

V355: Gekoppelte Schwingkreise

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

Durchführung: 17. Januar 2017
Abgabe: 24. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	5
2.1	Versuchsaufbau	5
2.2	Versuchsdurchführung	6
3	Auswertung	7
3.1	Bestimmen der Resonanzfrequenz des festen und Jusatage des regelbaren Schwingkreises	7
3.2	Messung der Fundamentalfrequenzen anhand der Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Schwingkreisspannung	7
3.3	Messung der Fundamentalfrequenzen durch einen Frequenz-Sweep	8
4	Diskussion	10
	Literatur	12

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, gekoppelte Schwingkreise im Hinblick auf Energietausch mittels Schwebung und auf ihre Fundamentalschwingungen zu untersuchen. Die gekoppelten Schaltkreise bestehen aus der Induktivität L und der Kapazität C . Die Kopplung besteht aus einem Kopplungskondensator C_K . Aus Abbildung 1 lässt sich nun mithilfe der

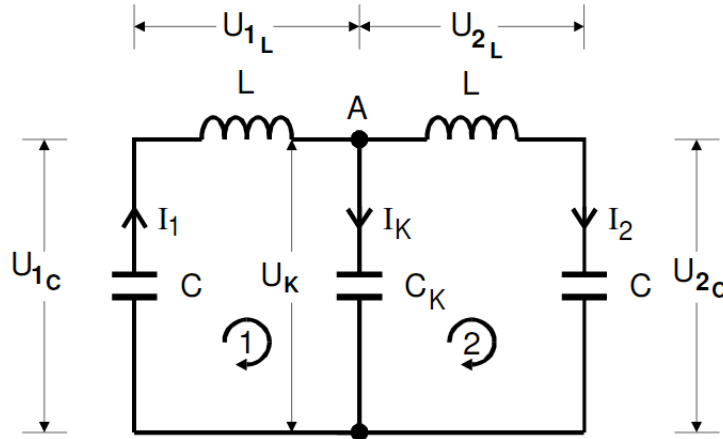


Abbildung 1: Schaltbild zweier gekoppelter Schwingkreise [Dor17].

Kirchhoffschen Knoten- und Maschenregel zwei Schwingungsgleichungen aufstellen

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C_K} (I_1 - I_2) = 0 \quad (1)$$

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C} I_2 - \frac{1}{C_K} (I_1 - I_2) = 0. \quad (2)$$

Diese Differentialgleichungen sind voneinander abhängig und lassen sich deswegen nicht ohne weiteres lösen. Durch Subtraktion von (1) und (2) erhält man

$$L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{C} (I_1 + I_2) = 0 \quad (3)$$

$$L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K} \right) (I_1 - I_2) = 0. \quad (4)$$

Damit lassen sich (3) und (4) unabhängig voneinander lösen; Die Lösung von (3) ist hierbei eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsfrequenz

$$\nu_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (5)$$

Diese Schwingung wird als gleichphasig bezeichnet. Diese wird dadurch ausgezeichnet, dass beide Schwingkreise so schwingen, als wäre keine Kopplung vorhanden. Wenn man

zwei durch eine Feder gekoppelte Fadenpendel in die gleiche Richtung gleich weit auslenkt, dann wird die Feder weder gestaucht noch gestreckt, sie verharrt in ihrem unausgelenkten Zustand. Genauso verhält es sich mit zwei Schwingkreisen, die mit gleicher Amplitude und Phase anfangen zu oszillieren.

Die Lösung von (4) hat die Schwingungsfrequenz

$$\nu_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}} . \quad (6)$$

Diese Art der Schwingung wird als gegenphasig bezeichnet. Die Oszillation beginnt mit gleicher Amplitude, aber entgegengesetzter Phase. Offensichtlich gilt

$$\nu_- > \nu_+ .$$

ν_+ und ν_- sind die Frequenzen zu den Fundamentalschwingungen des gekoppelten Systems.

