

V351: Fourier-Analyse und Synthese

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

Durchführung: 24. Januar 2017
Abgabe: 31. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	5
3.1 Versuchsaufbau	5
3.1.1 Fourier-Synthese	5
3.1.2 Fourier-Analyse	5
3.2 Versuchsdurchführung	5
3.2.1 Fourier-Synthese	5
3.2.2 Fourier-Analyse	6
4 Auswertung	6
4.1 Berechnung der Fourier-Koeffizienten	6
4.1.1 Rechteckfunktion	6
4.1.2 Dreieckfunktion	6
4.1.3 Sägezahnfunktion	7
4.2 Fourier-Synthese	7
4.2.1 Rechteckschwingung	7
4.2.2 Dreieckschwingung	7
4.2.3 Sägezahnschwingung	8
5 Fourier-Analyse	8
6 Diskussion	10
Literatur	11

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Fourier-Analyse und -Synthese untersucht. Dabei werden aus Fourier-Komponenten Schwingungen moduliert und bekannte Schwingungen in selbige zerlegt.

2 Theorie

Eine wichtige Rolle beim Fourier-Formalismus spielen periodische Funktionen. Diese sind definiert durch

$$\begin{aligned} f(t+T) &= f(t) \text{ f\"ur zeitliche Periodizit\"at} \\ f(x+D) &= f(x) \text{ f\"ur r\"aumliche Periodizit\"at.} \end{aligned}$$

Dabei ist T bzw. D die Periodendauer der Funktion; also der Zeitraum, nachdem $f(t)$ bzw. $f(x)$ wieder den gleichen Wert wie bei t bzw. x hat. Daf\"ur bieten sich die Sinus- und Cosinus-Funktion an. Sie finden sich in dem sogenannten Fourierschem Theorem

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \right) \quad (1)$$

wieder, welches erf\"ullt ist, falls die Reihe aus (1) gleichm\"a\"Big konvergiert. Dann gilt f\"ur die Koeffizienten a_n und b_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (3)$$

mit $n \in \mathbb{N}$. An (2) und (3) sieht man, dass in (1) nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\nu_1 = 1/T$ auftreten. Die Ermittlung der Amplituden a_n und b_n nennt man Fourier-Analyse. Wenn man (2) und (3) gegen die Frequenz auftr\"agt, erh\"alt man ein Linienspektrum, wie in Abbildung 1 zu sehen. Falls $f(t)$ an einer Stelle t_0 nicht stetig sein sollte, dann konvergiert (1) nicht gleichm\"a\"Big und es tritt eine endliche Abweichung in $f(t_0)$ auf. Diese Abweichung wird f\"ur $n \rightarrow \infty$ im Gegensatz zu (2) und (3) nicht kleiner, sodass sie in diesem Experiment gut zu beobachten ist, da es sich um Fouriersummen handelt. Die oben beschriebene Abweichung nennt man Gibbsches Ph\"anomen.

Mit der Fourier-Transformation

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt \quad (4)$$

l\"asst sich das ganze Frequenzspektrum $g(\nu)$ einer Funktion $f(t)$ bestimmen, egal ob sie periodisch ist oder nicht. Falls $f(t)$ periodisch ist, ergibt sich aus (4) eine Reihe aus δ -Distributionen; falls $f(t)$ nicht-periodisch ist, ist das Frequenzspektrum kontinuierlich.

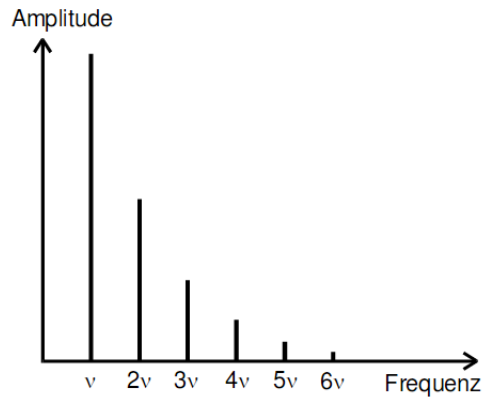


Abbildung 1: Linienspektrum einer periodischen Funktion mit Grundfrequenz ν .

Da es im Experiment nicht möglich ist über einen unendlichen langen Zeitraum (wie in (4) gefordert) zu integrieren, ergibt sich für jede Funktion $f(t)$ ein kontinuierliches Spektrum. Außerdem werden Nebenmaxima entstehen, die in der Auswertung gefiltert werden müssen.

