Information Scientists Do Mathematics.

Vorlesung **Mathematik für Informatiker I** (an der Universität Heidelberg) 11. Januar 2019

Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Adrian Danisch, Armand Rousselot, Denise Becker, Vasil Manev, Christian Moses*

Aufgabenserie 9

Vektor(t)räume & Lineare Gleichungssysteme

Die erste Aufgabe dieses Blattes greift noch einmal das Thema "komplexe Zahlen & Einheitswurzeln" der vergangenen Woche auf. Die weiteren Aufgaben sind jedoch dem neuen Thema (siehe überschrift) gewidmet. Aufgabe 9.2 dürfte jetzt schon machbar sein (was die erforderlichen Vorkenntnisse anbelangt). Aufgabe 9.4 wird wohl für viele noch mit Schulkenntnissen lösbar sein. Für die Bearbeitung der umfangreicheren Aufgabe 9.5 wird es ggf. wieder eine Verlängerung geben, da wir wahrscheinlich das Thema nicht ganz rechtzeitig in der Vorlesung abgehandelt bekommen. Bei den eingestreuten und zusätzlich angehängten Bonusaufgaben sollten Sie sich zumindest die Problemstellung klar machen.

Aufgabe 9.1: Einheitswurzeln & erstaunliche Produkte (3+5+2+5*+5*=10P+10P*)

a) Wie lauten die (komplexen) Nullstellen ξ_1 und ξ_2 des Polynoms $x^2 + x + 1$? Man verifiziere per Rechnung, daß $\xi_1^3 = \xi_2^3 = 1$ gilt. Warum müssen ξ_1 und ξ_2 dritte Einheitswurzeln sein? Begründen Sie dies, ohne auf die vorangehende Rechnung Bezug zu nehmen.

b) Finden Sie sämtliche fünften Einheitswurzeln, indem Sie die Nullstellen des Polynoms $x^4+x^3+x^2+x+1$ berechnen. Dividieren Sie dazu das Polynom durch x^2 und substituieren Sie $x + \frac{1}{x} =: y$, um eine quadratische Gleichung in y zu erhalten.

Anmerkung zu Teilaufgabe a) und b): Die Einheitswurzeln sind exakt anzugeben. Abgesehen von der 1 enthalten die Real- und Imaginärteile der dritten und fünften Einheitswurzeln gewisse Wuzelausdrücke, die allerdings nur aus (verschachtelten) Quadratwurzeln bestehen. Inwiefern ist das verwunderlich (oder auch nicht verwunderlich), daß nur quadratische aber keine dritten und fünften Wurzeln auftreten?
Eine alternative Berechnungsmöglichkeit der dritten bzw. fünften Einheitswurzeln ergibt sich auf trigonometrischem Wege, indem Sie die Koordinaten der Eckpunkte des regelmäßigen "Einheitsdreiecks" bzw. des regelmäßigen "Einheitsfünfecks" unter Ausnutzung geometrischer Sachverhalte und Gesetzmäßigkeiten (wie z.B. den Satz des Pythagoras etc.) berechnen. Die Einheitswurzeln liefern ein schönes Beispiel, anhand dessen sich einige tiefliegende Beziehungen zwischen Algebra und Geometrie aufdecken lassen.

c) Geben Sie (mit Begründung) den exakten Wert des Sinus und Kosinus für $\frac{2\pi}{5} \mathrel{\hat{=}} 72°$ an.

d) (Bonus) Betrachten Sie ein regelmäßiges n-Eck. Wählen Sie einen Eckpunkt aus und verbinden Sie diesen mit den übrigen Eckpunkten des n-Ecks (auch mit den beiden benachbarten Eckpunkten). Berechnen Sie den Wert des Produkts der Längen dieser $n-1$ Verbindungsstrecken? [Antwort: nr^{n-1}, wobei r dem Umkreisradius des n-Ecks entspricht.]

e) (Bonus) Betrachten Sie zu dem regelmäßigen n-Eck noch ein regelmäßiges $2n$-Eck derart, daß die Hälfte seiner Eckpunkte mit den Eckpunkten des n-Ecks zusammenfällt. Greifen Sie nun einen Eckpunkt des $2n$-Ecks heraus, der nicht zum n-Eck gehört, und verbinden Sie diesen mit sämtlichen Eckpunkten des n-Ecks. Zeigen Sie, daß das Längenprodukt dieser n Verbindungsstrecken genau $2r^n$ ergibt, wobei r wieder für den gemeinsamen Umkreisradius der beiden Polygone steht. Erstaunlicherweise hängt das Produkt in diesem Fall gar nicht von n ab, wenn man von dem Skalierungsfaktor r^n absieht.

