

V353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

Durchführung: 31. Januar 2017
Abgabe: 07. Februar 2017

TU Dortmund - Fakultät Physik
Anfängerpraktikum B.sc. Physik
Wintersemester 16/17

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Relaxationserscheinungen ohne Periodizität	3
2.2 Relaxationserscheinungen mit Periodizität und RC-Glied als Integrator . .	4
3 Durchführung	5
3.1 Versuchsaufbau	5
3.2 Versuchsdurchführung	6
4 Auswertung	6
4.1 Bestimmen der Zeitkonstante aus dem Relaxationsverhalten der Kondensatorspannung	6
4.2 Bestimmen der Zeitkonstante aus der Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung	8
4.3 Bestimmen der Zeitkonstante aus der Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Kondensator- und Erregerspannung	9
4.4 Der RC-Kreis als Integrationsglied	11
5 Diskussion	11
Literatur	13

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es, das Relaxationsverhalten eines RC-Gliedes zu untersuchen. Dabei wird die Zeitkonstante des Kreises bestimmt, die Amplitude der Kondensatorspannung und die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz aufgenommen und ermittelt, unter welchen Voraussetzungen ein RC-Kreis als Integrator genutzt werden kann.

2 Theorie

2.1 Relaxationserscheinungen ohne Periodizität

Wenn ein System aus seinem Ausgangszustand entfernt wird und ihn nicht mittels Oszillation wieder erreicht, dann spricht man von Relaxation. Dabei ist die Änderungsgeschwindigkeit der Größe A proportional zu

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

mit $t = \text{bel.}$ und $A(\infty)$ der Endzustand des Systems. Wenn (1) über die Zeitpunkte 0 bis t integriert wird, folgt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] e^{ct}. \quad (2)$$

Damit (2) beschränkt bleibt, muss $c < 0$ gelten. Als Beispiel für solche Relaxationsvorgänge lässt sich das Auf- und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand nennen. Eine passende Schaltung ist in Abbildung 1 dargestellt.

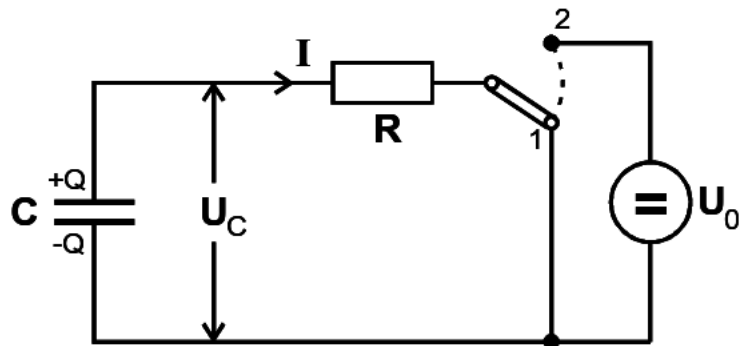


Abbildung 1: Schaltskizze zum Auf- (Stellung 2) und Entladen (Stellung 1) eines Kondensators [Dor17].

- **Entladevorgang:**

Es wird angenommen, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ladung Q auf dem Kondensator mit der Kapazität C liegt. Damit folgt für die Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Unter Zuhilfenahme des ohmschen Gesetzes und der Beziehung zwischen zeitlicher Änderung der Ladung in Relation zum Strom ergibt sich eine Differentialgleichung nach Gestalt von (1). Wenn man annimmt, dass nach unendlicher langer Zeit der Kondensator vollständig entladen ist, und ersetzt in (2) $U(\infty)$ mit 0, dann folgt

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3)$$

- **Aufladevorgang:**

Nach dem gleichen Prinzip erfolgt die Aufladung eines Kondensators; diesmal mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} Q(0) &= 0 \\ Q(\infty) &= CU_0. \end{aligned}$$

Damit folgt eine Gleichung ähnlich zu (3) nach Gestalt von (2)

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (4)$$

wobei der Ausdruck RC als Zeitkonstante bezeichnet wird. Diese Zeitkonstante liefert eine Aussage über die Geschwindigkeit mit der der Endzustand erreicht wird.

