

## **VERSUCH NUMMER 14**

# **Tomographie mittels Gamma-Strahlung**

Patrick Schmidt  
patrick7.schmidt@udo.edu

Karl Schiller  
karl.schiller@udo.edu

Durchführung: 02.05.2018

Abgabe: 23.05.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>1</b>
2.1 Gamma-Spektrum . . . . .	1
2.2 Tomographie . . . . .	2
<b>3 Versuchsaufbau</b>	<b>3</b>
<b>4 Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>5 Auswertung</b>	<b>5</b>
5.1 Nullmessung . . . . .	5
5.2 Würfel aus einheitlichem Material . . . . .	6
5.3 Würfel mit unbekanntem Inhalt . . . . .	7
<b>6 Diskussion</b>	<b>9</b>
<b>Literatur</b>	<b>10</b>

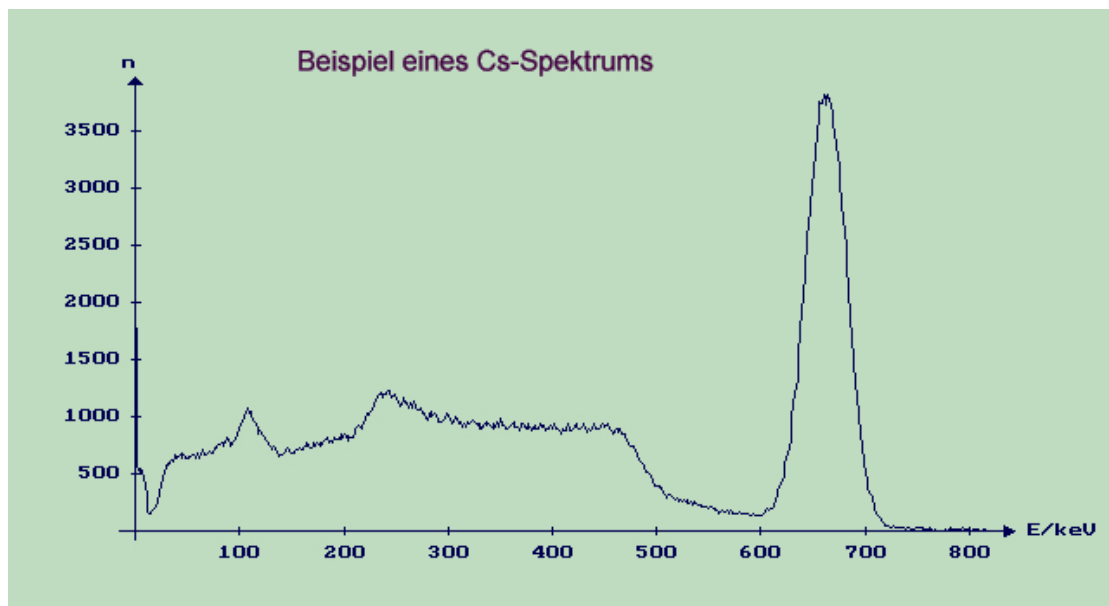
# 1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung der Materialien von neun Würfeln anhand ihrer Absorptionskoeffizienten. Diese befinden sich in einem Aluminiumgehäuse in drei Schichten von jeweils drei mal drei Würfeln.

## 2 Theorie

### 2.1 Gamma-Spektrum

Wird die Intensität von Strahlung nach Durchlauf einer Probe gegen die Wellenlänge aufgetragen, ergibt sich ein typischer Verlauf, welcher aus den unterschiedlichen Wechselwirkungen der Strahlung im Material resultiert. Dieser Verlauf wird für Photonen beziehungsweise  $\gamma$ -Strahlung auch „ $\gamma$ -Spektrum“ genannt. Für große Wellenlängen dominiert der Comptoneffekt, welcher zu einer kontinuierlichen Absorptionslinie bis zur sogenannten „Comptonkante“ führt. Diese Comptonkante befindet sich bei der Wellenlänge, bei welcher ein einfallendes Photon einen maximalen Energieübertrag an das Elektron leistet. Deshalb sinkt die Intensität der die Probe durchlaufenden Strahlung bei dieser Wellenlänge abrupt. Bei etwas höheren Wellenlängen ist ein Peak messbar, welche auf dem Photoeffekt beruht, der sogenannte „Photopeak“. Bei noch kleineren Wellenlängen steigt die Intensität wieder an, da der Effekt der „Paarerzeugung“ auftritt. Hierbei bildet sich aus der Photonenenergie ein Teilchen-Antiteilchen-Paar. Dazu muss jedoch die Energie des Photons mindestens der Ruheenergie des Teilchen-Antiteilchen-Paares entsprechen.



