Capítulo 2 – Lógica Proposicional

2.3 – Regras de Inferência

- 2.3.1 – Implicação:
- Também conhecida como implica-eliminação, esta regra nos diz como usar uma implicação em um argumento. Ela é expressa da seguinte maneira:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B} \to\mathrm{E}$$

- Ela deve ser lida da seguinte maneira: Se tivermos uma prova de que A → B (supostamente a partir de um conjunto de hipóteses) e prova de A (supostamente a partir de um conjunto de hipóteses), então conseguimos combinar ambas as provas para formar obtermos uma prova de B, a partir da prova desses dois elementos anteriores.

- Esta é uma forma de raciocínio hipotético. Com o pressuposto de que A é válido, argumentamos que B também é. Se estivermos certo, mostramos que A implica B sem supor A. Em outras palavras, a suposição temporária de que a A é "cancelada", tornando-a explícita na conclusão. Representaremos isto desta maneira:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overline{\;A\;}^{\,1} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\ 1 \quad \to\mathrm{I}$$

- A hipótese é dada o rótulo 1. Quando a regra de introdução é aplicada, o rótulo 1 indica a hipótese relevante para aquela prova. A linha acima da hipótese indica que o que assumimos foi "cancelado" pela regra de introdução.

- 2.3.2 – Conjunção:
- Na conjunção, combinamos duas afirmações em uma só, e a partir desta uma afirmação, podemos deduzir essas que a formaram no primeiro lugar.
- Podemos representar a formula desta maneira:

$$\frac{A \land B}{A}\ \land \mathrm{E_l} \qquad \frac{A \land B}{B}\ \land \mathrm{E_r}$$

- Aqui está o exemplo de uma prova onde usamos ambos os lados da conjunção:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$A \to (B \to C)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A \land B$}
\UnaryInfC{A}
\BinaryInfC{$B \to C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A \land B$}
\UnaryInfC{B}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A \land B \to C$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$(A \to (B \to C)) \to (A \land B \to C)$}
\end{prooftree}
$$

- **2.3.3. Negação e Falsidade –**
- Em termos lógicos, demonstrar que “não A” é válido significa mostrar que A cai em uma contradição.
- Assim, geralmente fazemos esta prova por absurdo. Temporariamente, assumimos que A é válido, e então iremos cair em uma contradição. Dessa forma, Podemos concluir que “não A” é válido.
- Podemos representar a fórmula da seguinte maneira:

$$\frac{\neg A \qquad A}{\bot}\ \neg\mathrm{E}$$

- O símbolo ⊥ (falsum) representação a contradição.
- Não há como provarmos o ⊥ (?), somente conseguimos extraí-lo a partir de hipóteses contraditórias. Em contrapartida, podemos concluir qualquer hipótese a partir de uma contradição.
- A tautologia é representada pelo símbolo invertido da contradição. Em contraste com a contradição, ela não possui regra de eliminação, apenas regra de introdução.

- **2.3.4 – Disjunção:**
- Podemos representar a disjunção (também conhecida como "ou") da seguinte maneira:

$$\frac{A}{A \vee B}\vee I_l \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee I_r$$

- Ou seja, para que satisfaçamos A \/ B, basta apenas termos um conjunto de hipóteses que comprove ou A, ou B. Se conseguirmos provar ambos, então A \/ B ainda é válido.

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix} \overline{A}^{\,1} \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \overline{B}^{\,1} \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\,1\ \vee E$$

- **2.3.5 – Se, e somente se:**
- Usamos muito o se, e somente se em nossos estudos matemáticos. Se dissermos que A é válido se, e somente se B é válido, estamos na verdade dizendo que A implica B e B implica A. Em inglês, geralmente abreviamos isto para A iff B.
- Não haveria necessidade de se introduzir outro símbolo lógico, tendo em vista que ele é derivado de duas implicações, mas, tendo em mente a simplicidade e abreviação, nós o utilizaremos.
- Ele pode ser modelado da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{}{A}\,1 & \qquad & \dfrac{}{B}\,1 \\ \vdots & & \vdots \\ B & & A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B}\;1\;\;\leftrightarrow\mathrm{I}$$

- **2.3.6. Prova por Absurdo:**
- Para fazermos uma prova por absurdo, partimos do pressuposto que algo não é verdadeiro, ou seja, assumimos que uma hipótese A é falsa (¬A é válido). Se chegarmos a uma contradição, então podemos concluir que A é válido.
- Utilizando a dedução natural, podemos modelar esta prova da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} \overline{\neg A}^{\,1} \\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{A}\ \text{RAA},1 \end{array}$$

2.4- A linguagem da lógica proposicional

- Como escrever de maneira apropriada utilizando a lógica proposicional?
- A linguagem começa com símbolos A, B, C..., que são baseadas em um conjunto de afirmações, hipóteses ou proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas.
- Montaremos expressões compostas utilizando parênteses e os símbolos introduzidos nos outros capítulos.
- Um exemplo seria a formula $((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \vee D))$.

- Para evitar excesso de parenteses que podem acabar atrapalhando a legibilidade de nossa escrita, vamos estabelecer uma ordem de operadores.
- Quando estivermos "percorrendo" uma expressão, devemos ter em mente o seguinte:

- Negações se ligam as proposições mais próximas;
- Em seguida vem as conjunções e disjunções, da esquerda pra direita;
- Por ultimo, vem as implicações e bi-implicações(se e somente se).

- Assim, a expressão $\neg A \vee B \rightarrow C \wedge D$ deve ser entendida da seguinte maneira: $((\neg A) \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$.
- Obs.: As vezes, a tradução da linguagem natural pra lógica porposicional não é muito óbvia. Por ser muito flexível, precisaremos de um certo nível de abstração na hora de fazermos a tradução.