2.2 Relaxationserscheinungen mit Periodizität und RC-Glied als Integrator

Relaxationsvorgänge treten auch auf, wenn das System periodisch ausgelenkt wird. Um dies zu untersuchen, wird der Schaltplan aus Abbildung 1 nun um einen Wechselstrom-generator erweitert, der eine sinusförmige Spannung mit

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (5)$$

liefert. Ein solcher Schaltplan ist in Abbildung 2 zu sehen. Solange in (5) $\omega \ll 1/(RC)$

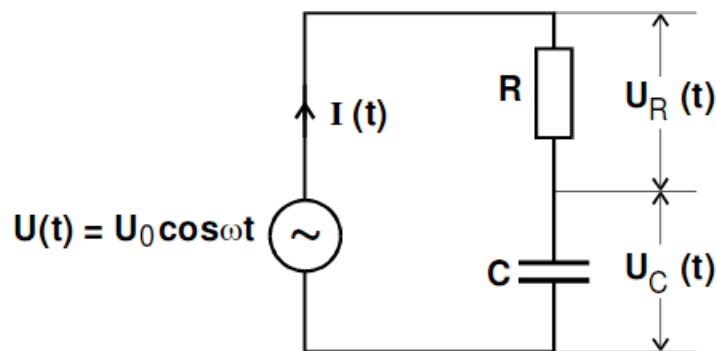


Abbildung 2: Schaltskizze zur Untersuchung von Relaxationserscheinungen bei periodischen Auslenkungen. [Dor17]

gilt, kann man annehmen, dass die Spannung am Kondensator zu jeder Zeit praktisch gleich $U(t)$ ist. Wenn nun ω größer wird, dann wird sich eine Phase ϕ zwischen Kondensator- und Generatorspannung bilden und die Amplitude A der Kondensatorspannung wird sinken. Zur weiteren Untersuchung des Phänomens lässt sich mit dem Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)] \quad (6)$$

ein Ausdruck für die Frequenzabhängigkeit der Phase

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (7)$$

finden. An (7) lässt sich bestätigen, dass die Phasenverschiebung für kleine ω gegen 0 und für große gegen $\frac{\pi}{2}$ geht. Für die Amplitude A in Abhängigkeit von der Frequenz ergibt sich

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (8)$$

Die Amplitude $A(\omega)$ geht für $\omega \rightarrow 0$ gegen U_0 und für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0; so wie bereits diskutiert. Aus diesem Grund wird ein RC-Kreis oft als Tiefpass verwendet.

Unter der Voraussetzung, dass ω gegenüber $\frac{1}{RC}$ viel größer ist, kann ein RC-Glied auch die angelegte Spannung $U(t)$ integrieren. In diesem Fall gilt näherungsweise

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (9)$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

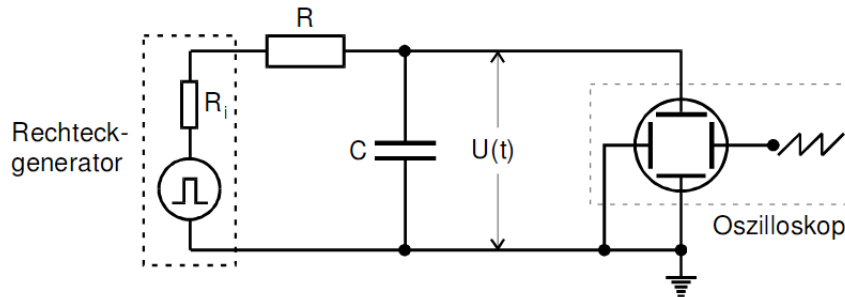


Abbildung 3: Schaltplan zur Versuchsdurchführung. [Dor17]

In Abbildung 3 ist der Schaltplan dargestellt, der für alle Teile der Versuchsdurchführung nutzbar ist. Dabei ist zu beachten, dass der Rechteckgenerator in unserem Fall durch einen Funktionsgenerator mit verstellbarer Frequenz ersetzt wurde, der auch die anderen, für den letzten Teil der Durchführung nötigen Spannungen, liefert. Dieser ist mit einem nachfolgend geschalteten RC-Glied verbunden, während jener parallel zu einem Zweikanal-Oszilloskop geschaltet ist. Der zweite Kanal wird für alle Versuchsteile direkt mit der Generatorspannung verbunden.

3.2 Versuchsdurchführung

Im ersten Teil des Versuchs wird die Zeitkonstante aus Kapitel 2.1 aus der Entladekurve in Abbildung 4 gewonnen, indem acht Datenpaare, die aus der Zeit und der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Zeit bestehen, aus jener Entladekurve abgelesen werden.

