Vorlesung **Mathematik für Informatiker II** (an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Armand Rousselot, Vasil Manev, Max Bréard*

28. Juni 2019

Aufgabenserie 8
Polynome & Potenzreihen

Aufgabe 8.1: Gleichheit von Polynomen **(5P)**
Es seien p und q zwei Polynome mit

$$p(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \qquad \text{und} \qquad q(x) = \beta_n x^n + \ldots + \beta_1 x + \beta_0,$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_n, \ldots, \beta_0$ beliebige reelle Zahlen sind. Begründen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ p(x) = q(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}: \ \alpha_i = \beta_i.$$

Wie läßt sich dieser Sachverhalt in der Sprache der linearen Algebra ausdrücken?

Aufgabe 8.2: Eindeutigkeit der Näherungspolynome **(5P)**
Es sei $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Punkt a liege mit einer ganzen Umgebung im Definitionsgebiet D_f der Funktion f. Ein Polynom P_n vom Grad n heißt n'tes Näherungspolynom zur Funktion f an der (Entwicklungs)Stelle a, wenn

$$f(x) = P_n(x) + O\big((x-a)^{n+1}\big) \qquad \text{für } x \to a$$

gilt. Zeigen Sie, daß P_n eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe ein zweites n'tes Näherungspolynom Q_n zu f an der Stelle a. Begründen Sie, weshalb dann $P_n = Q_n$ gelten muß.

Aufgabe 8.3: Zusammenhang zwischen Ableitungen und Koeffizienten bei Polynomen **(5P)**
Gegeben sei das Polynom p dritten Grades mit

$$p(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Berechnen Sie $p''(2)$, d.h. die zweite Ableitung von p an der Stelle $x = 2$, ohne das Polynom abzuleiten. Überprüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis durch Ableiten des Polynoms.

Aufgabe 8.4: Monomiale und binomiale Polynombasen **(Bonus 5×3*)**
In dieser Aufgabe geht es darum, die Binomialkoeffizienten von einer linear-algebraischen Seite kennenzulernen. Bekanntlich bildet die Menge der Polynome $\mathcal{P} := \mathbb{R}[X]$ über $\mathbb{R}$ (wie auch über jedem anderen Körper) einen unendlich dimensionalen Vektorraum. Man erhält einen endlich dimensionalen Unterraum $\mathcal{P}_n$ der Dimension $n+1$, wenn man sich nur auf die Polynome vom Grad kleiner gleich n beschränkt. Die einfachste Basis von $\mathcal{P}_n$ ist durch die Monome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ gegeben. Eine weitere Basis ergibt sich, wenn man die Monome (genauer ihre Graphen) um a nach rechts verschiebt; dies liefert dann die binomiale Basis $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$.

a) Mit welchen Koeffizienten läßt sich $(x-a)^k$ (für $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$) als Linearkombination der monomialen Basis darstellen?

b) Wie lauten umgekehrt die Darstellungskoeffizienten des Monoms x^k hinsichtlich der binomialen Basis?

c) Für die $(n+1)$-Tupel $(u_0, u_1, ..., u_n)$ und $(v_0, v_1, ..., v_n)$ gelte

$$v_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} u_i \, .$$

Wie lassen sich dann die $u_0, ..., u_n$ in Abhängigkeit von den $v_0, ..., v_n$ angeben?

d) Begründen Sie die folgende unter dem Namen *Binomialinversion* bekannte Identität:

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{j-k} \binom{i}{j} \cdot \binom{j}{k} = \delta_{ik} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ 1 & \text{falls } i = k \, . \end{cases}$$

e) Wie lautet die Inverse der 5×5-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,...,5\}}$ mit $a_{ij} := \binom{i}{j}$?

Aufgabe 8.5: Differenzenquotienten für höhere Ableitungen (2+5+3=10P)

a) Zeigen Sie, daß für eine dreifach differenzierbare Funktion $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \xrightarrow{h \to 0} f''(x).$$

Hinweis: Benutzen Sie das Taylorpolynom mit dem Lagrangeschen Restglied.

b) Finden Sie Koeffizienten $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so daß für eine fünfmal differenzierbare Funktion $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{\alpha_2 f(x+2h) + \alpha_1 f(x+h) + \alpha_0 f(x) + \alpha_{-1} f(x-h) + \alpha_{-2} f(x-2h)}{h^4} \xrightarrow{h \to 0} f^{(4)}(x).$$

Dabei steht $f^{(4)}(x)$ für die vierte Ableitung von f im Punkt x. **Hinweis:** Am sinnvollsten (und mathematisch einwandfrei) ist es, auch hier das Taylorpolynom zu verwenden. Natürlich können Sie außerdem auch eine heuristische Herangehenweise versuchen mittels verschachtelter Differenzenquotienten und einer Kopplung der Grenzwerte.

c) Verifizieren Sie ihren Differenzenquotienten vierter Ordnung, indem Sie ihn auf ein Polynom vierten (oder höheren) Grades anwenden. Was sollte sich dann ergeben?

