}{2})$ y $P(\frac{\pi}{2})$

3. Sabiendo que $\operatorname{sen}(15°) = 0.24$ y $\cos(25°) = 0.91$, calcule:

   a) $\operatorname{sen}(25°) =$
   b) $\cos(15°) =$
   c) $\operatorname{sen}(105°) =$
   d) $\cos(40°) =$
   e) $\operatorname{sen}(10°) =$
   f) $\cos(50°) =$

4. Determine el área del rectángulo $ABCD$ si se sabe que el lado $\overline{DC}$ mide 8 cm y que la diagonal $\overline{DB}$ y el lado $\overline{AB}$ forman un ángulo cuya amplitud es de 30°, como muestra la Figura 2. ¿Cuánto miden las diagonales de este rectángulo?

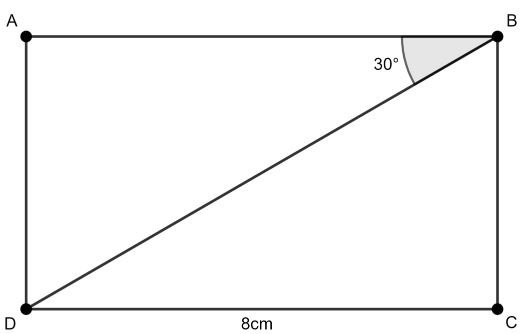


Figura 2: Rectángulo del ejercicio 4

5. Determine el perímetro de un triángulo equilátero si se sabe que sus alturas miden 7 cm.

   AYUDA: recuerde la medida de los ángulos de un triángulo equilátero, y la relación entre sus lados.

6. Marcela quiere determinar la altura de un árbol. Desde el punto donde se encuentra inicialmente, observa la punta del árbol con un ángulo de 30°. Luego camina 4 metros hacia el árbol y observa la punta con un ángulo de 45°. Suponiendo que sus ojos están a 1.5m de altura, ¿cuánto mide el árbol? La Figura 3 ilustra la situación.

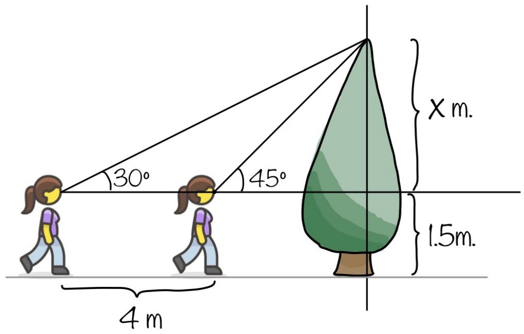


Figura 3: Esquema del ejercicio 6

7. En la Figura 4 se representa un funicular que conecta un punto A a nivel del suelo con la cima C de la montaña. La longitud del cable del funicular (distancia entre A y C) mide 1000m, y el cable forma un ángulo de 30° con el suelo. El ángulo entre el suelo y la montaña en el punto B (la base de la montaña) es de 120°. Calcule:

   a) La distancia D entre los puntos A y B.

   b) La altura H de la montaña.

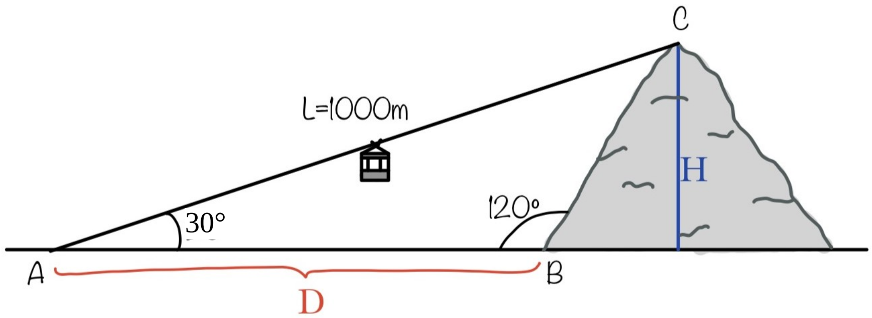


Figura 4: Esquema del ejercicio 7

8. Una antena de 10m se encuentra ubicada entre dos puntos, formando un ángulo de 60° con el primero y un ángulo de 30° con el segundo, como muestra la Figura 5. Calcule la distancia c entre los dos puntos.

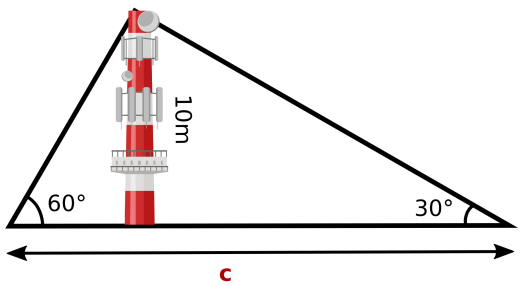


Figura 5: Esquema del ejercicio 8

Propiedades de los números reales y de sus operaciones

Generalización usando expresiones algebraicas

En el Capítulo 2.1 hemos visto las diferentes propiedades de los números y de sus operaciones mediante ejemplos particulares. Ahora que sabemos expresar algebraicamente enunciados, podemos generalizar todas esas propiedades para todos los números reales. Estas propiedades serán útiles en lo que sigue para poder justificar nuestros razonamientos cuando queramos despejar incógnitas en las ecuaciones algebraicas que veremos en las siguientes secciones.

Propiedades

Las siguientes expresiones son válidas para cualquier valor de a, b y c:

(P1) **Propiedad conmutativa**

- De la suma: $a + b = b + a$
- Del producto: $a \cdot b = b \cdot a$

(P2) **Propiedad asociativa**

- De la suma: $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$
- Del producto: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(P3) **Propiedad distributiva del producto/cociente respecto de la suma/resta**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \frac{1}{a} \cdot (b + c) = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

(P4) **Existencia del elemento neutro**

- De la suma, el cero es su elemento neutro: $a + 0 = a$
- Del producto, el uno es su elemento neutro: $a \cdot 1 = a$

(P5) **Existencia del opuesto**: el opuesto de un número a se denota como $(-a)$ y cumple que la suma de un número con su opuesto da como resultado el elemento neutro de la suma:

$$a + (-a) = 0$$

(P6) **Existencia del inverso (multiplicativo)**: el inverso de un número se denota como $\frac{1}{a}$ o como a^{-1} y cumple que el producto de un número por su inverso da como resultado el elemento neutro del producto.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

(*Muchas veces al usar esta propiedad decimos que "simplificamos" y lo denotamos así:* $\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$)

(P7) **Otras propiedades del 0**

- Multiplicación por cero: cualquier número multiplicado por cero da como resultado cero:

$$a \cdot 0 = 0$$

- Potencia con exponente cero: cualquier número elevado a cero da como resultado 1.

$$a^0 = 1$$

(P8) **Potencias con exponente fraccionario** (si n es par, sólo está definida en los números reales cuando la base "a" es positiva)

