

# **V301: Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen**

Felix Geyer

felix.geyer@tu-dortmund.de

Rune Dominik

rune.dominik@tu-dortmund.de

Durchführung: 13. Dezember 2016

Abgabe: 20. Dezember 2016

## Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Zielsetzung</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2 Theorie</b>   | <b>3</b>  |
| <b>3 Durchführung</b>  | <b>4</b>  |
| 3.1 Versuchsaufbau . . . . .   | 4         |
| 3.2 Versuchsdurchführung . . . . .   | 4         |
| <b>4 Fehlerrechnung</b>  | <b>5</b>  |
| <b>5 Auswertung</b>  | <b>5</b>  |
| 5.1 Bestimmung von Leerlaufspannung und Innenwiderstand der verschiedenen Spannungsquellen . . . . . | 5         |
| 5.2 Direkte Messung der Leerlaufspannung . . . . .   | 8         |
| 5.3 Leistungsabfall am Belastungswiderstand . . . . .  | 9         |
| <b>6 Diskussion</b>  | <b>10</b> |
| <b>Literatur</b>   | <b>11</b> |

## 1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, die **Leerlaufspannung** und den **Innenwiderstand** verschiedener Spannungsquellen zu ermitteln.

## 2 Theorie

Die **Leerlaufspannung**  $U_0$  ist die Spannung, die gemessen wird, wenn kein Strom fließt. Sie wird direkt an den Klemmen der Spannungsquelle abgenommen. Wenn über einen Verbraucher mit Lastwiderstand  $R_a$  ein endlicher Strom  $I$  fließt, dann gilt für die nun gemessene "Klemmenspannung"  $U_k$ , die ebenfalls an den Klemmen der Spannungsquelle abgenommen wird,

$$U_k < U_0 .$$

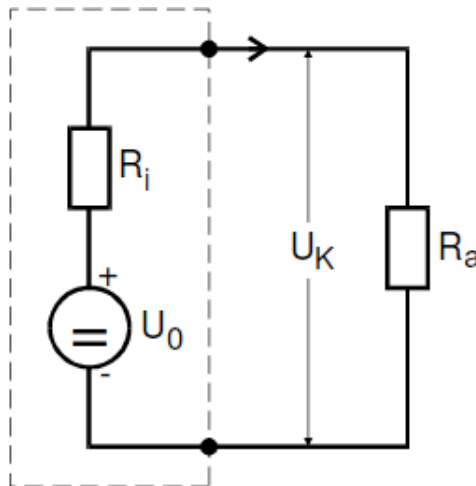
Mit dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz

$$\sum_n U_{0_n} = \sum_m R_m I_m \quad (1)$$

folgt für die betrachtete Situation

$$U_0 = I R_i + I R_a . \quad (2)$$

Dabei ist  $R_i$  der **Innenwiderstand** der Spannungsquelle. Die Klemmenspannung  $U_k$ ,



**Abbildung 1:** Schaltbild einer idealen Spannungsquelle mit Außenwiderstand  $R_i$  und Lastwiderstand  $R_a$  [Dor16].

siehe 1, lässt sich somit bestimmen aus (2)

$$U_k = I R_a = U_0 - I R_i . \quad (3)$$

Damit ist auch die Beziehung

$$U_k \approx U_0$$

für die **Leerlaufspannung** gezeigt, da für diesen Fall in (3)  $I$  vernachlässigbar klein wird. Für diese Betrachtungsweise ist die Spannungsquelle eine sogenannte ideale Spannungsquelle mit einem **Innenwiderstand** von 0 und einem in Reihe geschalteten Außenwiderstand  $R_i$ , der den **Innenwiderstand** simuliert.