Aufgabe 8.6: Zur Logarithmusreihe (3+3+3+3+8+5=25P)

a) Stellen Sie einen (formalen) Zusammenhang her zwischen der *geometrischen Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ und der *Logarithmusreihe* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Mit anderen Worten: Wie kann man auf die Logarithmusreihe kommen, wenn man den Grenzwert der geometrischen Reihe im Fall $|x| < 1$ kennt.
Hinweis: Wie lautet die Ableitung des Logarithmus?

b) Versuchen Sie zu begründen, warum die Logarithmusreihe analog zur geometrischen Reihe für reelle Zahlen mit $|x| < 1$ konvergiert und für reelle Zahlen mit $|x| > 1$ divergiert.

c) Bestimmen Sie sämtliche Ableitungen der Funktion $x \mapsto \log(1+x)$ für $x = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zu den Koeffizienten der Logarithmusreihe?

d) Geben Sie die Reihenentwicklungen für die Funktionen $x \mapsto \log(1-x)$ und $x \mapsto \log \frac{1}{1-x}$ an.

e) Zeigen Sie unter Verwendung der Reihendarstellung von $\log \frac{1}{1-x}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{(1-x)^2}{2x^2} \log \frac{1}{1-x}$$

für alle rellen Zahlen x mit $|x| < 1$.

f) Offensichtlich verschwindet die obige Reihe für $x = 0$. Rechnen Sie nach, daß dies auch für die rechte Seite zutrifft.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 05.07.2019, 17:00 Uhr.

Zur weiteren Diskussion in den Übungsgruppen

Aufgabe 8.7: Potenzreihen

a) Bestimmen Sie die *Konvergenzradien* der folgenden Potenzreihen:

$$\text{i)}\ \sum_{i=0}^{\infty}(4i^6 - 12i^4)x^i \qquad \text{ii)}\ \sum_{j=1}^{\infty} H_j x^j \qquad \text{iii)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(2 + (-1)^k \cdot 5\right)^{-k} x^k\ .$$

b) (Bonus) Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ konvergiert die folgende **Lambert'sche Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$? Geben Sie außerdem eine Darstellung dieser Reihe als Potenzreihe an. Wie lauten die ersten 5 Koeffizienten explizit, wie berechnet sich der n'te Koeffizient? Welchem Umstand ist es zu verdanken, daß sich die Lambert'sche Reihe "gefahrlos" in eine Potenzreihe verwandeln läßt?

Anmerkung: Die Koeffizienten bilden eine Folge, die uns bereits auf dem ersten Aufgabenblatt begegnet ist.

Aufgabe 8.8: Anverwandte Konvergenzkriterien des Vergleichskriteriums

Da man bei der geometrischen Reihe sehr leicht die Konvergenzfrage entscheiden kann, wird sie gern als Vergleichsreihe, d.h. als Majorante bzw. Minorante, im Sinne des Vergleichskriteriums[1] eingesetzt. Auf diese Weise lassen sich das **Quotientenkriterium** und **Wurzelkriterium** herleiten. Welches dieser beiden Kriterien in der Praxis anzuwenden ist, hängt wesentlich von der speziellen Gestalt der Reihenglieder ab. Im allgemeinen mag die Bedingung des Quotientenkriteriums leichter nachzuprüfen sein. Die Ungleichungskette (1) zeigt jedoch, daß das Quotientenkriterium versagt, sobald anhand des Wurzelkriteriums ebenfalls keine Entscheidung getroffen werden kann (warum?). Insofern ist das Wuzelkriterium genauer; in vielen interessanten Fällen ist man allerdings von beiden Kriterien im Stich gelassen.

- Das **Quotientenkriterium** besagt, daß die Reihe $\left(\sum_k a_k\right)$

  (A) absolut konvergiert, falls für *fast alle* $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqq q < 1$ mit einem $q \in (0,1)$ besteht. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ ist.

  (B) divergiert, falls für *fast alle* $k \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geqq 1$. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ ist.

- Das **Wurzelkriterium** besagt, daß die Reihe $\left(\sum_k a_k\right)$

  (C) absolut konvergiert, falls für *fast alle* $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\sqrt[k]{|a_k|} \leqq q < 1$ mit einem $q \in (0,1)$ besteht. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ ist.

[1] Je nachdem, ob man die Vergleichsreihe als konvergierende Majorante verwendet, um Konvergenz zu zeigen oder als divergierende Minorante zum Nachweis der Divergenz benutzt, spricht man auch vom Majoranten- bzw. Minorantenkriterium.

(D) divergiert, falls für *unendlich viele* $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \geqq 1$. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ ist.

Zum Quotientenkriterium kennt man noch eine Verfeinerung, welche unter dem Namen Konvergenzkriterium von RAABE bekannt ist.

a) Machen Sie sich die beiden Kriterien zumindest plausibel. Erläutern Sie, inwiefern die Aussagen (A) und (B) bzw. (C) und (D) nicht jeweils vollständig komplementär[2] zueinander sind. Charakterisieren Sie die Fälle, in denen das Quotientenkriterium bzw. das Wurzelkriterium versagt. Beleuchten Sie schließlich den Unterschied zwischen (B) und (D) [im Kontrast zu (A) und (B)]. Warum steht bei (B) *für alle*, während es bei (D) *für unendlich viele* heißt?

b) Mit Hilfes des Quotienten- oder Wurzelkriteriums ist bei den folgenden Reihen die Konvergenzfrage soweit möglich zu entscheiden, d.h. es ist anzugeben, ob die folgenden Reihen (absolut) konvergieren, divergieren oder ob sich keine Aussage treffen läßt.

$$\text{i)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^k}\binom{3k}{k} \qquad \text{ii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad \text{iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \text{iv)} \sum_{k=0}^{\infty} 2k(k+3)^2\frac{3^k}{5^k} \qquad \text{v)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \qquad \text{vi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Bei vi) mag man Aufgabe 8.4 a) beachten.

c) (Bonus) Zeigen Sie, daß für eine Folge (a_n) positiver Zahlen folgende Ungleichungskette gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{1}$$

Tip: $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N$. Aufgabe 7.5 a) könnte hilfreich sein.

d) (Bonus) Folgern Sie daraus: Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: a \in \mathbb{R}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. Entsprechend impliziert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$.

[2] D.h. es gilt nicht, daß stets (entweder) (A) oder (B) wahr ist bzw. (C) oder (D).