

V206: Die Wärmepumpe

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

22. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
3.1 Versuchsaufbau	4
3.2 Versuchsdurchführung	5
4 Fehlerrechnung	5
5 Auswertung	8
5.1 Bestimmung der Gütezahl	9
5.2 Berechnung des Massendurchsatzes $\frac{dm}{dt}$	9
5.3 Mechanische Leistung des Kompressors	11
6 Diskussion	12
Literatur	13

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, den Transport von Wärmeenergie entgegen der Richtung des Wärmeflusses zu untersuchen. Wichtige dabei zu beachtende Größen sind die Güteziffer, der Massendurchsatz und die mechanische Leistung des Kompressors.

2 Theorie

Die Wärmeenergie in einem abgeschlossenen System fließt von der warmen Umgebung in die kalte Umgebung. Um diesen Wärmefluss umzudrehen, muss mechanische Arbeit erbracht werden. So eine Maschine wird als Wärmepumpe bezeichnet. Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik kommt

$$Q_1 = Q_2 + A \quad (1)$$

Das Verhältnis zwischen transportierter Wärmemenge und aufgewendeter Arbeit ist definiert als Güteziffer ν

$$\nu = \frac{Q_1}{A} \quad (2)$$

Dabei ist A die aufgewendete Arbeit und Q_1 die an das wärmere Reservoir abgegebene Wärmemenge. Es gilt zu beachten, dass dies die Güteziffer für idealisierte Bedingungen darstellt. Eine weitere idealisierte Annahme kommt aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (3)$$

Da die Wärmepumpe nicht reversibel arbeiten kann, gilt für die reale Beziehung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \quad (4)$$

Nun ergibt sich für (2) aus (3) und (4)

$$\begin{aligned} \nu_{\text{ideal}} &= \frac{T_1}{T_1 - T_2} \\ \nu_{\text{real}} &< \frac{T_1}{T_1 - T_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Aus den Messwerten der Temperaturen gegen die Zeit gewinnt man die später genutzte Formel für die Berechnung der realen Güteziffer

$$\nu = \frac{dQ_1}{dt N} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{dT_1}{dt N} \quad (6)$$

mit $m_1 c_w$ als Wärmekapazität des Wassers in Reservoir 1, $m_k c_k$ als Wärmekapazität der Kupferschlange und des Behälters und N als gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors. Die nächste zu betrachtende Größe ist der Massendurchsatz $\frac{dm}{dt}$, der sich über den Differentialquotienten berechnet

$$\frac{dm}{dt} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{dT_2}{dt L} \quad (7)$$

mit L als Verdampfungswärme. Als letztes kommt die Formel für die mechanische Kompressorleistung N_{mech}

$$N_{mech} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} \quad (8)$$

mit κ als Verhältnis der Molwärmen und ρ als Dichte des Gases.

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau, siehe 1, besteht aus den beiden thermisch isolierten Reservoiren, deren Temperatur über zwei digitale Thermometer abgegriffen werden. Zwei Rührmotoren sorgen für die gleichmäßige Durchmischung des Wassers. Der Drucke P_a und P_b lassen sich an zwei Manometern ablesen. Ein Kompressor mit angeschlossenem Motor stellt die benötigte mechanische Arbeit A bereit; die aufgewendete Leistung zeigt ein Wattmeter an. Somit lassen sich alle zu messenden Größen erfassen.