**Abbildung 1:** Beispiel eines  $\gamma$ -Spektrums für  $^{137}\text{Cs}$  [8]. Aufgetragen ist die Anzahl an Ereignissen in Abhängigkeit der Energie.

Ein Beispiel eines solchen Absorptionsspektrums ist in Abbildung 1 dargestellt. Hier ist die

Anzahl an gemessenen Ereignissen für ein festes Zeitintervall gegen die Photonenenergie aufgetragen. Für kleine Energien ist die kontinuierliche Absorptionslinie des Comptoneffekts und die Comptonkante bei ungefähr 480 keV erkennbar und bei grob 680 keV befindet sich der Photopeak. Die Paarerzeugung ist nicht abgebildet, da sie erst bei höheren Energien auftritt.

## 2.2 Tomographie

Tomographie ist ein Verfahren, bei welchem aus verschiedenen Querschnittsbildern ein Objekt räumlich abgebildet wird. Es wird unter anderem bei der Untersuchung von Menschen auf Tumorgewebe eingesetzt, da sich auch kleine Dichteunterschiede der Organe deutlich erkennen lassen [7]. In diesem Versuch wird dazu  $\gamma$ -Strahlung verwendet. Trifft  $\gamma$ -Strahlung auf Materie, verringert sich die Intensität  $N$  nach der Strecke  $r$  von  $N_0$  auf

$$N(r) = N_0 \exp(-\mu r)$$

mit dem Absorptionskoeffizienten  $\mu$ . Als Ursache sind hierbei Streu und -Absorptionseffekte zu nennen. Aufgrund der in Abschnitt 2.1 genannten Effekte werden jedoch sowohl Photonen, als auch Elektronen wieder emittiert und können somit detektiert werden. Wird eine Probe bestehend aus mehreren Würfeln  $i$  der Dicke  $d_i$  bestrahlt, lässt sich die Gleichung zu

$$\sum_i \mu_i d_i = \ln \left( \frac{N_0}{N_j} \right)$$

umstellen, dabei ist  $N_j$  die Ausgangsintensität der  $j$ -ten Messung beziehungsweise  $j$ -ten Projektion. Der Index  $i$  summiert dabei über alle Würfel, durch welche der Strahl transmittiert wird. Diese Umstellung lässt sich ebenfalls als Matrixgleichung der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \vec{\mu} &= \vec{I} \text{ mit} \\ \vec{\mu} &= (\mu_1, \dots, \mu_9)^T \text{ und} \\ \vec{I} &= \ln(I_0/N_j) \end{aligned} \tag{1}$$

realisieren. Der Vektor  $\vec{\mu}$  beinhaltet die Absorptionskoeffizienten, der Vektor  $\vec{I}$  stellt die Intensitäten der einzelnen Projektionen dar und die Matrix  $\mathbf{A}$  beschreibt die Würfelgeometrie. Werden mehr Schichten aufgenommen, als Würfel in der Probe sind, lassen sich die Absorptionskoeffizienten mittels

$$\vec{\mu} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \vec{I} \tag{2}$$