Bei einem RC-Generator wird durch die Änderung des Belastungsstroms das elektrische Verhalten der Quelle festgelegt. In diesem Fall ist der **Innenwiderstand** eine differentielle Größe mit

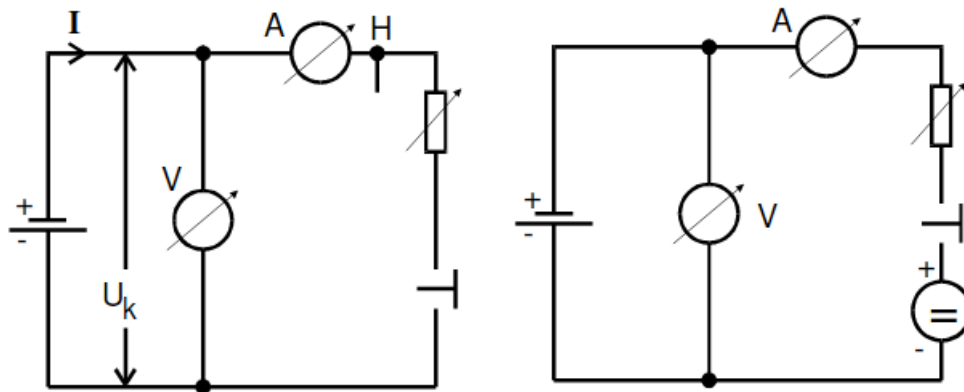
$$R_i = \frac{dU_k}{dI} . \quad (4)$$

Für eine Schaltung mit einer Gegenspannung größer als  $U_0$ <sup>1</sup> gilt

$$U_k = U_0 + R_i I \quad (5)$$

### 3 Durchführung

#### 3.1 Versuchsaufbau



(a) Schaltbild zur Messung von  $U_k$  in Abhängigkeit von  $I$ . (b) Schaltbild zur Messung von  $U_k$  in Abhängigkeit von  $I$  mit Gegenspannung.

**Abbildung 2:** Schaltbilder zu Aufgabe 2 (2a) und Aufgabe 3 (2b) der Versuchsdurchführung [Dor16].

#### 3.2 Versuchsdurchführung

Als erstes wurde die **Leerlaufspannung** einer Monozelle mit einem Spannungsmesser und der Eingangswiderstand  $R_v$  bestimmt. Danach wurde mit der Schaltung in 2a die

<sup>1</sup>siehe Kapitel 3.2

Klemmspannung  $U_k$  in Abhängigkeit von  $I$  gemessen. Der Variationsbereich des Belastungswiderstandes  $R_a$  liegt zwischen 0 und  $50\ \Omega$  mit einer Schrittweite von  $5\ \Omega$ .

Als nächstes wurde die Schaltung 2b aufgebaut und die Messung wiederholt. Dabei ist die Gegenspannung 2 V größer als die der Monozelle und der Stromfluss kehrt sich um.

Als letztes wird die Monozelle durch eine Rechteck- und eine Sinusspannung, die durch einen RC-Generator erzeugt werden, ausgetauscht. Die Variationsbereiche der Belastungswiderstände lauten:

- Sinusspannung:  $20 \leq R_a \leq 250\ \Omega$
- Rechteckspannung:  $0.1 \leq R_a \leq 5\ \text{k}\Omega$

Die beiden Spannungen haben eine Frequenz von 50 Hz, eine Range von 1 V und wurden mit maximaler Amplitude ausgegeben.

## 4 Fehlerrechnung

Falls zwei fehlerbehaftete Größen in einer Gleichung zur Bestimmung einer anderen Größe Verwendung finden, dann berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (6)$$

