



Aufgabenserie 3

Stirling Zahlen zweiter Art

Potenzsummen & Interpolation

Aufgabe 3.1: Würfeln mit (un)unterscheidbaren Würfeln

(1+1+6=8P)

Diese Aufgabe knüpft an Aufgabe 2.4 d) an. Dort war danach gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß man nach dreimaligem Würfeln die Augensumme 10 erhält.

- Macht es Ihrer Meinung nach einen Unterschied, ob man mit einem Würfel dreimal hintereinander würfelt oder mit drei Würfeln gleichzeitig? Wie ist der *Ergebnisraum*¹ entsprechender Zufallsexperimente mathematisch zu beschreiben?
- Angenommen es gäbe drei **un**unterscheidbare Würfel. Wie ist der Ergebnisraum für das gleichzeitige Werfen der Würfel dann mathematisch zu beschreiben.
- Wie wahrscheinlich ist es, beim Werfen dreier **un**unterscheidbarer Würfel die Augensumme 10 zu erhalten. Ist diese Wahrscheinlichkeit größer oder kleiner im Vergleich zu dem analogen Experiment mit drei unterscheidbaren Würfeln?

Aufgabe 3.2: Zu den Stirling-Zahlen 2. Art (Mengenzerlegungskoeff.) (4+4+4+4×3*=12P)

- Begründen Sie, warum die Mengenzerlegungskoeffizienten $(S(n, k))_{n, k}$ der Rekursionsgleichung

$$S(n+1, k+1) = S(n, k+1) + (k+1) \cdot S(n, k) \quad (1)$$

genügen.

- Die Mengenzerlegungskoeffizienten besitzen unter anderem die Darstellung

$$S(n, k) = \sum_{\substack{0 \leq e_1, \dots, e_k \\ e_1 + \dots + e_k = n-k}} 1^{e_1} \cdot 2^{e_2} \cdot \dots \cdot k^{e_k} \quad (2)$$

Rechnen Sie diese durch Einsetzen in die Rekursionsgleichung (4) nach.

- Bestimmen Sie die Anzahl der Summanden auf der rechten Seite von (2).
- (Zur Diskussion) Gelingt es Ihnen, eine kombinatorische Interpretation für die obige Gleichung zu finden?

Zur Herleitung von (2) betrachtet man zu dem festen zweiten Index $k \in \mathbb{N}$ die Potenzreihen, welche sich ergeben, wenn man $S(n, k)$ mit x^n multipliziert und dann über n summiert. Es sei also

$$F_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) x^n \equiv \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) x^n \quad (3)$$

die sogenannte *erzeugende Funktion* der Folge $(S(n, k))_n$ der Stirling-Zahlen, welche sich ergibt, wenn man den ersten Index laufen läßt, während der zweite festgehalten wird.

¹Auch Ergebnismenge, Stichprobenraum oder Ω -Menge (Omegamenge) genannt.

- e) Zeigen Sie, daß zwischen den Potenzreihen $F_k(x)$ und $F_{k-1}(x)$ die Beziehung

$$F_k(x) = \frac{x}{1-kx} \cdot F_{k-1}(x) \quad (4)$$

bestehen muß, indem Sie die Rekursionsgleichung der Stirling-Zahlen ins Spiel bringen.

- f) Folgern Sie daraus

$$F_k(x) = \frac{x^k}{(1-x) \cdot (1-2x) \cdot \dots \cdot (1-kx)}. \quad (5)$$

Beachten Sie, daß $F_0(x) = 1$ und $F_1(x) = \frac{1}{1-x}$ ist.

- g) Gewinnen Sie zu guter letzt aus der expliziten Darstellung (4) der erzeugenden Funktion die Darstellung der Stirling-Zahlen in (5).

Aufgabe 3.3: Mengenpartitionen & Stirling-Zahlen zweiter Art

(3+3+8*=6P)

- a) Geben Sie alle 3-Partitionen der Menge $\mathcal{A}_5 := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, d.h. alle Elemente von $\mathfrak{P}(\mathcal{A}_5, 3)$. Berechnen Sie anschließend mit der Drei-Term-Rekursionsformel die Stirling-Zahl (zweiter Art) $S(5, 3)$, um zu überprüfen, ob Sie bei Ihrer Auflistung auf die richtige Anzahl von Partitionen gekommen sind.