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

3.1.1 Fourier-Synthese

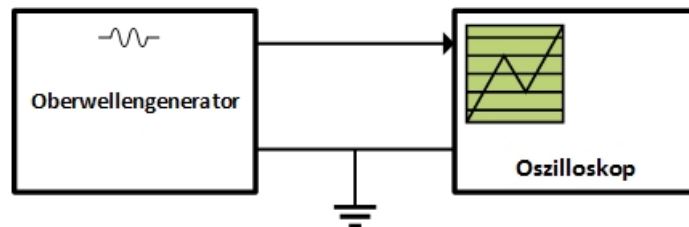


Abbildung 2: Schaltbild zur Durchführung der Fourier-Synthese [Mis17].

In Abbildung 2 ist der Aufbau zur Durchführung der Fourier-Synthese zu sehen. Am Oberwellengenerator werden die Fourier-Komponenten überlagert und die dadurch entstandene Schwingung auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht.

3.1.2 Fourier-Analyse

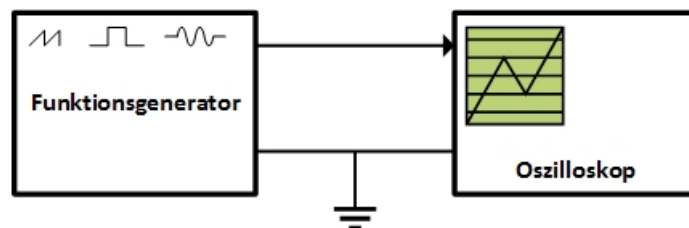


Abbildung 3: Schaltbild zur Durchführung der Fourier-Analyse [Mis17].

Um die Fourier-Analyse durchzuführen, wird der Aufbau aus Abbildung 3 angewandt. Der Funktionsgenerator gibt wahlweise eine der drei Spannungen (siehe Kapitel 3.2) auf das Oszilloskop.

3.2 Versuchsdurchführung

3.2.1 Fourier-Synthese

Zuerst werden die Oberwellen, für die $n \geq 2$ gilt, mittels Lissajous-Figuren mit der Sinus-Grundschiwingung in Phase gebracht. Dann werden die Fourier-Komponenten für eine Sägezahn-, eine Dreieck- und eine Rechteckfunktion berechnet (siehe Kapitel 4). Dabei sieht man, dass die Amplituden für eine Sägezahn- und eine Rechteckfunktion mit $1/n$ abfallen; während es sich bei der Dreiecksfunktion um einen Proportionalitätsfaktor $1/n^2$. Mit der Maximalamplitude der Sinus-Schwingung werden alle weiteren Amplituden der Oberwellen über ein Voltmeter mit den bereits erwähnten Proportionalitätsfaktoren

angepasst. Sodann werden die Oberwellen nacheinander aufsummiert und mittels 90° und 180° Phasenverschiebungen entsprechend der gewünschten Funktion angepasst, bis man alle Oberwellen, die der Generator hergibt, aufsummiert hat. Das Ergebnis lässt sich auf dem Oszilloskop betrachten.

3.2.2 Fourier-Analyse

Am Funktionsgenerator wird eine der drei Funktionen eingestellt. Das Oszilloskop führt dann die Fourier-Analyse aus, wenn man in den Math-Modus geht. Als nächstes nimmt man von den Peaks der Hauptmaxima die Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz auf. Dieser Vorgang wird für die anderen zwei Funktionen wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

4.1.1 Rechteckfunktion

Die Rechteckfunktion wird wie folgt parametrisiert:

$$R(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in (0, \pi) \\ 0, & \text{falls } t \in \{0, \pi, 2\pi\} \\ -1, & \text{falls } t \in (\pi, 2\pi) . \end{cases} \quad (5)$$

Da die Rechteckfunktion ungerade ist, sind alle $a_n = 0$. Es folgt nach (3) für die b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} . \end{cases} \quad (6)$$

Die Amplituden der Fourierentwicklung fallen also mit $\frac{1}{n}$ ab. Nur ungerade n liefern Beiträge.