## 5 Auswertung

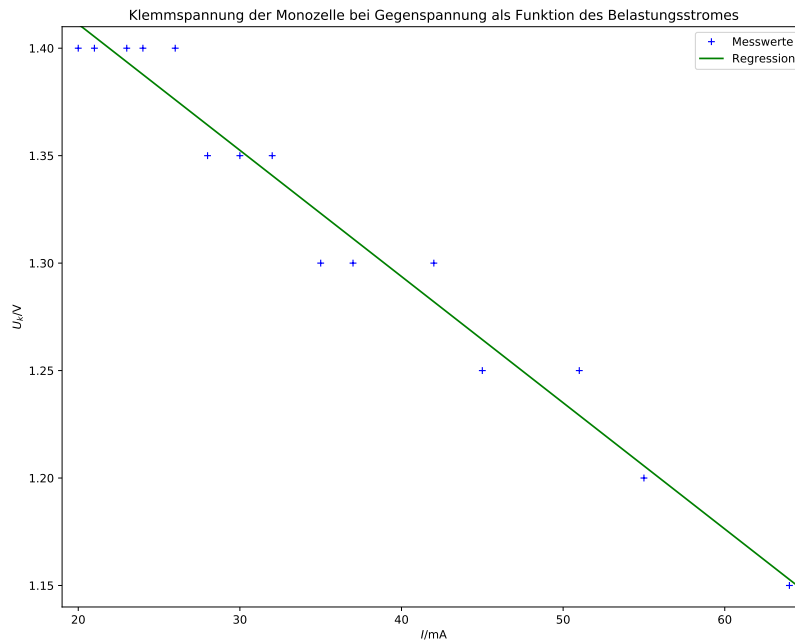
### 5.1 Bestimmung von Leerlaufspannung und Innenwiderstand der verschiedenen Spannungsquellen

Grafik und Messwerte für die Messung an der Monozelle finden sich in Grafik 3. Nach einer Umstellung der Skala des Spannungsmessgerätes, die während der Messung notwendig wurde, ergaben sich mit den vorherigen Werten inkonsistente Ergebnisse. Daher werden die fünf vor der Umstellung genommenen Messwerte in der Grafik nicht betrachtet.

Aufgrund des Zusammenhanges in (3) lassen sich  $U_0$  und  $R_i$  durch lineare Regression berechnen. Die Regression ist in Grafik 3 dargestellt. Es ergeben sich:

$$U_0 = (1.529 \pm 0.011)\ \text{V}$$

$$R_I = (5.87 \pm 0.30)\ \Omega$$



| $R_a/\Omega$       | $U_k/V$ | $I/mA$ |
|--------------------|---------|--------|
| 3.46               | 0.45    | 130    |
| 9.38               | 0.75    | 80     |
| 18.00              | 0.90    | 50     |
| 36.67              | 1.10    | 30     |
| 55.00              | 1.10    | 20     |
| hier Skalenwechsel |         |        |
| 17.97              | 1.15    | 64     |
| 21.82              | 1.20    | 55     |
| 24.51              | 1.25    | 51     |
| 27.78              | 1.25    | 45     |
| 30.95              | 1.30    | 42     |
| 35.14              | 1.30    | 37     |
| 37.14              | 1.30    | 35     |
| 42.19              | 1.35    | 32     |
| 45.00              | 1.35    | 30     |
| 48.21              | 1.35    | 28     |
| 53.85              | 1.40    | 26     |
| 58.33              | 1.40    | 24     |
| 60.87              | 1.40    | 23     |
| 66.67              | 1.40    | 21     |
| 70.00              | 1.40    | 20     |

**Abbildung 3:** In der Grafik wurden die Klemmspannungen an der Monozelle gegen die gemessenen Stromstärken aufgetragen. Die Werte vor Umstellung der Skala des Amperemeters wurden in der Grafik vernachlässigt. Die Tabelle zeigt die Messwerte und die nach  $R = U/I$  bestimmten Widerstände.