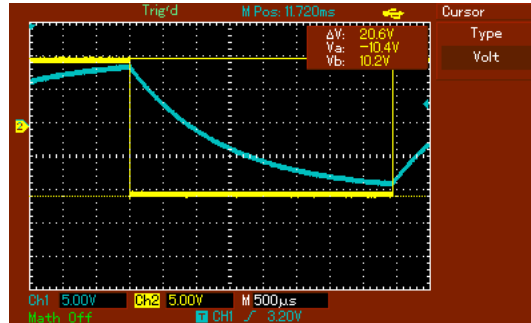


Abbildung 4: Entladekurve des Kondensators, aus dem die Zeitkonstante RC gewonnen wird. In blau ist die Spannung $U_C(t)$ und in gelb die Generatorspannung $U(t)$ aufgetragen.

Im zweiten und dritten Teil werden Amplitude der Kondensatorspannung und Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht. Dazu wird der Funktionsgenerator auf eine Sinusspannung mit insgesamt elf Frequenzen im Bereich von 25 bis 1750 Hz am Funktionsgenerator eingestellt. Dazu wird über die Measure- und Cursor-Funktion des Oszilloskops die Kondensatorspannung und die Zeitdifferenz zwischen den Nulldurchgängen der beiden Spannungen aufgenommen.

Im letzten Teil werden eine Sinus-, eine Dreiecks- und eine Rechteckspannung mit jeweils einer Frequenz von 12.5 kHz über das RC-Glied integriert und die Spannungspaare am Oszilloskop als Bilder abgespeichert.

4 Auswertung

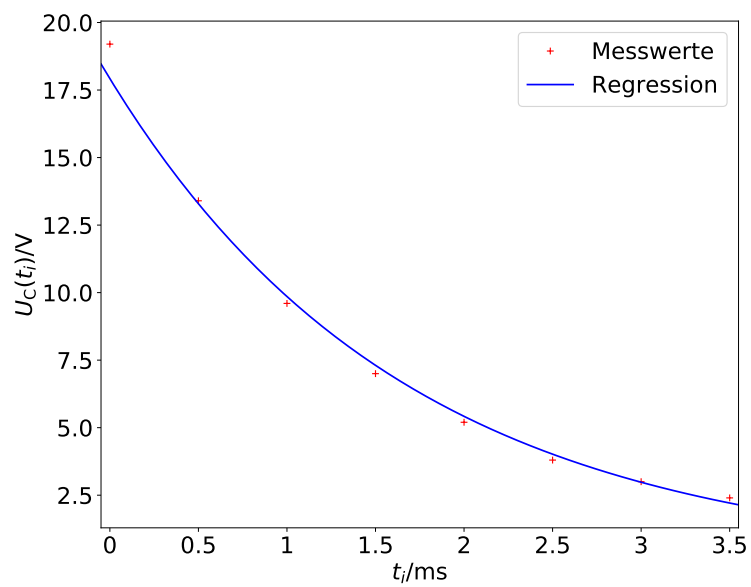
4.1 Bestimmen der Zeitkonstante aus dem Relaxationsverhalten der Kondensatorspannung

Die gemessenen Werte sind mit Graph in Abbildung 5 dargestellt. Zur Bestimmung der Zeitkonstante wird eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Aus (3) folgt mit $\tau = RC$:

$$\ln(U_C) = \ln(U(0)) - t \cdot \frac{1}{\tau}. \quad (10)$$

Fitten der Wertepare $\{(\ln(U_C(t_i)), t_i)\}$ durch eine Funktion

$$f(x) = m \cdot x + b \quad (11)$$



t_i/ms	$U_C(t_i)/\text{V}$
0	19.2
0.5	13.4
1	9.6
1.5	7
2	5.2
2.5	3.8
3	3
3.5	2.4

Abbildung 5: In der Tabelle finden sich die aus der Entladekurve des Kondensators gemessenen zeitabhängige Kondensatorspannungen. Diese wurden in der Grafik mit der berechneten Regression dargestellt.

