Information Scientists Do Mathematics.

Vorlesung **Mathematik für Informatiker I** (an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Adrian Danisch, Armand Rousselot, Denise Becker, Vasil Manev, Christian Moses*

25. Januar 2019

Aufgabenserie 12

Darstellungsmatrizen & Matrizenrechnung

Achtung: Sämtliche Aufgaben dieses Blattes gelten als **Bonusaufgaben**. Es wird also nicht erwartet, daß Sie eine Bearbeitung der Aufgaben hochladen. Dennoch sollten Sie sich mit den Aufgaben beschäftigen, soweit der dazu benötigte Stoff noch in der Vorlesung behandelt wird. Die Rechenaufgaben eignen sich insbesondere zum Üben gerade auch im Hinblick auf die Klausur.

Die Bepunktung dieser Aufgabenserie ist hauptsächlich *pro forma* zu verstehen. In Einzelfällen können Bonuspunkte angerechnet werden, wo dies noch dringend erforderlich ist, um die Klausurzulassung zu erhalten.

Aufgabe 12.1: LGSe, Matrizen, lineare Abbildungen und Co. (1+1+6+6+6+2+3=25P)

Vermöge der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & 9 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

wird eine lineare Abbildung $F_A : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4$ definiert.

a) Geben Sie die Bildvektoren zu den kanonischen Basisvektoren im $\mathbb{Q}^5$ an. Warum lassen sich diese anhand der Matrix A besonders leicht ermitteln?

b) Geben Sie das Bild zu dem Vektor $(1,2,3,4,5)^\top \in \mathbb{Q}^5$ unter F_A an.

   Bemerkung: Die Markierung $(....)^\top$ (lies *transponiert*) soll andeuten, daß der Zeilenvektor als Spaltenvektor zu verstehen ist.

c) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} F_A$.

d) Geben Sie eine gestaffelte Basis des Bildraumes $\operatorname{Img} F_A$ an. Welchen Rang hat die Matrix A?

e) Überprüfen Sie, ob die vier Vektoren

$$a := (1,0,2,3)^\top, \quad b := (2,1,-1,0)^\top, \quad c := (1,0,1,1)^\top, \quad d := (1,1,1,1)^\top$$

   im Bild von F_A liegen. Falls ja, geben Sie die zugehörigen Urbilder an.

f) Läßt sich aus den vier obigen Vektoren eine Basis $\mathcal{B}$ für den Bildraum $\operatorname{Img} F_A$ auswählen?

   Hinweis: Es gibt genau eine Möglichkeit, wenn man von der Reihenfolge der Basisvektoren absieht. Wie viele Möglichkeiten sind *a priori* bzw. prinzipiell denkbar?

g) Die Matrix $A \in \mathbb{Q}^{4\times 5}$ entspricht der Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $F_A : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4$ hinsichtlich der kanonischen Basen $\mathcal{E}_5$ von $\mathbb{Q}^5$ und $\mathcal{E}_4$ von $\mathbb{Q}^4$, d.h. $A = \operatorname{Mat}^{\mathcal{E}_5}_{\mathcal{E}_4}(F_A)$. Die Abbildung $\tilde{F}_A : \mathbb{Q}^5 \to \operatorname{Img} F_A$ unterscheide sich von der Abbildung F_A lediglich in der Benennung des Werteraums, d.h. bei $\tilde{F}_A$ stimmen im Gegensatz zu F_A Werte- und Bildraum überein. Geben Sie abschließend die Matrix $\operatorname{Mat}^{\mathcal{E}_5}_{\mathcal{B}}(\tilde{F}_A)$ an.

