Capítulo 2 – Lógica Proposicional

2.3 – Regras de Inferência

- 2.3.1 Implicação:
- Também conhecida como implica-eliminação, esta regra nos diz como usar uma implicação em um argumento. Ela é expressa da seguinte maneira:

$$A \to B \qquad A \to E$$

Ela deve ser lida da seguinte maneira: Se tivermos uma prova de que A → B (supostamente a partir de um conjunto de hipóteses) e prova de A (supostamente a partir de um conjunto de hipóteses), então conseguimos combinar ambas as provas para formar obtermos uma prova de B, a partir da prova desses dois elementos anteriores.

Esta é uma forma de raciocínio hipotético. Com o pressuposto de que A é válido, argumentamos que B também é. Se estivermos certo, mostramos que A implica B sem supor A. Em outras palavras, a suposição temporária de que a A é "cancelada", tornando-a explícita na conclusão. Representaremos isto desta maneira:

$$\begin{array}{c}
\overline{A}^{1} \\
\vdots \\
B \\
\hline
A \to B^{1}
\end{array} \to I$$

A hipótese é dada o rótulo 1. Quando a regra de introdução é aplicada, o rótulo 1 indica a hipótese relevante para aquela prova. A linha acima da hipótese indica que o que assumimos foi "cancelado" pela regra de introdução.

- 2.3.2 Conjunção:
- Na conjunção, combinamos duas afirmações em uma só, e a partir desta uma afirmação, podemos deduzir essas que a formaram no primeiro lugar.
- Podemos representar a formula desta maneira:

$$A \wedge B \wedge E_1 \qquad A \wedge B \wedge E_r$$

Aqui está o exemplo de uma prova onde usamos ambos os lados da conjunção:

$$\frac{A \to (B \to C)}{B \to C}^{2} \frac{\overline{A \land B}}{A}^{1} \qquad \overline{A \land B}^{1}$$

$$\frac{B \to C}{A \land B \to C}^{1}$$

$$\frac{C}{A \land B \to C}^{1}$$

$$(A \to (B \to C)) \to (A \land B \to C)^{2}$$



- Em termos lógicos, demonstrar que "não A" é válido significa mostrar que A cai em uma contradição.
- Assim, geralmente fazemos esta prova por absurdo. Temporariamente, assumimos que A é válido, e então iremos cair em uma contradição.
 Dessa forma, Podemos concluir que "não A" é válido.
- Podemos representar a fórmula da seguinte maneira:

$$\frac{\neg A \qquad A}{\perp}$$
 $\neg E$

- O símbolo ⊥ (falsum) representação a contradição.
- Não há como provarmos o ⊥ (?), somente conseguimos extraí-lo a partir de hipóteses contraditórias. Em contrapartida, podemos concluir qualquer hipótese a partir de uma contradição.
- A tautologia é representada pelo símbolo invertido da contradição. Em contraste com a contradição, ela não possui regra de eliminação, apenas regra de introdução.

■ 2.3.4 – Disjunção:

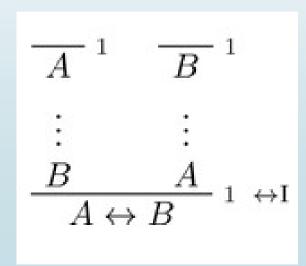
Podemos representar a disjunção (também conhecida como "ou") da seguinte maneira:

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I_1 \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee I_r$$

 Ou seja, para que satisfaçamos A \/ B, basta apenas termos um conjunto de hipóteses que comprove ou A, ou B. Se conseguirmos provar ambos, então A \/ B ainda é válido.

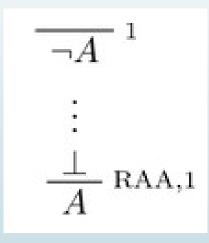
■ 2.3.5 – Se, e somente se:

- Usamos muito o se, e somente se em nossos estudos matemáticos. Se dissermos que A é válido se, e somente se B é válido, estamos na verdade dizendo que A implica B e B implica A. Em inglês, geralmente abreviamos isto para A iff B.
- Não haveria necessidade de se introduzir outro símbolo lógico, tendo em vista que ele é derivado de duas implicações, mas, tendo em mente a simplicidade e abreviação, nós o utilizaremos.
- Ele pode ser modelado da seguinte forma:



■ 2.3.6. Prova por Absurdo:

- Para fazermos uma prova por absurdo, partimos do pressuposto que algo não é verdadeiro, ou seja, assumimos que uma hipótese A é falsa (¬A é válido). Se chegarmos a uma contradição, então podemos concluir que A é válido.
- Utilizando a dedução natural, podemos modelar esta prova da seguinte maneira:



2.4- A linguagem da lógica proposicional

- Como escrever de maneira apropriada utilizando a lógica proposicional?
- A linguagem começa com símbolos A, B, C..., que são baseadas em um conjunto de afirmações, hipóteses ou proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas.
- Montaremos expressões compostas utilizando parênteses e os símbolos introduzidos nos outros capítulos.
- Um exemplo seria a formula (($A \land \neg B$) $\rightarrow \neg (C \lor D)$).

- Para evitar excesso de parenteses que podem acabar atrapalhando a legibilidade de nossa escrita, vamos estabelecer uma ordem de operadores.
- Quando estivermos "percorrendo" uma expressão, devemos ter em mente o seguinte:
- Negações se ligam as proposições mais próximas;
- Em seguida vem as conjunções e disjunções, da esquerda pra direita;
- Por ultimo, vem as implicações e bi-implicações (se e somente se).
- Assim, a expressão \neg A v B \rightarrow C \wedge D deve ser entendida da seguinte maneira: ((\neg A) v B) \rightarrow (C \wedge D).
- Obs.: As vezes, a tradução da linguagem natural pra lógica porposicional não é muito óbvia. Por ser muito flexível, precisaremos de um certo nível de abstração na hora de fazermos a tradução.