in "python" mit "curve-fit" aus dem Paket "scipy-optimize" liefert diese Werte für $U(0)$ und die Zeitkonstante τ :

$$b = \ln(U(0)) = 2.89 \pm 0.04$$

$$m = -\frac{1}{\tau} = (-598 \pm 17) \text{ s}^{-1}$$

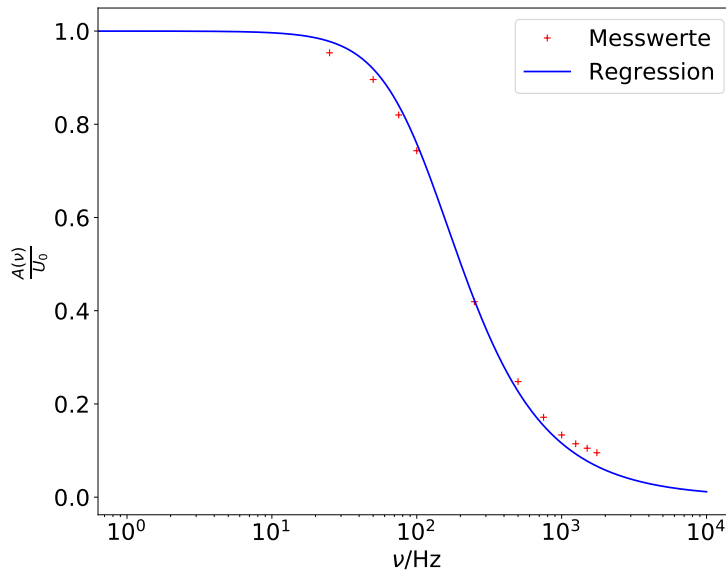
woraus für $U(0)$ und τ folgt:

$$U(0) = (17.9 \pm 0.7) \text{ V}$$

$$\tau = (1.67 \pm 0.05) \text{ ms.}$$

Diese Regression ist ebenfalls in Abbildung 5 dargestellt.

4.2 Bestimmen der Zeitkonstante aus der Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung



ν/Hz	U_C/V
25	19.80
50	18.61
75	17.03
100	15.44
250	8.71
500	5.15
750	3.56
1000	2.77
1250	2.38
1500	2.18
1750	1.98

Abbildung 6: In der Tabelle sind die gemessenen Amplituden der Kondensatorspannung bei verschiedenen Frequenzen aufgeführt. Diese wurden in der Grafik in halblogarithmischer Darstellung gegeneinander abgetragen. Die Amplituden wurden dazu mit der konstanten, gemessenen Spannung $U_0 = 20.77 \text{ V}$ normiert. Zusätzlich wurde eine Regressionsgerade eingezeichnet.

Messwerte und Grafik sind in Abbildung 6 dargestellt. Die Regression ergibt sich durch Ausgleichsrechnung nach (8). Für die Zeitkonstante folgt dabei ein Wert von:

$$\tau = (1.37 \pm 0.05) \text{ ms.}$$

Die Regression verhält sich wie zu erwarten. Für geringe Frequenzen zeigt sich das normale Verhalten eines Kondensators. Für $\nu \mapsto \infty$ "schaltet" der Kondensator jedoch durch und verhält sich wie ein normales Leitungsstück, sodass keine Spannung mehr am Kondensator messbar ist.

4.3 Bestimmen der Zeitkonstante aus der Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Kondensator- und Erregerspannung