Aufgabe 12.2: Routine im Berechnen des Matrizenprodukts **(2+2+3+3=10P)**

a) Berechnen Sie das Matrizenprodukt $S \cdot T$ mit

$$S = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & 8 & 10 & 12 \\ 9 & -4 & -7 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Kontrollhinweis: Es sollte sich ein Vielfaches der Einheitsmatrix ergeben.

b) Es seien $D_1 = \mathrm{diag}(2,1,-1,3)$ und $D_2 = \mathrm{diag}(-1,0,2,1)$ zwei *Diagonalmatrizen*, d.h. zwei Matrizen, welche nur auf der Diagonale durch nicht verschwindende Einträge besetzt sind. Berechnen Sie

$$M_1 \coloneqq SD_1T \qquad \text{und} \qquad M_2 \coloneqq SD_2T .$$

c) Berechnen Sie nun noch die beiden Matrizen M_1M_2 und M_2M_1. Wenn Sie richtig gerechnet haben, dann sollten Sie ein übereinstimmendes Ergebnis für die beiden Matrizenprodukte erhalten. Warum vertauschen die beiden Matrizen M_1 und M_2 miteinander, d.h. warum gilt $M_1M_2 = M_2M_1$? Ist das Zufall, oder gibt es einen klaren Grund dafür?

d) Zusatzaufgabe: Berechnen Sie T^{-1} mit dem auf elementaren Zeilenoperationen beruhenden Verfahren, welches einem simultanen Lösen von vier speziellen Gleichungssystemen entspricht.

Aufgabe 12.3: Umkehrabbildung und inverse Matrix **(2+6+3+4=15P)**

Gegeben ist die Matrix

$$B \coloneqq \begin{pmatrix} -125 & 42 & 21 & 628 \\ -3 & 1 & 0 & 15 \\ -6 & 2 & 1 & 30 \\ -42 & 14 & 7 & 211 \end{pmatrix}$$

als Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $F_B : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ hinsichtlich der kanonischen Basis in $\mathbb{Q}^4$.

a) (allgemeine Vorüberlegung) Es seien V und W zwei Vektorrüme und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ferner sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Was kann über F ausgesagt werden, wenn $\mathcal{C} \subset \mathrm{Img}\, F$ ist? Welche zusätzliche(n) Eigenschaft(en) hat F, wenn $\dim V = \dim W$ gilt?

b) Bestimmen Sie die Urbilder der kanonischen Basisvektoren e_1, e_2, e_3 und e_4. Warum ist F_B invertierbar?

Hinweis für's Rechnen: Die Komponenten der Urbildvektoren bestehen nur aus ganzen Zahlen.

c) Geben Sie die Darstellungsmatrix $B^{-1} = \mathrm{Mat}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F_B^{-1})$ an.

d) Überprüfen Sie, daß tatsächlich $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I$ gilt, wobei I hier die 4×4 Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 12.4: Koordinatentransformation **(5+5=10P)**

a) In einem zweidimensionalen Vektorraum V stehen die beiden Basen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ über folgende Gleichungen miteinander in Beziehung:

$$\begin{aligned} c_1 &= 4b_1 + 5b_2 \\ c_2 &= 3b_1 + 4b_2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die beiden Transformationsmatrizen, mittels derer sich die $\mathcal{B}$-Koordinaten in die $\mathcal{C}$-Koordinaten und umgekehrt umrechnen lassen.

b) Ein Endomorphismus in V habe die Darstellungsmatrix

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ an. Wie lauten $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(F)$. Vergleichen Sie die Summen der beiden jeweiligen Diagonalelemente von allen vier Matrizen. In welchen Fällen ergibt sich Gleichheit?

Weitere Aufgaben zum Üben

Aufgabe 12.5: Berechnung der Schnitte von Unterräumen **(5+10+3+7=25P)**

a) Gegeben seien die Vektoren

$$r = (5,1,5)^t, \quad s = (2,-4,2)^t \qquad \text{sowie} \qquad u = (0,4,2)^t, \quad v = (5,3,4)^t.$$

Zeigen Sie durch Lösen eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems

$$\mathrm{Span}(r,s) \cap \mathrm{Span}(u,v) = \mathrm{Span}\big((1,1,1)^t\big) .$$

Anmerkung: Das t im "Exponenten" steht für *transponiert* und soll anzeigen, daß die Zeilentupel eigentlich als Spaltentupel zu verstehen sind.

