Vorlesung **Mathematik für Informatiker I** 21. Dezember 2018
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Adrian Danisch, Armand Rousselot, Denise Becker, Vasil Manev, Christian Moses*

Information Scientists Do Mathematics.

Aufgabenserie 8
Komplexe Zahlen & Algebraische Strukturen

Sämtliche Aufgaben zum Thema *Algebraische Strukturen* sind Bonusaufgaben. Die meisten davon haben einen nahen Bezug zur Vorlesung und dienen zur Anregung einer Diskussion innerhalb und außerhalb der Übungsgruppen.

Aufgabe 8.1: Rechnen mit komplexen Zahlen (5+5=10P)

Ist $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, dann läßt sich z in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ schreiben mit $x, y \in \mathbb{R}$. Man bezeichnet x als den *Realteil* von z und y als den *Imaginärteil* von z und schreibt

$$\mathrm{Re}(z) := x \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(z) := y.$$

Ferner führt man den Betrag $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ein und die zu z komplex konjugierte Zahl $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$.

a) Üben Sie das Rechnen mit komplexen Zahlen! Wie lauten besipielsweise Real- und Imaginärteil von

$$\frac{1}{3 - 4\mathrm{i}}, \qquad \frac{2 + 3\mathrm{i}}{7 - \mathrm{i}}, \qquad (6 - 9\mathrm{i})(2 + 5\mathrm{i}) \quad ?$$

b) Zeigen Sie, daß für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \qquad |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \,.$$

Der komplexe Betrag verhält sich damit *multiplikativ* nicht jedoch *additiv*. Im Falle einer Summe gilt die *Dreiecksungleichung* $|z + w| \leqq |z| + |w|$. Von Ausnahmen abgesehen wirkt daher das Vertauschen von Summen- und Betrgasbildung "vergrößernd".

c) (5P Bonus) Weisen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen nach und klären Sie, unter welcher Voraussetzung Gleichheit gilt.

Aufgabe 8.2: Lösbarkeit linearer 2×2 Systeme und komplexe Invertierbarkeit (20P)

Motivation: Die Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme ist von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik und ermöglicht zahllose Anwendungen in vielen anderen Wissenschaften. Daher wollen wir uns hier zunächst mit dem einfachsten Vertreter eines linearen Gleichungssystems befassen und insbesondere auch Zusammenhänge und Unterschiede zu den komplexen Zahlen herausarbeiten. Die Aufgabe dient darüberhinaus als Vorbereitung auf weitere Konzepte aus der linearen Algebra.

a) (6P) Lösen Sie das allgemeine lineare 2×2 Gleichungssystem[1]

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (\ast)$$

[1] Die Bezeichnung "2×2" weist darauf hin, daß das Gleichungssystem zwei Gleichungen umfaßt, in denen insgesamt zwei Unbekannte vorkommen. Schreibtechnisch besteht das Gleichungssystem aus zwei Zeilen sowie zwei durch das Plus-Zeichen getrennte Spalten, welche pro Zeile ein Produkt aus einem gegebenem Koeffizienten mit einer Unbekannten enthalten. Dabei ist jeder der beiden Spalten genau eine Unbekannte zugeordnet, die ausschließlich dort erscheint. In einer dritten Spalte hinter den Gleichheitszeichen stehen die Komponenten der sogenannten *rechten Seite*, welche als bekannt betrachtet werden und keine Unbekannten enthalten. Die genaue Bedeutung der Bezeichnung *linear* wird demnächst geklärt werden. Praktisch heißt dies, daß die Unbekannten "ganz einfach" in die Gleichung eingehen und nicht etwa mit ihrem Quadrat oder einer höheren Potenz oder sonst wie als Argument einer von der Identität verschiedenen Funktion.