In Grafik 4 sind Messwerte und Grafik mit Regression an der Monozelle bei Gegenspannung dargestellt. Aus der Regression folgt wie oben:

$$U_0 = (1.260 \pm 0.025) \text{ V}$$

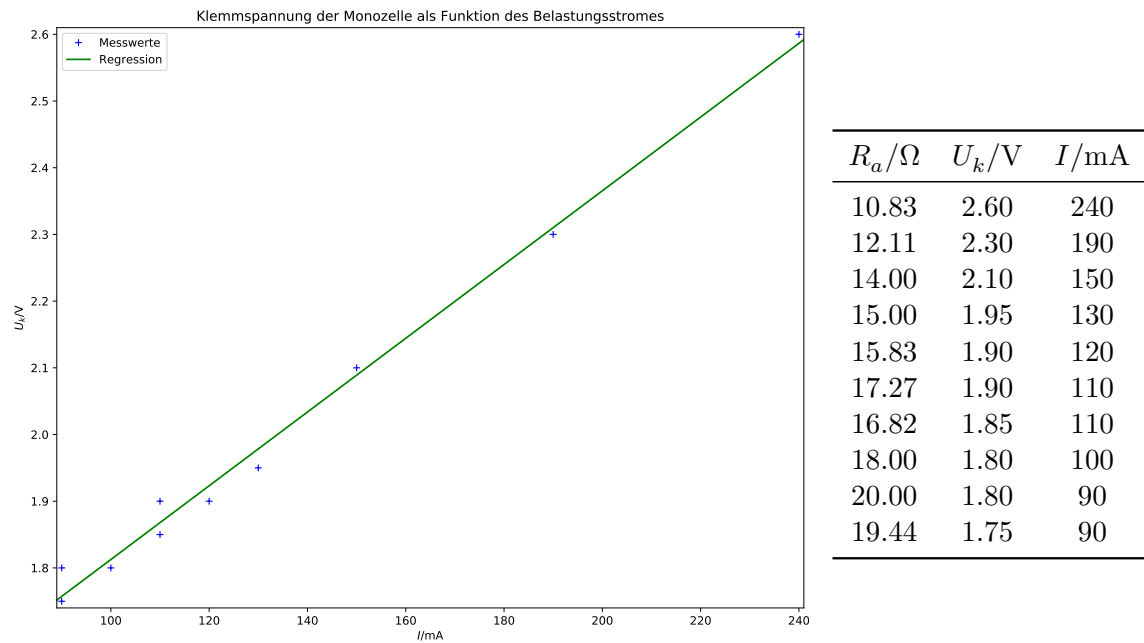
$$R_I = (5.53 \pm 0.17) \Omega$$

Im Vergleich mit der Messung ohne Gegenspannung zeigt sich, dass die Abweichung der Werte für den Innenwiderstand im Bereich der Messungenauigkeit liegen.

Grafik mit Regression und die jeweiligen Messwerte finden sich in Grafik 5 für den Rechteckausgang und in 6 für den Sinusausgang. Aus der Regression folgt wieder für den Rechteckausgang:

$$U_0 = (0.644 \pm 0.010) \text{ V}$$

$$R_I = (59.8 \pm 2.7) \Omega$$

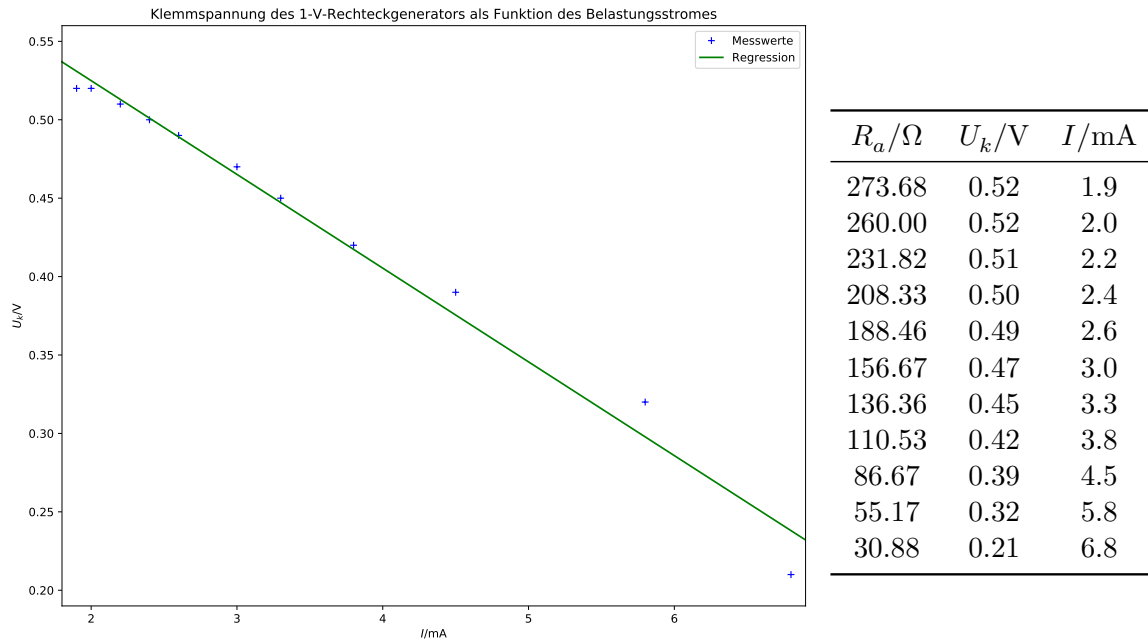


**Abbildung 4:** In der Grafik wurden die Klemmspannungen an der Monozelle bei Gegenspannung gegen die gemessenen Stromstärken aufgetragen. Die Tabelle zeigt die Messwerte und die nach  $R = U/I$  bestimmten Widerstände

und für den Sinusausgang:

$$U_0 = (1.078 \pm 0.007) \text{ V}$$

$$R_I = (635 \pm 12) \Omega$$



**Abbildung 5:** In der Grafik wurden die Klemmspannungen am Rechteckausgang eines RC-Generators gegen die gemessenen Stromstärken aufgetragen. Die Tabelle zeigt die Messwerte und die nach  $R = U/I$  bestimmten Widerstände.

## 5.2 Direkte Messung der Leerlaufspannung

Für den durch den endlichen Eingangswiderstand  $R_v$  des Voltmeters von  $\geq 10 \text{ M}\Omega$  entstehenden, systematischen Fehler bei der Spannungsmessung, folgt aus (3) unter Verwendung von (6):

$$U_0 - U_k = U_k \frac{R_i}{R_v} = \Delta U \quad (7)$$

Daraus ergibt sich für die Monozelle, bei einer gemessenen Spannung

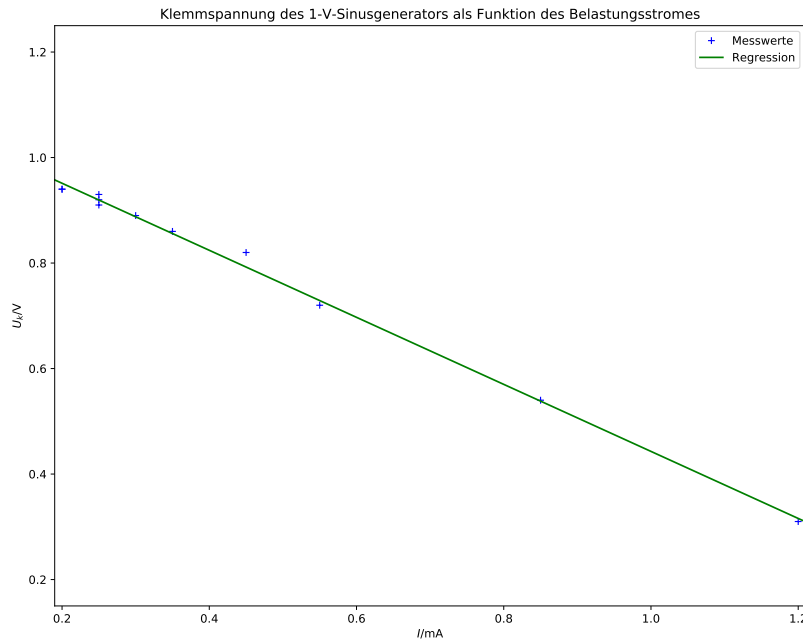
$$U_k = 1.55 \text{ V}$$

und dem in Kapitel 5.1 berechneten Innenwiderstand der Spannungsquelle  $R_i$  für  $\Delta U$ :