Aufgabe 9.2: Zu den Vektorraum-Axiomen **(5P)**

Zeigen Sie, daß die Kommutativität der Vektoraddition bereits aus den Vektorraumaxiomen gefolgert werden kann, wenn nicht explizit verlangt wird, daß $(V,+)$ eine *abelsche* (kommutative) Gruppe ist. Der Zusatz *abelsch* ist daher eigentlich redundant.

Anmerkung: Salopp gesprochen könnte man in der Terminologie der linearen Algebra sagen, daß die Vektorraumaxiome in der gängigen Form nicht "*linear unabhängig*" sind.

Aufgabe 9.3: Eine Bedingung für lineare Abhängigkeit **(8P)**

Die Vektoren $v_1,...,v_k \in V$ eines K-Vektorraums V seien linear unabhängig. Für die Koeffizienten $\lambda_1,...,\lambda_k \in K$ sei $u := \lambda_1 v_1 + ...\lambda_k v_k$ eine Linearkombination. Man zeige:

$$v_1 - u, ..., v_k - u \text{ linear abhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1.$$

Anmerkung: Insbesondere sind die Vektoren $v_i - u$ für $i \in \{1,...,k\}$ linear abhängig, wenn u bei zusätzlich nicht negativen Koeffizienten einem *gewichteten Mittel* der Vektoren $v_1,...,v_k$ entspricht. Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch ein oder zwei Skizzen, welche jeweils einen Spezialfall für $V = \mathbb{R}^2$ bzw. $V = \mathbb{R}^3$ darstellen sollen.

Aufgabe 9.4: Unterräume im $\mathbb{R}^n$ **(5+5+2+5=17P)**

Aufgaben wie Teil a) und Teil b) sind Ihnen wahrscheinlich schon aus der Schule vertraut; vielleicht war dort jedoch die textliche Einkleidung etwas anders.

a) Zeigen Sie, daß die Mengen

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Unterräume des $\mathbb{R}^3$ darstellen. Finden Sie jeweils eine Basis für U, V und $U \cap V$.

b) Auch die Mengen

$$G := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} : \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad H := \left\{ \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} : \; \sigma, \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

sind Unterräume vom $\mathbb{R}^3$. Warum? Bestimmen Sie eine jeweilige Basis von G, H und $G \cap H$.

c) Geben Sie eine geometrische Interpretation für a) und b). Wie ergeben sich die unterschiedlichen Beschreibungen für die Unterräume U, V einerseits und G, H andererseits?

d) Bestimmen Sie eine Basis zu

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 9.5: Lösen Linearer Gleichungssysteme **((3×5)+5=20P+10P*)**

a) Versuchen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme zu lösen, indem Sie mit der *erweiterten Systemmatrix* rechnen und diese durch Zeilenoperationen in eine Gauß-Jordan-Form überführen. Die ganzzahligen Koeffizienten sind als Elemente von $\mathbb{Q}$ aufzufassen. Beachten Sie, daß lineare Gleichungssysteme über dem unendlichen Körper der rationalen Zahlen eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben können.

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 2w & = & 2 \\ 2x & + & 5y & - & 8z & + & 6w & = & 5 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & + & 2w & = & 4 \end{array} \right. \qquad \text{iii)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

b) Geben Sie für das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 6z & = & 5 \\ 4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ & & 5y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

die Lösungsmenge nicht über dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sondern über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}_7$ an.

Anmerkung: Bedenken Sie, daß es im Restklassenkörper $\mathbb{Z}_7$ keine Brüche gibt. So entspricht beispielsweise der Division durch 3 die Multiplikation mit 5. Außerdem gibt es auch keine negativen Zahlen, wenn man die Elemente von $\mathbb{Z}_7$ durch $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ darstellt. Beispielsweise entspricht die Subtraktion von 2 (oder 16) der Addition von 5. Dies führt prinzipiell zu einer deutlichen Vereinfachung des Rechnens, nur ist es anfangs etwas ungewohnt, so daß man gut aufpassen muß, die Rechnungen konsequent in $\mathbb{Z}_7$ durchzuführen, ohne in das gewohnte Rechnen mit $\mathbb{Q}$ zurückzufallen.

Übrigens, wer das Gleichungssystem nicht auflösen will, kann die Lösung auch durch systematisches Ausprobieren finden; dazu sind sämtliche $7^3 = 343$ Tripel aus dem $\mathbb{Z}_7$ zu checken. Das erspart einem aber nicht das Rechnen im $\mathbb{Z}_7$.

c) (10 Bonuspunkte) Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcccrcl} x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & \beta_0 \\ \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + & \ldots & + & \alpha_n x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_1^2 x_1 & + & \alpha_2^2 x_2 & + & \ldots & + & \alpha_n^2 x_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ldots. & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} x_1 & + & \alpha_2^{n-1} x_2 & + & \ldots & + & \alpha_n^{n-1} x_n & = & \beta_{n-1} \end{array} \quad ,$$

welches sich dadurch auszeichnet, daß sich in jeder Spalte die Koeffizienten als aufsteigende Potenzen einer jeweils festen Zahl ergeben. Zeigen Sie, daß dieses Gleichungssystem für jede rechte Seite eindeutig lösbar ist, wenn die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ paarweise verschieden sind.