formal nach den Unbekannten x_1 und x_2 auf unter der Annahme, daß sämtliche Koeffizienten und Unbekannten Elemente eines Körpers sind (z.B. aus $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}_p$ mit p prim). Es darf also auch dividiert werden. Zum Auflösen sollen die folgenden Methoden angewendet und miteinander verglichen werden:

i) *Gleichsetzungsverfahren*, dabei werden beide Gleichungen zunächst nach der derselben Variablen aufgelöst und anschließend gleichgesetzt. Die so entstandene dritte Gleichung wird schließlich nach der verbleibenden Unbekannten aufgelöst.

ii) *Einsetzungsverfahren*, dabei wird eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst und anschließend in die andere Gleichung eingesetzt, so daß dadurch eine Gleichung mit einer Unbekannten entsteht.

iii) Vorgehensweise wie in der Vorlesung (in Anlehnung an das *Gauß-Verfahren*): Beide Gleichung werden mit einem geeigneten Faktor multipliziert, so daß durch Subtraktion der beiden Gleichungen eine Gleichung mit nur noch einer Unbekannten entsteht.

Liefern alle Lösungsmethoden dasselbe Ergebnis? Welche Methode sagt Ihnen am meisten zu?

b) (2P) Geben Sie eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend für die Existenz einer *eindeutigen* Lösung ist. Unter welchen Umständen existiert keine oder aber keine eindeutige (d.h. mehr als eine) Lösung?

c) (3P) Betrachten Sie nun die folgende Gleichung

$$(a_1 + \mathrm{i}a_2) \cdot (x_1 + \mathrm{i}x_2) = b_1 + \mathrm{i}b_2 \qquad (**)$$

mit den gegebenen komplexen Zahlen $a = a_1+\mathrm{i}a_2, b = b_1+\mathrm{i}b_2 \in \mathbb{C}$ sowie der Unbekannten $x = x_1+\mathrm{i}x_2 \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie diese Gleichuung als ein lineares 2×2 System mit ausschließlich reellen Zahlen und geben Sie unter Verwendung von Teil a) dessen Lösung an. Unter welchen Umständen ist die Auflösungsbedingung aus Teil b) nicht erfüllt? Schreiben Sie die Lösung in der für komplexe Zahlen üblichen Standarddarstellung (reellwertiger Realteil + i mal reellwertiger Imaginärteil).

d) (3P) Welche Besonderheit ist dem Gleichungssystem aus Teil c) gegenüber dem allgemeinen System in Teil a) eigen? Besonderheiten wie das Auftreten gewisser Symmetrien (z.B. die Gleichheit von Koeffizienten, die im allgemeinen auch verschieden sein könnten) wirken sich meist angenehm vereinfachend auf die Ermittelung der Lösung aus. Dies läßt sich auch hier ausnutzen. So läßt sich die Lösung von $(**)$ direkt in der Form

$$x_1 + \mathrm{i}x_2 = \frac{b_1 + \mathrm{i}b_2}{a_1 + \mathrm{i}a_2}$$

als Quotient schreiben. Das Unschöne an dieser bruchartigen Lösungsdarstellung ist jedoch, daß sie nicht der Standarddarstellung komplexer Zahlen entspricht, der man sofort den Real- und Imaginärteil entnehmen kann. Wie läßt sich der Bruch schnell in die Standarddarstellung überführen?

e) (3P) Welcher äußerst einfache Zusammenhang besteht zwischen den Lösungen der speziellen Gleichung $a \cdot x = 1$ und der allgemeineren Gleichung $a \cdot x = b$, wobei a und b reelle oder komplexe Zahlen sein mögen?

Wie läßt sich die Inverse einer komplexen Zahl $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ mit Hife ihrer konjugierten $\overline{a} := a_1 - \mathrm{i}a_2$ und ihrem Betrag $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ darstellen?

f) (3P) Wie lauten die Lösungen von $(*)$ aus Teil a) für die speziellen rechten Seiten $(b_1, b_2) = (1, 0)$ und $(b_1, b_2) = (0, 1)$? Läßt sich daraus die Lösung für eine beliebige rechte Seite einfach zusammensetzen?

