

V47: Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Kupfer

Felix Geyer Rune Dominik
felix.geyer@tu-dortmund.de rune.dominik@tu-dortmund.de

Durchführung: 18. Dezember 2017
Abgabe: 08. Januar 2018

1 Theorie

Im folgenden werden das klassische, das einsteinsche und das Debye-Modell zur Erläuterung der Temperaturabhängigkeit von Molwärme kristalliner Festkörper eingeführt und diskutiert.

1.1 Die klassische Theorie

Klassisch gesehen verteilt sich die einem Festkörper zugeführte Wärmeenergie gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade der Atome. Dies nennt man das Äquipartitionstheorem. Es gilt

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

für die mittlere Energie pro Freiheitsgrad mit T als Temperatur und k_B als Boltzmannkonstante. Da diese Atome im Kristall an definierten Positionen im Gitter sitzen, können sie entlang dreier Raumrichtungen um ihre Gleichgewichtslage schwingen. Es folgt

$$U = 3 N_L k_B T = 3 R T \quad (1)$$

für die mittlere Energie pro Atom mit N_L als Loschmidtsche Zahl und R als allgemeine Gaskonstante. Die spezifische Molwärme bei konstantem Volumen ergibt sich aus (1)

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R. \quad (2)$$

Diese ist offensichtlich weder material- noch temperaturabhängig. Dies widerspricht experimentellen Erfahrungen. Allerdings lässt sich der Wert $3R$ asymptotisch für hohe Temperaturen erreichen.

1.2 Einstein-Modell

Die fehlende Material- und Temperaturabhängigkeit rührt daher, dass im klassischen Ansatz die Quantelung der Schwingungsenergie außer Acht gelassen wurde. Im Einstein-Modell schwingen alle Atome mit der Frequenz ω und können nur Schwingungsenergien aufnehmen, die

$$E = n \hbar \omega \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (3)$$

erfüllen. Weiterhin gilt für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein schwingendes Atom bei einer Temperatur T im thermodynamischen Gleichgewicht steht und die Energie (3) besitzt, nach der Boltzmann-Verteilung

$$W(n) = \exp \left(- \frac{n \hbar \omega}{k_B T} \right). \quad (4)$$

Es gilt

$$\langle U \rangle_{\text{Einstein}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \hbar \omega \exp\left(-\frac{n \hbar \omega}{k_B T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n \hbar \omega}{k_B T}\right)} \quad (5)$$

und es folgt daraus

$$\langle U \rangle_{\text{Einstein}} = \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (6)$$

Für die Molwärme ergibt sich aus (6)

$$C_{V\text{Einstein}} = \frac{d}{dT} 3N_L \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} = 3R \frac{\hbar^2 \omega^2}{k^2 T^2} \frac{\exp(\hbar \omega / k_B T)}{[\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1]^2} \quad (7)$$

Für (7) gilt wie erwähnt im Grenzfall großer Temperaturen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{V\text{Einstein}} = 3R. \quad (8)$$

Außerdem enthält (7) die erwartete Abnahme der Molwärme mit der Temperatur. Allerdings weicht vor allem der Verlauf im Bereich tiefer Temperaturen stark ab vom Verlauf der experimentellen Kurve.

1.3 Debye-Modell

Diese Abweichung im Bereich tiefer Temperaturen lässt sich damit erklären, dass im Einsteinmodell von einer singulären Frequenz ausgegangen wird. Wenn man diese ersetzt durch die spektrale Verteilung der möglichen Eigenschwingungen aller Oszillatoren $Z(\omega)$ in einem Kristall, erhält man

$$C_V = \frac{d}{dT} \int_0^{\omega_{\max}} Z(\omega) \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} d\omega. \quad (9)$$

