

V14: Tomographie mittels Gamma-Strahlung

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

Durchführung: 15. Oktober 2018
Abgabe: 19. Oktober 2018

1 Theorie

Die Tomographie stellt eine Zusammenfassung verschiedener Methoden da, Querschnittsbilder eines Objektes zu erstellen. Tomographietechniken sind dabei insbesondere in der Medizin von herausragender Bedeutung, werden aber auch in anderen Wissenschaften angewandt.

1.1 Grundlagen

Das hier durchgeführte Tomographieexperiment nutzt γ -Strahlung. Das zu untersuchende Objekt wird dabei m Mal aus m verschiedenen Richtungen mit γ -Strahlung bekannter Eingangsintensität I_0 bestrahlt und die auf der anderen Seite des Objektes austretende Intensität N_j gemessen. Die γ -Strahlung jeder dieser j -ten Projektionen wird dabei bei seinem Durchgang durch das Objekt abgeschwächt. Nach Durchgang durch n Materialien mit Absorptionskoeffizienten μ_i und im jeweils durchquerten Material zurückgelegten Wegstrecken d_i ist eine gemessene Intensität

$$N_j = I_0 e^{-\sum_i \mu_i d_i} \quad (1)$$

zu erwarten. Lösen nach $\sum_i \mu_i d_i$ liefert mit

$$\sum_i \mu_i d_i = \ln \left(\frac{I_0}{N_j} \right) := I_j \quad (2)$$

ein lineares Gleichungssystem der Dimension $n \times m$. Lösen des Systems liefert somit bei Kenntnis der Wegstrecken d_i die n Absorptionskoeffizienten womit aus Vergleichstabellen die Materialien bestimmt werden können.

1.2 Bestimmen der Absorptionskoeffizienten

Aus (2) kann eine Matrixform des Gleichungssystems erhalten werden, indem die Wegstrecken, die für jede Projektion im Objekt zurückgelegt wurden in einer Matrix \mathbf{A} zusammengefasst werden. Diese liefert, multipliziert mit dem Vektor $\vec{\mu}$ der Absorptionskoeffizienten, den Vektor der Verhältnisse zwischen Eingangs- und Ausgangsintensitäten

$$\vec{I} = \mathbf{A} \cdot \vec{\mu}. \quad (3)$$

\mathbf{A} ist nun i.A. nicht symmetrisch, das Gleichungssystem ist somit nicht eindeutig lösbar. Meist werden mehr Projektionen aufgenommen als Materialien vorhanden sind. Das Gleichungssystem ist also überbestimmt. Da das Experiment nicht ohne (statistische) Fehler durchgeführt werden kann, muss aus den fehlerbehafteten Messwerten ein optimaler Wert gewonnen werden, der den linearen Zusammenhang des Problems wiedergibt.

Hierzu bietet sich die Methode der kleinsten Fehlerquadrate an. Der Vektor der optimalen Absorptionskoeffizienten ist dabei durch

$$\hat{\vec{\mu}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \vec{I}) , \quad (4)$$

gegeben, die Kovarianzmatrix der bestimmten Absorptionskoeffizienten folgt aus

$$\mathbf{V} [\hat{\vec{\mu}}] = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} . \quad (5)$$

Die Matrix

$$\mathbf{W} =: \mathbf{W}(\vec{I}) = \mathbf{V}[\hat{\vec{I}}] \quad (6)$$

wird dabei als Gewichtsmatrix bezeichnet. Für den Fall gleicher Varianzen $W_{jj} = \sigma_j = \sigma_I$ und verschwindender Kovarianzen $W_{ij} = W_{ji} = 0 \forall i \neq j$ vereinfachen sich (4) und (5) zu

$$\hat{\vec{\mu}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \vec{I} \quad (7)$$

und

$$\mathbf{V} [\hat{\vec{\mu}}] = \sigma_I (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} . \quad (8)$$

2 Durchführung

2.1 Aufbau

Der Aufbau (siehe Abbildung 1) besteht aus einer γ -Quelle, einer Blende, einer Halterung für das Messobjekt und einem NaI-Szintillationsdetektor. Als Messobjekt dienen Würfel, die aus $3 \times 3 \times 3$ kleineren, aus einem Material bestehenden, "Elementarwürfeln" der Kantenlänge 1 cm bestehen. Die Elementarwürfel befinden sich in einem Aluminiumwürfel mit Wandstärke 1 mm. Die Halterung für die Würfel ist bezüglich der z -Achse rotierbar und lässt sich senkrecht zur Strahlrichtung verschieben. Als Quelle des γ -Strahls dient $^{137}_{55}\text{Cs}$. Die Blende stellt sicher, dass das Objekt von einem Strahl durchleuchtet wird. Der Aufbau wird durch Bleiblocke abgeschirmt und der NaI-Detektor kann über ein Computerprogramm gesteuert und ausgelesen werden.