Aufgabe 8.3: Wurzeln und quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$ **(4+8+8=20P)**

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den reellen und komplexen Zahlen besteht darin, daß jedes nicht konstante

Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ mit beliebigen komplexwertigen Koeffizienten $a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ eine *Nullstelle* in $\mathbb{C}$ besitzt[2]. Zu dem Polynom p mit dem *Grad* $\deg p = n$ gibt es also eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $p(\zeta) = 0$, so daß das Polynom durch Einsetzen von ζ annulliert wird. Diese Eigenschaft von $\mathbb{C}$ bezeichnet man auch als *algebraische Abgeschlossenheit.* Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist, hat insbesondere jedes nicht konstante Polynom mit rein reellwertigen Koeffizienten eine Nullstelle. Wohlgemerkt muß sich diese aber keineswegs auf der reellen Achse befinden sondern kann irgendwo in der komplexen Zahlenebene liegen. Bestes Beispiel dafür ist das Polynom $q(z) = z^2 + 1$ mit den Nullstellen $\pm\mathrm{i}$, denn es ist $\mathrm{i}^2 = -1$. Diese Gleichung kann man im Prinzip als Definitionsgleichung für die *imaginäre Einheit* i ansehen. Von dieser Perspektive betrachtet ist die Aussage des *Fundamentalsatzes der Algebra* – nämlich die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}$ – besonders erstaunlich: Man definiert einfach die Lösung einer recht speziellen in $\mathbb{R}$ unlösbaren Gleichung als eine neue "imaginäre" d.h. eingebildete Zahl und erhält auf einen Schlag die (prinzipielle) Lösbarkeit sämtlicher polynomialer Gleichungen, wobei es keine Rolle spielt ob die Koeeffizienten reell- oder komplexwertig sind. Lösbarkeit meint hier jedoch lediglich, daß eine Lösung existiert; wie sich diese exakt oder näherungsweise bestimmen läßt, ist eine ganz andere Geschichte. Quadratische Gleichungen gehören zu den glücklichen Ausnahmen, bei denen generell eine exakte Nullstellenberechnung möglich ist. Im Hauptteil dieser Aufgabe geht es darum, eine Formel (ggf. mit Fallunterscheidungen) zur Nullstellenberechnung anzugeben. Nebenbei ist damit auch konstruktiv gezeigt, daß jedes quadratische Polynom (und nicht nur $z^2 + 1$) in $\mathbb{C}$ zwei Nullstellen[3] besitzt, seien die Polynomkoeffizienten aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Diese im Vergleich zum Hauptsatz viel schwächere Aussage ist aber eigentlich auch schon recht verwunderlich. Wie segensreich und kraftvoll sich doch die Einführung der etwas seltsamen, imaginären Einheit i bereits hier herausstellt!

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = \pm\mathrm{i}$ und markieren Sie deren Position in der komplexen Zahlenebene. Wieviele komplexe Zahlen gibt es jeweils mit der Eigenschaft $z^2 = 1$ bzw. $z^4 = 1$ bzw. $z^8 = 1$?

b) Leiten Sie eine Lösungsformel her für die allgemeine normierte quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit komplexwertigen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Es ist sinnvoll, zunächst den Sonderfall $p = 0$ zu betrachten. Checken Sie, ob Ihre Formel universell ist oder einschränkenden Bedingungen unterliegt. Ggf. sind mehrere leicht von einander abweichende Formeln für unterschiedliche Fälle anzugeben.

c) Lösen Sie die Gleichung

$$z^2 \ + \ (2\mathrm{i} - 11)z \ + \ 43 - 23\mathrm{i} \ = \ 0\,.$$

und machen Sie anschließend die Probe durch Einsetzen.

Bonusaufgaben

Die folgenden Bonusaufgaben sind unbepunktet. Ihr Tutor wird Sie aber sicher nicht leer ausgehen lassen, wenn Sie dazu eine sinnvolle Bearbeitung einreichen.

Aufgabe 8.4: Seltsam!