$Z(\omega)$ ist dabei recht komplizierter Natur, vor allem für z.B. anisotropes Verhalten. Als Näherung wird angenommen, dass die Phasengeschwindigkeit unabhängig von Frequenz und Ausbreitungsrichtung ist. $Z(\omega)$ lässt sich dann durch einfaches Abzählen der Eigenschwingungen in einem Würfel mit Kantenlänge L in einem Frequenzintervall von ω bis $\omega + d\omega$ bestimmen. Dies wird als Debye-Modell bezeichnet. Es folgt

$$Z(\omega) d\omega = \frac{L^3}{2\pi^2} \omega^2 \left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3} \right) d\omega \quad (10)$$

mit v_l und v_{tr} als Phasengeschwindigkeit in longitudinaler bzw. transversaler Richtung. Außerdem besitzt ein endlicher Kristall nur endlich viele Eigenschwingungen. Deswegen gibt es eine Grenzfrequenz, die sogenannte Debye-Frequenz, welche man aus

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega) d\omega = 3N_L \quad (11)$$

erhält mit N_L als Anzahl der Atome. Aus

$$\omega_D^3 = \frac{18\pi^2 N_L}{L^3} \frac{1}{\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3}} \quad (12)$$

folgt

$$Z(\omega)d\omega = \frac{9N_L}{\omega_D^3} \omega^2 d\omega$$

und daraus

$$C_{V_{De}} = 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (13)$$

mit θ_D als Debye-Temperatur, welche materialabhängig ist. Aus (13) wird ersichtlich, dass für die Grenzfälle kleiner und großer Temperaturen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{V_{De}} = 3R \quad (14)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_{V_{De}} \propto T^3 \quad (15)$$

gilt. Die T^3 -Abhängigkeit beschreibt den Grenzfall kleiner Temperaturen besser als das Einstein-Modell, ist aber aufgrund der getroffenen Annahme immer noch eine Näherung. Auch die Leitungselektronen tragen zur Molwärme bei, allerdings ist ihr Beitrag erst bei tiefen Temperaturen relevant und proportional zu T .

2 Durchführung

2.1 Versuchsaufbau

In Abbildung 1 ist die Messapparatur zu sehen. Sie besteht aus dem Rezipienten, in welchem sich die Probe und ein Kupferzylinder, welcher die Probe umgibt, befinden. An der Probe und am Zylinder sind Pt-100 Messwiderständen, deren Widerstand auf Temperaturänderungen reagiert, und Heizwicklungen angebracht. Außen befindet sich ein Dewargefäß, in welches der flüssige Stickstoff gefüllt wird, um die Probe und den Zylinder abzukühlen. Die Temperaturen errechnen sich aus

$$T = 0.00134R^2 + 2.296R - 243.02, \quad (16)$$

wobei R der Widerstand der Pt-100 Messwiderstände ist. Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ergibt sich dabei ein Fehler von:

$$\sigma_T = 0.00268R\sigma_R + 2.296\sigma_R \quad (17)$$

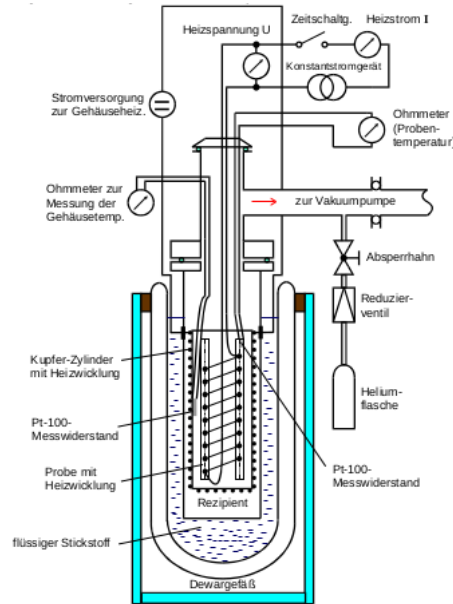


Abbildung 1: Der Versuchsaufbau im Schema [Dor17].

2.2 Versuchsdurchführung

Als erstes wird der Rezipient evakuiert und dann mit Helium gefüllt, um die Probe ohne gefrierendes Wasser kühlen zu können. Sodann wird flüssiger Stickstoff in das Dewargefäß gegeben. Sobald die Temperatur auf ca. 80 K gesunken ist, wird der Rezipient erneut evakuiert und die Probe in 7 °C-Schritten erwärmt. Dabei wird die benötigte Zeitdauer, die Temperaturveränderung von Zylinder und Probe und Heizspannung und -strom aufgenommen. Es wird versucht, den Zylinder und die Probe auf möglichst der gleichen Temperatur zu halten, damit keine Wärmestrahlung auftreten kann. Bei ca. 300 K wird die Messung gestoppt.