Ein weiteres interessantes Phänomen ergibt sich, wenn nur einer der beiden Schwingkreise zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Strom ungleich von 0 hat (hier Schwingkreis 1). Zu diesem Zweck bildet man aus den Lösungen von (3) und (4) durch Umformungen Ausdrücke für I_1 und I_2 (siehe Abbildung 1)

$$I_1(t) = \frac{1}{2} (I_{1_0} + I_{2_0}) + \cos(2\pi\nu_+ t) + \frac{1}{2} (I_{1_0} - I_{2_0}) + \cos(2\pi\nu_- t) \quad (7)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} (I_{1_0} + I_{2_0}) + \cos(2\pi\nu_+ t) - \frac{1}{2} (I_{1_0} - I_{2_0}) + \cos(2\pi\nu_- t) . \quad (8)$$

Falls man nun den oben beschriebenen Ansatz einsetzt und mit cos-Identitäten umformt, erhält man aus (7) und (8)

$$I_1(t) = I_{1_0} \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right) \quad (9)$$

$$I_2(t) = I_{1_0} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right) . \quad (10)$$

Wenn man annimmt, dass $C_K \gg C$ gilt, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-) &\approx \omega_+ \\ \omega_- - \omega_+ &\ll \omega_+ . \end{aligned}$$

Mit diesen Annahmen lässt sich aus (9) und (10) ablesen, dass die Amplitude der ersten Schwingung genau dann ein Maximum hat, wenn die Amplitude der zweiten Schwingung gleich 0 ist. Im Verlauf der Zeit wird I_2 größer und I_1 kleiner, bis die Ausgangslage umgekehrt wurde. Diese Art der Schwingung, wie in Abbildung 2 zu sehen, nennt man Schwebung. Die Frequenz $\nu_- - \nu_+$, mit der die Gesamtenergie des Systems zwischen den Schwingkreisen oszilliert, wird als Schwebungsfrequenz bezeichnet.

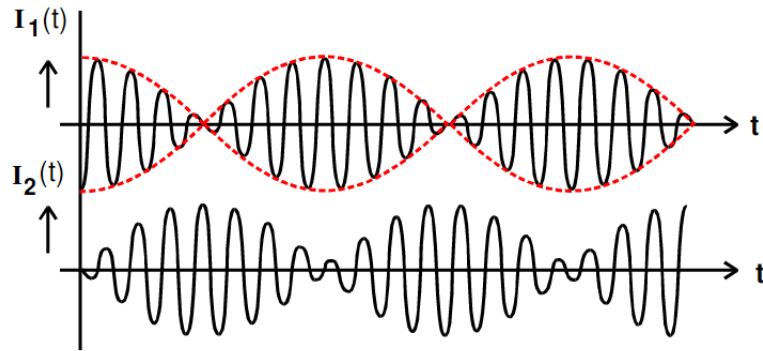


Abbildung 2: Amplitudenverlauf zweier Schwingungen, wenn eine Schwebung eintritt.

2 Durchführung

Die Bauteilwerte lauten wie folgt:

$$L = 23.954 \text{ mH}$$

$$C = 0.7932 \text{ nF}$$

$$C_{\text{sp}} = 0.028 \text{ nF.}$$

C_{sp} gibt dabei die Kapazität der Spule an.

2.1 Versuchsaufbau

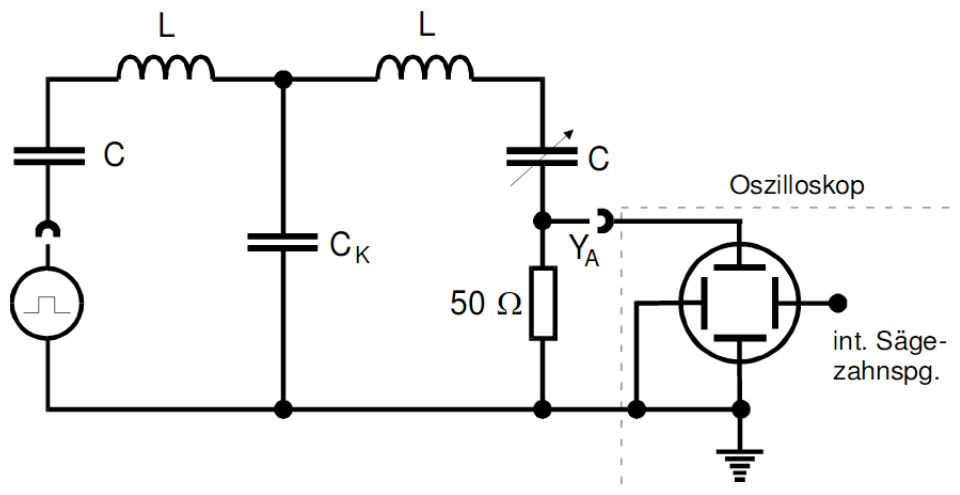


Abbildung 3: Schaltskizze zur Untersuchung des Schwebungsphänomens und, mit leichten Abwandlungen, zur Ermittlung der Fundamentalschwingungen.