b) Im Prinzip analoge Aufgabe zu a), doch diesmal mit vierkomponentigen Vektoren aus dem $\mathbb{Q}^4$ und ohne Angabe der Lösung: Gegeben seien die Vektoren

$$r = (3,-3-3,2)^t, \quad s = (0,8,4,-2)^t, \quad t = (1,1,0,3)^t$$

sowie die Vektoren

$$u = (3,-4,0,1)^t \quad v = (1,4,5,-2)^t, \quad w = (0,-5-6,2)^t$$

im $\mathbb{Q}^4$. Bestimmen Sie eine Basis für den Schnittrraum

$$\mathrm{Span}(r,s,t) \cap \mathrm{Span}(u,v,w) ,$$

indem Sie zunächst ein geeignetes homogenes lineares Gleichungssystem lösen.

Anmerkung: Sie können Ihre Lösung überprüfen, indem Sie zeigen, daß sich jeder Basisvektor sowohl als Linearkombination von r, s und t wie auch als Linearkombination von u, v und w schreiben läßt. Dies würde insgesamt die Lösung von vier inhomogenen linearen Gleichungssystemen mit jeweils drei Unbekannten erfordern. Allerdings ist es nicht notwendig, die Gleichungssysteme zu lösen; es genügt, sich von deren Lösbarkeit zu überzeugen, d.h. konkret, es genügt die Zeilenstufenform statt der Gauß-Jordan Form.

c) Bestätigen Sie die Gleichung

$$\dim \mathrm{Span}(r,s,t,u,v,w) = \dim \mathrm{Span}(r,s,t) + \dim \mathrm{Span}(u,v,w) - \dim\big(\mathrm{Span}(r,s,t) \cap \mathrm{Span}(u,v,w)\big),$$

indem Sie zu jedem Spann eine Basis angeben und dadurch seine Dimension ermitteln.

d) Es sei U der durch

$$a = (2,3,1,1), \quad b = (1,0,2,3), \quad c = (-1,-1,0,2)$$

erzeugte Unterraum im $\mathbb{Q}^4$. Die Vektoren

$$u = (7,9,2,-4) \qquad \text{und} \qquad v = (1,-2,-3,-17)$$

liegen in U. Für welche $w \in \{a,b,c\}$ gilt $\mathrm{Span}(u,v) \oplus \mathrm{Span}(w) = U$?

Aufgabe 12.6: Hantieren mit linearen Abbildungen und Matrizen **(4×2+4+2+2+4=20P)**

Es seien V und W zwei Vektorräume mit den Basen $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\} \subset V$ und $\mathcal{C} := \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \subset W$. Der *Endomorphismus* $F : V \to V$ und der *Homomorphismus* $G : V \to W$ sind definiert durch

$$\begin{cases} F(b_1) := 4b_1 - 2b_2 + b_3 \\ F(b_2) := 3b_1 - b_2 - b_3 \\ F(b_3) := 5b_2 + 2b_3 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} G(b_1) := c_1 - 2c_3 + c_4 \\ G(b_2) := c_2 - c_3 \\ G(b_3) := 2c_1 - c_2 + c_4 \end{cases} .$$

a) Es sei $H := G \circ F$. Berechnen Sie $H(\mathcal{B})$ durch direktes Einsetzen der obigen Definitionsgleichungen von F und G.

b) Geben Sie gemäß der allgemein üblichen Konvention die Matrixdarstellungen $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ und $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(G)$ der linearen Abbildungen F bzw. G an.

c) Berechnen Sie $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(G) \cdot \mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$. Warum können Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von a) kontrollieren? Begründen Sie auf zweierlei Weise ("matrizentechnisch" und "abbildungstheoretisch"), warum man das umgekehrte Produkt $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot \mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(G)$ nicht bilden kann.

d) Bestimmen $\mathrm{Ker}\, H$ und geben Sie $\dim \mathrm{Img}\, H$ an. Ist H injektiv und/oder surjektiv?

e) Welcher der Basisvektoren von $\mathcal{C}$ liegt im Bildraum von H? Geben Sie eine Basis von $H(V)$ an.