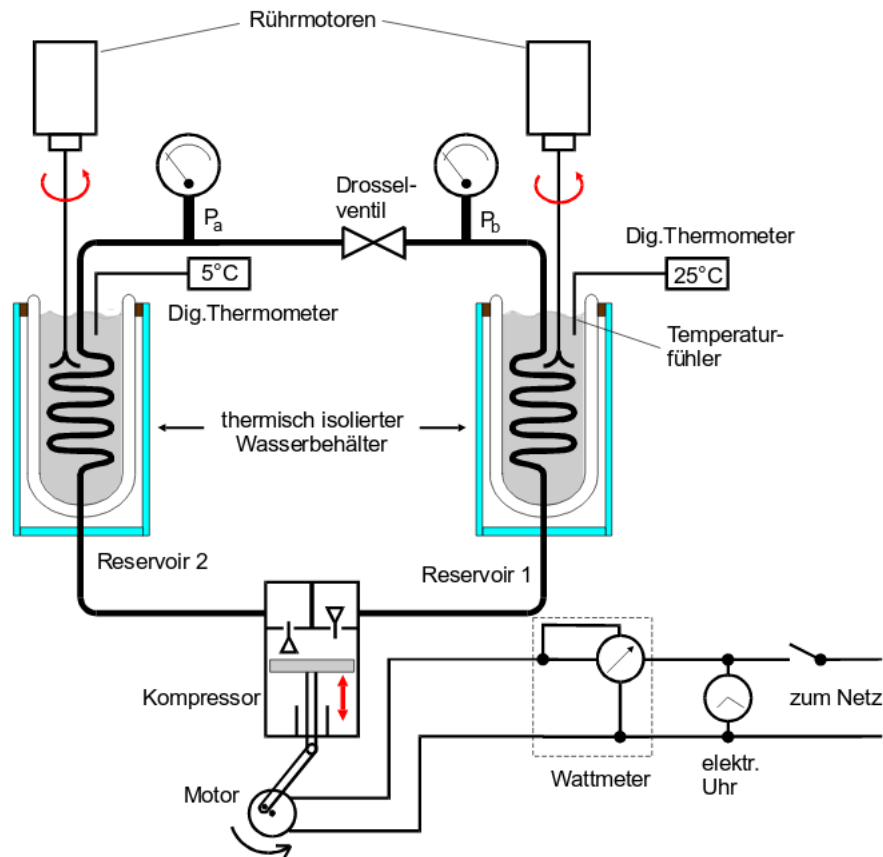


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus.

3.2 Versuchsdurchführung

Nachdem die Reservoirs mit jeweils 3 l Wasser aufgefüllt wurden, werden zu Beginn der Messung die Temperaturen, die Drücke und die Leistung gemessen. Im 60 s Intervall müssen die oben genannten Größen erfasst werden, bis T_1 ungefähr 50°C erreicht hat.



Abbildung 2: Der Versuchsaufbau im Foto.

4 Fehlerrechnung

Es gibt:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (9)$$

den Mittelwert und:

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2} \quad (10)$$

den Fehler des Mittelwertes. Falls zwei fehlerbehaftete Größen in einer Gleichung zur Bestimmung einer anderen Größe Verwendung finden, dann berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (11)$$