4.1.2 Dreieckfunktion

Die Dreieckfunktion wird wie folgt parametrisiert:

$$D(t) = \frac{2}{\pi} |t| - 1, \quad t \in [-\pi, \pi]. \quad (7)$$

Da die Dreieckfunktion gerade ist, sind alle $b_n = 0$. Es folgt nach (2) für die a_n :

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade} . \end{cases} \quad (8)$$

Die Amplituden der Fourierentwicklung fallen also mit $\frac{1}{n^2}$. Nur ungerade n liefern Beiträge.

4.1.3 Sägezahnfunktion

Die Sägezahnfunktion wird wie folgt parametrisiert:

$$S(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi). \quad (9)$$

Da die Sägezahnfunktion ungerade ist, sind alle $a_n = 0$. Es folgt nach (3) für die b_n :

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad (10)$$

Die Amplituden der Fourierentwicklung fallen also mit $\frac{1}{n}$. Sowohl gerade als auch ungerade n liefern Beiträge.

4.2 Fourier-Synthese

Die Amplitude der Grundfrequenz A_0 beträgt 0.614 V. Zur Erzeugung der jeweiligen Schwingungsformen werden die Amplituden der n -ten Oberschwingung nach den in Kapitel 4.1 bestimmten Zusammenhängen bestimmt und dementsprechend eingestellt.

4.2.1 Rechteckschwingung

Nach dem Entfernen der Phasenverschiebung zwischen den Oberwellen sowie dem Einstellen der Amplituden nach dem in Kapitel 4.1.1 bestimmten $\frac{1}{n}$ Zusammenhang, ergibt sich kein Bild auf dem Oszilloskop, das einer Rechteckschwingung nahe kommt. Durch wahlloses Probieren lässt sich das Ergebnis auf das in Grafik 4 dargestellte Oszilloskopbild steigern.

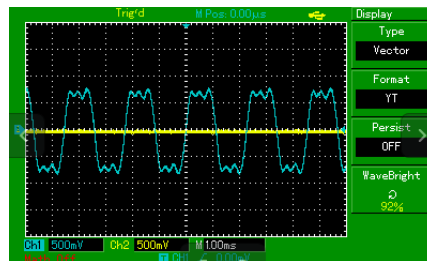


Abbildung 4: Oszilloskopbild der synthetisierten Rechteckschwingung.

4.2.2 Dreieckschwingung

Werden die Amplituden wie in Kapitel 4.1.2 eingestellt, ergibt sich das in Grafik 5 dargestellte Bild auf dem Oszilloskop. Dieses Bild lässt sich durch Werden die Amplituden der ungeraden Oberschwingungen wie in Kapitel 4.1.2 mit $\frac{A_0}{n^2}$ eingestellt, ergibt sich das in Grafik 5 dargestellte Bild auf dem Oszilloskop. Die geraden Oberschwingungen tragen nicht zur Fourierreihe bei.

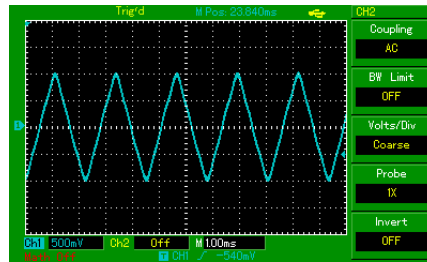


Abbildung 5: Oszilloskopbild der synthetisierten Dreieckschwingung.

4.2.3 Sägezahnswingung

Durch Einstellen nach Kapitel 4.1.3 ergibt sich das in Grafik 6 dargestellte Bild.

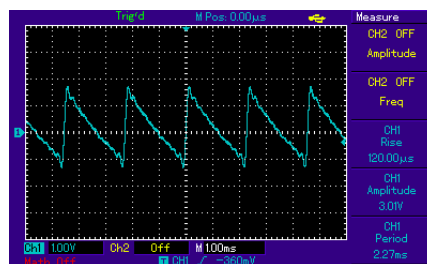


Abbildung 6: Oszilloskopbild der synthetisierten Sägezahnswingung.

5 Fourier-Analyse

In Abbildung 7 sind die Messwerte der Fourier-Analyse dargestellt. Es zeigt sich, wie zu erwarten, ein diskretes Spektrum. Weiterhin treten nur bei den Frequenzen Amplituden auf, die nach den Berechnungen in Kapitel 4.1 zu erwarten waren. Im Vergleich mit den Erwartungswerten zeigen sich Abweichungen, die immer unter 0.2 V liegen. Die relativen Abweichungen liegen bei höchstens 29.4 %. Es zeichnet sich keine Schwingungsform durch besondere Genauigkeit aus.