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

(P9) **Potencias negativas**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(P10) **Propiedad distributiva de la potencia/radicación con respecto al producto/cociente** (en los números reales, la radicación con exponente par está definida sólo cuando el argumento es positivo)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad\qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

(P11) **Producto de potencias de igual base**: el resultado es una potencia con la misma base y el exponente es la suma de los exponentes

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

(P12) **Potencia de potencia**: el resultado es una potencia con la misma base y el exponente es el producto de los exponentes (atención particular a los casos con m o n fraccionarios y base negativa)

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

(P13) **Diferencia de cuadrados**: la diferencia (o resta) entre dos números al cuadrado es igual al producto entre la suma de las bases por la resta de las bases:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

(P14) **Cuadrado de un binomio**: La potencia NO es distributiva con respecto de la suma. En particular, el cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma del cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Despejando incógnitas

Ecuaciones

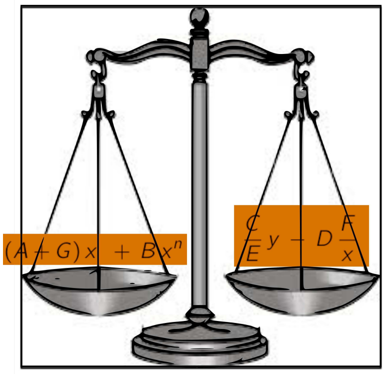
Hemos visto que **una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que involucra una o más incógnitas**. El significado del signo igual (=) es sumamente importante. Estamos diciendo literalmente que lo que está de un lado del igual es exactamente lo mismo que lo que está del otro lado del signo igual. Y por esa razón es muy importante que en el desarrollo de nuestros ejercicios tengamos muy en cuenta en qué lugar escribimos un signo =, ¡no es un simple conector entre operaciones sueltas! Tenemos que tener la certeza de que lo que está a la izquierda del signo igual es exactamente lo mismo que lo que está a su derecha.

Pongamos algunos nombres a las partes que vemos en una ecuación usando un ejemplo:

$$\overbrace{\underbrace{(A+G)\,x}_{termino} + \underbrace{B\,x^n}_{termino}}^{miembro\,izquierdo} = \overbrace{\underbrace{\frac{C}{E}\,y}_{termino} - \underbrace{D\,\frac{F}{x}}_{termino}}^{miembro\,derecho}$$

A cada lado de una ecuación le llamamos *miembro*. En cada expresión algebraica, las sumas y las restas (que no están entre paréntesis) son las que nos permiten distinguir entre los diferentes *términos*.

A una ecuación la podemos pensar como una balanza de platillos en equilibrio. Lo que está en uno de los brazos de la balanza es igual que lo que está en el otro brazo.



Despejar una incógnita (o resolver una ecuación)

Cuando hablamos de *resolver una ecuación* es lo mismo que decir que vamos a *despejar una incógnita*. Esto es, queremos lograr que de un lado del signo igual aparezca la incógnita sola, sin estar acompañada por ningún coeficiente ni por ninguna operación con otros coeficientes. Por ejemplo, dada la siguiente ecuación:

$$(8x^3)^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{2}x = 5x - \frac{7}{2}$$

Podemos resolver para encontrar que $x = 7$ y decimos que hemos despejado la incógnita. Y de hecho, podemos reemplazar este valor de x en la ecuación original y ver que la igualdad es cierta para ese número (esto se llama *verificar*).

Pero ¿qué pasos hicimos para despejar esa incógnita? ¿cómo hicimos para que aparezca sola de un lado de la igualdad?

Para despejar una incógnita debemos aplicar la **propiedad uniforme** que nos dice que podemos:

- sumar un **término nuevo** en cada **miembro** de la ecuación

- multiplicar por un **factor** distinto de cero a cada **miembro** de la ecuación
- elevar a una **potencia** cada **miembro** de la ecuación

y la igualdad se mantiene. Básicamente, nos asegura que si hacemos lo mismo de los dos lados, la balanza seguirá equilibrada.

En principio parecería que aplicar sólo y ciegamente la propiedad uniforme no nos ayudará a despejar la incógnita. Veamos un ejemplo:

$$3x + 2 = 6$$

Según la propiedad uniforme, si yo multiplico ambos miembros por 42 se mantiene la igualdad.

$$42 \cdot (3x + 2) = 42 \cdot 6$$

Pero esto no me ayudó en nada a lograr que la incógnita quede sola en uno de los miembros de la ecuación! Lo que tendremos que hacer es además aplicar las propiedades de los números y de sus operaciones que aprendimos en el capítulo 2.2 (ver anexo 1)

En el ejemplo anterior, en el miembro izquierdo podríamos aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (P3), y en el miembro derecho resolver la multiplicación de dos números:

$$42 \cdot 3 \cdot x + 42 \cdot 2 = 252$$

Que es lo mismo que

$$126x + 84 = 252$$

Aún así, no hemos podido despejar la incógnita! Sin embargo, lo que hemos encontrado es una **ecuación equivalente** a la original. Esta ecuación equivalente tiene la misma solución que la ecuación original. Es decir, cada vez que aplicamos la propiedad uniforme (y luego las propiedades de los números) construimos una ecuación equivalente.

Para despejar una incógnita lo que deberemos hacer es aplicar la propiedad uniforme tantas veces como haga falta de manera de ir construyendo ecuaciones equivalentes hasta llegar a una en la que la incógnita aparezca sola en el numerador de uno de sus miembros. Por lo tanto, la aplicación de la propiedad uniforme NO es a ciegas (¡como multiplicar por 42 como en el ejemplo anterior sólo porque me gustaba ese número[1]!). Deberemos realizar una operación que nos ayude en el camino de despejar la incógnita. Y para saber qué operación realizar no existe una receta única, sino que dependerá del problema y de qué propiedades de los números y de sus operaciones podamos utilizar. Como regla general lo primero que debemos hacer es identificar dónde está la incógnita, qué operaciones la conectan con el resto de los coeficientes que aparecen en la ecuación, y en qué grado la afectan esas operaciones. Recién ahí podemos empezar a pensar qué operación nos conviene realizar.

Volvamos al ejemplo anterior:

$$\underbrace{3x}_{termino} + \underbrace{2}_{termino} = 6$$

Tenemos dos términos en el miembro izquierdo, y la incógnita x está en el primero de esos términos siendo multiplicada por un coeficiente 3. El miembro derecho está formado por un único término que es un coeficiente 6. Lo primero que intentaremos hacer es que el término que contiene a la incógnita quede solo en uno de los miembros de la ecuación, y en un segundo paso nos ocuparemos de que la incógnita quede sola en uno de los miembros.

