

V106: Gekoppelte Pendel

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

08. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
4 Fehlerrechnung	5
5 Auswertung	5
5.1 Berechnung der Schwingungsdauern der entkoppelten Pendel	5
5.2 Berechnung der Schwingfrequenzen bei gleich- und gegensinniger Schwin- gung	6
5.3 Vergleich zwischen gemessenen und errechneten Werten	7
6 Diskussion	10
Literatur	11

1 Zielsetzung

In diesem Versuch geht es um Messung der Schwingungs- und Schwebungsdauer von gekoppelten Pendeln. Untersucht werden gleich- und gegensinnige sowie gekoppelte Schwingungen.

2 Theorie

Ein einzelnes Fadenpendel, welches reibungsfrei aufgehängt wurde, mit einem Faden der Länge l und Masse m , schwingt für kleine Auslenkungen ($\sin \phi \approx \phi$) mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1)$$

Dies ist die Lösung der zugehörigen Schwingungsdifferentialgleichung mit g als Erdbeschleunigungskonstante. Mit (1) und

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ergibt sich als Formel für die gesuchte Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

Wenn man nun zwei dieser Fadenpendel durch eine Feder koppelt, ergeben sich zwei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} J \ddot{\Phi}_1 + D \Phi_1 &= D_F (\Phi_2 - \Phi_1) \\ J \ddot{\Phi}_2 + D \Phi_2 &= D_F (\Phi_1 - \Phi_2) \end{aligned} \quad (3)$$

mit jeweils einem Term darin, der den Drehwinkel des anderen Pendels enthält. Dies kommt durch die Kopplung mit der Feder. Je nach Auslenkungswinkel α_1 und α_2 der Fadenpendel ergeben sich verschiedene Schwingungsarten:

Für: $\alpha_1 = \alpha_2$ ergibt sich eine gleichsinnige Schwingung. Bei dieser hat die Feder keine Auswirkung auf die Schwingungen. Deshalb gilt für die Schwingungsfrequenz ω_+ (1) und für die Schwingungsdauer T_+ (2).

Wenn $\alpha_1 = -\alpha_2$ ist, nennt man dies eine gegensinnige Schwingung. Für diesen Fall greift die Feder in das Schwingverhalten der Pendel ein. Deshalb werden (1) und (2) erweitert um jeweils einen Term mit der Kopplungskonstante K der Feder

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \quad (4)$$

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+2K}} \quad (5)$$

Für: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$ ergibt sich eine gekoppelte Schwingung. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass die beiden Pendel die kinetische Energie auf das andere Pendel übertragen und dann erneut erhalten. Hier tritt die sogenannte Schwebung auf. Dieser Begriff beschreibt die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels. Die Dauer dieses Zustandes berechnet sich nach

$$T_S = \frac{T_- \cdot T_+}{T_+ - T_-} \quad \text{und} \quad \omega_S = \omega_+ - \omega_- \quad (6)$$

mit T_- aus der gegen- und T_+ aus der gleichsinnigen Schwingung. Die Kopplungskonstante K der Feder zwischen den beiden Pendeln definiert sich nach

$$K = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} \quad (7)$$

3 Durchführung

Die Pendel sind zwei Stabpendel, die verschieboverlinee Massen besitzen, um verschiedene Pendellängen zu realisieren. Die Aufhängung besteht aus einer reibungsarmen Spitzenlagerung, die eine reibungsfreie Schwingung gewährleistet. Alle Schwingungsdauern