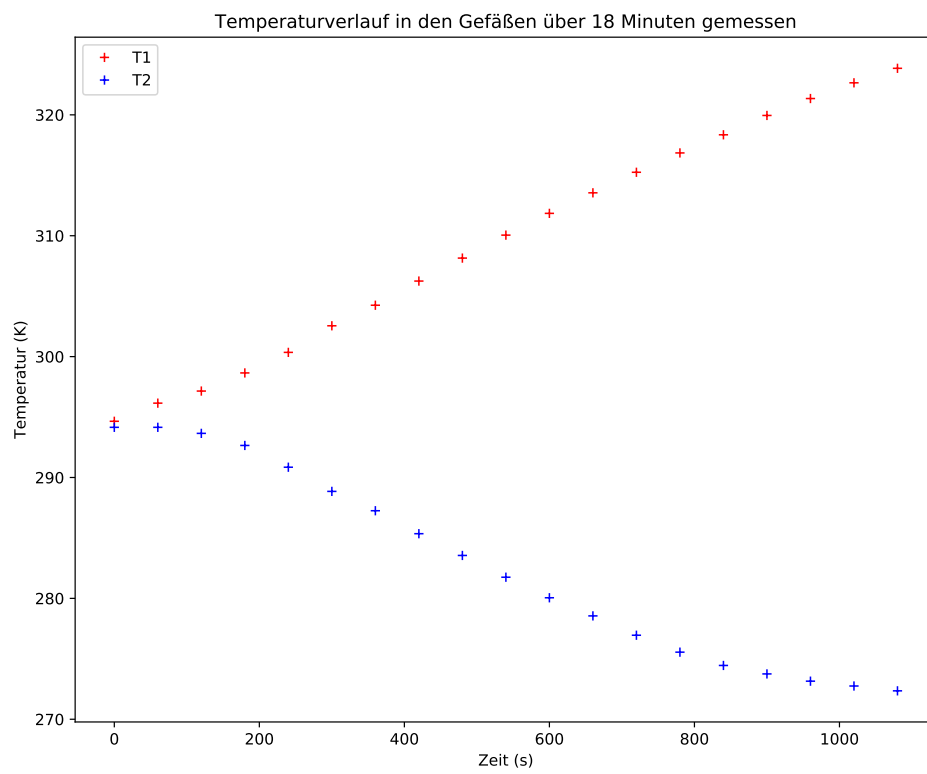


Abbildung 3: Temperaturverlauf ohne Regression.

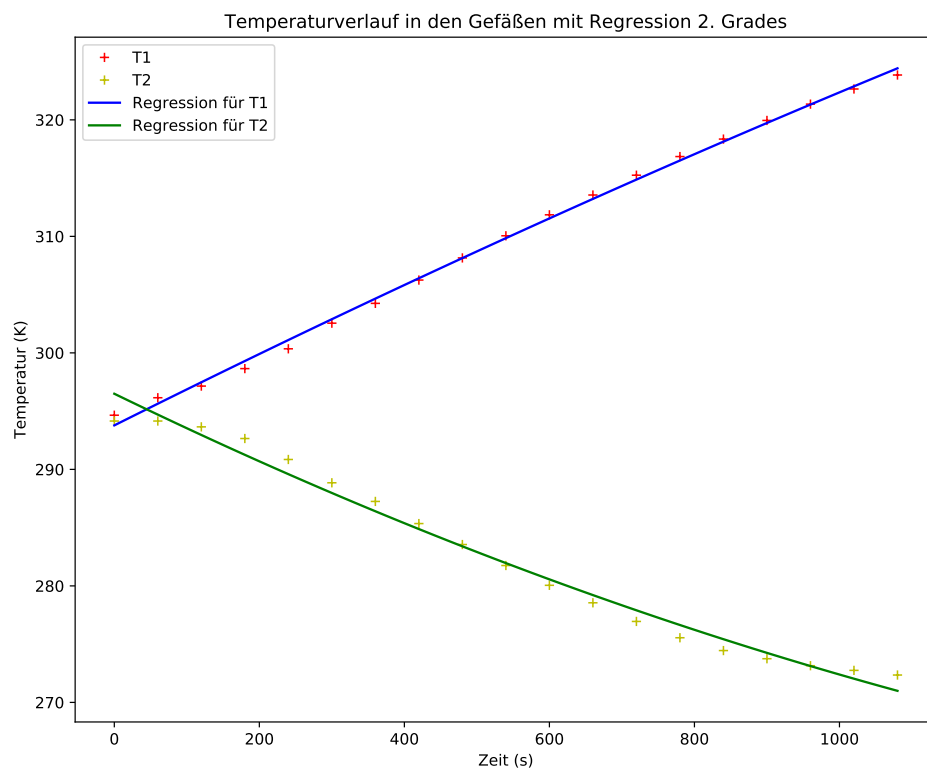


Abbildung 4: Temperaturverlauf durch $T(t) = At^2 + Bt + C$ approximiert.

5 Auswertung

Die Regression mit einer Funktion zweiten Grades, siehe 4 ist, vor allem für die Werte von T_2 , ungeeignet als Approximation. Es folgen die in 1 dargestellten Koeffizienten. Eine

Tabelle 1: Parameter für Ansatz $T(t) = At^2 + Bt + C$, siehe 4.

