3 – Dedução Natural para a Lógica Proposicional

- **3.1- Derivações na Dedução Natural:**

- Em dedução natural, toda prova é uma prova das hipóteses. Ou seja, em qualquer prova, há um número finito de hipóteses {B, C,...} e uma conclusão A, que demonstra que A veio de B, C,...
- Assim como as fórmulas, provas são construídas ao se juntar provas menores ainda, seguindo as regras da dedução natural.
- Uma coisa que pode tornar a dedução natural confusa é que quando você juntar provas dessa maneira, as hipóteses podem ser eliminadas ou, como diremos, canceladas.
- Ao aplicar a regra implica-introdução à $(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$ cancelando apenas a hipótese B, obeteremos a prova de $B \rightarrow (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad \overline{B}^{\,1}}{A\wedge B} \qquad \dfrac{A \qquad C}{A\wedge C}}{(A\wedge B)\wedge(A\wedge C)}}{B\to(A\wedge B)\wedge(A\wedge C)}\,{}^{1}$$

- Podemos também cancelar a hipótese A:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,2} \qquad \overline{B}^{\,1}}{A\wedge B} \qquad \dfrac{\overline{A}^{\,2} \qquad C}{A\wedge C}}{(A\wedge B)\wedge(A\wedge C)}}{B\to(A\wedge B)\wedge(A\wedge C)}\,{}^{1}}{A\to(B\to(A\wedge B)\wedge(A\wedge C))}\,{}^{2}$$

- Podemos ir um pouco mais além e cancelar a hipótese C também.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,2} \qquad \overline{B}^{\,1}}{A \wedge B} \qquad \dfrac{\overline{A}^{\,2} \qquad \overline{C}^{\,3}}{A \wedge C}}{(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)}}{B \to (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)}\,{}^{1}}{A \to (B \to (A \wedge B) \wedge (A \wedge C))}\,{}^{2}}{C \to (A \to (B \to (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)))}\,{}^{3}$$

- A prova resultante não utiliza nenhuma hipótese a conclusão é estabelecida de forma definitiva.
- Obs.: Como ponto de partida para a construção de provas, assumimos a "Regra de Suposição", que será o ponto de partida para nossas provas. Ela aparece da seguinte maneira, sem barras por cima dela(pois não será cancelada):

$$A$$

3.3 – Raciocínio de "trás pra frente"

- Este seção fala sobre o por que construir provas utilizando dedução natural pode ser confusa, e o que isso nos diz sobre nossos argumentos comuns.

- Na descrição "oficial", as provas de dedução natural são construídas ao colocar pequenas provas juntas e obter provas maiores a partir dela. Para provar $A \wedge B \to B \wedge A$, começamos com a hipótese $A \wedge B$. Em seguida, construímos, separadamente, as seguintes duas provas:

$$\frac{A \wedge B}{B} \qquad \frac{A \wedge B}{A}$$

- Então usamos essas duas provas para construir a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B} \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}}{B \wedge A}$$

- Finalmente, aplicamos a regra implica-introdução para esta prova para cancelar a hipótese e obter a conclusão desejada:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \wedge B}^{\,1}}{B} \qquad \dfrac{\overline{A \wedge B}^{\,1}}{A}}{B \wedge A}}{A \wedge B \to B \wedge A}\,1$$

- A mesma coisa acontece em um argumento informal, aonde começamos com algumas hipóteses e trabalhamos para chegar em um conclusão.

- No entanto, quando lemos provas de dedução natural, muitas vezes as lemos de trás pra frente. Primeiro, olhamos para o fundo para ver o que está sendo provado. Então, consideramos a regra que é usada para provar isso e ver quais as premissas que a regra exige. Então, procuramos ver como essas afirmações são provadas, e assim por diante. Da mesma forma, quando construímos uma prova de dedução natural, normalmente trabalhamos de trás pra frente também: começamos com a fórmula que estamos tentando provar, colocamos isso na parte inferior e procuramos regras para aplicar.