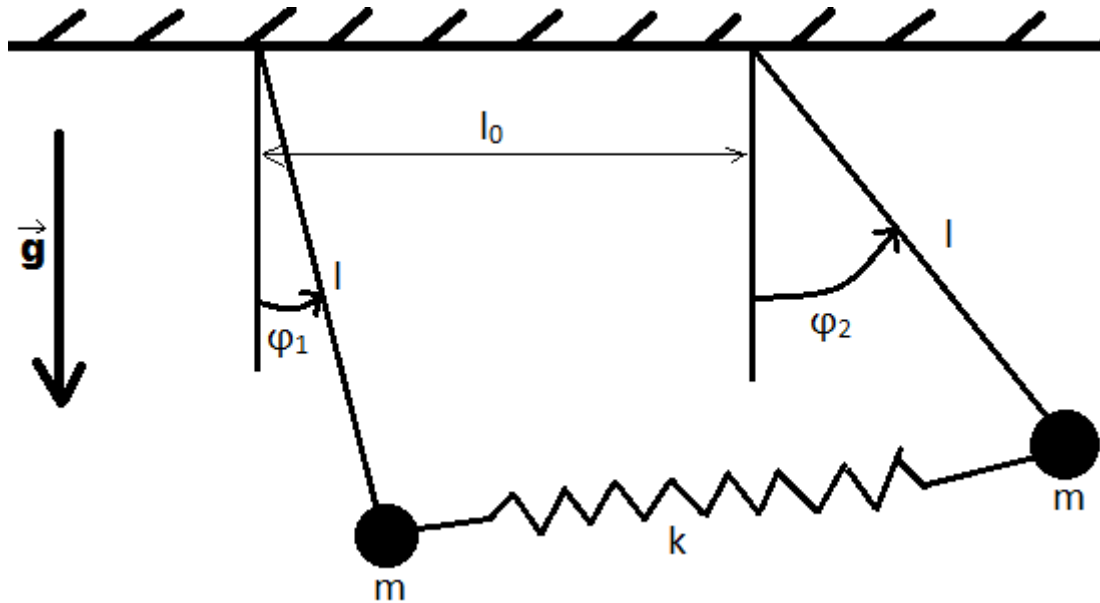


Abbildung 1: Darstellung eines gekoppelten Pendels mit Öffnungswinkeln ϕ statt α .

werden für fünf Schwingungen und für eine Pendellänge von $(60,0 \pm 0,3)$ cm bestimmt. Zuerst messen wir die Schwingungsdauern T_1 und T_2 der einzelnen Pendel nach und

vergleichen, ob sie im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen. Um eventuellen statistischen Fehlern vorzubeugen, führen wir die Messung neunmal aus. Danach verbinden wir die beiden Pendel über die Kopplungsfeder und führen eine gleich- und eine gegensinnige Schwingung durch, wobei wir T_+ und T_- experimentell bestimmen. Im Anschluss ermitteln wir die Schwebungsdauer T_S und die Schwingungsdauer T . Zum Schluss wiederholen wir alle Messungen für eine Pendellänge von $(75,0 \pm 0,3)$ cm.

4 Fehlerrechnung

Für die Fehlerrechnung gibt:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (8)$$

den Mittelwert, sowie:

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2} \quad (9)$$

den Fehler des Mittelwertes. In Fällen, in denen zwei fehlerbehaftete Größen in einer Gleichung zur Bestimmung einer anderen Größe Verwendung finden, berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (10)$$

5 Auswertung

5.1 Berechnung der Schwingungsdauern der entkoppelten Pendel

Es wurden jeweils 10 Messungen für jeweils 5 Schwingungen durchgeführt. Aus den Messwerten folgen die in der Tabelle dargestellten Schwingungsdauern für die jeweils entkoppelten Pendel.

Es ergeben sich folgende Werte für $(60,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= (1,49 \pm 0,01) \text{ s} \\ \bar{T}_2 &= (1,47 \pm 0,01) \text{ s} \end{aligned}$$

Und für $(75,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= (1,65 \pm 0,01) \text{ s} \\ \bar{T}_2 &= (1,66 \pm 0,01) \text{ s} \end{aligned}$$

Die Werte der Schwingungsdauern liegen also bei beiden Längen gegenseitig im Bereich der Messabweichung.

Tabelle 1: Entkoppelte Pendel für 5 Schwingungen

$l = (60,0 \pm 0,3) \text{ cm}$		$l = (75,0 \pm 0,3) \text{ cm}$	
T_1/s	T_2/s	T_1/s	T_2/s
7,49	7,33	8,49	8,13
7,36	7,30	8,46	8,01
7,30	7,00	8,33	8,44
7,61	7,30	8,20	8,46
7,32	7,58	8,23	8,16
7,26	7,27	8,15	8,20
7,60	7,46	8,20	8,15
7,81	7,50	8,40	8,52
7,27	7,35	8,01	8,16
7,52	7,55	7,78	8,67

5.2 Berechnung der Schwingfrequenzen bei gleich- und gegensinniger Schwingung

Es werden weiterhin die in 4.1 eingeführten Formeln zur Fehlerrechnung genutzt. Aus den Messwerten folgen die in der Tabelle dargestellten Schwingungsdauern für die jeweils entkoppelten Pendel.