Hinweis: Wie läßt sich ein entsprechendes 3×3-System auf ein 2×2-System dieser Art durch zwei Zeilenoperationen zurückführen? Verallgemeinern Sie diese Vorgehensweise und begründen Sie *induktiv* die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems.

Bonusaufgaben

Die folgenden Bonusaufgaben sind unbepunktet. Ihr Tutor wird Sie aber sicher nicht leer ausgehen lassen, wenn Sie dazu eine sinnvolle Bearbeitung einreichen.

Aufgabe 9.6: Vektorraum über $\mathbb{Q}$ mit irrationalen Zahlen

Bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{Q}$-Vektorraums

$$\left\{ q + r\sqrt{5} + s\sqrt{7} + t\sqrt{5\cdot 7} : \; q,r,s,t \in \mathbb{Q} \right\} .$$

Hinweis: Bekanntlich sind auch $\sqrt{5}$ und $\sqrt{7}$ irrational und daher nicht durch rationale Zahlen darstellbar.

Aufgabe 9.7: Der Herr der Quadrate

In einer sehr alten, längst versunkenen Kultur spielten einst *magische Quadrate* eine besondere Rolle. Unter einem magischen Quadrat wurde während jener fernen Tage ein quadratisches 3×3 Zahlenschema verstanden, welches mit neun natürlichen Zahlen besetzt ist, die sich spalten- und zeilenweise jeweils zu derselben "magischen" Summe addieren. Über Generationen hinweg war den Priestern nur

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{matrix}$$

als einziges nicht konstantes magisches Quadrat[1] bekannt, dem man eine hohe symbolische Bedeutung zuschrieb. Der Legende nach sollen die Götter selbst dieses magische Quadrat in grauer Vorzeit einem mythischen Helden und seiner Gefährtin offenbart haben. Später entdeckte man, daß sich daraus weitere magische Quadrate erzeugen lassen, indem man zu jedem Eintrag dieselbe Zahl addiert. Da die Rechenkunst jedoch noch sehr kümmerlich ausgeprägt war und ein erwachsener Mensch der damaligen Zeit kaum besser rechnen konnte als ein heutiger Schulanfänger, wurden lange keine weiteren magischen Quadrate gefunden und man glaubte, daß es auch keine weiteren geben könnte. Dann aber, als die Kultur ihren Zenit bereits erklommen hatte, geschah etwas Schreckliches, das binnen kurzem zu ihrem jähen Untergang führte. Der amtierende höchste Priester behauptete, daß es nicht nur ein sondern gar unendlich viele, ganz unterschiedliche magische Quadrate gäbe, und daß man diese mit sogenannten "Schlüssel-Quadraten" allesamt recht einfach auffinden könnte. Allein durch tiefes Nachdenken und hohe Rechenkunst sei es ihm gelungen, sich dieser Schlüssel-Quadrate zu bemächtigen. In seiner Hybris setzte sich der Priester schließlich über die Götter und überredete das Volk, diesen fortan nicht mehr zu huldigen. Wenige Jahre später machte ein wildes Reitervolk die Hauptstadt dem Erdboden gleich, wodurch die Kultur für immer ausgelöscht wurde. Es heißt, die Götter hätten so den Frevel des Volkes gerächt, das sich so bereitwillig durch den Priester verführen lies.
Lüften Sie das Geheimnis der magischen Quadrate. Den Zorn der Götter brauchen Sie nicht zu fürchten, denn diese strafen nur den Hochmut nicht aber die Erkenntnis in Demut.

a) Deuten Sie zunächst die Aussagen des höchsten Priesters vor einem mathematischen Hintergrund. Welche Struktur trägt die Menge aller quadratischen 3×3 Zahlenschemata, wenn die Einträge aus $\mathbb{Q}$ stammen? Durch welche Besonderheit zeichnet sich die Menge der magischen Quadrate aus, wenn man auch hier rationale Einträge zuläßt? Was ist mit den "Schlüssel-Quadraten" gemeint? Wieviele "Schlüssel-Quadrate" werden mindestens benötigt, damit diese einen "vollständigen" Satz von Schlüssel-Quadraten bilden?

b) Versuchen Sie, einen Satz von "Schlüssel-Quadraten" zu berechenen.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 18.01.2019, 14:00 Uhr.

[1] "Nicht konstant" heißt hier mit verschiedenen Einträgen.