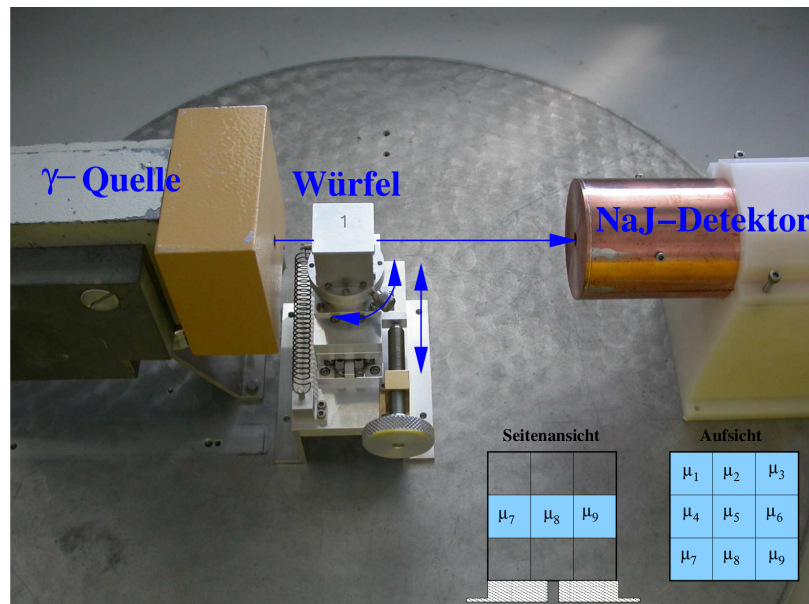
mit den zugehörigen Abweichungen

$$\sigma_i = \sqrt{\text{diag} \{ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \}} \tag{3}$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen.

### 3 Versuchsaufbau

Ein Ausschnitt des nachfolgend beschriebenen Versuchsaufbaus ist in Abbildung 2 dargestellt. Die Gamma-Strahlung einer  $^{137}\text{Cs}$  Quelle wird durch eine Blende kollimiert und trifft auf eine Probe in Form eines Würfels. Dabei verhindert die Kollimation eine Ausbreitung der Strahlung im Sinne des Strahlenschutzes. In Strahlrichtung hinter dem Würfel befindet sich ein NaJ-Detektor. Von diesem Szintillationsdetektor werden Pulse erzeugt und nach einer Verstärkung in einen Multichannelanalyser gegeben. Diese Pulse werden durch Elektronen im Szintillator (hier NaJ) erzeugt, indem einfallende Strahlung die Elektronen anregt und die Anregungsenergie im Anschluss in Form von Photonen wieder abgegeben wird (indem die Elektronen wieder auf niedrigere Energieniveaus fallen). Im angeschlossenen Multichannelanalyser werden diese Pulse dann in ein Energie-Zählrate-Histogramm übersetzt. Dieser Analyser ist an einen Computer angeschlossen, auf welchem mittels des Programms MAESTRO das erstellte Histogramm ausgelesen und gespeichert wird. Der Versuchsaufbau befindet sich mit Ausnahme des Computers hinter einem Schutz aus Bleiklötzen, um eine Strahlungsaufnahme möglichst zu vermeiden. Es werden die folgenden vier Proben verwendet: Die erste Probe besteht aus einem hohlen würfelförmigen Aluminiumgehäuse. Proben zwei und drei bestehen aus dem selben Aluminiumgehäuse, jedoch befindet sich innerhalb jeweils ein zu bestimmendes Material. Schließlich besteht die vierte Probe ebenfalls aus einem Aluminiumgehäuse, in welchem neun kleine Würfel unbekannten Materials in drei Schichten von jeweils drei mal drei Würfeln untergebracht sind. Eine schematische Darstellung der mittleren Ebene der vierten Probe befindet sich in Abbildung 2 mit dem Titel „Aufsicht“. Jede Probe wird vertikal so positioniert, dass die mittlere Ebene analysiert werden kann (siehe Abbildung 2 „Seitenansicht“). Weiterhin ist der Probenhalter horizontal verschieb- und drehbar.



**Abbildung 2:** Der verwendete Versuchsaufbau [2, S. 4]. In der unteren linken Ecke befinden sich zwei schematische Zeichnungen des vierten Würfels.