Mit einer Rechteckspannung wird der linke LC -Schwingkreis in Abbildung 3 angeregt. Über den Kopplungskondensator C_K gelangt die Schwingung in den rechten Teil des

gekoppelten Schwingkreises (mit einem kapazitiv verstellbaren Kondensator), wo über den einen ohmschen Widerstand ein Oszilloskop die Schwebung sichtbar macht.

Um die Fundamentalschwingungen zu bestimmen, wird in Abbildung 3 die Rechteck- durch eine Sinusspannung ersetzt und jene ebenfalls auf das Oszilloskop gegeben.

2.2 Versuchsdurchführung

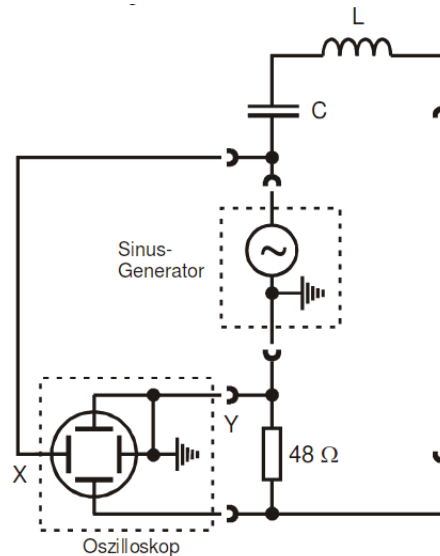


Abbildung 4: Schaltskizze zur Justierung des einstellbaren Kondensators im rechten Schwingkreis in Abbildung 3.

Zuerst wird mithilfe der Schaltung aus Abbildung 4 der rechte Schwingkreis unter Zuhilfenahme des einstellbaren Kondensators aus Kapitel 2.1 auf die Resonanzfrequenz des anderen Schwingkreises eingestellt. Zu diesem Zweck wird mit Hilfe von Lissajous-Figuren die Frequenz gesucht, bei der die Phase zwischen Generatorspannung und Schwingkreisstrom im linken Schwingkreis gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Alsdann wird der Vorgang für den rechten Schwingkreis wiederholt, diesmal wird jedoch die eben bestimmte Resonanzfrequenz durch den verstellbaren Kondensator eingestellt.

Um das Verhältnis zwischen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz zu bestimmen, wird für alle möglichen Kopplungskondensatoren $2 \leq C_K \leq 12 \text{ nF}$ die Anzahl der Schwingungsmaxima innerhalb einer Schwebungsperiode gezählt. Dies lässt sich über das Oszilloskop aus 2.1 bewerkstelligen.

Weiterhin sollen die Fundamentalschwingungen ν_+ und ν_- bestimmt werden. Wie in Kapitel 2.1 beschrieben werden Sinusspannung und Schwingkreisstrom im Oszilloskop gegeneinander aufgetragen und mithilfe von Lissajou-Figuren die Frequenzen gesucht, bei denen die Phase 0 (ν_+ , da $\nu_+ < \nu_-$) bzw. π (ν_-) ist. Dabei werden erneut alle möglichen Kopplungskondensatoren $2 \leq C_K \leq 12 \text{ nF}$ nacheinander eingeschaltet.

Eine andere Methode, um die Fundamentalschwingungen zu bestimmen, ist der so-

genannte Sweep. Dabei wird, in diesem Fall, in einer Sekunde das Frequenzspektrum von einer beliebigen Anfangs- bis zu einer beliebigen Endfrequenz auf einem Oszilloskop dargestellt. Zu sehen sind dann (neben zwei kleinen Peaks, die Anfangs- und Endzeitpunkt darstellen) zwei große Peaks, die die Frequenzen ν_+ und ν_- (in der Reihenfolge) darstellen. Dies wird erneut in Abhängigkeit von C_K gemessen.