f) Warum kann es keine lineare Abbildung J geben mit $H \circ J = \mathrm{id}_W$. Begründen Sie dies einmal abbildungstheoretisch (möglichst allgemeine Argumente verwenden) und alternativ unter direkter Bezugnahme auf Teil e).

g) Warum gibt es dagegen eine Abbildung K mit $K \circ H = \mathrm{id}_V$? Wie nennt man K in Bezug auf H? Ist K eindeutig bestimmt? Begründen Sie die Linearität von K.

h) Geben Sie die Matrixdarstellung $\mathrm{Mat}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(K)$ von K an. (Diese Aufgabe ist mit etwas Rechenaufwand verbunden; dabei können auch Brüche auftreten.)

Ausblick

Die beiden abschließenden Aufgaben beziehen sich eigentlich auf die Themen *Determinanten* und *Eigenwerte*, welche jedoch nicht mehr Gegenstand der Vorlesung sind. Möglicherweise besteht aber in den Übungen noch Gelegenheit, die Themen kurz anzureißen. Abgesehen davon lassen sich jedoch etliche Aufgabenteile bzw. Rechenschritte (wo im Prinzip Gleichungssysteme zu lösen sind) auch mit den jetzigen Kenntnissen durchführen. Entsprechende Hinweise werden bei Interesse in den Übungen gegeben.

Aufgabe 12.7: Rechenübung zur Determinante und Inversen einer Matrix **(8+12=20P)**

Folgende Aufgaben sind für die beiden unten angegebenen Matrizen durchzuführen:

1) Berechnung der Determinante durch Überführen der Matrix in Dreiecksgestalt.

2) Berechnung der Determinante mittels Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte.

3) Bestimmen der Inversen mittels Zeilenumformungen.

4) Bestimmen der Inversen mittels der Berechnung sämtlicher Minoren.

Welcher der jeweils alternativen Berechnungsweisen geben Sie den Vorzug?

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Beim Invertieren der beiden Matrizen ergeben sich Brüche; $\frac{1}{2}$ bei A, $\frac{1}{4}$ bei B. Insbesondere Teil 4) ist für die Matrix B sehr aufwendig, da insgesamt sechzehn Minoren als Determinanten der zugehörigen 3×3 Streichungsmatrizen zu berechenn sind. Die Aufgabe ist daher nur als Anregung zum Üben zu verstehen und muß keinesfalls vollständig durchgeführt werden. Eine Kontrollmöglichkeit ist durch Teil 3) gegeben.

Aufgabe 12.8: Berechnung von Eigenwerten & Eigenvektoren **(8+7+10=25P)**

Versuchen Sie die folgenden Matrizen zu *diagonalisieren*, indem Sie

1) zunächst das charakteristische Polynom der jeweiligen Matrix ermitteln,
2) die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms angeben (ggf. durch Raten),
3) zu jedem Eigenwert die zugehörige Eigenbasis durch Lösen eines homogenen Gleichungssystems berechnen,
4) die Transformationsmatrix nebst Inverser bestimmen,
5) und schließlich eine zur der Ausgangsmatrix ähnliche Diagonalmatrix nennen, wobei genau anzugeben ist, wie die Diagonalmatrix durch Heranmultiplizieren mit der Transformationsmatrix und ihrer Inversen (jeweils von der richtigen Seite) auf die Ausgangsmatrix zurückführt.

Als Probe ist die sich in Teil 5) ergebende Gleichung konkret nachzurechnen.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 163 & -20 & -640 & -2240 \\ -6 & 1 & 24 & 84 \\ -50 & 30 & 203 & 700 \\ 26 & -10 & -104 & -361 \end{pmatrix}$

Hinweis: Eine der drei Matrizen ist nicht diagonalisierbar. Geben Sie in diesem Fall nur die Eiegnwerte und Eigenräume an. Lassen Sie sich von den großen Zahlen in der Matrix C nicht einschüchtern. Denken Sie daran, daß beim Berechnen von Determinanten sowohl Zeilen- wie Spaltenoperationen erlaubt sind. In ausmultiplizierter Form lautet das charakteristische Polynom von C $\chi_C(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$.