3 Auswertung

3.1 Fehlerrechnung

Für die Auswertung werden zwei Arten Punktschätzer genutzt. Es gibt:

$$\bar{T}_{\text{arith.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (18)$$

den arithmetischen Mittelwert, sowie:

$$\bar{T}_{\text{gew.}} = \sum_{i=1}^n T_i w_i$$

den mit den Gewichten w_i gewichteten Mittelwert. Die Summe der Gewichte ist dabei auf 1 normiert. In Fällen, in denen zwei fehlerbehaftete Größen in einer Gleichung zur Bestimmung einer anderen Größe Verwendung finden, berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n} \Delta x_n\right)^2}.$$

Die entsprechenden Fehlerformeln werden an den gegebenen Stellen angegeben. Für den mathematischen Teil der Auswertung wird auf PYTHON [Fou17] zurückgegriffen: Arithmetische Mittelwerte werden durch die Funktion MEAN aus dem Paket NUMPY [Oli07] nach (18), gewichtete Mittelwerte durch manuelles implementieren der jeweiligen Funktion berechnet. Regressionen sowie deren Fehler wurden durch die NUMPY Funktion POLYFIT nach einer LEAST-SQUARES-Methode mit Polynomen der an den entsprechenden Stellen angegebenen Ordnung durchgeführt. Grafiken wurden mit MATPLOTLIB [Hun07] erstellt.

Widerstände konnten laut Herstellerangaben mit einem relativen Fehler von 0.2 % gemessen werden. Für Zeitmessungen wird ein Fehler von ± 5 s angenommen. Strom und Spannungsmessungen änderten sich während der Messungen kaum. Ein quantifizierbarer Fehler kann somit nicht angegeben werden, dies ist jedoch als systematischer Messfehler zu berücksichtigen.

3.2 Molare Wärmekapazität bei konstantem Druck

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck bei konstantem Druck berechnet sich über die Heizspannung U , die Heizstromstärke I , die Heizdauer t_H , die in t_H erreichte Temperaturänderung ΔT (die Werte wurden so angepasst, dass die Messintervalle nahtlos ineinander übergehen) sowie über die Probenmasse $m = 0.342$ kg und die Molmasse M des Probenmaterials (für Kupfer: $M = (63.546 \pm 0.003) \text{ g mol}^{-1}$ [Hop17]) nach

$$c_p = \frac{E}{\Delta T} = \frac{U I t_H}{\Delta T} \cdot \frac{M}{m}. \quad (19)$$

mit einem Fehler

$$\sigma_{C_p} = \sqrt{\frac{C^2 M^2 \sigma_{t_H}^2}{\Delta T^2} + \frac{C^2 M^2 \sigma_I^2}{\Delta T^4} + \frac{C^2 t_H^2 \sigma_M^2}{T^2}}, \quad (20)$$

wobei $C = UI/m$ gilt. Die nach (19) erhaltenen Werte sind mit den entsprechenden Messwerten in Tabelle 1 zu finden.