$$\Delta U = (9.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

Dieser Wert ist so gering, dass er vernachlässigt werden kann. Die direkte Messung der Leerlaufspannung kann somit als genau angenommen werden. Im Vergleich mit der in 5.1 berechneten Leerlaufspannung zeigt sich, dass diese leicht unter der hier bestimmten liegt. Die Abweichung liegt dennoch nicht im Bereich der Messungenauigkeit.





| $R_a/\text{k}\Omega$ | $U_k/\text{V}$ | $I/\text{mA}$ |
|----------------------|----------------|---------------|
| 4.70                 | 0.94           | 0.20          |
| 4.70                 | 0.94           | 0.20          |
| 3.72                 | 0.93           | 0.25          |
| 3.68                 | 0.92           | 0.25          |
| 3.64                 | 0.91           | 0.25          |
| 2.97                 | 0.89           | 0.30          |
| 2.46                 | 0.86           | 0.35          |
| 1.82                 | 0.82           | 0.45          |
| 1.31                 | 0.72           | 0.55          |
| 0.64                 | 0.54           | 0.85          |
| 0.26                 | 0.31           | 1.20          |

**Abbildung 6:** In der Grafik wurden die Klemmspannungen am Sinusausgang eines RC-Generators gegen die gemessenen Stromstärken aufgetragen. Die Tabelle zeigt die Messwerte und die nach  $R = U/I$  bestimmten Widerstände.

Eine im Gegensatz zum Voltmeter messbare systematische Fehlerquelle wäre das Legen des Voltmeters hinter das Amperemeter. Am realen Widerstand des Amperemeters fällt ein Teil der Spannung ab, sodass für die dort gemessene Spannung  $U_H$  gilt

$$U_H < U_k ,$$

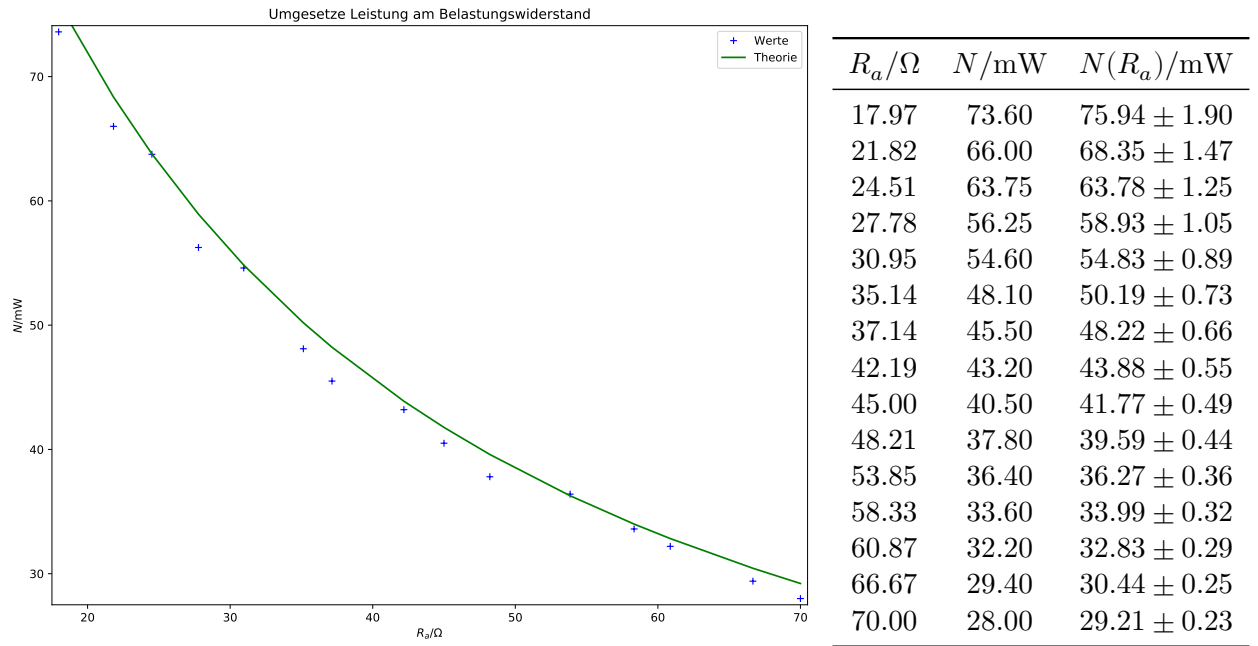
was einen systematischen Fehler darstellt.