## 4 Durchführung

Im Programm MAESTRO werden für jede Messung die Marker so positioniert, dass nur der Photopeak des Spektrums vermessen wird. Der Photopeak hat wie in Abbildung 1 beispielhaft dargestellt die höchste Anzahl an Ereignissen im vermessenen Energiebereich, sodass er sich zur Bestimmung der Absorptionskoeffizienten besonders gut eignet. Nach dem Aufnehmen eines Spektrums kann das Maximum des Photopeaks im Programm abgelesen werden. Zu Beginn wird die Messzeit auf 60s eingestellt und das Spektrum der verwendeten Quelle ohne Probe vermessen. Im Anschluss werden die Würfel 1 und 2 eingesetzt und bei einer Messzeit von 60s für Würfel 1 und 480s für Würfel 2 aus jeweils vier verschiedenen Positionen vermessen. Die Positionen sind in Abbildung 3 als  $I_1, I_2, I_{11}$  und  $I_{12}$  eingezeichnet. Die Messzeit ist so zu wählen, dass die statistische Unsicherheit kleiner als 3% ist, also im Photopeak mindestens circa 1112 Ereignisse registriert werden. Dies wird in der Auswertung näher erläutert. Zuletzt wird Würfel vier eingesetzt und alle 12 in Abbildung 3 dargestellten Strahlengänge werden vermessen. Dabei wird die Messzeit auf 480s eingestellt.

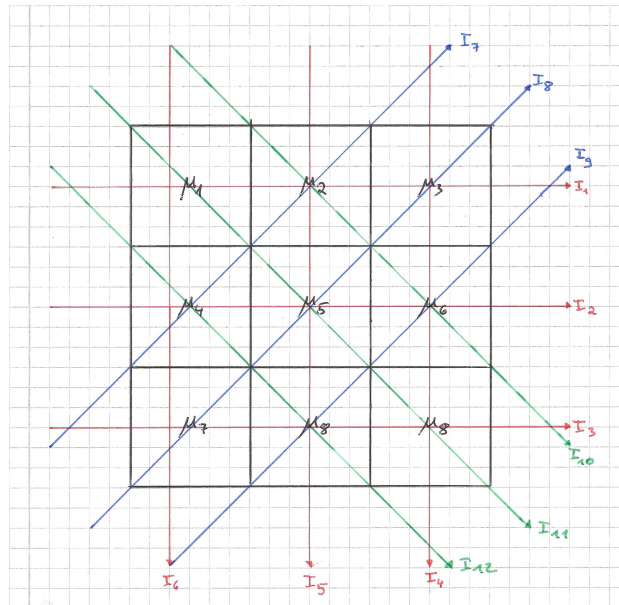


Abbildung 3: Die verschiedenen Strahlengänge durch die Würfelprobe.

## 5 Auswertung

Als Fehler wird ein statistischer Poissonfehler verwendet, da es sich in diesem Experiment um ein Zählexperiment handelt. Dieser soll hier unter 3 % liegen, damit auf genauere Rechnungen verzichtet werden kann.

$$\frac{1}{\sqrt{N}} < 0.03$$

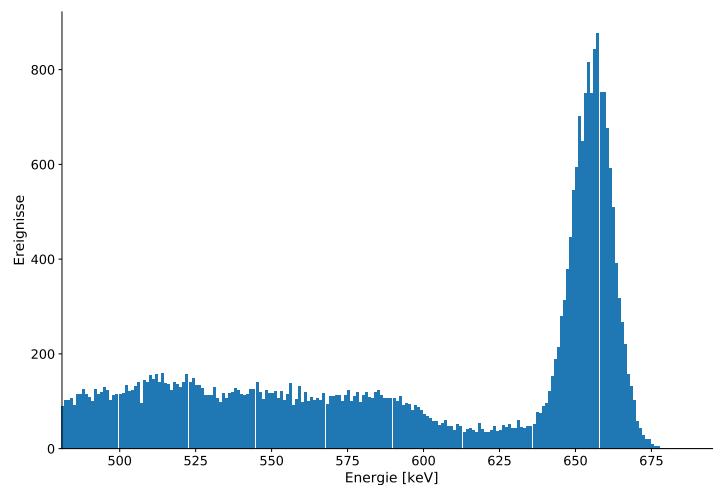
Dies ist gewährleistet ab einer Anzahl an Ereignissen von  $N > 1112$ .