- Existe, portanto, um protocolo a ser seguido para provar teoremas em dedução natural:
- Comece trabalhando de trás pra frente a partir da conclusão, usando as regras de introdução. Por exemplo, se você está tentando provar uma declaração do formulário $A \to B$, adicione A à sua lista de hipóteses e tente derivar B. Se você está tentando provar uma declaração da forma $A \wedge B$, use a regra e-introdução para reduzir sua tarefa para provar A, e então provar B.
- Quando você esgotou as coisas para fazer no primeiro passo, use as regras de eliminação para avançar. Se você tiver hipóteses $A \to B$ e A, aplique modus ponens (?) para derivar B. Se você tem uma hipótese $A \vee B$, use-ou eliminação para dividir em casos, considerando A em um caso e B no outro.

3.4 – Raciocinando por Casos

- A regra para eliminar uma disjunção é confusa, mas podemos entender isso com um exemplo. Considere o seguinte argumento informal:

- George está em casa ou no campus.

  Se ele está em casa, ele está estudando.

  Se ele estiver no campus, ele está com seus amigos.

  Portanto, George está estudando ou com seus amigos.

- Seja A ser a afirmação de que George está em casa, B a afirmação que George está no campus, que C seja a declaração de que George está estudando, e que D seja a declaração que o George está com seus amigos.
- Podemos "modelar" esse argumento da seguinte maneira: De A v B, temos A → C, ou B → D, concluíndo C v D. Obviamente, não podemos escrever essa prova em dedução natural com apenas uma linha. Mas, por enquanto, vamos continuar com nosso raciocínio:
- George está ou em casa ou no campus.
- Caso 1: Suponha que ele esteja em casa. Sabemos que se ele estiver em casa, então ele está estudando. Então, neste caso, ele está estudando. Portanto, neste caso, ele está estudando ou com seus amigos.
- Caso 2: Suponha que ele esteja no campus. Sabemos que se ele estiver no campus, então ele está com seus amigos. Então, neste caso, ele está com seus amigos. Portanto, neste caso, ele está estudando ou com seus amigos.
- De qualquer forma, George está estudando ou com seus amigos.

- Em dedução natural, a prova se parecerá com o seguinte:

$$\dfrac{A \lor B \qquad \dfrac{\dfrac{A \to C \qquad \dfrac{}{A}\,{}^{1}}{C}}{C \lor D} \qquad \dfrac{\dfrac{B \to D \qquad \dfrac{}{B}\,{}^{1}}{D}}{C \lor D}}{C \lor D}\,{}^{1}$$

- Para outro exemplo, vamos fazer a prova de $A \land (B \lor C) \to (A \land B) \lor (A \land C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land (B \lor C)}\,{}^{2}}{B \lor C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land (B \lor C)}\,{}^{2}}{A} \qquad \dfrac{}{B}\,{}^{1}}{A \land B}}{(A \land B) \lor (A \land C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land (B \lor C)}\,{}^{2}}{A} \qquad \dfrac{}{C}\,{}^{1}}{A \land C}}{(A \land B) \lor (A \land C)}}{(A \land B) \lor (A \land C)}\,{}^{1}}{(A \land (B \lor C)) \to ((A \land B) \lor (A \land C))}\,{}^{2}$$

3.5 – Algumas Identidades Lógicas

- As equivalências lógicas são semelhantes às identidades como x + y = y + x que ocorrem na álgebra. Em particular, pode-se mostrar que, se duas fórmulas são equivalentes, então uma pode substituir a outra em qualquer fórmula, e os resultados também serão equivalentes.
- Aqui está uma lista com algumas equivalências proposicionais mais comuns, junto de algumas outras fórmulas.
- Commutativity of ∧: $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
- Commutativity of ∨: $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
- Associativity of ∧: $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- Associativity of ∨:$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- Distributivity of ∧ over ∨: $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Distributivity of ∨ over ∧: $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \land B \to C)$
- $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- $((A \lor B) \to C) \leftrightarrow (A \to C) \land (B \to C)$
- $\neg(A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$
- $\neg(A \land B) \leftrightarrow \neg A \lor \neg B$
- $\neg(A \land \neg A)$
- $\neg(A \to B) \leftrightarrow A \land \neg B$
- $\neg A \to (A \to B)$
- $(\neg A \lor B) \leftrightarrow (A \to B)$
- $A \lor \bot \leftrightarrow A$
- $A \land \bot \leftrightarrow \bot$
- $A \lor \neg A$
- $\neg(A \leftrightarrow \neg A)$
- $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
- $(A \to C \lor D) \to ((A \to C) \lor (A \to D))$
- $(((A \to B) \to A) \to A)$