### 5.3 Leistungsabfall am Belastungswiderstand

Wird die Leistung betrachtet, die am Belastungswiderstand umgesetzt wird, so folgt aus (6) mit  $N = U_k I$ :

$$N(R_a) = \frac{U_0^2 R_a}{(R_a + R_i)^2} \quad (8)$$

Wird nun  $N = U_k I$  gegen  $R_a = U_k/I$  aufgetragen und zusätzlich  $N(R_a)$  in die Grafik eingetragen, so ergibt sich der in Grafik 7 dargestellte Verlauf. Die Fehler folgen nach (6) aus der fehlerbehafteten Größe  $R_i$ . Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen der Kurve und den berechneten Werten für  $N$ ; ein Großteil der Werte liegt innerhalb der Messungenauigkeit.



**Abbildung 7:** In der Grafik wurde der Leistungsumsatz am Belastungswiderstand bei Messung der Monozelle dargestellt. Die Tabelle enthält die dazugehörigen Messwerte.

## 6 Diskussion

Zusammenfassend zeigen sich besonders bei der Monozelle zwischen den drei Messmethoden untereinander schlüssige Werte, die sich teilweise (Monozelle mit und ohne Gegenspannung) im Bereich der Messungenauigkeit befinden, beziehungsweise nur leicht unterscheiden (Monozelle bei Variation des Belastungswiderstandes und direkte Messung). Bei den Ausgängen am RC-Generator fehlt eine Vergleichsmöglichkeit.

Problematisch waren die ungenauen Multimeter, die eine Änderung in Größenordnungen unterhalb der Skala kaum anzeigen können (Siehe Grafik 3, man erkennt, dass kleine Änderungen der Werte nicht abgelesen werden konnten, was zu einer scheinbar diskreten Verteilung der Messwerte führt). Ein Verstellen der Skala war gleichzeitig jedoch nicht möglich, da sich dabei, wie in Kapitel 5.1 ersichtlich, die Ergebnisse verfälschen. Es empfiehlt sich daher eine Wiederholung des Experimentes mit einem digitalen Messgerät, oder einem analogen Gerät mit größerer Skalenweite, um die Werte zu überprüfen. Auch eine Messung nach einer anderen Methode, wie zum Beispiel der "Nullmethode" würde zum Verifizieren der Daten beitragen.

Als systematischer Fehler quasi ausschließen lässt sich der endliche Innenwiderstand des Voltmeters. Der dadurch entstandene Fehler liegt in einer Größenordnung, in der keine Messungen mehr möglich waren. Der Fehler kann daher nicht in die Messwerte einfließen.

## Literatur

- [Dor16] TU Dortmund. *V301: Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen*. 12. Dez. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf>.