- b) Bestätigen Sie die Gleichung

$$S(6, 2) = \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \frac{1}{2} \binom{6}{3}$$

und versuchen Sie, eine Erklärung dafür zu finden.

- c) Für die natürlichen Zahlen r, r_1, \dots, r_q und n, n_1, \dots, n_q gelte

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_q \quad \text{und} \quad n = r_1 \cdot n_1 + r_2 \cdot n_2 + \dots + r_q \cdot n_q.$$

Wieviele r -Zerlegungen existieren dann, durch welche eine n -Menge in r_1 -viele n_1 -Blöcke, r_2 -viele n_2 -Blöcke, ... und r_q -viele n_q -Blöcke zerlegt wird? (r_i = Anzahl der n_i -Blöcke in der r -Zerlegung)

Aufgabe 3.4: Polynom-Interpolation

(4+4+4+6*=12P)

Gesucht ist ein Polynom p vierten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, für welches gilt:

$$p(-1) = 7, \quad p(1) = 5, \quad p(3) = 59, \quad p(4) = 137.$$

- a) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms durch Invertieren der Vandermonde-Matrix.
- b) Geben Sie p in der *Lagrangeschen* Darstellung an. Multiplizieren Sie die Lagrangeschen Interpolationspolynome aus, um p in der Standarddarstellung zu erhalten.
- c) Geben Sie p auch in der *Newtonschen* Darstellung an. Multiplizieren Sie die Produkte der Linearfaktoren ebenfalls aus, um p in die Standarddarstellung zu überführen.
- d) (Bonus) Wie lassen sich die Interpolationsverfahren vom Standpunkt der linearen Algebra einordnen? Versuchen Sie die Transformationsmatrizen anzugeben.

Aufgabe 3.5: Summe der ersten n fünften Potenzen

(4+4+4+6*=12P)

Berechnen Sie die Summe $S_5(n) = \sum_{k=1}^n k^5$ auf verschiedene Weisen:

- a) mit Hilfe der Rekursionsformel,

- b) mit Hilfe der Darstellungsformel,
- c) mittels Interpolation.

(Bonus) Illustrieren Sie anhand eines einfachen Beispiels ($p < 5$), daß es bei der Bestimmung eines Interpolationspolynoms für Potenzsummen nicht auf die Wahl der Stützstellen ankommt.

Zusatzaufgabe

Aufgabe 3.6: Partitionszahlen

Es bezeichne $p(n, r)$ die r -Partitionszahl von n , welche der Anzahl an Möglichkeiten entspricht, die natürliche Zahl n als Summe von r natürlichen Zahlen additiv zu zerlegen, wobei die Reihenfolge der Summanden unerheblich sein soll.

- a) Zeigen Sie, daß für die Zahlen $p(n, r)$ folgende **Rekursionsgleichungen** gelten:

$$\text{i) } p(n, r) = p(n - r, r) + p(n - 1, r - 1) \quad (\text{Dreiterm-Rekursionsgleichung}),$$

$$\text{ii) } p(n, r) = \sum_{\ell=1}^r p(n - r, \ell) \quad (\text{kumulative Rekursionsgleichung}).$$

- b) Es sei $p_n := \sum_{r=1}^n p(n, r)$. Begründen Sie die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

Die rechte Seite stellt die *erzeugende Funktion* der Folge der Partitionszahlen $(p_n)_n$ dar.

Bemerkung: Der Wikipedia-Artikel zum Stichwort “Partitionierungsproblem” könnte für Sie ganz anregend sein. Schreiben Sie außerdem bei Gelegenheit ein Programm, daß $P(n, r)$ bestimmt, indem es alle r -Zerlegungen der Zahl n auflistet und die Anzahl dieser Zerlegungen abzählt. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für $P(n, r)$, indem Sie dieses auch mit der Dreiterm-Rekursionsformel berechnen.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 17.05.2019, 17:00 Uhr.