Parameter	T_1	T_2
A	$(-2,6 \pm 1,1) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2$	$(6,1 \pm 2,5) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2$
B	$(0,031 \pm 0,001) \text{ K/s}$	$(-0,030 \pm 0,003) \text{ K/s}$
C	$(293,8 \pm 0,3) \text{ K}$	$(296,5 \pm 0,7) \text{ K}$

bessere Annäherung erhält man für eine Funktion mit Grad 3, siehe 5. Mit diesem Ansatz ist eine vertretbare Approximation gefunden. Die Koeffizienten für diesen Ansatz finden sich in 3

Die originalen Messdaten finden sich in Tabelle 2 wieder. Die Drücke p_a und p_b enthalten bereits den Normaldruck von 1 bar . Die Temperaturen wurden für alle folgenden Rechnungen in K, die Zeiten in s und die Drücke in Pa umgewandelt.

Tabelle 2: Minütlich gemessene Temperaturen, Drücke und Leistung des Versuchs.

Zeit/min	$T_1/^\circ\text{C}$	p_b/bar	$T_2/^\circ\text{C}$	p_a/bar	N/W
0	21.5	5.25	21	5	0
1	23	7	21	2.6	170
2	24	7.5	20.5	2.8	180
3	25.5	7.5	19.5	3	190
4	27.2	8	17.7	3.2	197
5	29.4	8.25	15.7	3.2	200
6	31.1	8.75	14.1	3.2	204
7	33.1	9	12.2	3.2	205
8	35	9.5	10.4	3.2	206
9	36.9	10	8.6	3.2	209
10	38.7	10.5	6.9	3.2	209
11	40.4	11	5.4	3.2	210
12	42.1	11.25	3.8	3.2	212
13	43.7	11.5	2.4	3.2	212
14	45.2	12	1.3	3.2	213
15	46.8	12.5	0.6	3.2	211
16	48.2	12.75	0	3.2	210
17	49.5	13	-0.4	3.2	207
18	50.7	13.5	-0.8	3.2	206

Die Parameter bestimmen sich nach Tabelle 3. Für die Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ und

Tabelle 3: Parameter für Ansatz $T(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$, siehe 5.

Parameter	T_1	T_2
A	$(-1,406 \pm 0,165) \cdot 10^{-8} \text{ K/s}^3$	$(3,383 \pm 0,269) \cdot 10^{-8} \text{ K/s}^3$
B	$(2,022 \pm 0,271) \cdot 10^{-5} \text{ K/s}^2$	$(-4,869 \pm 0,442) \cdot 10^{-5} \text{ K/s}^2$
C	$(0,022 \pm 0,001) \text{ K/s}$	$(-0,007 \pm 0,002) \text{ K/s}$
D	$(0,022 \pm 0,001) \text{ K}$	$(294,704 \pm 0,245) \text{ K}$

$\frac{dT_2}{dt}$ ergeben sich für vier verschiedene Temperaturen zu vier verschiedenen Zeiten die Werte in Tabelle 4.

Tabelle 4: Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ und $\frac{dT_2}{dt}$.

Zeit/s	$\frac{dT_1}{dt} / \text{K s}^{-1}$	$\frac{dT_2}{dt} / \text{K s}^{-1}$
240	0.026 ± 0.001	-0.017 ± 0.002
480	0.028 ± 0.002	-0.023 ± 0.003
720	0.029 ± 0.003	-0.025 ± 0.004
960	0.028 ± 0.003	-0.023 ± 0.005

5.1 Bestimmung der Güteziffer

Für die Güteziffer ergibt sich nach Formel (6) in Vergleich mit der idealen Güteziffer nach (5) die Werte in Tabelle 5. Die Wärmekapazität $m_k c_k$ für die Kupferschlange und

Tabelle 5: Güteziffern der Wärmepumpe für die Zeiten aus 5.

Zeit/s	ν_{real}	ν_{ideal}
240	1.763 ± 0.097	29.998 ± 2.093
480	1.930 ± 0.126	12.730 ± 0.882
720	1.985 ± 0.170	8.220 ± 0.707
960	1.929 ± 0.224	6.622 ± 0.786

die Behälter beträgt 660 J/K , die Größe N, also die gemittelte Leistung, $192,16 \text{ W}$. Für die spezifische Wärmekapazität c_w ergibt sich nach [Gmb16c] $\approx 4,19 \cdot 10^3 \text{ J/(kg K)}$ mit $m_1 = 3 \text{ kg}$.