Tabelle 1: Übersicht über die Messwerte sowie die daraus bestimmte Größe c_p

$T_{\text{Probe},1} / \text{K}$	$T_{\text{Probe},2} / \text{K}$	$\Delta T / \text{K}$	U / V	I / mA	t_{H} / s	$c_p / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
79.6 ± 0.1	87.2 ± 0.1	7.5 ± 0.2	15.6	149.1	240 ± 5	13.7 ± 0.4
87.2 ± 0.1	94.0 ± 0.1	6.9 ± 0.2	15.8	150.1	230 ± 5	14.8 ± 0.5
94.0 ± 0.1	101.2 ± 0.1	7.1 ± 0.2	15.8	150.3	250 ± 5	15.5 ± 0.5
101.2 ± 0.1	108.1 ± 0.2	6.9 ± 0.2	15.9	150.9	260 ± 5	16.8 ± 0.6
108.1 ± 0.2	115.2 ± 0.2	7.2 ± 0.2	15.9	151.0	275 ± 5	17.1 ± 0.6
115.2 ± 0.2	122.4 ± 0.2	7.2 ± 0.3	16.0	151.5	280 ± 5	17.5 ± 0.7
122.4 ± 0.2	129.2 ± 0.2	6.7 ± 0.3	17.2	163.2	230 ± 5	17.8 ± 0.8
129.2 ± 0.2	136.2 ± 0.2	7.0 ± 0.3	17.9	169.5	240 ± 5	19.3 ± 0.9
136.2 ± 0.2	143.2 ± 0.2	7.0 ± 0.3	17.6	166.8	260 ± 5	20.2 ± 1.0
143.2 ± 0.2	150.2 ± 0.2	7.0 ± 0.3	17.8	168.5	250 ± 5	19.8 ± 1.0
150.2 ± 0.2	157.0 ± 0.3	6.8 ± 0.4	17.8	169.0	240 ± 5	19.7 ± 1.1
157.0 ± 0.3	164.1 ± 0.3	7.1 ± 0.4	17.9	169.0	240 ± 5	19.0 ± 1.1
164.1 ± 0.3	171.2 ± 0.3	7.1 ± 0.4	17.9	169.0	240 ± 5	19.0 ± 1.1
171.2 ± 0.3	178.1 ± 0.3	6.9 ± 0.4	17.9	169.0	265 ± 5	21.6 ± 1.4
178.1 ± 0.3	185.3 ± 0.3	7.2 ± 0.4	17.8	169.0	280 ± 5	21.9 ± 1.4
185.3 ± 0.3	192.2 ± 0.3	6.9 ± 0.5	17.9	169.1	275 ± 5	22.3 ± 1.6
192.2 ± 0.3	199.2 ± 0.4	6.9 ± 0.5	17.9	169.1	280 ± 5	22.7 ± 1.6
199.2 ± 0.4	206.1 ± 0.4	7.0 ± 0.5	17.9	169.1	275 ± 5	22.2 ± 1.7
206.1 ± 0.4	213.1 ± 0.4	7.0 ± 0.5	17.9	169.1	290 ± 5	23.3 ± 1.8
213.1 ± 0.4	220.1 ± 0.4	7.0 ± 0.6	17.9	161.1	290 ± 5	22.2 ± 1.8
220.1 ± 0.4	227.2 ± 0.4	7.0 ± 0.6	17.9	169.2	290 ± 5	23.2 ± 1.9
227.2 ± 0.4	234.2 ± 0.4	7.1 ± 0.6	17.9	169.3	300 ± 5	23.9 ± 2.1
234.2 ± 0.4	241.3 ± 0.4	7.1 ± 0.6	17.9	169.3	300 ± 5	23.9 ± 2.1
241.3 ± 0.4	248.1 ± 0.5	6.8 ± 0.6	17.9	169.3	285 ± 5	23.5 ± 2.2
248.1 ± 0.5	255.2 ± 0.5	7.1 ± 0.7	17.9	169.3	290 ± 5	22.9 ± 2.2
255.2 ± 0.5	262.1 ± 0.5	6.9 ± 0.7	17.9	169.4	270 ± 5	22.1 ± 2.2
262.1 ± 0.5	269.3 ± 0.5	7.2 ± 0.7	17.9	169.4	300 ± 5	23.6 ± 2.3
269.3 ± 0.5	276.2 ± 0.5	6.9 ± 0.7	17.9	169.4	300 ± 5	24.4 ± 2.6
276.2 ± 0.5	283.1 ± 0.5	6.9 ± 0.7	17.9	169.4	280 ± 5	22.7 ± 2.5
283.1 ± 0.5	290.1 ± 0.6	7.0 ± 0.8	17.9	169.4	300 ± 5	24.3 ± 2.7
290.1 ± 0.6	297.1 ± 0.6	7.0 ± 0.8	17.9	169.4	295 ± 5	23.8 ± 2.7

