Information Scientists Do Mathematics.

Vorlesung **Mathematik für Informatiker I** 07. Dezember 2018
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Adrian Danisch, Armand Rousselot, Denise Becker, Vasil Manev, Christian Moses*

Aufgabenserie 6

Kardinalität - Relationen - Zahlen

Aufgabe 6.1: Charakterisierung der Injektivität (Bonus zur Wiederholung) (2×5=10P*)

Zeigen Sie, daß für eine Funktion $f : X \to Y$ jede der beiden folgenden Bedingungen zur Injektivität von f äquivalent ist.

a) $\forall A_1, A_2 \subset X : \; f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

b) $\forall A_1, A_2 \subset X : \; f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$

Aufgabe 6.2: Abzählung aller Zahlenpaare aus $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (6+8+3+3=20P)

In dieser Aufgabe geht es darum, einen expliziten Ausdruck herzuleiten für eine Abzählfunktion (Paarungsfunktion) der Menge aller Zahlenpaare bestehend aus zwei nichtnegativen ganzen Zahlen. Im Unterschied zur Vorlesung soll dabei eine etwas andere Vorgehensweise benutzt werden, die schneller zum Ziel führt. Auch die Zählung soll (zur Abwechselung) ein wenig modifiziert werden:

Numerieren Sie die Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten im rechten oberen Quadranten eines ebenen kartesischen Koordinatensystems in der folgenden Weise: $(0,0) \mapsto 0$, $(0,1) \mapsto 1$, $(1,0) \mapsto 2$ dann $(0,2) \mapsto 3$, $(1,1) \mapsto 4$, $(2,0) \mapsto 5$ usw.. Die Numerierung erfolgt also so, daß die Gitterpunkte auf einer Senkrechten zur Diagonalen von links oben (beginnend auf der y-Achse) nach rechts unten (endend auf der x-Achse) abgelaufen werden. Sobald man dabei unten (auf der x-Achse) angekommen ist, springt man auf die y-Achse zurück und zwar einen Gitterpunkt höher als beim letzten Mal, um die Gitterpunkte der benachbarten Senkrechten zur Diagonalen abzulaufen. Dadurch ergibt sich eine bijektive Funktion von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Gesucht ist zunächst ein konkreter Rechenausdruck (Funktionsterm), mit dem die Nummer des Gitterpunktes (m, n) berechnet werden kann.

a) Es sei $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die oben beschriebene Abzählfunktion. Welcher Wert ergibt sich für $f(0, k)$? Wie hängt $f(j, k-j)$ mit $f(0, k)$ zusammen? Wie ergibt sich daraus ein expliziter Ausdruck für den Abzählindex $\nu := f(m, n)$? **Hinweis:** Die Summe der ersten k natürlichen Zahlen bezeichnet man als k'te *Dreieckszahl* $\Delta(k)$ (warum?). Dafür haben wir in einer der ersten Vorlesungsstunden eine Summenformel kennengelernt.

b) Bestimmen Sie die inverse Abbildung zu der Abzählfunkton f. Konkret sind also zwei Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ anzugeben mit der Eigenschaft

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \; \nu := f(m, n) \quad \Rightarrow \quad m = g_1(\nu) \; \wedge \; n = g_2(\nu) \, .$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst zu gegebenem ν die größte Dreieckszahl, welche kleiner gleich ν ist.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus a) und b) anhand des Gitterpunktes mit dem Zählindex $\nu = 12345$.

d) Kann man die *(unvollständige) Primzahlzerlegung* natürlicher Zahlen auch für die Abzählung von $\mathbb{N}_0^n$ d.h. für die Menge aller n-Tupel über $\mathbb{N}_0$ nutzen? **Hinweis:** $n = 2^p \cdot (2q-1)$ oder $n = 2^p \cdot 3^q \cdot (2r-1)$ mit $3 \nmid (2r-1)$.

Aufgabe 6.3: Endliche Teilmengen natürlicher Zahlen **(5P)**

Allgemein gilt, daß die Kardinalität einer Menge M nicht mit der Kardinalität ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{S \subset M\}$ übereinstimmen kann. Die Situation sieht jedoch ganz anders aus, wenn man sich nur auf die Menge der endlichen Teilmengen $\mathcal{E}(M) = \{S \subset M : |S| < \infty\}$ beschränkt. Während für die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als Menge beliebiger Teilmengen natürlicher Zahlen $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ gilt, stellt sich die Menge $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ der *endlichen* Teilmengen natürlicher Zahlen als gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen heraus, d.h. es gilt $|\mathbb{N}| = |\mathcal{E}(\mathbb{N})|$. Beweisen Sie diese Aussage, indem Sie eine konkrete Bijektion von $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ nach $\mathbb{N}$ angeben. Begründen Sie, daß die von Ihnen angegebene Abbildung tatsächlich bijektiv ist.