Bekanntlich ist $\mathrm{i}^2 = -1$ also $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Daraus folgt nun

$$-1 \ = \ \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \ = \ \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \ = \ \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \ = \ \sqrt{1} \ = \ 1\,.$$

Was sagen Sie dazu? Wo liegt eventuell der Fehler?

[2] Diese Aussage wird als *Fundamentalsatz der Algebra* bezeichnet. Per Abspaltung eines Linearfaktors ergibt sich dann als Korollar, daß die Nullstellenanzahl eines jeden Polynoms über $\mathbb{C}$ seinem Grad entspricht, wobei mehrfache Nullstellen entsprechend mehrfach zu zählen sind.

[3] Auch in $\mathbb{C}$ kann es vorkommen, daß ein quadratisches Polynom tatsächlich nur eine Nullstelle hat, die dann aber als doppelte Nullstelle auftritt und dementsprechend zweifach zu zählen ist.

Aufgabe 8.5: Was ist eine algebraische Struktur?

Algebraische Strukturen ergeben sich ebenfalls durch einen Abstraktionsprozeß. Dieser kann prinzipiell mit demjenigen Denkvorgang verglichen werden, der es Ihnen auch ermöglicht, in einer konkreten Mengen eine vergleichsweise abstrakte Zahl zu erblicken. Der Unterschied zwischen Zahlen und Strukturen besteht vor allem in der Art und Komplexität der Ausgangsobjekte, die abstrahiert werden.

Schauen Sie sich nun einmal die folgenden drei Mengen samt der jeweils angegebenen binären Rechenoperationen an:

$$\text{i) } \mathfrak{P}\big(\{1,2,3\}\big),\ \cup,\ \cap \qquad \text{ii) } \{0,1\}^3,\ \vee,\ \wedge \qquad \text{iii) } \big\{n \in \mathbb{N} :\ n|30\big\}, \text{kgV},\ \text{ggT} \quad .$$

Gelingt es Ihnen, Entsprechungen zwischen diesen drei an sich so unterschiedlichen Mengen mit ihren ganz eigentümlichen Verknüpfungen festzustellen? Falls ja, dann erblicken Sie gerade eine (abstrakte) *Boolesche Algebra* der Ordnung 8. Ordnung 8 deshalb, weil die jeder Realsisierung (Instanz) zugrunde liegende Menge genau 8 Elemente umfaßt.

Schildern Sie kurz die Parallelen bzw. wechselseitigen Identifikationsmöglichkeiten, die Ihnen beim Betrachten der drei Beispiele auffallen.

Anmerkung: Nicht jede Struktur läßt sich jeder Menge aufprägen. Im Falle der Booleschen Algebra erzwingt die Struktur, daß die Kardinalität einer endlichen Grundmenge stets durch eine Zweierpotenz gegeben sein muß. Darüberhinaus gilt, daß jede endliche Boolesche Algebra im Prinzip als Potenzmenge einer endlichen Menge zusammen mit der Vereinigungs- und Schnittoperation realisiert werden kann, d.h. es gibt abstrakt gesehen zu jeder zulässigen Ordnungszahl nur eine einzige[4] Boolesche Algebra. Die Potenzmenge einer beliebigen unendlichen Menge trägt ebenfalls die Struktur einer Booleschen Alegbra von unendlicher Ordnung. Frage: Kann es eine Boolesche Algebra geben, deren Grundmenge abzählbar unendliche Kardinalität (d.h. die Kardinalität von $\mathbb{N}$) hat?

Aufgabe 8.6: Der Struktur auf der Spur

a) Es sei $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge einer nicht leeren Menge M. Begründen Sie kurz, warum i) weder $\big(\mathfrak{P}(M), \cap\big)$ noch ii) $\big(\mathfrak{P}(M), \cup\big)$ noch iii) $\big(\mathfrak{P}(M), \setminus\big)$ eine *Gruppe* sein kann.

b) Zeigen Sie, daß dagegen $\big(\mathfrak{P}(M), \triangle\big)$ eine Gruppestruktur aufweist. Durch welche Besonderheit zeichnet sich diese Gruppe aus?