3 Auswertung

Die Fehler wurden in "python" mithilfe des Paketes "uncertainties"¹ bestimmt.

3.1 Bestimmen der Resonanzfrequenz des festen und Jusatage des regelbaren Schwingkreises

Die gemessene Resonanzfrequenz des festen Schwingkreises beträgt 35.65 kHz bei einem geschätzten Fehler von 20 Hz. Nach (5) folgt für die theoretische Resonanzfrequenz ein Wert von 36.51 kHz. Die relative Abweichung zwischen Theorie und Experiment beträgt 2.36 %, liegt also in einem vertretbar kleinen Bereich, aber dennoch außerhalb des angenommenen Fehlers. Der regelbare Schwingkreis wird entsprechend so eingestellt, dass er dieselbe Resonanzfrequenz hat.

3.2 Messung der Fundamentalfrequenzen anhand der Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Schwingkreisspannung

C_k/nF	$\frac{f_{\text{Schwebung}}}{f_{\text{Schwingung}}}$	ν_+/kHz	ν_-/kHz
2.19	8	35.71	46.51
2.86	8	35.71	44.44
4.74	14	35.71	41.67
6.86	20	35.71	40.00
8.18	22	35.71	39.22
9.99	26	35.71	38.46
12	32	35.71	37.74

Tabelle 1: Messwerte für die Fundamentalfrequenzen sowie das Verhältnis zwischen Schwingungs und Schwebungsfrequenz, welches für eine vollständige Periode der Einhüllenden gemessen wurde. Die C_k werden in den Rechnungen mit dem auf der Apperatur angegebenen Fehler von $\pm 0.3\%$ behandelt, die Frequenzen mit einem geschätzten Fehler von ± 20 Hz und die Anzahl der Maxima mit ± 1 .

Die Messwerte sind in Tabelle 1 dargestellt. Nach (5) mit

$$C_{\text{ges}} = C + C_{\text{sp}} \quad (11)$$

¹Versionen: python 3.5.1, uncertainties 3.0.1

folgt für die von der Kapazität des Kopplungskondensators unabhängige, theoretische, gleichphasige Schwingung ein Wert von 35.89 kHz. Dieser Wert liegt nicht in der angenommenen Fehlertoleranz des Messwertes, die relative Abweichung zwischen Theorie und Experiment beträgt dennoch lediglich 0.49 %.

Für die Fundamentalfrequenz der gegenphasigen Schwingung folgen nach (6) mit

$$C_{\text{ges}} = C_{\text{sp}} + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k} \right)^{-1} \quad (12)$$

die in Tabelle 2 dargestellten Werte für die einzelnen Kapazitäten des Kopplungskondensators. Ebenfalls in dieser Tabelle sind die relativen Abweichungen zwischen den Theorie- und Messwerten eingetragen. Die relativen Fehler sind wieder extrem gering. Die Werte für $C_k = 2.19 \text{ nF}$ liegen desweiteren im Rahmen ihrer gegenseitigen Messungenauigkeit, betrachtet man die Überschneidung beider Fehlerintervalle. Aus:

C_k/nF	ν_-/kHz	$\nu_{-, \text{rechnerisch}}/\text{kHz}$	relative Abweichung/%
2.19	46.51	46.55 ± 0.03	0.09
2.86	44.44	44.33 ± 0.02	0.26
4.74	41.67	41.22 ± 0.02	1.07
6.86	40.00	39.66 ± 0.01	0.84
8.18	39.22	39.08 ± 0.01	0.35
9.99	38.46	38.52 ± 0.01	0.17
12.00	37.74	38.10 ± 0.01	0.95

Tabelle 2: Werte für die experimentell und theoretisch bestimmten gegenphasigen Fundamentalfrequenzen sowie der relative Fehler zwischen diesen Werten. Alle gemessenen Frequenzen werden mit einem Fehler von $\pm 20 \text{ Hz}$ angenommen.

$$\frac{f_{\text{Schwebung}}}{f_{\text{Schwingung}}} = n_{\text{Maxima}} = \frac{(\nu_+ + \nu_-)}{(\nu_- - \nu_+)} \quad (13)$$

folgen mit den oben theoretisch berechneten Werten die in Tabelle 3 dargestellten Werte für eine vollständige Schwingung der Einhüllenden. Wieder zeigen sich geringe relative Abweichungen. Für einen Teil der Werte liegen theoretische und experimentelle Werte im Bereich der angenommenen Messungenauigkeit.

