V106: Gekoppelte Pendel

Felix Geyer   Rune Dominik

08. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch geht es um Messung der Schwingungs- und Schwebungsdauer von gekoppelten Pendeln. Untersucht werden gleich- und gegensinnige sowie gekoppelte Schwingungen.

2 Theorie

Ein einzelndes Fadenpendel, welches reibungsfrei aufgehängt wurde, mit einem Faden der Länge l und Masse m schwingt für kleine Auslenkungen ($\sin\phi \approx \phi$) mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

Dies ist die Lösung der zugehörigen Schwingungsdifferentialgleichung mit g als Erdbeschleunigungskonstante. Mit (1) und

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ergibt sich als Formel für die gesuchte Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2}$$

Wenn man nun zwei dieser Fadenpendel durch eine Feder koppelt, ergeben sich zwei DGL's mit jeweils einem Term darin, der den Drehwinkel des anderen Pendels enthält. Dies kommt durch die Kopplung mit der Feder. Je nach Auslenkungswinkel α_1 und α_2 der Fadenpendel ergeben sich verschiedene Schwingungsarten:

Für: $\alpha_1 = \alpha_2$ ergibt sich eine gleichsinnige Schwingung. Bei dieser hat die Feder keine Auswirkung auf die Schwingungen. Deshalb gilt für die Schwingungsfrequenz ω_+ (1) und für die Schwingungsdauer T_+ (2).

Wenn $\alpha_1 = -\alpha_2$ ist, nennt man dies eine gegensinnige Schwingung. Für diesen Fall greift die Feder in das Schwingverhalten der Pendel ein. Deshalb werden (1) und (2) erweitert um jeweils einen Term mit der Kopplungskonstante K der Feder

$$\omega_{\_} = \sqrt{\frac{l}{g} + \frac{2K}{l}} \tag{3}$$

$$T_{\_} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+2K}} \tag{4}$$

Für: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$ ergibt sich eine gekoppelte Schwingung. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass die beiden Pendel die kinetische Energie auf das andere Pendel übertragen und dann erneut erhalten. Hier tritt die sogenannte Schwebung auf. Dieser Begriff beschreibt die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels. Die Dauer dieses Zustandes berechnet sich nach

$$T_S = \frac{T_- \cdot T_+}{T_+ - T_-} \tag{5}$$

mit T_- aus der gegen- und T_+ aus der gleichsinnigen Schwingung. Die Kopplungskonstante K der Feder zwischen den beiden Pendeln definiert sich nach

$$K = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} = \frac{{}_{+} \cdot {}_{-}}{{}_{-} - {}_{+}} \tag{6}$$

3 Durchführung

Die Pendel sind zwei Stabpendel, die verschiebbare Massen besitzen, um verschiedene Pendellängen zu realisieren. Die Aufhängung besteht aus einer reibungsarmen Spitzenlagerung, die eine reibungsfreie Schwingung gewährleistet. Alle Schwingungsdauern werden für fünf Schwingungen und für eine Pendellänge von 0,6 m bestimmt. Zuerst messen wir die Schwingungsdauern T_1 und T_2 der einzelnen Pendel nach und vergleichen, ob sie im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen. Um eventuellen statistischen Fehlern vorzubeugen, führen wir die Messung neunmal aus. Danach verbinden wir die beiden Pendel über die Kopplungsfeder und führen eine gleich- und eine gegensinnige Schwingung durch , wobei wir T_+ und T_- experimentell bestimmen. Im Anschluss ermitteln wir die Schwebungsdauer T_S und die Schwingungsdauer T. Zum Schluss wiederholen wir alle Messungen für eine Pendellänge von 0,75 m.

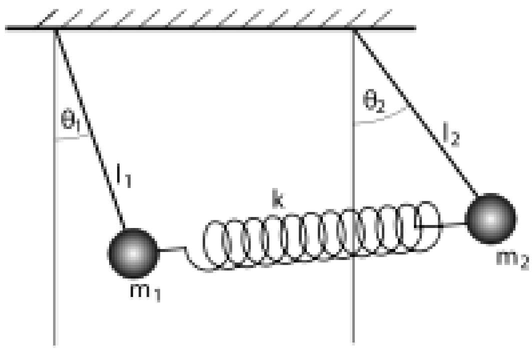

Abbildung 1: Darstellung eines gekoppelten Pendels mit Öffnungswinkel θ statt α.