3.3 Molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_V kann aus c_p über die Korrekturformel

$$c_V = c_p - 9\alpha^2 \kappa V_0 T \quad (21)$$

mit Fehler

$$\sigma_{c_V} = \sqrt{324T^2 V_0^2 \alpha^2 \kappa^2 \sigma_\alpha^2 + 81V_0^2 \alpha^4 \kappa^2 \sigma_T^2 + \sigma_{c_p}^2} \quad (22)$$

bestimmt werden. α bezeichnet dabei den temperaturabhängigen linearen Ausdehnungskoeffizienten, κ das Kompressionsmodul (für Kupfer: $\kappa = 137.8 \text{ GPa}$ [GmB17]), V_0 das Molvolumen (für Kupfer: $V_0 = 7.10 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ [Hop17]) und T die Temperatur. Als Temperatur wird der Mittelwert zwischen Start- und Endpunkt jeder Messung genommen. Zur Bestimmung von α werden die gegebenen Werte [Dor17, S. 5, Tabelle 2] eingelesen und mit einem Polynom 4. Grades gefittet. Es ergeben sich die folgenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_4 &= (-8.16 \pm 0.75) \cdot 10^{-15} \text{ K}^{-5} \\ a_3 &= (7.39 \pm 0.55) \cdot 10^{-12} \text{ K}^{-4} \\ a_2 &= (-2.53 \pm 0.14) \cdot 10^{-9} \text{ K}^{-3} \\ a_1 &= (4.07 \pm 0.16) \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-2} \\ a_0 &= (-1.13 \pm 0.06) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}. \end{aligned}$$

Eine graphische Darstellung der Regression findet sich in Abbildung 2. Die nach (21) bestimmten c_V -Werte sind in Tabelle 2 zu finden. Eine grafische Darstellung der c_p - und c_V -Werte findet sich in 3b.

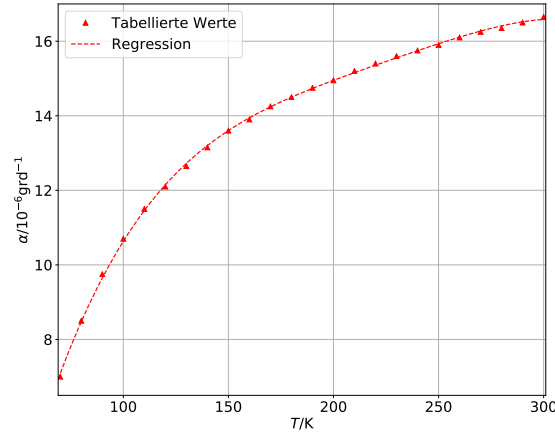
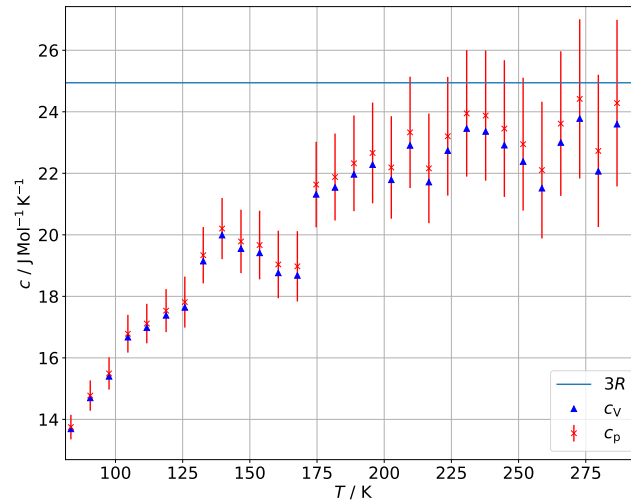


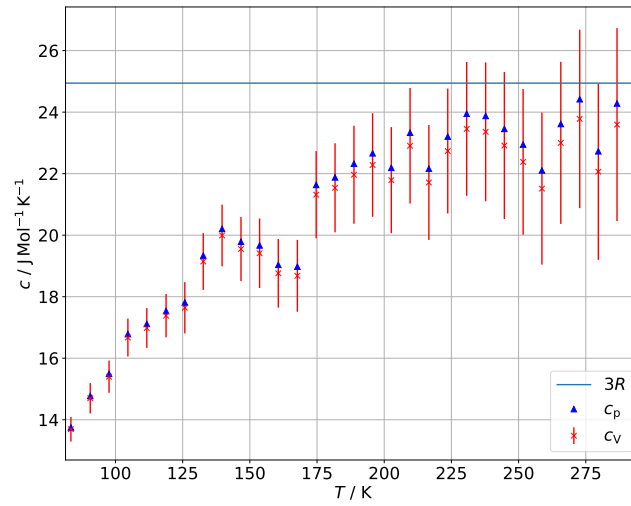
Abbildung 2: Fit des linearen Ausdehnungskoeffizienten.