Dado que el término que NO contiene la incógnita es una suma de un número, lo que haremos es **aplicar la propiedad uniforme** sumando el opuesto de ese número en ambos miembros de la ecuación, para luego aplicar la propiedad de la existencia del opuesto (P5: $a + (-a) = 0$):

[1] De acuerdo con la *Guía del viajero intergaláctico*, el 42 es la respuesta al sentido de la vida, el universo y todo lo demás. Era un buen intento, verdad? ;)

$$3x + \underbrace{2+(-2)}_{P5.existeopuesto \to 0} = 6 \underbrace{+(-}_{R.signos} 2)$$

$$3x + 0 = 6 - 2$$

En el miembro derecho podemos resolver la resta de dos números, mientras que en el miembro izquierdo podemos utilizar la propiedad del elemento neutro de la suma (P4:$a + 0 = a$):

$$3x = 4$$

Hemos llegado a una ecuación equivalente a la original en la que ahora la incógnita sólo está afectada por una multiplicación. Volveremos a **aplicar la propiedad uniforme** multiplicando a ambos miembros por el inverso del número que acompaña a la incógnita para poder aplicar la propiedad de la existencia del inverso multiplicativo (P6: $a\frac{1}{a} = 1$):

$$\underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3}_{P6.inverso \to 1} x = 4 \cdot \frac{1}{3}$$

$$1 \cdot x = \frac{4}{3}$$

Y finalmente, utilizando la propiedad del elemento neutro de la multiplicación (P4: $a.1 = a$), hemos encontrado una ecuación equivalente en la que el miembro izquierdo contiene a la incógnita sola, es decir que hemos resuelto la ecuación o despejado la incógnita:

$$x = \frac{4}{3}$$

.

Reescribamos todos los pasos juntos:

$$\begin{array}{cccccc}
(1) & 3x+2 & = & 6 & \\
(2) & 3x+\underbrace{2+(-2)} & = & 6+(-2) & (P.Unif.) \\
(3) & 3x+0 & = & 6-2 & (\text{Opuesto}) \\
(4) & 3x & = & 4 & (\text{Neutro suma}) \\
(5) & \underbrace{\frac{1}{3}3}\ x & = & 4\frac{1}{3} & (\text{P.Unif.}) \\
(6) & 1x & = & \frac{4}{3} & (\text{Inverso}) \\
(7) & x & = & \frac{4}{3} & (\text{Neutro prod.})
\end{array}$$

Hay algo que nunca hicimos: PASAR MÁGICAMENTE NÚMEROS DE UN LADO O DEL OTRO DE LA ECUACIÓN. ¿No les parece raro? Hemos escuchado muchas veces decir "paso restando", "paso dividiendo", como si llegara Harry Potter con su varita mágica y con su *wingardium leviosa* hiciera saltar los números entre los platillos de la balanza y allá fueran a parar. ¿De dónde vienen esas expresiones?

Revisemos la resolución anterior.

- Si comparamos la ecuación (1) con su ecuación equivalente del renglón (4) vemos que el número 2 ha desaparecido del miembro izquierdo y "fue restado" en el miembro derecho. Es decir que pareciera como que "pasamos restando el 2" desde el miembro izquierdo hacia el miembro derecho. Pero en ese pase mágico en realidad hemos aplicado tres propiedades: la propiedad uniforme, la existencia del opuesto y el elemento neutro de la suma.

- Comparemos ahora la ecuación equivalente que tenemos en el renglón (4) con la del renglón (7): en la (4) el número 3 está multiplicando a la incógnita en el miembro izquierdo, mientras que en la ecuación equivalente (7) el número 3 está dividiendo en el miembro derecho. De nuevo, pareciera que "pasó dividiendo" al otro miembro, pero en realidad hemos aplicado la propiedad uniforme, la existencia del inverso multiplicativo, el producto de fracciones y el elemento neutro del producto.

Puede ser que después de haber resuelto muchísimas ecuaciones empecemos a saltearnos los pasos intermedios. Pero es muy importante entender cuáles son las operaciones matemáticas y las propiedades que estamos aplicando no sólo para saber que no tenemos una varita mágica que hace levitar los números pasando de un miembro al otro de una ecuación, sino que si aplicamos paso a paso todas las propiedades, las probabilidades de que nos equivoquemos en una resolución disminuyen enormemente.

Queda aquí como desafío evaluar qué propiedades se utilizaron en esta resolución y decidir dónde está el error:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} &= 4 \\ \frac{1}{x} &= 4-2 \\ \frac{1}{x} &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Factorización de polinomios

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Cuando hablamos de "simplificar" dos números nos referimos a utilizar la propiedad de la multiplicación de un número por su inverso, cuyo resultado es el elemento neutro del producto: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Una forma en la que veremos expresada esa propiedad es mediante la cancelación de factores multiplicativos o *simplificación*: $\cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} = 1$. Ahora, podemos pensar a "a" como cualquier expresión algebraica. En particular, puede tratarse de un polinomio.

Podremos simplificar una expresión fraccionaria de la siguiente manera[1], obteniendo una expresión equivalente en todos los puntos en los que el polinomio que simplificamos no se anule:

$$\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{(x+1)} = \underbrace{\cancel{(x+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{(x+1)}}}_{(P6) inverso} \cdot (x+2) = \underbrace{1}_{(P4) elem.\, neutro} \cdot (x+2) = x+2$$

Esa igualdad es válida siempre que $x \neq -1$.

A medida que nos familiarizamos con las propiedades de los números y las operaciones (ver anexo 1), es usual que salteemos la escritura de algunos pasos (no quiere decir que no los hagamos, sólo no los escribimos) y veamos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{(x+1)}} = x+2$$

Para simplificar expresiones fraccionarias necesitaremos que los polinomios involucrados en numerador y denominador estén factorizados (es decir, expresados como producto de polinomios). Entonces, a continuación veremos diferentes métodos para factorizar polinomios.

Factorización

Hemos visto que todo polinomio de grado n puede ser expresado de la forma polinómica como suma de monomios:

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c$$

Y de la forma factorizada de la forma:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las n raíces del polinomio (es decir, los valores de x en los que $P(x) = 0$).

Pero no siempre es fácil conocer cuáles son las raíces. Es por eso que utilizaremos diferentes herramientas para factorizar un polinomio, es decir, pasar de una suma de términos a un producto de factores.

1. **Factor Común** (camino contrario a la propiedad distributiva): Tenemos una suma de términos en donde cada término es el producto de factores, y además alguno de esos factores multiplicativos aparece en cada término de la suma:

$$ax + bx = \underbrace{ax + bx}_{identifico\, el\, factor\, multiplicativo\, en\, comun} = (a+b)\cdot x$$

[1] En este apunte utilizaremos los nombres con los que hemos ennumerado las propiedades en el anexo 1 (P1 - P14)

$$ax + ay = ax + ay = a \cdot (x + y)$$

Podemos verificar si hemos sacado el factor común correctamente aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el miembro derecho de la igualdad para obtener la expresión original.