Tabelle 2: Gegen- und gleichsinnige Schwingung für 5 Schwingungen

$(60,0 \pm 0,3) \text{ cm}$		$(75,0 \pm 0,3) \text{ cm}$	
T_+/s	T_-/s	T_+/s	T_-/s
7,70	7,04	8,75	7,84
7,47	7,18	8,90	7,92
7,26	6,95	8,66	8,03
7,47	7,21	8,60	7,69
7,49	6,96	8,42	7,81
7,32	7,03	8,46	7,63
7,09	7,32	8,53	7,72
7,43	7,04	8,33	7,87
7,55	7,03	8,30	7,44
7,16	7,30	8,49	7,61

Es ergeben sich folgende Werte für $(60,0 \pm 0,3) \text{ cm}$:

$$\overline{T_+} = (1,48 \pm 0,01) \text{ s}$$

$$\overline{T_-} = (1,42 \pm 0,01) \text{ s}$$

Und für $(75,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\begin{aligned}\overline{T_+} &= (1,71 \pm 0,01) \text{ s} \\ \overline{T_-} &= (1,55 \pm 0,01) \text{ s}\end{aligned}$$

Nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung und mit (1) sowie (4) folgt für die Frequenzen bei $(60,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\begin{aligned}\omega_+ &= (4,249 \pm 0,034) \frac{1}{\text{s}} \\ \omega_- &= (4,421 \pm 0,027) \frac{1}{\text{s}}\end{aligned}$$

Und für $(75,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\begin{aligned}\omega_+ &= (3,677 \pm 0,026) \frac{1}{\text{s}} \\ \omega_- &= (4,051 \pm 0,028) \frac{1}{\text{s}}\end{aligned}$$

Für die Kopplungskonstante ergibt sich nach (7) daher bei $(60,0 \pm 0,3)$ cm:

$$K = 0,040 \pm 0,010$$

Und für $(75,0 \pm 0,3)$ cm:

$$K = 0,096 \pm 0,010$$

5.3 Vergleich zwischen gemessenen und errechneten Werten

Für T_+ und ω_+ folgt aus (1) und (2) bei $l = (60,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\begin{aligned}T_+ &= (1,554 \pm 0,004) \text{ s} \\ \omega_+ &= (4,043 \pm 0,010) \frac{1}{\text{s}}\end{aligned}$$

und für $l = (75,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\begin{aligned}T_+ &= (1,738 \pm 0,003) \text{ s} \\ \omega_+ &= (3,616 \pm 0,007) \frac{1}{\text{s}}\end{aligned}$$

Beim Vergleich dieser Werte mit den gemessenen Werten zeigen sich Abweichungen, die außerhalb der Ungenauigkeiten liegen.

Für T_- und ω_- folgt aus (4) und (5) bei $l = (60,0 \pm 0,3)$ cm:

$$T_- = (1,548 \pm 0,004) \text{ s}$$

$$\omega_- = (4,059 \pm 0,011) \frac{1}{\text{s}}$$

und für $l = (75,0 \pm 0,3)$ cm bei gleicher Ungenauigkeit:

$$T_- = (1,721 \pm 0,004) \text{ s}$$

$$\omega_- = (3,651 \pm 0,008) \frac{1}{\text{s}}$$

Beim Vergleich dieser Werte mit den gemessenen Werten zeigen sich Abweichungen, die außerhalb der Ungenauigkeiten liegen. Nach (6) ergibt sich die Schwingungsdauer sowie -frequenzen bei der gekoppelten Schwingung mit $(60,0 \pm 0,3)$ cm zu:

$$T_s = (36 \pm 9) \text{ s}$$

$$\omega_s = (0,170 \pm 0,040) \frac{1}{\text{s}}$$

Und für $(75,0 \pm 0,3)$ cm:

$$T_s = (16,8 \pm 1,7) \text{ s}$$

$$\omega_s = (0,370 \pm 0,040) \frac{1}{\text{s}}$$

Die Fehler ergeben sich jeweils durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung aus den fehlerbehafteten Größen T_+ und T_- .