					Sägezahnschw.		
					ν/kHz	$U_{\text{mes.}}/\text{V}$	$U_{\text{erw.}}/\text{V}$
Rechteckschw.		Dreieckschw.					
ν/kHz	$U_{\text{mes.}}/\text{V}$	$U_{\text{erw.}}/\text{V}$	$U_{\text{mes.}}/\text{V}$	$U_{\text{erw.}}/\text{V}$			
10	8.88	8.88	5.60	5.60	10	4.40	4.40
30	2.88	2.96	0.62	0.62	20	2.24	2.20
50	1.68	1.78	0.28	0.22	30	1.56	1.47
70	1.12	1.27	0.09	0.11	40	1.16	1.10
90	0.88	0.99	0.05	0.07	50	0.92	0.88
110	0.64	0.81	0.04	0.05	60	0.80	0.73
130	0.48	0.68	0.03	0.03	70	0.68	0.63
(a)					80	0.60	0.55
					90	0.52	0.49
					100	0.44	0.44
					110	0.40	0.40
					(b)		

Abbildung 7: In Tabelle 7a sind die aus der vom Oszilloskop durchgeführten Fourier-Analyse der Rechteck- und Dreieckschwingung entnommen Amplituden $U_{\text{mes.}}$ der jeweiligen Oberschwingungen dargestellt. Gleiches findet sich in 7b für die Sägezahnschwingung. Der Funktionsgenerator liefert Oberschwingungen von $n \cdot 10 \text{ kHz}$. Die Erwartungswerte $U_{\text{erw.}}$ wurden nach dem jeweiligen in Kapitel 4.1 bestimmten Konvergenzverhalten der Schwingungsformen aus der ersten Oberwelle bestimmt.

6 Diskussion

Bei der Synthese zeigen sich starke Abweichungen zwischen den einzelnen Schwingungsformen. Konnte die Dreieckschwingung sehr gut synthetisiert werden, gibt es bei Rechteck- und Sägezahnschwingung große Abweichungen von der "Idealform". Dies fällt bei der Rechteckschwingung extrem auf. Dies ist durch das ausschließliche Beitragen ungerader Oberschwingungen bei einem mit $1/n$ langsamen Konvergieren der Fourierreihe zu erklären. Die Vermutung liegt nahe, dass schlicht nicht genug beitragende Oberschwingungen zur Verfügung standen, um die Schwingungsform vernünftig zu synthetisieren. Auch die sehr gut gelungene Dreieckschwingung hat nur Beitragende ungerade Oberschwingungen, das Konvergenzverhalten ist mit $1/n^2$ jedoch viel schneller, sodass weniger Summanden benötigt werden um die Schwingungsform ausreichend genau zu approximieren. Auch die Sägezahnschwingung hat lediglich ein Konvergenzverhalten wie $1/n$, hier tragen jedoch sowohl gerade als auch ungerade Oberschwingungen bei. Die Schwingungsform konnte also mit den zur Verfügung stehenden Mitteln besser genähert werden. Dennoch zeigen sich, insbesondere an den Unstetigkeitsstellen, deutliche Überschwinger, die sich durch weitere Oberschwingungen sicherlich hätten vermeiden lassen können. Es bietet sich daher generell die Wiederholung des Versuches mit einem Oberwellengenerator an, der mehr Oberwellen zur Verfügung stellen kann.

Die Abweichungen bei der Fourier-Analyse lassen sich durch die Messmethode erklären. Die Amplituden der Oberschwingungen wurden mithilfe eines Cursors am Oszilloskop abgelesen. Wird der Cursor dabei nicht exakt platziert, ergeben sich sofort systematische Fehler.

Zusammenfassend zeigt sich eine gute Umsetzbarkeit der Fourier-Analyse. Durch die begrenzten Leistungsfähigkeit des verwendeten Oberwellengenerators gibt es bei der Fourier-Synthese jedoch einige Schwierigkeiten. Es können jedoch, abhängig von der Schwingungsform, für den geringen Aufwand gute Ergebnisse erhalten werden. Lediglich die Rechteckschwingung bereitet größere Probleme.

Literatur

- [Dor17] TU Dortmund. *V351: Fourier-Analyse und Synthese*. 24. Jan. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>.
- [Mis17] Valentin Mischke. *Mit freundlicher Genehmigung des Autors*. 27. Jan. 2017.