Otra manera de pensarlo: Cuando sacamos el factor multiplicativo, a los términos de la suma por la que quedará multiplicado los podemos determinar dividiendo el término original por el factor que hemos sacado como común (esta forma nos servirá aún cuando no logremos identificar factores multiplicativos comunes)

Ejemplos:

- $2x + 4x^2 = 2x \cdot 1 + 2x \cdot 2x = 2x \cdot (1 + 2x)$
- $7x + 3 = 7 \cdot \left(x + \frac{3}{7}\right)$

2. **Factor Común por Grupos**: similar al caso anterior, pero los factores multiplicativos de las sumas no aparecen en todos los términos sino en al menos algunas parejas:

$$ax + bx + cy + dy \underbrace{=}_{(P2)P.Asoc.} (ax + bx) + (cy + dy) = (a + b)x + (c + d)y$$

Aún no está factorizado, pero hemos pasado de la suma de cuatro términos a la suma de dos términos. Podríamos seguir operando como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

- $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x^3 + 2x^2) - (4x + 8) \underbrace{=}_{FCG} x^2(x + 2) - 4(x + 2) \underbrace{=}_{FC} (x^2 - 4)(x + 2)$

3. **Diferencia de cuadrados**: Partimos de la resta de dos términos en los que cada uno de ellos es el cuadrado de una base, podemos reescribir esa expresión como el producto entre la suma de las bases por la resta de las bases:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Podemos verificar esta igualdad aplicando la propiedad distributiva en el miembro derecho para obtener la expresión original.

Tip: a cualquier número siempre lo podemos pensar como el cuadrado de su raiz: $c = (\sqrt{c})^2$

Ejemplos:

- $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$
- $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)\overbrace{(x + 1)(x - 1)}^{x^2-1}$
- $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

4. **Trinomio cuadrado perfecto** (camino contrario al cuadrado de un binomio): Si tenemos la suma de tres términos en donde dos de ellos son el cuadrado de dos números y el restante es el doble producto entre los dos números involucrados, estaremos frente a un trinomio cuadrado perfecto que lo podemos reescribir como el cuadrado de un binomio (que es el producto repetido):

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Ejemplos:

- $4x^2 + 16 + 16x = (2x)^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2x = (2x + 4)^2$
- $3x^2 + 3 + 6x \underbrace{=}_{FC} 3(x^2 + 1 + 2x) \underbrace{=}_{TCP} 3(x + 1)^2$

5. **Potencias de un binomio (binomio de Newton)**: de manera similar al caso anterior, podemos encontrarnos con una suma de varios monomios que en algunos casos podremos convertir en alguna potencia de un binomio. Si la potencia es 2 tendremos un trinomio cuadrado perfecto, si la potencia es 3 tendremos un cuatrinomio cubo perfecto, etc.

   No es un caso fácil de detectar especialmente para potencias mayores que 3!!!

   Primero veamos cómo se escriben los desarrollos de las potencias 2 y 3 de un binomio:

   - $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \underbrace{=}_{(P3)Distr} a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   - $(a+b)^3 \underbrace{=}_{(P11)Pot=base} (a+b)(a+b)^2 \underbrace{=}_{(P14)Bino^2} (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

     $\underbrace{=}_{(P3)Distr} a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   Podemos ver que los coeficientes que acompañan a los números van cambiando, y también las potencias con las que aparecen las bases. Como es engorroso hacer las cuentas de todas las potencias de un binomio aplicando la propiedad distributiva tantas veces como haga falta, y además no es posible memorizar los coeficientes para todas las potencias que queramos pensar, es posible obtenerlos a partir del llamado *triángulo de Pascal*. Como regla general, a las potencia n−ésima de un binomio la escribiremos de la siguiente forma:

$$(a+b)^n = c_0 a^n b^0 + c_1 a^{n-1} b^1 + c_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + c_{n-1} a^1 b^{n-1} + c_n a^0 b^n$$

   Donde c_i son los coeficientes del triángulo de Pascal, las potencias de a van disminuyendo desde n hasta 0 y las potencias de b van aumentando desde 0 hasta n (recordar que cualquier número elevado a la 0 es 1 (P7)).

   El triángulo de Pascal se construye poniendo 1 en los extremos de cada fila, y los coeficientes del medio se calculan como la suma de los dos coeficientes que tiene justo encima en la línea anterior

TRIÁNGULO DE PASCAL	POTENCIA DE UNA SUMA
1	$(a+b)^0 = \mathbf{1}$
1 1	$(a+b)^1 = \mathbf{1}a + \mathbf{1}b$
1 2 1	$(a+b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3 = \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5$
...	...

   Ejemplo:

   • $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

   Vemos que los extremos son la 5ta potencia de x y de 2, y que las potencias de x aparecen todas desde 5 hasta 0. Ésto nos puede llevar a pensar que estamos frente a la quinta potencia del binomio $(x+2)$, tratemos de construirla con el triángulo de Pascal:

$$(x+2)^5 = 1x^5 2^0 + 5x^4 2^1 + 10x^3 2^2 + 10x^2 2^3 + 5x^1 2^4 + 1x^0 2^5$$

$$= x^5 + 5x^4 2 + 10x^3 4 + 10x^2 8 + 5x16 + 32 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

   Vemos que efectivamente podemos reemplazar la expresión original por $(x+2)^5$

6. **División de polinomios conociendo alguna raíz**: de la división de polinomios sabemos que al dividir un polinomio $P(x)$ con otro polinomio $D(x)$ podremos calcular un cociente $Q(x)$ y un resto $R(x)$ tales que $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$. Además, sabemos que un polinomio de grado n puede ser escrito en la forma factorizada si conocemos sus n raíces de la forma: $P(x) = a(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)$. De esta última expresión podemos ver que si hacemos la división entre $P(x)$ y uno de los factores multiplicativos $D(x) = (x - x_1)$, la división tiene resto 0 y se verifica el teorema del resto[2]. Entonces, podemos escribir $P(x)$ de la siguiente manera:

$$P(x) = \underbrace{a(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots}_{Q(x)}(x - x_1) = Q(x)(x - x_1)$$

Es decir, para escribir el polinomio $P(x)$ de forma factorizada nos alcanza con conocer una de sus raíces para luego efectuar la división de polinomios y calcular el cociente Q(x).

Si no tenemos el dato de cuál es una de las raíces, podemos hacer algunos intentos de "prueba-error" evaluando el polinomio $P(x)$ en algunos valores tentativos hasta encontrar una raíz (en general, del contexto del problema pueden surgir valores tentativos).