Hinweis: Binärdarstellung.

Aufgabe 6.4: Promi-Element gesucht! **(5P)**

Es sei X eine Menge und $B \subset X \times X$ eine reflexive aber nicht symmetrische Relation auf X. Für $x, y \in X$ sagt man, x kennt y, wenn $(x, y) \in B$ gilt. Ein Element $p \in X$ heißt *prominent*, wenn $(x, p) \in B$ für alle $x \in X$ aber $(p, x) \notin B$ für alle $x \in X \setminus \{p\}$, d.h. p ist allen bekannt, kennt aber niemanden außer sich selbt.

Wie kann man mit möglichst wenig Fragen ein prominentes Element ausfindig manchen, sofern mindestens eines vorhanden ist? Dabei sollen nur Fragen nach der Bekanntschaft zweier konkret benannter Elemente zulässig sein. Man kann also nur fragen, ob x y kennt, aber nicht wieviele oder welche Elemente x kennt. Insgesamt sind also $n(n-1)$ sinnvolle verschiedene Fragen möglich. Zeigen Sie, daß man jedoch schon mit $3(n-1)$ Fragen auskommen kann.

Aufgabe 6.5: Weitere Eigenschaften ganzer Zahlen **($4{\times}5{+}5^*{=}20{+}5^*$P)**

Identifizieren Sie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$, wobei $\sim$ für die in der Vorlesung besprochene Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ steht. Zeigen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie sie auf Eigenschaften der natürlichen Zahlen zurückführen.

a) Die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ ist *nullteilerfrei*. Gilt also $m \cdot n = 0$ für $m, n \in \mathbb{Z}$, so folgt $m = 0$ oder $n = 0$.

b) In $\mathbb{Z}$ sind allein 1 und -1 multiplikativ invertierbar. Dabei heißt $m \in \mathbb{Z}$ multiplikativ invertierbar, wenn $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $m \cdot n = 1$.

c) Die in der Vorlesung definierte Ordnungsrelation ist wohldefiniert, da unabhängig von den gewählten Klassenvertretern. Zeigen Sie ferner, daß die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

d) Es bezeichne $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ die *Betragsfunktion* definiert durch

$$\mathbb{Z} \ni m \mapsto |m| := \begin{cases} -m & \text{falls } m < 0 \\ m & \text{falls } m \geqq 0 \end{cases} .$$

Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt dann die sogenannte Dreiecksungleichung

$$|m + n| \leqq |m| + |n| .$$

Beweisen Sie dies. **Anmerkung:** Es mag leichter sein, wenn man die Betragsfunktion zunächst als eine Funktion ansieht, die von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ abbildet (d.h. die Wertemenge entspricht der Definitionsmenge).

e) (Bonus) Zeigen Sie außerdem, daß sich die Betragsfunktion *multiplikativ* verhält, d.h. es gilt für alle $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$|m| \cdot |n| = |m \cdot n| .$$

Ergänzungsaufgaben

Nur zum Lesen und Nachdenken gedacht. Die letzte Aufgabe faßt auch noch einmal einen Teil der Vorlesung zusammen.

Aufgabe 6.6: Zur Diskussion: Aus *injektiv* mach' *bijektiv*!
Es sei X eine Menge und $T \subset X$ eine Teilmenge derart, daß eine injektive Abbildung $f : X \to T$ existiert. Zeigen Sie, daß dann auch eine bijektive Abbildung von $g : X \to T$ möglich ist.

Anmerkung: Es ist also anzunehmen, daß f nicht surjektiv ist, ansonsten bleibt nichts zu tun. Wenn f nicht surjektiv ist, dann ist $A_0 := T \setminus f(X) \neq \emptyset$. Also gibt es Elemente in T, die nicht im Bild von f sind bzw. nicht von f "getroffen" werden. Um f surjektiv zu machen, könnte man f so zu einer Abbildung f_1 modifizieren, daß f_1 auf A_0 der Identität entspricht. Es besteht jedoch das Problem, daß die Elemente in A_0 durch f eigentlich auf weitere Elemete von T abgebildet werden, nämlich auf die Menge $A_1 := f(A_0) = f\big(T \setminus f(X)\big)$, die dann aber nicht mehr im Bild von f_1 liegt. Also modifiziert man f_1 zu f_2 wobei zusätzlich f_2 auf A_1 der Identität entsprechen soll. Dadurch werden aber die Elemente aus $A_2 := f(A_1)$ nicht mehr von f_2 getroffen, so daß wir zu einer nächsten Abbildung f_3 übergehen müssen usw.. Insgesamt ergibt sich durch Iteration die Funktionenfolge