5.2 Berechnung des Massendurchsatzes $\frac{dm}{dt}$

Für den Massendurchsatz ergibt sich nach (7) die Ergebnisse, die in Tabelle 6 aufgeführt sind. Die Addition der Wärmekapazitäten ist vom Wert her gleich wie in 5.1, da m_2

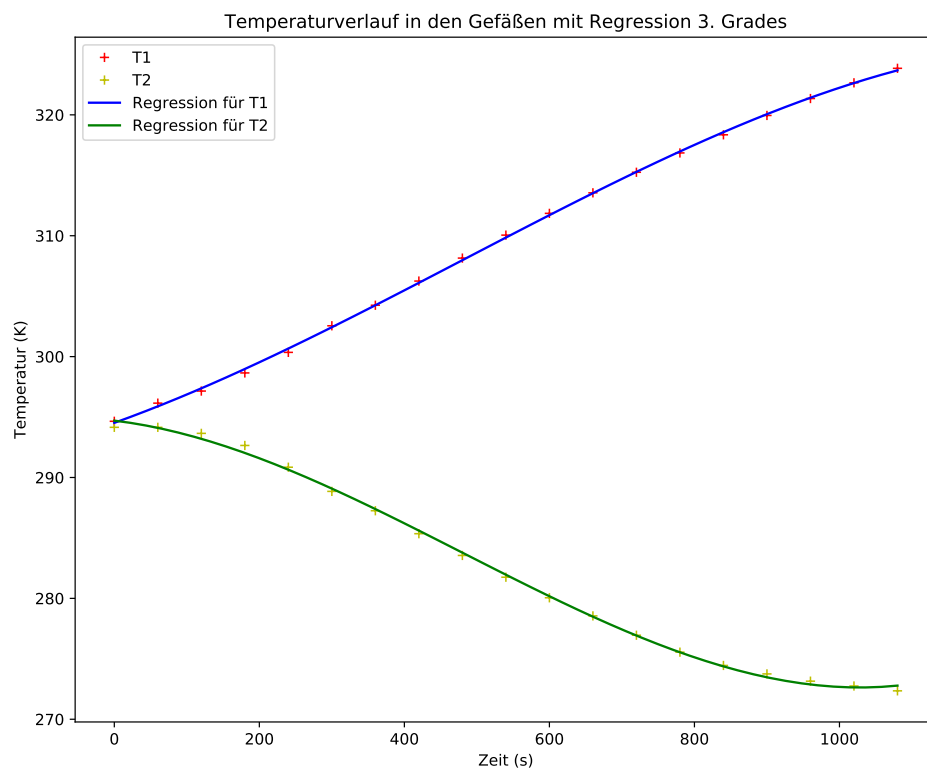


Abbildung 5: Temperaturverlauf durch $T(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ approximiert.

Tabelle 6: Massendurchsatz $\frac{dm}{dt}$ für die Zeiten aus 5.

Zeit/s	Massendurchsatz $\frac{dm}{dt}/\text{kg s}^{-1}$
240	-0.0013 \pm 0.0002
480	-0.0018 \pm 0.0003
720	-0.0019 \pm 0.0003
960	-0.0018 \pm 0.0004

auch 3 kg beträgt und sich ansonsten nichts geändert hat. Die Bestimmung von L , der Verdampfungswärme, erfolgt indem man den Druck p_b logarithmisch gegen $\frac{1}{T_1}$ aufträgt über lineare Regression die Steigung bestimmt.

$$m = (-2,45 \pm 0,14) \text{ K}$$
$$b = (10,2 \pm 0,5) \text{ bar}$$

Nach der Formel

$$L = \frac{-R \cdot m}{M} \quad (12)$$

ergibt sich für L $(1,68 \pm 0,10) \cdot 10^5 \text{ J/kg}$. Dabei ist R die allgemeine Gaskonstante [Gmb16a] mit dem Wert $R = 8,314 \text{ J/(K mol)}$ und $M = 120,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ die molare Masse [Gmb16b] des Transportgases.