Ejemplo:

- Sea $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Se sabe que una de sus raíces es $x = 1$, ya que $P(1) = 0$. Entonces, podemos hacer la división entre $P(x)$ y $D(x) = x - 1$ y obtendremos un cociente $Q(x)$ y un resto $R = 0$:

$$\begin{array}{rl|l}
x^3 - x^2 & -4x + 4 & x - 1 \\ \cline{3-3}
x^3 - x^2 & & x^2 - 4 \\ \cline{1-1}
0 & -4x + 4 & \\
 & -4x + 4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 & \text{resto}
\end{array}$$

Por lo que podremos expresar $P(x)$ de la forma factorizada como:

$$P(x) = (x^2 - 4)(x - 1)$$

[2]Teorema del Resto: si $D(x) = x - a$, entonces el resto de la división entre $P(x)$ y $D(x)$ es $R = P(a)$. Al ser x_1 una raíz se verifica que $P(x_1) = 0$, por lo tanto $R = 0$ cuando $D(x) = x - x_1$

Valor de verdad usando cuantificadores

Cuantificadores

En el capítulo 3.5 hemos visto que además de proposiciones (enunciados a los que podemos asignarles un valor de verdad) también existen las *funciones proposicionales o predicados* que son enunciados a los que no podemos asignarles un valor de verdad ya que dependen de la variable.

Por ejemplo, $p : 7 < 3$ es una proposición que podemos afirmar que es Falsa. Sin embargo, $p(x) : x < 3$ es una función proposicional que será verdadera para algunos valores de x y será falsa para otros valores de x.

Podemos modificar una función proposicional utilizando cuantificadores. Al introducir los cuantificadores lo que logramos es convertir la función proposicional en una proposición, y por lo tanto podremos asignarle un valor de verdad.

Los cuantificadores que hemos visto son:

- Existencial: se denota con $\exists$ y se lee "existe"
- Universal: se denota con $\forall$ y se lee "para todo"

De forma general, nos encontraremos con proposiciones del tipo:

$$\exists\, x \in \mathcal{U} \,/\, p(x)$$

se lee: EXISTE algún x en el conjunto universal TAL QUE ocurre p(x)

$$\forall\, x \in \mathcal{U}\ ,\ p(x)$$

se lee: PARA TODO x en el conjunto universal SE CUMPLE p(x).

Valor de verdad cuando usamos cuantificadores

Retomemos el ejemplo de función proposicional que habíamos mencionado anteriormente: $p(x) : x < 3$. Dijimos que no podemos asignarle una valor de verdad ya que será VERDADERO para algunos valores de x, y FALSO para otros.

Pero si introducimos cuantificadores, podemos construir las siguientes proposiciones

- $\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3$, que se lee: *Existe algún número real x que es menor que 3,*
- $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x < 3$, que see lee: *Todos los números reales cumplen que son menores que 3*

Ahora sí podemos asignarles un valor de verdad!

- En el primer caso nos preguntamos ¿es verdad que existe algún número real menor que 3? Y la respuesta es SÍ. Por ejemplo el número 1 es un número real y es menor que 3, por lo tanto la proposición es VERDADERA.
- En el segundo caso nos preguntamos: ¿es verdad que todos los números reales son menores que 3? Y la respuesta es NO. Por ejemplo el número 7 es un número real y NO cumple que sea menor que 3, por lo tanto la proposición es FALSA.

Justificación del valor de verdad

En el capítulo 3.5 del cuadernillo se menciona lo siguiente:

> *La proposición $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ es verdadera si y sólo si la instancia p(a) es verdadera para todos los $a \in \mathcal{U}$*

Es decir, que si tenemos el cuantificador universal, TODAS Y CADA UNA de las proposiciones p(a) deben ser verdaderas para que sea verdadera la proposición cuantificada. Básicamente el cuantificador universal lo que hace es la CONJUNCIÓN de todas las evaluaciones de p(a). Entonces, decir que $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ es VERDADERO equivalente a decir que $p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \ldots$ es VERDADERO. Sabemos del capítulo anterior que la conjunción será verdadera sólo cuando cada una de las proposiciones individuales sea verdadera.

Por supuesto que si el conjunto $\mathcal{U}$ es infinito, no será posible probar la veracidad para cada elemento individual por separado! Entonces, la manera de probar que una proposición con cuantificador universal es VERDADERA requiere de una demostración formal, utilizando propiedades o definiciones para asegurar que lo que afirmamos es válido para los infinitos números que conforman el conjunto universal.

En cambio, si encontramos un único valor para el que p(a) sea Falso, eso ya hará que toda la conjunción sea falsa. Entonces, para probar que una proposición con cuantificador universal es FALSA alcanza con encontrar un *contra-ejemplo*, es decir, un valor de x que NO satisface la proposición p(x).

> *La proposición $\exists x \in \mathcal{U} \,/\, p(x)$ es verdadera sí y sólo sí la instancia p(a) es verdadera para algún $a \in \mathcal{U}$*

Si tenemos el cuantificador existencial, alcanza con que sólo una de las proposiciones p(a) sea verdadera para que sea verdadera la proposición cuantificada. Básicamente el cuantificador existencial lo que hace es la DISYUNCIÓN de todas las evaluaciones de p(a). Entonces, decir que $\exists x \in \mathcal{U} \,/\, p(x)$ es VERDADERO equivale a decir que $p(a_1) \vee p(a_2) \vee p(a_3) \ldots$ es VERDADERO. Sabemos del capítulo anterior que la disyunción será verdadera cuando al menos una de las proposiciones individuales sea verdadera.

Entonces, para probar que una proposición con cuantificador existencial es VERDADERA alcanza con encontrar un ejemplo, es decir, un valor de x que satisface la proposición p(x). En cambio, si la proposición con cuantificador existencial es FALSA significa que su negación será verdadera, es decir, que todos y cada uno de los valores de x NO cumplen con la proposición p(x). Y en este caso, la prueba de que infinitos valores de x no cumplen algo deberá realizarse utilizando propiedades o definiciones que aseguren que es válido para todo el conjunto universal.

En resumen:

> **¿Cómo justificar el valor de verdad de una proposición con cuantificadores?**
>
> - Cuando un "EXISTE" es verdadero, la justificación es dar un ejemplo con un valor de x que satisface la proposición.
> - Cuando un "PARA TODO" es falso, la justificación es dar un contra-ejemplo, es decir, un valor de x que NO satisface la proposición.
> - Las otras opciones (Existencial Falso / Universal Verdadero) requieren una demostración más formal utilizando propiedades o definiciones

Volviendo a los ejemplos originales:

- $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3$ es VERDADERO. Ejemplo: x=1 es un número real y cumple que es menor que 3.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \, x < 3$ es FALSO. Contra-ejemplo: x=7 es un número real y no cumple que sea menor que 3.

Consejos prácticos:

• Cuando tenemos un cuantificador existencial ($\exists$), el primer intento sería probar su veracidad encontrando un ejemplo. Si es una ecuación, la resolvemos para ver si tiene solución. Si es una inecuación o algún otro enunciado, a veces es aconsejable hacer un ejercicio de *prueba/error* probando con varios números diferentes hasta encontrar el ejemplo. Si después de varios intentos no lo encontramos, podemos empezar a pensar que tal vez la proposición es Falsa y hará falta otro tipo de justificacion.