$$f_0 := f,\ A_0 = T \setminus f(X) \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \ f_n(x) := \begin{cases} f_{n-1}(x) & \text{falls } x \in X \setminus A_{n-1} \\ x & \text{falls } x \in A_{n-1} \end{cases} \qquad \text{und } \ A_n := f(A_{n-1})$$

welche schließlich auf die Abbildung

$$g(x) \equiv f_\infty(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in X \setminus \bigcup_{k\geq 0} A_k \\ x & \text{falls } x \in \bigcup_{k \geq 0} A_k \end{cases}$$

als möglichen Kandidaten für die gesuchte Funktion $g : X \to T$ führt. Es bleibt nachzuweisen, ob g wirklich die verlangte Eigenschaft erfüllt, X bijektiv auf T abzubilden. In analoger Weise kann man auch so vorgehen, daß man sich die gesuchte Funktion als Identität vorstellt, die dann aber so schrittweise zu modifizieren ist, daß sämtliche $x \in X \setminus T$ nach T abgebildet werden.

Aufgabe 6.7: Zahlen als Äquivalenzklassen
So vertraut man seit frühesten Schultagen im Umgang mit den natürlichen Zahlen ist, zu denen sich später noch die ganzen und die rationalen Zahlen hinzugesellen, so schwer ist die Frage zu beantworten, was Zahlen eigentlich sind. Dies liegt vor allem daran, daß Zahlen etwas Abstraktes darstellen. Sie ergeben sich aus einem Abstraktionsprozeß, der von konkreten Objekten eine bestimmte gemeinsame Eigenschaft loslöst (lat. *abstrahere*) und diese als etwas Eigenständiges betrachtet. Der Begriff der Äquivalenzrelation ist dazu geeignet, diesen Abstraktionsprozeß zu formalisieren. Tatsächlich entpuppen sich die vertrauten Zahlen als Äquivalenzklassen aufeinander aufbauender Äquivalenzrelationen. Dies soll in der folgenden Aufgabe nachvollzogen werden. Übrigens fügen sich auch noch die reellen Zahlen in dieses Schema ein. Eine Definition über eine geeignete Äquivalenzrelation bleibt aber der Analysis vorbehalten.

a) Erläutern Sie, weshalb durch den Begriff der Mächtigkeit (Kardinalität) eine Äquivalenzrelation auf der "Menge aller endlichen Mengen" erzeugt wird. Kennen Sie die Namen der daraus resultierenden Äquivalenzklassen?

b) Zeigen Sie, daß durch
$$(a, r) \sim (b, s) \quad :\Leftrightarrow \quad a + s = b + r$$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gegeben ist. Die Äquivalenzklasse, die zu (a, r) gehört, wird im folgenden mit $\overline{(a, r)}$ bezeichnet, d.h.
$$\overline{(a, r)} := \big\{(c, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\big|\, (c, t) \sim (a, r)\big\}\,.$$
(a, r) ist wie jedes andere Element ein Repräsentant seiner Äquivalenzklasse $\overline{(a, r)}$.

c) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ dieser Äquivalenzklassen durch
$$\overline{(a, r)} + \overline{(b, s)} \ := \ \overline{(a + b, r + s)} \qquad \text{und} \qquad \overline{(a, r)} \cdot \overline{(b, s)} \ := \ \overline{(ab + rs, as + rb)}$$

mit zwei **wohldefinierten** inneren Verknüpfungen ausgestattet wird.