### 5.1 Nullmessung

Zur Bestimmung der Spektren der Würfel wird zunächst eine Nullmessung (Messung ohne Würfel im Strahlengang) durchgeführt. Diese ist in Abbildung 4 dargestellt. Gemessen wird eine Rate von

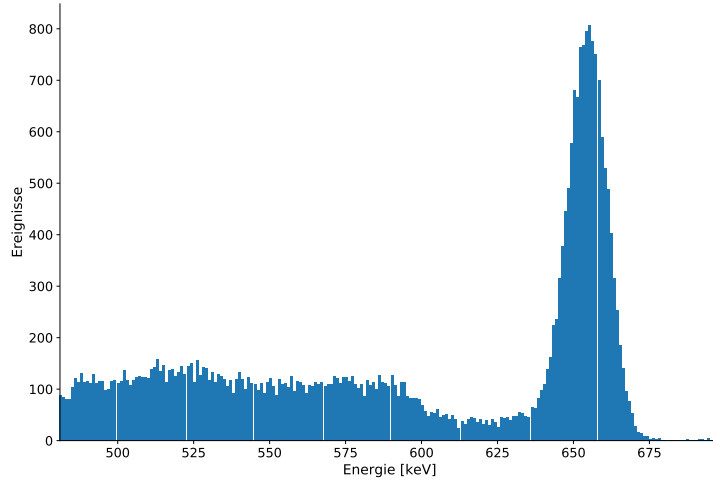
$$I_0 = 158.6 \frac{\text{Zählungen}}{\text{s}}$$

bei 9520 Ereignissen über ein Zeitintervall von 60 s verwendet.



**Abbildung 4:** Messung der Energieverteilung bei einer Leermessung ohne Würfel. Die Fehlerbalken repräsentieren die statistischen Poissonfehler.

Da die einzelnen Würfel ein Aluminiumgehäuse besitzen, wird eine Messung eines solchen Gehäuses durchgeführt, um die zusätzliche Absorption zu ermitteln. Dieses Aluminiumgehäuse sorgt dafür, dass die einzelnen kleinen Würfelteile nicht auseinanderfallen. Das gemessene Spektrum des Aluminiumgehäuses ist in Abbildung 5 zu sehen.



**Abbildung 5:** Messung der Energieverteilung eines Aluminiumgehäuses.

Da ein Würfel durch Drehen und Verschieben einen unterschiedlichen Wegunterschied besitzen kann, werden die in Abbildung 3 zu erkennenden Projektionen  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_{11}$  und  $I_{12}$  betrachtet. Die Intensitätsvektoren  $\vec{I}$  des Würfels ergeben sich aus den gemessenen Daten nach Formel (1). Die zugehörige Projektionsmatrix A sowie ihre Zusammenstellung ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Dabei ist zu sehen, dass allerdings mehrere Projektionen die selben Weglängen besitzen. Füllt man die zueinander analogen Projektionen mit den entsprechenden Werten, so ergibt sich der Vektor  $\vec{\tilde{I}}$ :

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ 156.68 \\ 157.28 \\ - \\ - \\ - \\ - \\ 156.82 \\ 156.53 \\ - \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{I}} = \begin{pmatrix} 156.68 \\ 157.28 \\ 156.68 \\ 156.68 \\ 157.28 \\ 156.68 \\ 156.82 \\ 156.53 \\ 156.82 \\ 156.82 \\ 156.53 \\ 156.82 \end{pmatrix}$$

## 5.2 Würfel aus einheitlichem Material

Die verwendeten Würfel 2 und 3 bestehen nach der Anleitung [2] einheitlich aus Aluminum bzw. Blei. Zur Betrachtung werden die Messungen des Gehäuses von den Messdaten der anderen Würfel abgezogen, um nur den Inhalt zu betrachten. Die Geometriematrix kann nun in einen Vektor mit aufsummierten Komponenten umgeschrieben werden. Dabei ergibt



sich für beide Würfel der selbe Vektor, da beide Würfel gleich durchstahlt werden:

$$A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren beschreiben die Projektionen  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_{11}$  und  $I_{12}$ . Aus der Methode der kleinsten Quadrate (Formeln (2) und (3)) lassen sich die einzelnen Absorptionskoeffizienten der verschiedenen Materialien berechnen. Die daraus bestimmten Werte sind Tabelle 1 zu entnehmen.