Aus den gemessenen Werten (siehe Tabelle 3 und 4) folgt für $\overline{T_s}$ und $\overline{\omega_s}$, gemessen bei $(60,0 \pm 0,3)$ cm:

$$\text{Einzelmessung: } \overline{T_s} = (30,1 \pm 0,5) \text{ s; } \overline{\omega_s} = (0,209 \pm 0,004) \frac{1}{\text{s}}$$

$$\text{Fünffachmessung: } \overline{T_s} = (28,9 \pm 1,1) \text{ s; } \overline{\omega_s} = (0,218 \pm 0,008) \frac{1}{\text{s}}$$

und bei $(75,0 \pm 0,3)$ cm

$$\text{Einzelmessung: } \overline{T_s} = (35,1 \pm 0,8) \text{ s; } \overline{\omega_s} = (0,217 \pm 0,008) \frac{1}{\text{s}}$$

$$\text{Fünffachmessung: } \overline{T_s} = (40,6 \pm 0,8) \text{ s; } \overline{\omega_s} = (0,158 \pm 0,004) \frac{1}{\text{s}}$$

Für die Messung bei $(60,0 \pm 0,3)$ cm liegen die gemessenen Werte für T_s und $\omega_s = 2\pi/T_s$ im Rahmen der zu erwartenden Abweichung für den berechneten Wert, bei $(75,0 \pm 0,3)$ cm ist dies nicht der Fall.

Tabelle 3: Schwebungsdauer bei Messung einer Schwebung für eine Schwebung

T_s/s für $l = (60,0 \pm 0,3) \text{ cm}$	T_s/s für $l = (75,0 \pm 0,3) \text{ cm}$
29.41	36.46
28.87	37.03
29.07	33.87
31.67	34.06
28.63	31.01
28.46	38.27
31.73	36.55
33.60	32.32
28.96	33.10
30.80	38.47

Tabelle 4: Schwebungsdauer bei Messung von fünf Schwebungen für 5 Schwebungen

T_s/s für $l = (60,0 \pm 0,3) \text{ cm}$	T_s/s für $l = (75,0 \pm 0,3) \text{ cm}$
135.52	185.12
138.58	208.84
150.44	191.00
157.96	206.87
124.87	209.01
138.24	214.86
164.76	204.83

6 Diskussion

Generell zeigen sich Abweichungen zwischen Messwerten und berechneten Werten, die sich vielfach nicht im Bereich der Messungenauigkeit bewegen. Besonders bei der zweiten Schwebungsmessung ist dies nicht der Fall. Gründe finden sich hier in der Dämpfung des Pendels, durch die sich mit fortschreitender Zeit eine Verschiebung von Schwebung zu gleichphasiger Schwingung sowie generelle Fehler in der Zeitmessung ergeben. Auch die Feder kann nicht mehr als vollständig elastisch angenommen werden. Definitiv einen statistischen Fehler stellt das stoppen der Zeiten mit einer Stopuhr dar. Dieser fließt zwar durch die Messmethoden nur gemindert ein, beeinflusst das Ergebnis aber dennoch. Auch eine perfekt 2-Dimensionale Bewegung des Pendels lässt sich nicht sicherstellen, da der Stab elastisch ist. Durch diese Fehler lassen sich auch die Unterschiede der Kopplungskonstante der beiden Messreihen erklären. Diese liegen ebenfalls nicht mehr im Rahmen der Messungenauigkeit.

Zusammenfassend zeigt sich nur eine geringe Aussagekraft des Versuchs. In der vorgefundenen Konfiguration des Aufbaus lassen sich keine ausreichend präzisen Werte bestimmen. Die durch die Zeitmessung erhaltenen Fehler lassen sich durch mehr Messungen verringern. Um die Dämpfung durch Luftreibung und Auflagefläche zu verringern ist ein deutlich höherer Aufwand zu betreiben. Die Abweichung der Bewegung eine dritte Raumrichtung ließe sich durch einen weniger elastischen Stab minimieren.

Literatur

- [Dor] TU Dortmund. *V106: Gekoppelte Pendel*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/GekoppeltePendel.pdf>.
- [Unb] Unbekannt. *Skizze gekoppelter Pendel (15. November 2016)*. URL: http://www.physikerboard.de/files/97jff7e2_150.png.