Hinweis: Äquivalenzklassen sind als Ganzes immer nur über einzelne Repräsentanten greifbar. Auch wenn dies etwas unhandlich erscheinen mag, weil sich die Elemente einer Quotientenmenge schlecht direkt hinschreiben lassen, so ist damit der Vorteil verbunden, daß sich dadurch vorhandene Strukturen der Ausgangsmenge (wie z.B. gewisse Rechenoperationen) einfach auf die Quotientenmenge übertragen lassen. Dabei muß man jedoch aufpassen, daß sich die Übertragung unabhängig von einem willkürlich gewählten, austauschbaren Repräsentanten erweist, der nur für die Definition der übertragenen Struktur herangezogen wird. Nur wenn dies gewährleistet ist, kann man von einer sinnvollen (da eindeutigen) Übertragung sprechen.

d) Zeigen Sie folgende Aussagen: $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim,+)$ ist eine *kommutative Gruppe*. $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim,\cdot)$ ist dagegen nur eine *kommutative Halbgruppe* mit *neutralem Element* auch *Monoid* genannt. Insbesondere gelten für die Addition und Multiplikation das Kommutativ- und Assoziativgesetz. Die beiden inneren Verknüpfungen sind miteinander im Sinne eines Distributivgesetzes verträglich.

e) Versuchen Sie nun die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auf die (Teilmenge der) natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zuruückzuführen, indem Sie einen Zusammenhang zwischen $\mathbb{Z}$ und der Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$ herstellen.

Anmerkung: Jede ganze Zahl läßt sich als Differenz natürlicher Zahlen schreiben, z.B.: $-3 = 3-6 = 5-8 = \ldots$ oder $7 = 8-1 = 13-6 = \ldots.$ Somit läßt sich eine ganze Zahlen im Prinzp als geordnetes Pärchen natürlicher Zahlen verstehen. Jede ganze Zahl kann jedoch durch unendliche viele Pärchen dargestellt werden, umgekehrt läßt sich aber jedem Pärchen genau eine ganze Zahl zuordnen. Diese Beobachtung führt zu der Erkenntnis, daß die ganzen Zahlen wohl als Äquivalenzklassen in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ aufzufassen sind. Doch wie ist die erzeugende Äquivalenzrelation genau zu formulieren? Im Falle der negativen ganzen Zahlen ist die Differenz (wie z.B. $3-6 = 5-8$ für -3) nicht in $\mathbb{N}$ erklärt, da der *Minuend* größer ist als der *Subtrahend*. Glücklicherweise läßt sich dieses Problem leicht aus der Welt schaffen. Wie?

f) Wer jetzt noch nicht genug hat, kann auf eine ähnliche Weise die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ konstruieren. Dazu betrachtet man auf $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ die Äquivalenzrelation

$$(a,b)\tilde{(}u,v) \quad :\Leftrightarrow \quad av = ub.$$

g) Eine andersartige Möglichkeit, die Menge der natürlichen Zahlen um die nicht-positiven ganzen Zahlen zu erweitern, liefert folgende Vorgehensweise: Da $(\mathbb{N},+)$ nur eine kommutative Halbgruppe ist, kann man sich fragen, was zu ergänzen ist, um eine kommutative Gruppe zu erhalten. Nun fordert man zunächst die Existenz eines neutralen Elements, 0 genannt, mit der definierenden Eigenschaft: $\forall n\in\mathbb{N}:\ n+0 := n \ \wedge\ 0+n := n$, so daß die Kommutativität gewahrt bleibt. Tatsächlich bleibt mit diesen Setzungen auch das Assoziativgesetz bestehen. Als nächstes verlangt man die Existenz eines additiv inversen Elements zur 1, welches -1 genannt sei. Dieses ist dann durch die Forderung $1+(-1) = (-1)+1 = 0$ definiert. Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes verlangt dann $\forall n\in\mathbb{N}:\ n>1 \ \Rightarrow\ n+(-1) = (-1)+n = n-1$. (Warum?) Nun hat man zwei Fortsetzungsmöglichkeiten: Entweder man führt auf einen Schlag sämtliche additiv inversen Elemente ein, oder man betrachtet zunächst einmal die Produkte $0\cdot n = n\cdot 0$ und $(-1)\cdot n = n\cdot(-1)$. Die Forderung, daß neben dem Kommutativgesetz auch das Assoziativ- und Distributivgesetz ihre Gültigkeit behalten, gibt dann alle weiteren vorzunehmenden Verknüpfungsdefinitionen vor wie etwa $(-1)\cdot(-1) = 1$ oder $(-1)\cdot n = -n$ oder $0\cdot n = 0$.

Ihre Aufgabe besteht nun darin, dies im Detail durchzuführen.

Anmerkung: Bei dieser Vorgehensweise werden die "neuen" Zahlen einfach aus dem Hut gezaubert und nicht auf bestehende Objekte zurückgeführt. Das mag Zweifel an der Existenz nähren, die eigentlich allein dadurch begründet ist, daß sich durch die neuen Zahlen keine Widersprüche ergeben.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 14.12.2018, 14:00 Uhr.