3.3 Messung der Fundamentalfrequenzen durch einen Frequenz-Sweep

Mit der in der Durchführung beschriebenen Methode folgt ein Frequenzspektrum:

$$f(t) = f_{\text{Start}} + (f_{\text{Ende}} - f_{\text{Start}}) \cdot \frac{t}{t_{\text{Sweep}}} \quad (14)$$

mit $0 \leq t \leq t_{\text{Sweep}}$. f_{Ende} bezeichnet die Startfrequenz, f_{Start} die Endfrequenz und t_{sweep} die Sweep-Dauer von einer Sekunde. Für den bei $t = 308 \text{ ms}$ gemessenen ν_+ -Peak folgt

C_k/nF	$n_{\text{Max.}}$	$n_{\text{Max.,theo.}}$	relative Abweichung/%
2.19	8	7.73 ± 0.02	3.51
2.86	8	9.50 ± 0.02	15.81
4.74	14	14.45 ± 0.04	3.08
6.86	20	20.00 ± 0.05	0.01
8.18	22	23.45 ± 0.07	6.19
9.99	26	28.18 ± 0.08	7.75
12.00	32	33.44 ± 0.09	4.30

Tabelle 3: Werte für die experimentell und theoretisch bestimmten Verhältnisse zwischen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz sowie der relative Fehler zwischen diesen Werten. Die experimentellen Werte werden dabei mit einem Fehler von ± 1 angenommen.

C_k/nF	t/ms	ν_-/kHz	$\nu_{-, \text{rechnerisch}}/\text{kHz}$	relative Abweichung/%
0.997	712	54.88 ± 0.49	56.26 ± 0.05	2.50
2.190	528	45.88 ± 0.49	46.55 ± 0.03	1.45
2.860	484	43.73 ± 0.49	44.33 ± 0.02	1.36
4.740	416	40.41 ± 0.49	41.22 ± 0.01	2.02
6.860	384	38.84 ± 0.49	39.66 ± 0.01	2.11
8.180	372	38.25 ± 0.49	39.08 ± 0.01	2.16
9.990	360	37.67 ± 0.49	38.52 ± 0.01	2.28
12.000	344.00	36.89 ± 0.49	38.10 ± 0.01	3.29

Tabelle 4: Werte für die experimentell und theoretisch bestimmten Fundamentalfrequenzen ν_- sowie den relative Fehler zwischen diesen Werten. Die Zeiten werden mit einem angenommen Fehler von ± 10 ms behandelt.

daraus eine Frequenz von (35.12 ± 0.49) kHz. Im Vergleich mit dem in 3.2 bestimmten, rechnerischen Wert von ν_+ folgt eine relative Abweichung von 2.12 %. ν_+ wurde acht mal gemessen, ohne dass sich der Wert ändert. Der Wert liegt nicht im Bereich der angenommenen Messungenauigkeit von ± 10 ms.

In Tabelle 4 sind die gemessenen Zeiten zwischen Startpunkt und dem ν_- -Peak, die damit aus (14) berechneten Frequenzen sowie die relativen Abweichungen zu den ebenfalls aufgeführten theoretischen Frequenzen angegeben. Keiner der Werte liegt im Bereich der Messungenauigkeit. Die relativen Fehler sind jedoch auch hier gering.