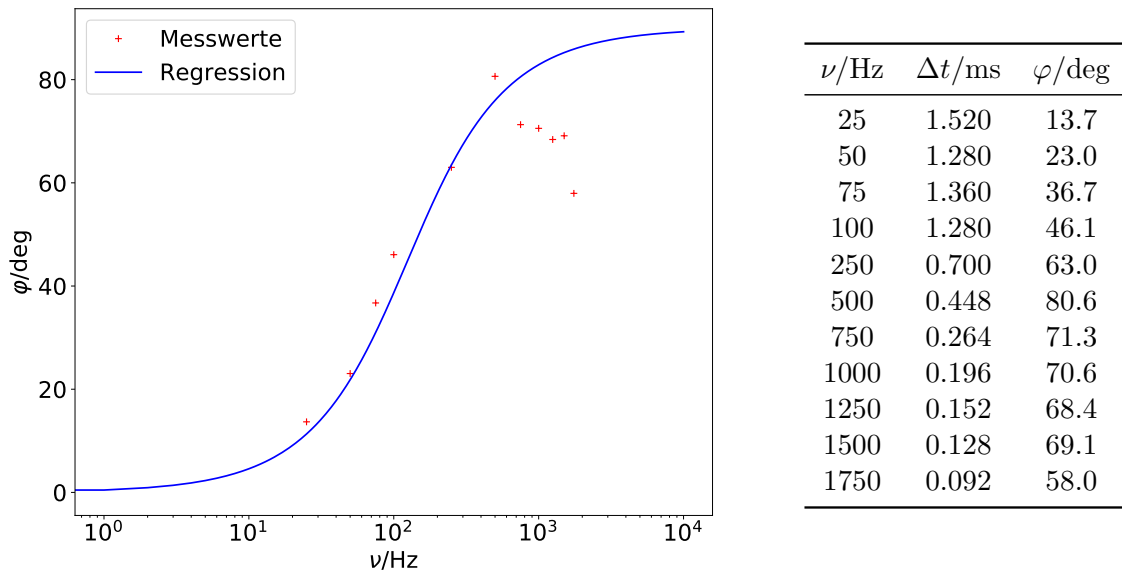


Abbildung 7: In der Tabelle sind die gemessenen Zeitverschiebungen zwischen Kondensator- und Erregerspannung bei verschiedenen Frequenzen sowie die daraus berechnete Phase eingetragen. In der Grafik wurde die Phase gegen die Frequenz in halblogarithmischer Darstellung abgetragen. Zusätzlich wurde eine Regressionsgerade eingezeichnet.

Messwerte und Grafik sind in Abbildung 7 dargestellt. Die Phasen ergeben sich nach

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360 \quad (12)$$

mit der Periodendauer $T = \nu^{-1}$. Die Regression ergibt nach (7) eine Zeitkonstante von:

$$\tau = (1.28 \pm 0.31) \text{ ms.}$$

Zur besseren Darstellung findet sich in Abbildung 8 eine Polardarstellung der Phasen mit einer Theoriekurve.

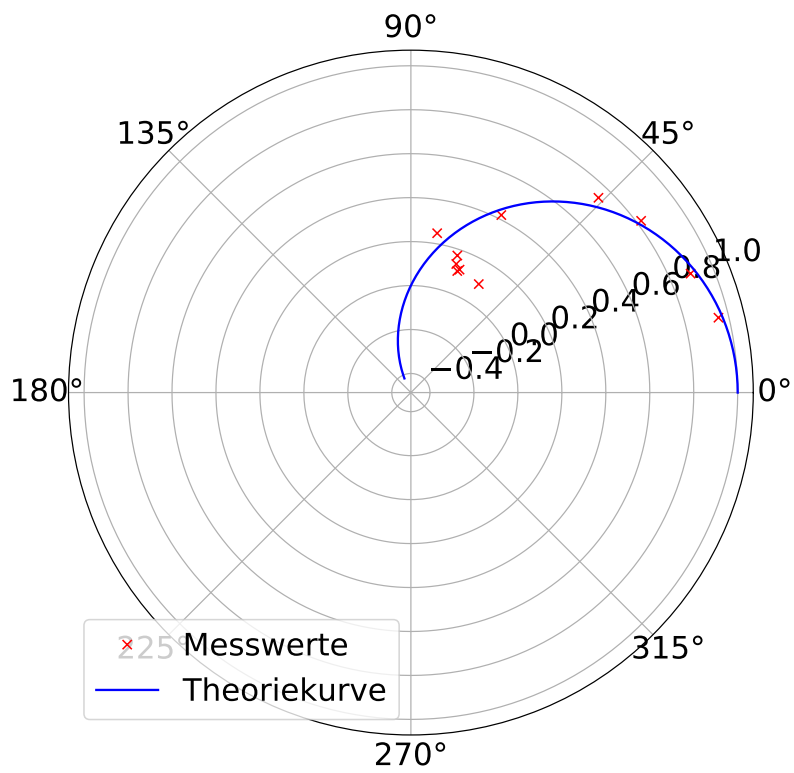
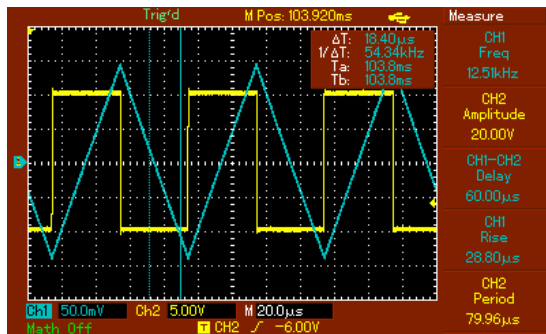