• Cuando tenemos un cuantificador universal ($\forall$), el primer intento sería probar su falsedad encontrando un contra-ejemplo. Al igual que en el caso anterior, podemos probar diferentes números para ver si podemos encontrarlo. Si no, deberemos sospechar su veracidad y su justificación será algebraica.

Dominio de raíces pares

Dominio

Se define como dominio de una función al conjunto de valores de la variable x en los cuales la función está bien definida.

$$Dom\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, f(x)\}$$

En este curso, los "problemas" típicos que encontraremos que pueden presentar las funciones es que no estén definidas en ciertos valores debido a dos razones:

1. Que se intente dividir por cero
2. Que se intente evaluar un radicando par en un argumento negativo

Y por supuesto, podría presentarse una combinación de ambos.

Dominio de funciones racionales

Para el primero de estos casos ya hemos estado trabajando con ecuaciones fraccionarias en las que analizábamos en qué puntos estaba bien definida (Cap. 2.5) por lo que no nos explayaremos demasiado aquí. En este capítulo, básicamente se tratará de buscar las raíces del polinomio divisor y a esos puntos los excluiremos del dominio.

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, entonces $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) \neq 0\}$

Ejemplo 1: Determinar el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{3x(x^2 - 16)}{x^4 - 17x^2 + 16}$$

Esta función puede tener problemas de definición cuando el denominador se anule. Por esto, buscaremos las raíces del polinomio divisor.

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Haciendo un cambio de variable: $u = x^2$

$$u^2 - 17u + 16 = 0$$

Con la fórmula de Baskhara buscamos las raíces u:

$$u_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2}$$

$$u_1 = 16 \qquad u_2 = 1$$

Si deshacemos el cambio de variable, obtenemos que $x = \pm\sqrt{u}$, y las soluciones para x serán:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{16} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{1}$$

Es decir, que la función $f(x)$ no está definida en todos los puntos en los que se anula su denominador. Por lo tanto los puntos en los que sí está bien definda que constituyen su dominio son:

$$Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -4 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 4\} = \mathbb{R} - \{-4, -1, 1, 4\}$$

Dominio de raíces pares

Para el segundo de los casos mencionados anteriormente, una función definida como la raíz par de algún polinomio tendrá problemas de definición cuando el argumento de la raíz sea un número negativo, ya que en los números reales los radicandos pares sólo están definidos para números positivos o cero.

Sea $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ con n par, entonces $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) \geq 0\}$

Es importante notar que hasta ahora veníamos resolviendo ecuaciones, es decir, igualdades. Para determinar el dominio de una función con radicando par deberemos resolver una desigualdad (también llamada *inecuación*).

Ejemplo 2: Determinar el dominio de $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \underbrace{x+3 \geq 0}_{x \geq -3}\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3\} = [-3, +\infty)$$

Para resolver la desigualdad $x + 3 \geq 0$ aplicamos la propiedad uniforme tal como lo hacemos en las igualdades. Lo único que NO podemos hacer en una desigualdad es multiplicar o dividir por un número negativo (o que sospechamos que sea negativo), ya que en ese caso la desigualdad se invierte. Por ahora, sólo tengamos el cuidado de que cuando aplicamos la propiedad uniforme NO debemos multiplicar ambos miembros por cosas negativas.

Ejemplo 3: Determinar el dominio de $f(x) = \sqrt{(x-1)\cdot(x+2)}$

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x-1)(x+2) \geq 0\}$$

Es necesario resolver la desigualdad para poder expresar correctamente el dominio de la función[1]. ¿Cómo resolveremos esta desigualdad?

Es importante notar que estamos pidiendo que el producto de dos factores multiplicativos tenga resultado positivo o cero:

- De la regla de los signos sabemos que si dos factores multiplicativos tienen el mismo signo, el resultado será positivo: $(+)\cdot(+) = (+)$ ó $(-)\cdot(-) = (+)$
- De las propiedades del cero sabemos que el producto de dos factores es cero cuando uno de los factores es cero: $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$

Combinando esas dos propiedades, podemos plantear todos los posibles casos para los cuales el producto de los dos factores que conforman nuestra función serán positivos o cero:

$$(x-1)(x+2) \geq 0$$

Tendremos dos casos:

(1) cuando ambos factores sean positivos o cero (al mismo tiempo[2]),

o bien[3]

(2) cuando ambos factores sean negativos o cero (al mismo tiempo)

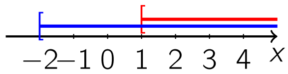
La solución final será la unión de los conjuntos que obtengamos en cada caso por separado.

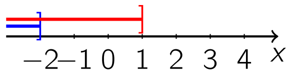
[1]En este caso, en el argumento tenemos una función cuadrática expresada de la forma factorizada (las raíces son 1 y -2), pero bien podría haber estado expresada en la forma polinómica. Utilizando Baskhara podríamos encontrar sus raíces y escribirla de la forma factorizada tal como se muestra en este ejemplo

[2]cuando hablamos de cosas que ocurren AL MISMO TIEMPO estamos refiriéndonos a la conjunción de proposiciones o INTERSECCIÓN de conjuntos

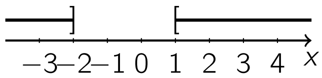
[3]cuando damos DIFERENTES OPCIONES O CASOS estamos refiriéndonos a la disyunción de proposiciones o UNIÓN de conjuntos

$$\begin{array}{ccc} (+)\cdot(+) & \vee & (-)\cdot(-) \\ (x-1\geq 0 \wedge x+2\geq 0) & \vee & (x-1\leq 0 \wedge x+2 \leq 0) \\ (x\geq 1 \wedge x \geq -2) & \vee & (x\leq 1 \wedge x\leq -2) \\ \text{(intersección)} & \vee & \text{(intersección)} \end{array}$$





$$\begin{array}{ccc} [1,+\infty) & \vee & (-\infty,-2] \\ & \text{(unión)} & \end{array}$$



$$\boxed{Dom\, f = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)}$$

Podemos hacer una prueba para entender lo que estamos encontrando. Tomemos $x = 0$ que, de acuerdo con lo que hemos calculado, no pertenece al domino de la función. ¿Qué pasaría si quisiéramos evaluar $f(0)$? Tendríamos que el argumento de la raíz es: $(0-1)\cdot(0+2) = (-1)\cdot 2 = -1$ por lo tanto no podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo para trabajar con funciones en los reales.

En resumen, cuando la función es la raíz par de un polinomio, lo que debemos hacer es escribir el polinomio de la forma factorizada, y luego se trata de buscar las combinaciones de signos de los factores multiplicativos para lograr que el producto sea positivo o cero.