4 Diskussion

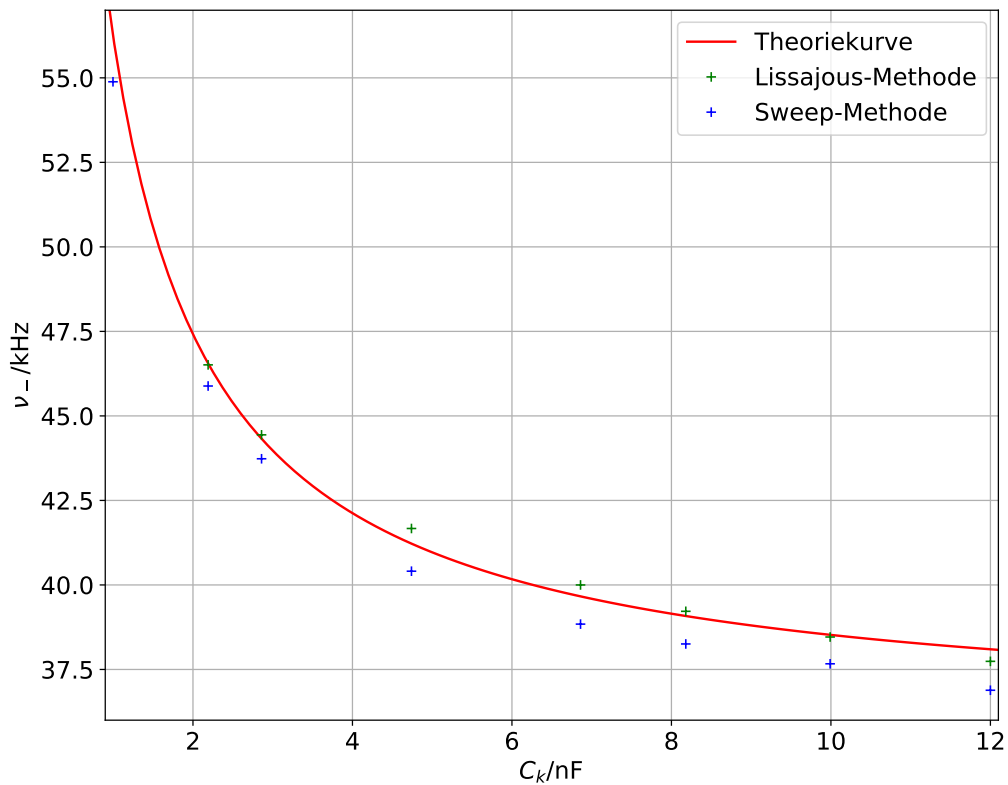


Abbildung 5: Aus den einzelnen Methoden sowie rechnerisch erhaltene Werte für ν_- in Abhängigkeit der Kapazität des Kopplungskondensators.

In Abbildung 5 sind die aus den einzelnen Methoden erhaltenen Werte dargestellt. Es zeigt sich, dass die über Lissajous-Figuren bestimmten Frequenzen näher an den

Theoriewerten sind als die aus der Sweep-Methode. Dies lässt sich durch die Art der Messwertaufnahme erklären. Während Lissajous-Figuren deutlich und ohne große Abweichungen zu erkennen sind, begünstigt das Ablesen eines Peaks durch den Cursor systematische Fehler. Es kann nicht mit ausreichender Sicherheit festgestellt werden, ob der exakt richtige Punkt getroffen wurde. Dennoch sind die relativen Abweichungen bei beiden Methoden im niedrigen, einstelligen Prozentbereich. Sie stellen also beide eine gute Möglichkeit dar, die Fundamentalfrequenzen eines Schwingkreises zu bestimmen. Dies fällt auch beim Vergleich der ebenfalls bestimmten ν_+ -Frequenzen auf. Auch die Zählung der Maxima innerhalb einer Schwebungsperiode zeigt, dass Theorie und Messergebnis bei diesem Versuch nahe beieinander liegen und verifiziert daher die Ergebnisse aus der Bestimmung der Fundamentalfrequenzen. Die vergleichsweise hohen Abweichungen lassen sich durch die im hohen einstelligen bis niedrigen zweistelligen Bereich liegenden Werte erklären. Dort sorgen bereits geringe Unterschiede zwischen den Werten für relativ hohe prozentuale Abweichungen.

Zur Verbesserung der Messgenauigkeit bieten sich präzisere Geräte an. Ansonsten liefern die Messungen aber für den betriebenen Aufwand und die zur Verfügung stehenden Geräte sehr gute Ergebnisse.

Literatur

- [Dor17] TU Dortmund. *V355: Gekoppelte Schwingkreise*. 17. Jan. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf>.