Tabelle 2: Übersicht über die für die Rechnung notwendigen Größen sowie die daraus bestimmten Werte für c_V . Werte bis 170 K sind durch eine Linie abgetrennt.

\bar{T} / K	$\alpha_{\bar{T}} / 10^{-6} \text{K}^{-1}$	$c_p / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$c_V / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
83.41 ± 0.08	9 ± 2	13.7 ± 0.4	13.7 ± 0.4
90.62 ± 0.09	10 ± 2	14.8 ± 0.5	14.7 ± 0.5
97.61 ± 0.10	10 ± 2	15.5 ± 0.5	15.4 ± 0.5
104.62 ± 0.11	11 ± 2	16.8 ± 0.6	16.7 ± 0.6
111.66 ± 0.12	12 ± 3	17.1 ± 0.6	17.0 ± 0.6
118.84 ± 0.13	12 ± 3	17.5 ± 0.7	17.4 ± 0.7
125.80 ± 0.14	12 ± 3	17.8 ± 0.8	17.6 ± 0.8
132.67 ± 0.15	13 ± 4	19.3 ± 0.9	19.1 ± 0.9
139.67 ± 0.16	13 ± 4	20.2 ± 1.0	20.0 ± 1.0
146.70 ± 0.17	13 ± 4	19.8 ± 1.0	19.5 ± 1.0
153.64 ± 0.18	14 ± 5	19.7 ± 1.1	19.4 ± 1.1
160.59 ± 0.19	14 ± 5	19.0 ± 1.1	18.8 ± 1.1
167.69 ± 0.20	14 ± 6	19.0 ± 1.1	18.7 ± 1.2
174.68 ± 0.21	14 ± 6	21.6 ± 1.4	21.3 ± 1.4
181.70 ± 0.22	15 ± 7	21.9 ± 1.4	21.5 ± 1.4
188.74 ± 0.23	15 ± 7	22.3 ± 1.6	22.0 ± 1.6
195.68 ± 0.24	15 ± 8	22.7 ± 1.6	22.3 ± 1.7
202.64 ± 0.25	15 ± 8	22.2 ± 1.7	21.8 ± 1.7
209.62 ± 0.26	15 ± 9	23.3 ± 1.8	22.9 ± 1.9
216.62 ± 0.28	15 ± 10	22.2 ± 1.8	21.7 ± 1.9
223.64 ± 0.29	15 ± 10	23.2 ± 1.9	22.7 ± 2.0
230.69 ± 0.30	16 ± 11	23.9 ± 2.1	23.5 ± 2.2
237.75 ± 0.31	16 ± 12	23.9 ± 2.1	23.4 ± 2.3
244.71 ± 0.32	16 ± 13	23.5 ± 2.2	22.9 ± 2.4
251.69 ± 0.33	16 ± 14	22.9 ± 2.2	22.4 ± 2.4
258.69 ± 0.34	16 ± 15	22.1 ± 2.2	21.5 ± 2.5
265.71 ± 0.35	16 ± 16	23.6 ± 2.3	23.0 ± 2.6
272.75 ± 0.36	16 ± 17	24.4 ± 2.6	23.8 ± 2.9
279.68 ± 0.37	16 ± 18	22.7 ± 2.5	22.1 ± 2.9
286.63 ± 0.38	16 ± 19	24.3 ± 2.7	23.6 ± 3.1
293.60 ± 0.39	17 ± 20	23.8 ± 2.7	23.1 ± 3.2



(a) Verlauf der c_p -Werte.



(b) Verlauf der c_v -Werte.

Abbildung 3: Verlauf der Wärmekapazitäten mit jeweiligen Fehlern. Es ist der zum jeweiligen Wert korrespondierende c_v - oder c_p ohne Fehler mit angegeben.