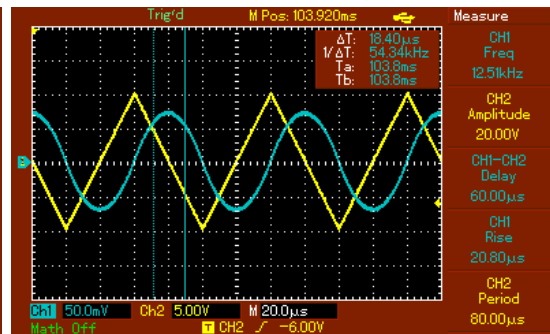
Abbildung 8: Polardarstellung der Phasen mit Theoriekurve.

4.4 Der RC-Kreis als Integrationsglied

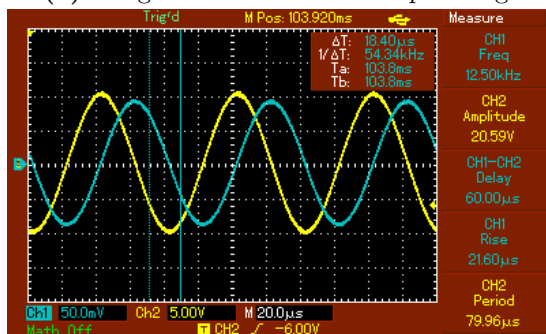
Zum Integrieren wurde eine Frequenz von 12.5 kHz am Funktionsgenerator eingestellt. Es ergeben sich die in Abbildung 9 dargestellten Bilder auf dem Oszilloskop. Theoretisch liefert die Integration einer Rechteckfunktion (Abbildung 9a) eine Dreieckfunktion, die Integration einer Dreieckfunktion (Abbildung 9b) eine parabelartige Funktion und die Integration eines Sinus (Abbildung 9c) einen Cosinus. Dies entspricht den erhaltenen Ergebnissen.



(a) Integration einer Rechteckspannung.



(b) Integration einer Dreieckspannung.



(c) Integration einer Sinusspannung.

Abbildung 9: Oszilloskopbilder nach Integration der verschiedenen Spannungsformen. Die Erregerspannungen sind in gelb dargestellt, die erhaltenen Signalspannungen in blau.

5 Diskussion

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der einzelnen Methoden zusammengefasst. Auffällig ist das große Fehlerintervall der Phasenmessung. Dies erscheint bei Betrachtung der Messwerte logisch. Die bestimmten Phasen verhalten sich ab einem gewissen Punkt nicht mehr wie ein \arccos (siehe Abbildung 8). Der Grund ist hier nicht abschließend zu klären. Messfehler durch die Art der Auswertung durch das manuelle Setzen von Zeigern sind

	Direkt	Amplitude	Phase
τ/ms	1.67 ± 0.05	1.37 ± 0.05	1.28 ± 0.31

Tabelle 1: Gegenüberstellung der bestimmten Zeitkonstanten aus den unterschiedlichen Messmethoden. Direkt steht dabei für die Bestimmung aus dem Relaxationsverhalten des RC-Kreises, Amplitude und Phase für die Bestimmungen aus dem jeweiligen Frequenzverhalten.

möglich, müssten aber alle Messwerte ähnlich stark betreffen und sollten nicht gehäuft bei Messungen hoher Frequenzen auftreten. Generell ist bei allen Messungen mit systematischen Fehlern zu rechnen, da der Innenwiderstand des Funktionsgenerators nicht berücksichtigt wird. Desweiteren kann kein Messwert mit einem aus Bauteilwerten bestimmten Theoriewert verifiziert werden, da keine Bauteilwerte angegeben werden. Um sinnvolle Aussagen über den Wert der Ergebnisse treffen zu können, wäre dementsprechend ein Durchmessen der Bauteile nötig, um Vergleiche zu einem Theoriewert ziehen zu können.

Literatur

- [Dor17] TU Dortmund. *V353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 31. Jan. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.