Dominio de función racional y que también tiene algún radicando par

Podemos encontrarnos con funciones que presentan una combinación de los casos anteriormente descriptos.

Ejemplo 4: Determinar el dominio de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^4 - 17x^2 + 16}$$

Esta función podría presentar problemas no sólo cuando se anule su denominador, sino también cuando el argumento del radicando sea negativo. Para evitar que eso ocurra debemos pedir que AL MISMO TIEMPO el denominador sea diferente de cero y que el argumento de la raíz sea positivo o cero.

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x+3 \geq 0) \wedge (x^4 - 17x^2 + 16 \neq 0)\}$$

Es decir, necesitamos buscar la intersección entre los dos conjuntos que ya hemos calculado anteriormente (ejemplos 1 y 2): $[-3, +\infty) \cap (\mathbb{R} - \{-4, -1, 1, 4\}) = [-3, +\infty) - \{-1, 1, 4\}$

Ejemplo 5: Determinar el domino de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}$$

Esta función tendrá problemas cuando se anule el denominador y cuando el argumento de la raíz sea negativo. Para el dominio debemos pedir que no ocurra ninguna de las dos cosas:

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{(x-1)(x+2)} \neq 0 \wedge (x-1)(x+2) \geq 0\}$$

Dado que: $\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$, la primera condición puede ser reemplazada por $(x-1)(x+2) \neq 0$. Pero al mismo tiempo, en la segunda condición le pedimos que sea mayor **o igual** que cero. Para que se cumplan en simultaneo alcanza con pedir que el producto de los factores sea simplemente positivo (si es estrictamente positivo entonces NO es cero)

$$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x-1)(x+2) > 0\}$$

En la resolución del ejemplo 3 no debemos tener en cuenta los puntos en los que se satisface la igualdad con cero (planteamos desigualdades estrictas). Repitiendo el procedimiento, encontraremos que en este caso:

$$Dom\, f = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Funciones Trigonométricas de ángulos notables

Ángulos Notables

Los ángulos notables son aquellos que veremos aparecer frecuentemente en la resolución de problemas y pertenecen al 1er cuadrante. Ellos son:

$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

. Si los expresamos en radianes tenemos:

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Funciones trigonométricas de ángulos notables

En el Capítulo 5.1 del cuadernillo hemos calculado las coordenadas (x,y) de diferentes ángulos utilizando argumentos geométricos (ver tabla 5.10). Entre ellos, las coordenadas de los ángulos notables.

Luego, en el capítulo 5.2 hemos visto que podemos asociar cada una de esas coordenadas con los valores de las funciones trigonométricas coseno y seno de los ángulos que forman el radio con el eje de las absisas: $x = \cos(t)$ y $y = \text{sen}(t)$. Por lo tanto, ya sabemos que podemos calcular las funciones trigonométricas de los ángulos notables a partir de argumentos puramente geométricos. En la siguiente tabla se muestran los valores del seno y coseno de los ángulos notables (ver tabla 5.2 para las otras funciones trigonométricas):

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Conociendo los valores de estos ángulos del primer cuadrante, podemos también apelar a argumentos geométricos para calcular las coordenadas de ángulos relacionados con los notables pero que viven en los otros tres cuadrantes (por ejemplo $2\frac{\pi}{3}$).

Muchas veces necesitaremos saber estos valores para diferentes tipos de problemas, y resulta engorroso hacer todas las veces el análisis geométrico para calcularlos. Entonces, a continuación veremos un par de mnemotecnias para averiguar los valores de las funciones seno y coseno de los ángulos notables del primer cuadrante.

Forma 1: construcción mnemotécnica de la tabla

Lo primero que vamos a notar es que los valores del seno(t) y cos(t) que aparecen en la tabla se repiten pero en diferentes posiciones: si leemos los valores del coseno(t) de derecha a izquierda, encontraremos los mismos valores que los del seno(t) leídos de izquierda a derecha. Entonces, si podemos construír una de las dos líneas, podremos completar la otra línea simplemente escribiendo los valores en sentido contrario.

Aquí vamos a construir con regla mnemotécnica los valores del seno(t) para los ángulos notables:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(t)$					

Los pasos que siguen los mostraremos por separado en este documento, pero en realidad se hacen sobre una única tabla y de manera muy rápida.

Primer paso: Empezaremos ennumerando las casillas del 0 al 4 (cómo hacemos para recordar de empezar desde el 0? aquí sugiero tener la imagen mental de la circunferencia unitaria, ubicamos el ángulo cero y vemos que su coordenada y=sen(0) = 0)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(t)$	0	1	2	3	4

Segundo paso: Tomamos la raíz cuadrada de la ennumeración que acabamos de escribir

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(t)$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

Tercer paso: Dividimos cada cuadrito por 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(t)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Cuarto paso: Ya casi estamos! Sólo nos queda resolver algunas de las operaciones que aparecen allí: $\frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

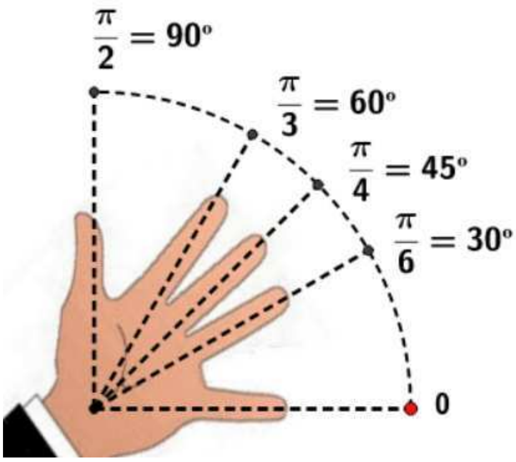
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Quinto paso: Sólo resta agregar la línea del coseno(t) escribiendo los números encontrados pero de atrás para adelante y así obtenemos la tabla completa mostrada anteriormente.

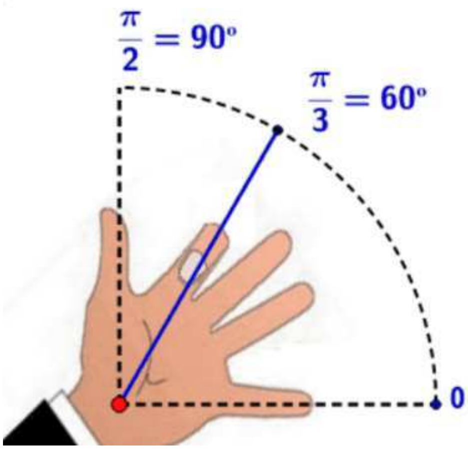
Forma 2: Usando nuestra mano para encontrar un valor particular

Esta forma la pueden consultar de manera interactiva en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/JSb86V4y de donde hemos tomado las imágenes que mostramos más abajo.