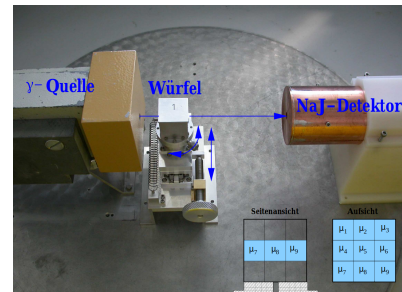


Abbildung 1: Versuchsaufbau, aus [TU].

2.2 Versuchsdurchführung

Zu Beginn wird ohne Würfel I_0 bestimmt und das Spektrum der Quelle aufgenommen. Anschließend werden zwei Würfel bekannter und ein Würfel unbekannter Zusammensetzung vermessen. Dabei werden die in Abbildung 2 dargestellten Projektionen verwendet, sodass die Würfelgeometrie durch Matrix (9) beschrieben wird. Es wird jeweils die mittlere der drei Schichten entlang der z -Achse der Würfel genutzt.

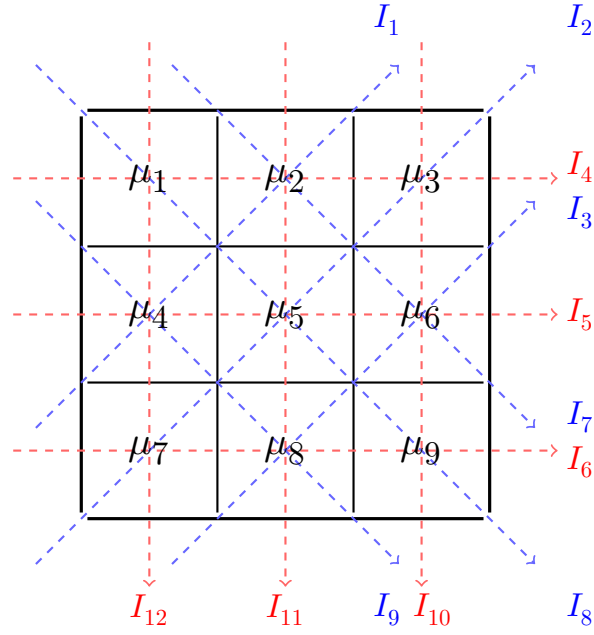


Abbildung 2: Verwendete Projektionen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

3 Auswertung

3.1 Fehlerrechnung

Für die Auswertung wird als Punktschätzer der arithmetischen Mittelwert

$$\bar{T}_{\text{arith.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (10)$$

genutzt. Für die Fehlerrechnung sowie den mathematischen Teil der Auswertung wird auf PYTHON [Fou17] zurückgegriffen:

Arithmetische Mittelwerte werden durch die Funktion MEAN aus dem Paket NUMPY [Oli07] nach (10) berechnet. Grafiken wurden mit MATPLOTLIB [Hun07] erstellt.

3.2 Quellmessung

Zu Beginn wird eine Messung der Quelle durchgeführt, um einen Ausdruck für I_0 zu erhalten. Das Energiespektrum ist in Abbildung 3 zu sehen. Der Photopeak liegt bei 662 keV und weist 10762 Ereignisse in 300 s auf.