**Tabelle 1:** Absorptionskoeffizienten der Würfel 2 und 3 bei verschiedenen Projektionen.

Würfel	Absorptionkoeffizient $\mu/\text{cm}^{-1}$	Sollmaterial	$\mu/\text{cm}^{-1}$ Literatur	Abweichung/%
2	0,18 $\pm$ 0,02	Aluminium	0.203	11,33
3	0,91 $\pm$ 0,06	Blei	1.245	26,90

Die Literaturwerte sind in Literatur [1] nachzulesen. Auf Herkunft der Abweichungen wird in Abschnitt 6 eingegangen.

### 5.3 Würfel mit unbekanntem Inhalt

Vor der Untersuchung des Würfel 4 wird die Intensität ohne Würfel im Strahlengang noch einmal gemessen. Dabei werden 6916 Ereignisse in 60 s gezählt, also eine Rate von

$$I_0 = 115.26 \frac{\text{Zählungen}}{\text{s}}.$$

Dies ergibt einen deutlich anderen Wert als die erste Nullmessung. Diese Diskrepanz wird in Kapitel 6 näher erläutert.

Der Würfel 4 wird untersucht, um seine Materialien zu bestimmen. Dafür wird er mit 12 Projektionen vermessen. Die neun einzelnen Absorptionskoeffizienten werden durch die Geometriematrix  $A$  bestimmt. Diese ergibt sich durch den Weg, den die Teilchen durch den Würfel zurücklegen, um zum Detektor zu gelangen. Mit den einzelnen Projektionen, die in 3 zu erkennen sind, werden die einzelnen Zeilen gefüllt. Dabei steht eine  $\sqrt{2}$  für eine Projektion durch eine Diagonale. Daraus ergibt sich  $A$  mit der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der dazugehörige Vektor der Ausgangszählraten  $I_4$  und der Vektor der logarithmierten Intensitäten der Projektionen bestehen aus:

$$\vec{I}_4 = \begin{pmatrix} 6.65 \pm 0.12 \\ 4.83 \pm 0.10 \\ 4.86 \pm 0.10 \\ 8.81 \pm 0.14 \\ 7.86 \pm 0.13 \\ 9.52 \pm 0.14 \\ 7.99 \pm 0.13 \\ 3.21 \pm 0.08 \\ 5.52 \pm 0.11 \\ 13.22 \pm 0.17 \\ 3.38 \pm 0.8 \\ 5.36 \pm 0.11 \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{I}}_4 = \begin{pmatrix} 3.15 \pm 0.38 \\ 3.48 \pm 0.46 \\ 3.47 \pm 0.45 \\ 2.88 \pm 0.33 \\ 2.99 \pm 0.36 \\ 2.80 \pm 0.32 \\ -1.60 \pm 1.06 \\ 3.89 \pm 0.56 \\ -1.22 \pm 1.09 \\ -2.10 \pm 1.04 \\ 3.84 \pm 0.54 \\ -1.1 \pm 1.10 \end{pmatrix}$$

Analog zu den Würfeln 2 und 3 wird auch hier die Methode der kleinsten Quadrate angewandt. Mit den Ergebnissen und dem normalisierten Logarithmus ergeben sich folgende Werte für die Absorptionskoeffizienten:

**Tabelle 2:** Bestimmte Absorptionskoeffizienten aus den verschiedenen Projektionen für Würfel 4.

Teilwürfel	Absorptionskoeffizient $\mu/\text{cm}^{-1}$
1	1,137 $\pm$ 0,363
2	0,608 $\pm$ 0,414
3	0,938 $\pm$ 0,369
4	0,264 $\pm$ 0,407
5	1,322 $\pm$ 0,234
6	0,872 $\pm$ 0,412
7	1,267 $\pm$ 0,361
8	0,360 $\pm$ 0,412
9	0,991 $\pm$ 0,369

## 6 Diskussion

Die in Tabelle 1 aufgeführten Absorptionskoeffizienten der Würfel mit homogener Materialverteilung werden mit den Literaturwerten in Tabelle 3 verglichen. Daraus ergibt sich, dass der Koeffizient des Würfel 2 ( $\mu = 0,177 \text{ cm}^{-1}$ ) gut zu Aluminium passt. Die Abweichung nach unten beträgt dabei 12,38 %. Bei Würfel 3 ( $\mu = 0,918 \text{ cm}^{-1}$ ) beträgt die Abweichung nach unten zu Blei 26,56 %, weshalb davon auszugehen ist, dass der Würfel 3 aus Blei besteht.