Tabelle 1: Entkoppelte Pendel

$T_1 l = 60$cm in s	$T_2 l = 60$cm in s	$T_2 l = 75$cm in s	$T_2 l = 75$cm in s
1.50	1.47	1.70	1.63
1.47	1.46	1.69	1.60
1.46	1.40	1.67	1.69
1.52	1.46	1.64	1.69
1.46	1.52	1.65	1.63
1.45	1.45	1.63	1.64
1.52	1.49	1.64	1.63
1.56	1.50	1.68	1.70
1.45	1.47	1.60	1.63
1.50	1.51	1.56	1.73

4 Auswertung

4.1 Berechnung der Schwingungsdauern der entkoppelten Pendel

Es wurden jeweils 10 Messungen für jeweils 5 Schwingungen durchgeführt. Für die Fehlerrechnung gibt:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i \tag{7}$$

für den Mittelwert, sowie:

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\bar{T} - T_i)^2} \tag{8}$$

für den Fehler des Mittelwertes. Aus den Messwerten folgen die in der Tabelle dargestellten Schwingungdauern für die jeweils entkoppelten Pendel. Es ergeben sich folgende Werte für $l = 60cm$:

$$\bar{T_1} = 1.491 \pm 0.012$$
$$\bar{T_2} = 1.473 \pm 0.011$$

Und für $l = 75cm$:

$$\bar{T_1} = 1.645 \pm 0.014$$
$$\bar{T_2} = 1.658 \pm 0.014$$

Die Werte der Schwingungsdauern liegen also bei beiden längen gegenseitig im Bereich der Messabweichung.

Tabelle 2: Gegen- und gleichsinnige Schwingung

$T_+ l = 60$cm in s	$T_l = 60$cm in s	$T_+ l = 75$cm in s	$T_l = 75$cm in s
1.54	1.41	1.75	1.57
1.49	1.44	1.78	1.58
1.45	1.39	1.73	1.61
1.49	1.44	1.72	1.54
1.50	1.39	1.68	1.56
1.46	1.41	1.69	1.53
1.42	1.46	1.71	1.54
1.49	1.41	1.67	1.57
1.51	1.41	1.66	1.49
1.43	1.46	1.70	1.52

4.2 Berechnung der Schwingfrequenzen bei gleich- und gegensinniger Schwingung

Es werden weiterhin die in 4.1 eingeführten Formeln zur Fehlerrechnung genutz. Aus den Messwerten folgen die in der Tabelle dargestellten Schwingungdauern für die jeweils entkoppelten Pendel.
Es ergeben sich folgende Werte für $l = 60cm$:

$$\bar{T_+} = 1.479 \pm 0.012$$
$$\bar{T\_} = 1.421 \pm 0.009$$

Und für $l = 75cm$:

$$\bar{T_+} = 1.709 \pm 0.012$$
$$\bar{T\_} = 1.551 \pm 0.011$$

Nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung und mit (1) sowie (3) folgt für die Frequenzen bei $l = 60cm$:

$$\omega_+ = 4.249 \pm 0.034$$
$$\omega\_ = 4.421 \pm 0.027$$

Und für $l = 75cm$:

$$\omega_+ = 3.677 \pm 0.026$$
$$\omega\_ = 4.051 \pm 0.028$$

Für die Kopplungskonstante ergibt sich nach (6) daher bei $l = 60cm$:

$$K = 0.040 \pm 0.010$$

Tabelle 3: Schwebungsdauer bei Messung einer Schwebung

$T_s l = 60$cm in s	$T_s l = 75$cm in s
29.41	36.46
28.87	37.03
29.07	33.87
31.67	34.06
28.63	31.01
28.46	38.27
31.73	36.55
33.60	32.32
28.96	33.10
30.80	38.47

Und für $l = 75cm$:

$$K = 0.096 \pm 0.010$$

4.3 Vergleich zwischen gemessenen und errechneten Werten

Nach (5) ergibt sich die Schwingungsdauer bei der gekoppelten Schwingung mit $l = 60cm$ zu:

$$T_s = 36 \pm 9$$

Und für $l = 75cm$:

$$T_s = 16.8 \pm 1.7$$

Aus den gemessenen Werten (siehe Tabelle 3 und 4) folgt für $\bar{T}_s$, gemessen bei $l = 60cm$:

$$\text{Einzelmessung: } \bar{T}_s = 30.1 \pm 0.5$$
$$\text{Fünffachmessung: } \bar{T}_s = 28.9 \pm 1.1$$

und bei $l = 75cm$

$$\text{Einzelmessung: } \bar{T}_s = 35.1 \pm 0.8$$
$$\text{Fünffachmessung: } \bar{T}_s = 40.6 \pm 0.8$$

Für die Messung bei $l = 60cm$ liegt der gemessene Wert im Ramen der zu erwartenden Abweichung für den berechneten Wert, bei $l = 75cm$ ist dies nicht der Fall.

Tabelle 4: Schwebungsdauer bei Messung von fünf Schwebung

$T_s l = 60\text{cm}$ in s	$T_s l = 75\text{cm}$ in s
27.10	37.02
27.72	41.77
30.09	38.20
31.59	41.37
24.97	41.80
27.65	42.97
32.95	40.97

5 Diskussion

Dies ist die Diskussion.

Literatur

[Dor] TU Dortmund. *V106: Gekoppelte Pendel.* URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/GekoppeltePendel.pdf.