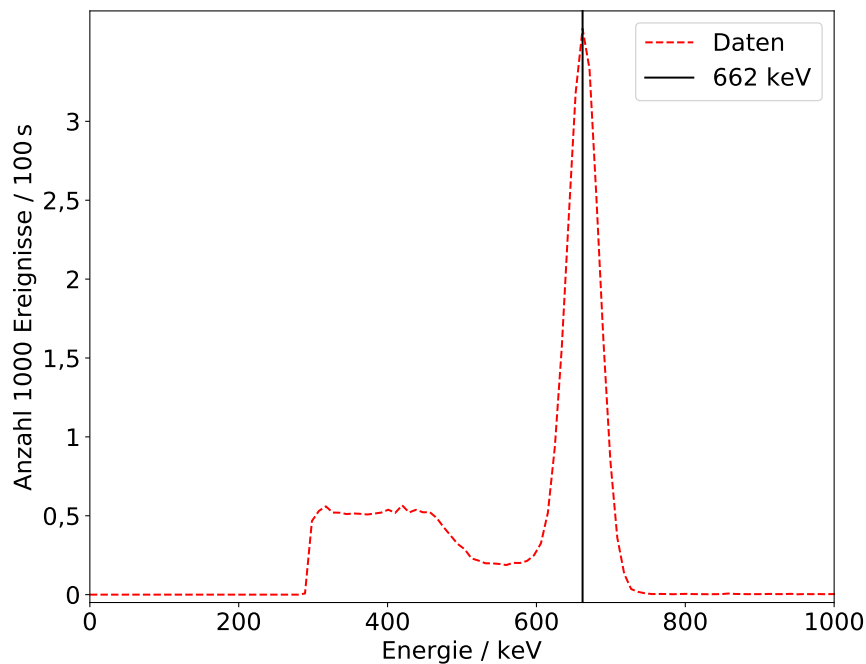


Abbildung 3: Quellmessung der $^{137}_{55}\text{Cs}$ -Quelle. Dargestellt ist die Einhüllende.

Damit ergibt sich

$$I_0 = (35,873 \pm 0,002) \text{ Bq} \quad (11)$$

als Eingangsrate.

3.3 Messung des ersten Würfels

Für die Messung des ersten Würfels, der nur aus der leeren Aluminiumhülle besteht, wurde wurden die Projektionen aus Abbildung 2 verwendet. In Tabelle 1 sind die Absorptionskoeffizienten der neun Luftelementarwürfel nach (4) für die leere Aluminiumhülle zu sehen.

Tabelle 1: Absorptionskoeffizienten des ersten Würfels

k	$\mu_k / 10^3 \text{ cm}^{-1}$
1	$25,17 \pm 0,76$
2	$12,60 \pm 0,56$
3	$53,32 \pm 0,77$
4	$38,46 \pm 0,57$
5	$17,89 \pm 0,59$
6	$26,04 \pm 0,57$
7	$-8,54 \pm 0,76$
8	$33,31 \pm 0,57$
9	$7,24 \pm 0,76$

Da sich keine unterschiedlichen Elementarwürfel in der Hülle befinden, ist hier die Angabe eines Mittelwertes sinnvoll. Dieser ergibt sich zu

$$\mu_{\text{mittel}} = (0,022\,83 \pm 0,000\,22) \text{ cm}^{-1}.$$

3.4 Messung des zweiten Würfels

Für den zweiten Würfel, dessen Aluminiumhülle mit Aluminium-Elementarwürfeln gefüllt ist, wird ebenfalls (4) verwendet. Es ergeben sich die Werte in Tabelle 2.

Auch hier ist die Angabe eines Mittelwertes sinnvoll. Es ergibt sich

$$\mu_{\text{mittel}} = (0,220\,98 \pm 0,000\,34) \text{ cm}^{-1}.$$

Tabelle 2: Absorptionskoeffizienten des zweiten Würfels

k	$\mu_k / 10^3 \text{ cm}^{-1}$
1	$226,06 \pm 1,17$
2	$212,26 \pm 0,86$
3	$199,86 \pm 1,18$
4	$247,03 \pm 0,86$
5	$178,31 \pm 0,93$
6	$261,77 \pm 0,87$
7	$200,04 \pm 1,18$
8	$259,52 \pm 0,87$
9	$204,00 \pm 1,18$

3.5 Messung des vierten Würfels

Der vierte Würfel besteht aus verschiedenen Elementarwürfeln. Die verschiedenen Absorptionskoeffizienten nach (4) sind in Tabelle 3 neben den vermuteten Materialien und den Abweichungen zum den Literaturwerten aus Tabelle 4 zu finden. In diesem Fall ergibt die Angabe eines Mittelwertes keinen Sinn, da die Aufgabe darin besteht, die verschiedenen Elemente zu identifizieren. Um die einzelnen Elementarwürfel zu identifizieren, wurde die minimale relative Abweichung von den Literaturwerten gewählt.

