Information Scientists Do Mathematics.

Vorlesung **Mathematik für Informatiker I**
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Adrian Danisch, Armand Rousselot, Denise Becker, Vasil Manev, Christian Moses*

30. November 2018

Aufgabenserie 5
Abbildungen

Aufgabe 5.1: "Vererbung" von Abbildungseigenschaften (5+5=10P)

a) Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann gilt:

$$g \text{ injektiv} \wedge f \text{ injektiv} \;\Rightarrow\; g \circ f \text{ injektiv} \qquad \text{aber} \qquad g \circ f \text{ injektiv} \;\Rightarrow\; f \text{ injektiv}$$

Weisen Sie die Implikationen nach und zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß die Injektivität der Verkettung $g \circ f$ keineswegs die Injektivität der äußeren Funktion g bedingt. Zeigen Sie im Falle der zweiten Implikation, daß die Injektivität der äußeren Funktion g folgt, wenn zusätzlich bekannt ist, daß die innere Funktion f surjektiv ist.

b) Welche allgemeingültigen Implikationen gelten im Falle der Surjektivät? Formulieren Sie eine zu a) analoge Aufgabe und beweisen Sie die Aussagen.

Aufgabe 5.2: Links- und Rechtsinverse an Beispielen (5P)

Durch die beiden Wertetabellen sind zwei Funktionen definiert:

n	1	2	3	4	5	–	–
$f(n)$	4	7	1	2	6	3	5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(n)$	4	3	1	2	5	3	2	6	3

.

Welche der beiden Funktionen besitzt eine Rechtsinverse, welche eine Linksinverse? Geben Sie diese zu der jeweiligen Funktion an. Sind die Links- und Rechtsinverse eindeutig bestimmt oder lassen sich unterschiedliche Links- und Rechtsinverse definieren? Berechnen Sie sowohl die links- wie die rechtsseitige Verkettung mit der jeweiligen Ausgangsfunktion. Woran erkennen Sie die Korrektheit der Links- bzw. Rechtsinversen?

Hinweis: Bitte geben Sie die gesuchten Funktionen in Form von Wertetabellen an; bei verketteten Funktionen bitte drei Zeilen verwenden, wobei die mittlere Zeile die Auswertung der inneren Funktionen enthält. Beachten Sie, daß die Wertemange der Funktion f der Menge $\{1, \dots, 7\}$ entsprechen soll.

Aufgabe 5.3: Vertauschbarkeit von Abbildungen & Mengenoperationen "erforschen" (25P)

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung; ferner seien $A_1, A_2 \subset X$ zwei Teilmengen der Definitionsmenge und $B_1, B_2 \subset Y$ zwei Teilmengen der Wertemenge. Untersuchen Sie die folgenden sechs Mengenpaare auf Gleichheit oder eine bestehende einseitige Teilmengenrelation (Inklusion). Beweisen Sie ihre Aussage.

a) (5P) $f(A_1 \cup A_2), \quad f(A_1) \cup f(A_2)$

b) (5P) $f(A_1 \cap A_2), \quad f(A_1) \cap f(A_2)$

c) (6P) $f(A_1 \setminus A_2), \quad f(A_1) \setminus f(A_2)$

d) (3P) $f^{-1}(B_1 \cup B_2), \quad f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

e) (3P) $f^{-1}(B_1 \cap B_2), \quad f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

f) (3P) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$, $\quad f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Aufgabe 5.4: Anwendung des Schubladenprinzips **(10P)**

Man zeige: Unter $n+1$ beliebigen Zahlen der Menge $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ gibt es stets zwei Zahlen, derart daß die kleinere die größere teilt.

Hinweis: Jede natürliche Zahl läßt sich in eindeutiger Weise als Produkt einer Zweierpotenz (dies kann auch $2^0 = 1$ sein) mit einer ungeraden Zahl schreiben.

Bonusaufgaben

Die folgenden Bonusaufgaben sind unbepunktet. Ihr Tutor wird Sie aber sicher nicht leer ausgehen lassen, wenn Sie dazu eine sinnvolle Bearbeitung einreichen.

Aufgabe 5.5: Bijektion durch Einschränkung

Es sei X eine endliche Menge und $f: X \to X$ eine Abbildung. Gesucht ist eine möglichst große Teilmenge $B \subset X$, so daß die Einschränkung $\tilde{f} \coloneqq f|_B$ von f auf B *bijektiv* ist. Wie könnte man vorgehen, um eine solche Menge zu finden? Zum Ausprobieren sind im Folgenden vier Funktionen gegeben, die sich nur wenig voneinander unterscheiden, insbesondere haben sie alle die gleiche Bildmenge. Geben Sie zu jeder Funktion die maximale Menge B an, welche durch die jeweilige Funktion bijektiv auf sich selbst abgebildet wird. Beschreiben Sie die allgemeine Vorgehensweise, wie eine darartige Menge B aufgefunden werden kann.

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_1(n)$	11	5	10	7	1	4	12	8	9	6	5	3

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_2(n)$	11	5	10	7	1	4	12	8	9	6	11	3

c)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_3(n)$	11	5	10	7	4	1	12	8	9	6	11	3

d)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_4(n)$	11	5	10	7	1	4	12	8	9	6	4	3

Aufgabe 5.6: Bijektion gesucht!

Betrachten Sie für eine natürliche Zahl n die Mengen

$$X \coloneqq \Big\{ (a, b, c, d) \in \{0, 1, ..., n\}^4 : \; a, b, c < d \Big\}$$

und

$$Y \coloneqq \Big\{ \big((s,t), (u,v) \big) \in \{0, ..., n\}^2 \times \{0, ..., n\}^2 : \; s < t \wedge u < v \Big\}.$$

Zeigen Sie, daß beide Mengen von gleicher Kardinalität sind, d.h. $|X| = |Y|$, indem Sie eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ mitsamt ihrer Umkehrabbildung $g : Y \to X$ angeben.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 07.12.2018, 14:00 Uhr.