Aufgabe 8.7: Zwei auf einer Menge ergibt so manche Zwänge.

Betrachten Sie eine Menge R mit zwei inneren Verknüpfungen $+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$. Es werde angenommen, daß $(R, +)$ eine Gruppe ist und $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element (Einselement). Zeigen Sie, daß die Verträglichkeitsbedingung (für die beiden Verknüpfungen) im Sinne der beiden Distributivgesetze

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \text{und} \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

die Kommutativität der additiven Verknüpfung + erzwingt.

Aufgabe 8.8: Wiederholungsfragen: Körper & Ringe – zwei unterschiedliche Dinge

a) Was für eine algebraische Struktur bildet der $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation?

b) Welcher gravierende strukturelle Unterschied besteht zu dem Ring der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?

[4] In dieser Hinsicht legen *Gruppen* ein ganz anderes Verhalten an den Tag, da einerseits beliebige natürliche Zahlen als Gruppenordnung möglich sind, andererseits gewisse Ordnungszahlen auch abstrakt gesehen ganz unterschiedliche Gruppenrealisierungen zulassen.

c) Kann es trotzdem Sinn machen, den $\mathbb{R}^2$ oder allgemeiner den $\mathbb{R}^n$ mit der komponentenweisen Multiplikation neben der üblichen Addition auszustatten? Geben Sie dafür sinnvolle einfache Anwendungsbeispiele.

d) **(Körper und Ringe "emanzipatorisch" betrachtet)** Ein Emanzipationskämpfer oder doch besser eine Emanzipationskämpferin mit mathematischer Allgemeinbildung würde einen Körper vielleicht mit folgenden Worten charakterisieren:

> Ein Körper ist ein Ring, in dem die beiden miteinander verträglichen Verknüpfungen *gleichberechtigt* nebeneinander stehen, denn beide verleihen der Trägermenge jeweils eine Gruppenstruktur. Hingegen genügt es für einen Ring, wenn die eine der beiden Verknüpfungen die Trägermenge lediglich zu einer Halbgruppe erhebt.

Schauen Sie einmal ganz pingelig hin, inwieweit die Körperaxiome tatsächlich symmetrisch hinsichtlich der beiden Verknüpfungen sind. Sollten Sie eine Asymmetrie im Wortlaut der Axiome feststellen, könnte es vielleicht dem Hang der Mathematiker geschuldet sein, Axiome möglichst minimalistisch zu formulieren. Daher wäre zu überprüfen, ob in den Axiomen eine innewohnende vollkommene Symmetrie schlummert, die nur nicht direkt zum Ausdruck gebracht wird – denken Sie an die schwachen Gruppenaxiome, die man (je nach Vorliebe) "linksseitig" oder "rechtsseitig" formulieren kann. Tatsächlich muß man aber angebliche Linksgruppen nicht von Rechtsgruppen unterscheiden, weil sich beide stets als beides erweisen. Sollten Sie allerdings zu dem Schluß gelangen, daß in einem Körper doch keine vollkommene Symmetrie alias Gleichberechtigung zwischen den beiden Verknüpfungen herrscht, so müssen Sie darauf gefaßt sein, daß die Emanzipationskämpfer von Ihnen auch eine absolut symmetrische algebraische Struktur fordern. Wie könnte eine solche Struktur aussehen? Sie müßten sie eigentlich schon kennen.

Aufgabe 8.9: Symmetriegruppe des Siebenecks

Stellen Sie alle Elemente der Symmetriegruppe eines Siebenecks graphisch dar (analog zur Vorlesung) und zeigen Sie, daß die Gruppe durch zwei Elemente *erzeugt* wird. Welche *Untergruppen* lassen sich finden und wodurch zeichnen sich diese aus?

Aufgabe 8.10: Strukturerhaltende Abbildungen und isomorphe Strukturen

Es seien $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, falls $f(g_1 \circ_G g_2) = f(g_1) \circ_H f(g_2)$ gilt für alle $g_1, g_2 \in G$.

a) Es sei e_G das neutrale Element von G und e_H das neutrale Element von H. Man zeige $f(e_G) = e_H$ und $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ für alle $g \in G$.