Tabelle 3: Absorptionskoeffizienten des vierten Würfels

k	$\mu_k / 10^3 \text{ cm}^{-1}$	Material	relative Abweichung / %
1	$294,08 \pm 0,87$	Aluminium	$45,9 \pm 0,4$
2	$1101,10 \pm 0,76$	Blei	$11,9 \pm 0,1$
3	$1199,73 \pm 1,22$	Blei	$4,0 \pm 0,1$
4	$369,61 \pm 0,70$	Eisen	$36,1 \pm 0,1$
5	$1139,78 \pm 1,03$	Blei	$8,8 \pm 0,1$
6	$1113,18 \pm 0,88$	Blei	$10,9 \pm 0,1$
7	$36,94 \pm 0,83$	Delrin	$69,4 \pm 0,7$
8	$1052,99 \pm 0,75$	Blei	$15,7 \pm 0,1$
9	$963,86 \pm 1,14$	Blei	$22,9 \pm 0,1$

4 Diskussion

In Tabelle 4 sind die aus Massenschwächungskoeffizient σ und Dichte ρ errechneten Absorptionskoeffizienten μ zu finden.

Tabelle 4: Literaturwerte für die Absorptionskoeffizienten der verschiedenen möglichen Materialien [Lab]

Materialien	$\sigma / \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$	$\rho / \text{g cm}^{-3}$	μ / cm^{-1}
Aluminium	0.075	2.699	0.202
Blei	0.110	11.350	1.250
Eisen	0.073	7.874	0.578
Messing	0.075	8.284	0.622
Delrin	0.086	1.405	0.121

Es lässt sich festhalten, dass die Messung der leeren Aluminiumhülle insgesamt sinnvolle Werte ergeben hat. Der Mittelwert ist klein, was darauf hindeutet, dass die Aluminiumhülle nur wenig Einfluss auf die Messung hat, was als positiv zu bewerten ist. Der errechnete Mittelwert des zweiten Würfels, der aus Aluminium-Elementarwürfeln besteht, passt zum Literaturwert aus Tabelle 4. Er liegt zwar nicht im Fehlerintervall, aber weicht nur um $(8,59 \pm 0,14) \%$ ab. Zur Messung des vierten Würfels lässt sich sagen, dass die Ergebnisse durchwachsen zu bewerten sind. Teilweise lässt sich mit einer relativ geringen Abweichung (z.B. für den dritten oder den fünften Elementarwürfel) eine Zuordnung treffen, teilweise sind die Abweichungen in der Nähe von 50 %.

Mögliche Gründe für die Abweichungen sind unter anderem, dass die Projektionen aus Abbildung 2 per Hand eingestellt werden mussten und somit unter Umständen aufgrund von Ungenauigkeiten auch andere Elementarwürfel als die beabsichtigten im Strahlengang liegen. Weiterhin hat der Strahl eine endliche Ausdehnung, welche ebenfalls ein Grund dafür ist, dass sich zusätzlich noch andere Elementarwürfel im Strahlengang befinden. Mit einer maschinellen Einstellung der Projektionen könnte diese Fehlerquelle minimiert werden. Außerdem ist das Stahlstück, welches parallel zum Strahlengang liegen soll, auf einer Seite sehr beweglich, sodass nicht unbedingt sichergestellt ist, dass die Würfel auf den tatsächlichen Strahlengang ausgerichtet wurden. Da dieses Stahlstück während der Messung jedoch nicht bewegt wurde, ist dies ein systematischer Fehler, der alle Messwerte beeinflusst. Außerdem besteht bei solchen Zählexperimenten die Gefahr von statistischen Fluktuationen, deren Einfluss durch längere Messungen minimiert werden könnte.

Literatur

- [Fou17] Python Software Foundation. „Python“. Version 3.6.3. In: (2017). URL: <http://python.org/>.
- [Hun07] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [Lab] Physical Measurment Laboratory. *Photon Cross Section Database*. Aufgerufen am 17. Oktober 2018. URL: <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>.
- [Oli07] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [TU] Physikalisches Praktikum der TU Dortmund. *V14: Tomographie mittels - Strahlung*. Abgerufen am 14. Oktober 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/MASTER/SKRIPT/MTomographie.pdf>.