**Tabelle 3:** Der Wirkungsquerschnitt, Dichte, sowie Absorptionskoeffizienten verschiedener Materialien [1].

Material	$\sigma/\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$	$\rho/\text{gcm}^{-3}$	$\mu/\text{cm}^{-1}$
Blei	0,110	11,34	1,245
Messing	0,073	8,41	0,614
Eisen	0,073	7,86	0,574
Aluminium	0,075	2,71	0,203
Delrin	0,082	1,42	0,116

Aus der Versuchsanleitung und den Messergebnissen geht hervor, dass Würfel 4 aus verschiedenen Teilwürfeln besteht. Aufgrund der weiter unten genannten Gründe kommt es zu Abweichungen der Zählraten nach unten. Deshalb wird im Zweifelsfall bei der Materialbestimmung dasjenige Material ausgewählt, welches den nächst höheren Absorptionskoeffizienten hat. Diese Absorptionskoeffizienten sind in Tabelle 4 zu finden.

Bei dieser Zuordnung ist anzumerken, dass es einige experimentelle Schwierigkeiten gab, die zu großen Fehlern geführt haben können. Zum einen wird der NaJ-Detektor nicht vor der Datennahme vorgewärmt, dies könnte leicht durch einen Aufwärmvorgang behoben werden. Dieses Fehlen der Aufwärmphase hat zu einer Abweichung in den Zählraten nach oben geführt, was sich der deutlich kleineren Zählrate der zweiten Nullmessung entnehmen lässt. Zu Beginn ergaben sich daher wesentlich höhere Zählraten als bei den späteren Messungen. Damit lässt sich ein Teil der Abweichungen in den Ergebnissen erklären. Dazu kommt, dass die Justierung per Hand nicht genau genug eingestellt werden konnte, was durch

**Tabelle 4:** Zusammensetzung des 4. Würfels anhand der Absorptionskoeffizienten, sowie das geschätzte Material und die dazugehörige Abweichung.

Teilwürfel	Absorptionskoeffizienten $\mu$ , $\text{cm}^{-1}$	Material	Abweichung, %
1	1,137	Blei	6,56
2	0,608	Messing	1,00
3	0,938	Blei	24,96
4	0,264	Aluminium	30,69
5	1,322	Blei	5,76
6	0,873	Messing	45,02
7	1,267	Blei	1,36
8	0,361	Aluminium	78,71
9	0,991	Blei	20,72

einen mechanisch gesteuerten Aufbau zu beheben wäre. Auch das Programm, welches für die Datenaufnahme verwendet wird, stellt eine systematische Fehlerquelle dar. Es zieht den Untergrund direkt ab, obwohl es besser wäre, diese Funktion optional einzustellen. Da der Zerfall der Quelle ein rein statistischer Prozess ist, kann es zudem zu zeitlichen Fluktuationen kommen. Diese sind jedoch wie am Anfang der Auswertung beschrieben auf ein kleines Maß beschränkt und ließen sich durch eine längere Messzeit noch weiter zu beschränken.

## Literatur

- [1] URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html> (besucht am 26.04.2018).
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 14 Tomographie mittels Gamma-Strahlung*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/BTomographie.pdf> (besucht am 07.05.2018).
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [7] paradisi.de. *Computer-Tomographie. Röntgenverfahren zur Erzeugung dreidimensionaler Bilder*. URL: [http://www.paradisi.de/Health\\_und\\_Ernaehrung/Untersuchungen/Computer-Tomographie/](http://www.paradisi.de/Health_und_Ernaehrung/Untersuchungen/Computer-Tomographie/) (besucht am 01.07.2018).
- [8] Hans-Juergen Wollersheim. *Absorption von Gamma Strahlung in Materie. Beispiel eines Cs-Spektrums*. URL: <http://web-docs.gsi.de/~wolle/Schuelerlabor/IMAGES/Cs-137%20Energiespektrum.gif> (besucht am 01.07.2018).