Ist f zudem *bijektiv*, so spricht man von einem *Gruppenisomorphismus*. Besteht ein solcher zwischen zwei Gruppen G und H, so nennt man diese *isomorph*[5] und schreibt dafür $G \simeq H$.

b) Zeigen Sie jeweils durch konkrete Angabe eines Isomorphismus', daß

$$\mathbb{Z}_8^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Z}_{16}^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

gilt. Dabei bezeichnet $\mathbb{Z}_n^\times$ die multiplikative Gruppe der primen Restklassen in $\mathbb{Z}_n$, während mit $\mathbb{Z}_n$ die additive Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$ gemeint ist. Sind zwei Gruppen $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ gegeben, so versteht man unter ihrem *direkten Produkt* die Gruppe mit der Grundmenge $G \times H$ versehen mit der komponentenweisen Verknüpfung $(g_1, h_1) \circ_{G\times H} (g_2, h_2) := (g_1 \circ_G g_2, h_1 \circ_H h_2)$.

c) Sind auch die die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_7^\times$ und die additive Gruppe $\mathbb{Z}_6$ isomorph? Falls ja, geben Sie mindestens einen Isomorphismus konkret an.

[5] d.h. von gleicher Form oder Gestalt.

Analog zu den Gruppenhomomorphismen ist ein *Ringhomomorphismus* zwischen zwei Ringen eine Abbildung, welche sich mit den beiden Ringoperationen verträglich erweist und zusätzlich das Einselement des einen Rings auf das Einselement des anderen abbildet, sofern in beiden Ringen ein solches vorhanden ist.

d) Präzisiseren Sie den Begriff des Ringhomomorphismus ggf. unter Zuhilfenahme einschlägiger Literatur. Warum ist explizit zu fordern, daß das Einselement des einen Rings auf das Einselement des anderen Rings abgebildet wird? Was sollte man unter einem Ringisomorphismus verstehen bzw. unter wekchen Umständen wird man zwei Ringe isomorph nennen?

e) Zeigen Sie, daß der Restklassenring $\mathbb{Z}_{12}$ isomorph ist zu dem Produktring, welcher sich aus den Restklassenringen $\mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_4$ ergibt, d.h. $\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

Aufgabe 8.11: Gruppen mit speziellen Eigenschaften

In einer Gruppe lassen sich Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten in der üblichen Weise durch "wiederholtes Verknüpfen mit sich selbst" definieren. Hier einige interessante Aufgaben, bei denen Potenzen (insbesondere Quadrate) involviert sind.

a) In einer Gruppe G gelte $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$ für alle $x, y \in G$. Warum muß G dann abelsch (kommutativ) sein?

b) In einer Gruppe G gelte $g^2 = e$ für alle $g \in G$ (d.h. jedes Element ist zu sich selbst invers). Warum ist dann auch diese Gruppe abelsch?

c) Warum gibt es in einer *endlichen* Gruppe zu jedem $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$. Was können Sie noch über n aussagen?

   Tip: Aus dem *Schubfachprinzip* folgt die Gleichheit gewisser Potenzen. Was kann man dann daraus folgern?

d) Es sei G eine Gruppe mit einer geraden Anzahl von Elementen. Zeigen Sie, daß es dann mindestens ein Element $x \in G$ geben muß mit $x \neq e$ aber $x^2 = e$. Zeigen Sie ferner, daß in einer derartigen Gruppe auch folgende Aussage gilt: $\forall x \in G: \ \exists y \in G: \ \ y \neq x^{-1} \ \wedge \ yxy = x^{-1}$

   Tip: Beweis per Widerspruch. Definieren Sie dazu eine geeignete Äquivalenzrelation auf G, um G zu partitionieren und wenden Sie für die Vereinigung der Äquivalenzklassen die Summenregel des Abzählens an.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 11.01.2019, 14:00 Uhr.