3.4 Bestimmen der Debye-Temperatur

Zur Bestimmung der DEBYE-Temperatur werden zuerst die der gegebenen Tabelle [Dor17, S. 5, Tabelle 1] entnommenen Werte für θ_D/T in dem auf die bis 170 K passenden Bereich (13.305–20.205) mit einem Polynom 1. Ordnung gefittet. Es ergeben sich folgende

Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= 7.043 \text{ mol K J}^{-1} \\ a_1 &= -0.244 \text{ mol}^2 \text{ K}^2 \text{ J}^{-2} \end{aligned}$$

Die Fehler treten dabei erst in der 13. Mantisse auf und werden daher hier nicht dargestellt und zu null angenommen. Der Fit ist in Abbildung 4 dargestellt. Die Werte für θ_D/T werden nun durch Auswerten der Fit-Funktion an den entsprechenden c_V -Werten bestimmt. Die so bestimmten θ_D/T -Werte werden mit dem entsprechenden \bar{T} multipliziert, um die DEBYE-Temperaturen θ_D zu bestimmen. Die resultierenden Werte sind in Tabelle 3 eingetragen, die Fehler berechnen sich zu:

$$\sigma_{\theta_D} = \sigma_T \cdot \frac{\theta_D}{T}. \quad (23)$$

Mittelwertbildung wie eingangs beschrieben liefert folgende Werte:

$$\begin{aligned} \theta_{D,arith.} &= (335 \pm 9) \text{ K} \\ \theta_{D,gew.} &= (320 \pm 14) \text{ K}. \end{aligned}$$

Als Gewichte wurden dabei die absoluten Kehrwerte der Differenzen zwischen Zylinder- und Proben temperatur, normiert auf 1, gewählt. Die Gewichte berechnen sich also nach

$$w_i = \left\{ (\bar{T}_{Zyl,i} - \bar{T}_{Probe,i}) \sum_i^N (\bar{T}_{Zyl,i} - \bar{T}_{Probe,i})^{-1} \right\}^{-1}. \quad (24)$$

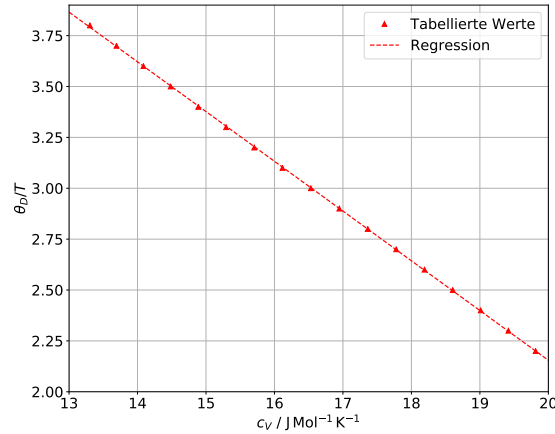


Abbildung 4: Fit der Debye-Funktion.

Tabelle 3: Übersicht über die für die Rechnung notwendigen Größen sowie die daraus bestimmten Werte für θ_D . Es sind weiterhin die für die spätere Berechnung des gewichteten Mittelwertes notwendigen Werte eingetragen.

\bar{T} / K	$T_{\text{zyl},1} / \text{K}$	$T_{\text{zyl},2} / \text{K}$	$\bar{T}_{\text{zyl.}} / \text{K}$	$c_V / \text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	θ_D / K
83.41 \pm 0.08	80.8 \pm 0.1	88.1 \pm 0.1	84.5 \pm 0.1	13.7 \pm 0.4	308 \pm 8
90.62 \pm 0.09	88.1 \pm 0.1	94.5 \pm 0.1	91.3 \pm 0.1	14.7 \pm 0.5	313 \pm 11
97.61 \pm 0.10	94.5 \pm 0.1	100.7 \pm 0.1	97.6 \pm 0.1	15.4 \pm 0.5	320 \pm 13
104.62 \pm 0.11	100.9 \pm 0.1	109.0 \pm 0.2	105.0 \pm 0.1	16.7 \pm 0.6	311 \pm 16
111.66 \pm 0.12	109.0 \pm 0.2	116.0 \pm 0.2	112.5 \pm 0.1	17.0 \pm 0.6	323 \pm 18
118.84 \pm 0.13	116.0 \pm 0.2	122.7 \pm 0.2	119.3 \pm 0.1	17.4 \pm 0.7	332 \pm 20
125.80 \pm 0.14	122.7 \pm 0.2	129.4 \pm 0.2	126.0 \pm 0.1	17.6 \pm 0.8	344 \pm 26
132.67 \pm 0.15	129.4 \pm 0.2	137.1 \pm 0.2	133.3 \pm 0.1	19.1 \pm 0.9	314 \pm 30
139.67 \pm 0.16	137.1 \pm 0.2	142.5 \pm 0.2	139.8 \pm 0.2	20.0 \pm 1.0	301 \pm 34
146.70 \pm 0.17	142.5 \pm 0.2	155.6 \pm 0.3	149.0 \pm 0.2	19.5 \pm 1.0	332 \pm 37
153.64 \pm 0.18	155.6 \pm 0.3	166.3 \pm 0.3	161.0 \pm 0.2	19.4 \pm 1.1	353 \pm 42
160.59 \pm 0.19	166.3 \pm 0.3	173.2 \pm 0.3	169.8 \pm 0.2	18.8 \pm 1.1	395 \pm 44
167.69 \pm 0.20	173.2 \pm 0.3	176.9 \pm 0.3	175.0 \pm 0.2	18.7 \pm 1.2	415 \pm 48