En este método debemos notar la similitud que toma nuestra mano izquierda extendida con la posición de los ángulos notables en la circunferencia:



Para referirnos a alguno de estos ángulos notables deberemos doblar el dedo que ocupa la posición similar al ángulo en cuestión. Por ejemplo, si nos referimos al ángulo de 60°, doblaremos el dedo índice:



A continuación utilizaremos las siguiente reglas mnemotécnicas para averiguar el valor de las funciones seno y coseno de estos ángulos:

$$\text{sen}(t) = \frac{\sqrt{\text{numero dedos por abajo}}}{2}$$

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{\text{numero dedos por arriba}}}{2}$$

En donde, "por abajo" o "por arriba" se refiere con respecto al dedo que hemos doblado para marcar el ángulo. En el ejemplo mostrado antes, para un ángulo de 60°, el número de dedos por abajo del dedo doblado es 3, mientras que el número por arriba es 1. Entonces: $sen(60°) = \sqrt{3}/2$ y $cos(60°) = 1/2$ que son las respuestas correctas.

¿Cómo evitar confundir quién lleva "por abajo" y quién "por arriba" en la regla mnemotécnica? una ayuda es siempre recordar que sen(0)=0, por lo que si doblamos el dedo meñique para representar el ángulo 0, nos quedarán 0 dedos por abajo y esa es la respuesta para el seno y así aseguramos estar usando correctamente el "por arriba", "por abajo".

Ecuaciones Trigonométricas

Ecuaciones

En el capítulo 2.2 hemos definido una ecuación como una igualdad entre expresiones algebraicas que involucra una o más incógnitas. En el capítulo 2 hemos trabajado con ecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias.

Una vez que hemos definido las funciones trigonométricas, podemos incorporar las ecuaciones trigonométricas que serán aquellas que involucren una o más funciones trigonométricas. Resolver una ecuación trigonométrica significará encontrar una o más incógnitas (ángulos) que satisfacen la ecuación dada.

Resolución de Ecuaciones trigonométricas

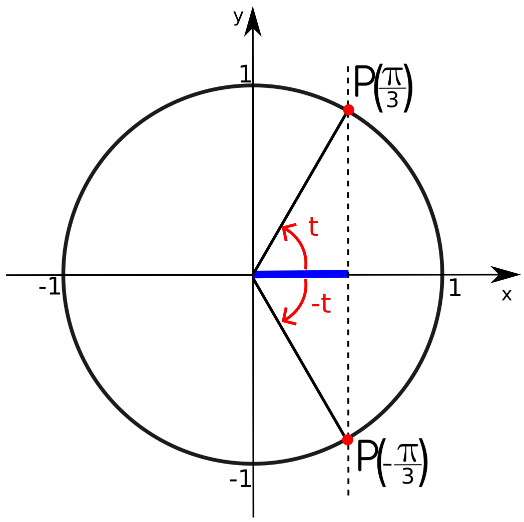
Ejemplo 1: Consideremos la siguiente ecuación:

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

Si miramos la tabla de valores de las funciones trigonométricas en ángulos notables (ver otro anexo AQUÍ), veremos que cuando el ángulo t es igual a $\frac{\pi}{3}$, el valor de su coseno es $\frac{1}{2}$. Es decir que $t = \frac{\pi}{3}$ es solución de esta ecuación.

Ahora: ¿es la única solución posible? La respuesta es no.

Cada vez que trabajemos con ángulos y funciones trigonométricas habrá una cuestión de simetría y una cuestión de periodicidad que entrarán en juego. Ésto podemos verlo en la circunferencia unitaria:



Si marcamos sobre el eje de las abscisas el valor de $x = \cos(t) = \frac{1}{2}$ (es decir, la coordenada x vale $\frac{1}{2}$), podemos ver fácilmente que hay dos ángulos que comparten esa coordenada x: uno está en el primer cuadrante y otro en el cuarto. Entonces hay *por lo menos* dos soluciones:

$$t = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad t = -\frac{\pi}{3}$$

¿Son las únicas? De nuevo la respuesta es no.

Si nos posicionamos sobre la primera solución y damos una vuelta completa en sentido antihorario a la circunferencia (el ángulo será $t + 2\pi$), volveremos a caer en el mismo lugar y, por lo tanto, ese ángulo también será solución. Si en lugar de dar una sola vuelta, damos dos vueltas completas ($t+2\cdot 2\pi$), también estaremos en el punto de partida. Podríamos pensar en dar vueltas en sentido horario, y estaremos en la misma situación. Es decir, si a cada una de las soluciones encontradas anteriormente le sumamos todas las vueltas que queramos dar, tendremos infinitas soluciones de la forma:

$$t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \vee \quad t = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

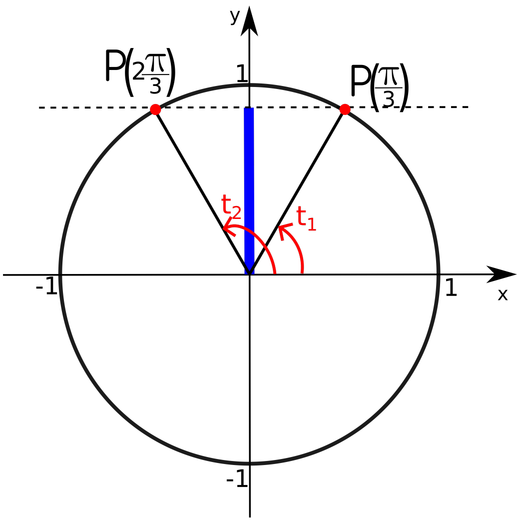
Donde k es un número entero (si es positivo estamos girando antihorario, si es negativo giramos horario, si es cero son los puntos de partida).

En conclusión: al ser las funciones trigonométricas funciones periódicas, siempre encontraremos infinitas soluciones. Además, cada vez que encontremos una solución en un cuadrante deberemos buscar otra solución que tiene alguna simetría con respecto a esa solución y que se ubica en otro cuadrante[1].

Ejemplo 2: Encontrar todas las soluciones de

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De la tabla de valores de las funciones trigonométricas podemos ver que una solución es $t = \dfrac{\pi}{3}$. Ahora buscaremos todas las otras soluciones simétricas y periódicas que podamos encontrar:



El ángulo t_2 que comparte la misma coordenada y, o sea, el mismo valor de sen(t), está ubicado en el segundo cuadrante, y puede verse que es $\pi - t_1$, es decir, $2\frac{\pi}{3}$. Entonces, todas las soluciones posibles de la ecuación son:

$$t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \vee \quad t = 2\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

PARA PENSAR ¿en qué casos no encontramos una segunda familia de soluciones usando la simetría?
Ayuda: pensar en sen(t)=1. ¿Cuáles son las soluciones? ¿son los otros casos similares? ¿Qué tienen en común?

[1] cuando el punto cae sobre los ejes coordenados es posible que no exista esa otra solución simétrica