5.3 Mechanische Leistung des Kompressors

Hiefür wird Formel (8) genutzt. Da die Dichte aber sowohl druck- als auch temperaturabhängig ist, errechnet sich ρ nach der allgemeinen Gasgleichung

$$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_a}{\rho T_2} . \quad (13)$$

Umgestellt nach ρ ergibt sich aus (13)

$$\rho = \frac{\rho_0 T_0 p_a}{p_0 T_2} . \quad (14)$$

Mit den im Kapitel 5.2 berechneten Massendurchsätzen, den im Experiment bestimmten Drücken p_a und p_b , $\kappa = 1.14$ ¹ sowie den eben errechneten Werten für ρ zu den vier Zeitpunkten lässt sich nun die mechanische Kompressorleistung bestimmen. Der Wirkungsgrad bestimmt sich zu:

$$\eta = \frac{N_{mech}}{\bar{N}} \quad (15)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 7 dargestellt.

¹ laut Aufgabenstellung, siehe [Dor16]

Tabelle 7: Der Druck ρ , die mechanische Kompressorleistung sowie den Wirkungsgrad für die Zeiten aus 5.

Zeit/s	Dichte $\rho/(\text{kg m}^{-3})$	N_{mech}/W	$\eta/\%$
240	16.571 ± 0.034	21.857 ± 3.174	11.4 ± 1.7
480	16.971 ± 0.087	34.479 ± 4.789	17.9 ± 2.5
720	17.392 ± 0.183	42.615 ± 6.937	22.2 ± 3.6
960	17.650 ± 0.331	42.851 ± 9.538	22.3 ± 5.0

6 Diskussion

Die Werte für die Temperaturen lassen sich am besten mit einer ganzrationalen Funktion dritten Grades approximieren, was die verschiedenen Graphen deutlich zeigen. Diese zeigen, dass die Temperatur zu Beginn und zum Ende der Messung relativ langsam fallen, dagegen in der Mitte der Messung am schnellsten. Dies passt am besten zu der oben genannten ganzrationalen Funktion dritten Grades.

Vor allem die Werte der Gütezahl liegen weit außerhalb des Toleranzbereichs der Fehlergrenzen. Die realen Güteziffern sind für alle Zeiten kleiner als die idealen. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass die Reservoirs nicht gut isoliert sind und so ein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann, da zum Beispiel die Deckel nicht bündig auf den Reservoirs sitzen. Weiterhin sind die schlecht leitenden Kupferschlangen im Wechselspiel mit einem ineffizienten Kompressor mögliche Optimierungsmöglichkeiten.

Im Allgemeinen lässt sich sagen, dass die Wärmepumpe wesentlich effizienter arbeiten könnte als sie es aktuell tut. Insbesondere ein Kompressor mit höherem Wirkungsgrad sowie eine bessere Abschirmung der Gefäße, besonders nach oben, würden die Effizienz dieser Wärmepumpe weiter steigern. Als bloßes Modell einer Wärmepumpe ist sie jedoch gut geeignet und anschaulich zu beschreiben.

Literatur

- [Dor16] TU Dortmund. *V206: Die Wärmepumpe*. 21. Nov. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V206.pdf>.
- [Gmb16a] CHEMIE.DE Information Service GmbH. *Allgemeine Gaskonstante*. 26. Nov. 2016. URL: http://www.chemie.de/lexikon/Universelle_Gaskonstante.html.
- [Gmb16b] CHEMIE.DE Information Service GmbH. *Dichlordifluormethan*. 26. Nov. 2016. URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Dichlordifluormethan.html>.
- [Gmb16c] CHEMIE.DE Information Service GmbH. *Spezifische Wärmekapazität*. 25. Nov. 2016. URL: http://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html.