3.5 Bestimmen eines Referenzwertes für Debye-Frequenz und Temperatur

Nach (12) folgt mit

$$\begin{aligned}N_L &= N_A \frac{m}{M} = 3.241\,07 \cdot 10^{24} \\L &= \sqrt[3]{V_0 \frac{m}{M}} = 33.682\,\text{mm} \\v_{\text{long}} &= 4.7\,\text{km s}^{-1} \\v_{\text{trans}} &= 2.26\,\text{km s}^{-1}\end{aligned}$$

für ω_D ein Wert von

$$\omega_D = 43.5\,\text{THz}.$$

Weiter folgt:

$$\theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k} = 332.36\,\text{K}.$$

4 Diskussion

Bei Betrachtung der c_p - und c_V -Werte zeigt sich im weitesten der zu erwartende Verlauf (siehe Grafik 3b). Insbesondere ist die asymptotische Annäherung an den Wert $3R$ zu erahnen. Lediglich das Tieftemperaturverhalten kann nicht abgebildet werden. Auch der Vergleich zwischen den aus den Messwerten bestimmten Werten für θ_D sowie dem bestimmten Referenzwert lässt auf eine gute Messung schließen. Hier konnten die Messwerte den Referenzwert im Rahmen der Messungenauigkeit treffen. Letztlich sind noch systematische Fehler durch die Unkenntnis eines Fehlers für Spannung und Stromstärke zu beachten.

Als problematisch gestaltete sich das gleichmäßige Temperieren von Probe und Zylinder, was prinzipiell als systematischer Fehler zu betrachten ist. Die geringen Abweichungen der nominellen Werte des gewichteten und arithmetischen Mittelwertes zeigen aber, dass der Einfluss hier nur gering ist. Die Aussagekraft dieser Werte ist jedoch begrenzt, da pro Heizperiode nur der Mittelwert der Temperaturen betrachtet wurde. An dieser Stelle bietet sich eine digitale Datenaufnahme an, mit der ein zeitlich genauer aufgelöster Temperaturverlauf erzeugt werden könnte. Durch ein Herunterkühlen des Versuchsaufbaus auf tiefere Temperaturen als die von flüssigem Stickstoff könnte weiter ermöglicht werden, den Tieftemperaturverlauf abzubilden.

Literatur

- [Dor17] TU Dortmund. V47: Temperaturabhängigkeit der Molwärme in Festkörpern. 20. Dez. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/V47.pdf>.
- [Fou17] Python Software Foundation. „Python“. Version 3.6.3. In: (2017). URL: <http://python.org/>.
- [GmB17] Goodfellow GmBH. Kupfer - Materialinformationen. 28. Dez. 2017. URL: <http://www.goodfellow.com/G/Kupfer.html>.
- [Hop17] Andy Hoppe. Kupfer. 28. Dez. 2017. URL: <http://www.periodensystem.info/elemente/kupfer>.
- [Hun07] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [JOP+] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. SciPy: Open source scientific tools for Python. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [Leb] Eric O. Lebigot. Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [Oli07] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.