Capítulo 7 – Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- Lógica Proposicional é bastante útil para demonstrar como se raciocionar de maneira lógica, mas ela não é suficiente. Ela não nos dá meios de expressar, por exemplo: se "João está com Maria", então "Maria está com João".
- Para fazer isto, precisamos de meios para falar sobre um objeto, um indivíduo, afim de estabelecer propriedades do mesmo e de relacioná-lo com outros possíveis objetos.

7.1 – Funções, predicados e relações

- Ao invés de utilizar somente uma linguagem exclusiva, dado um domínio qualquer, a lógica de primeira ordem nos permite especificar símbolos que representam objetos pertencentes a este domínio.
- Como exemplo, vamos tomar o domínio como sendo o dos números naturais:
- Existem objetos: os números 0, 1, 2, 3, ...
- Existem funções: adição, multiplicação, "elevar ao quadrado", "raiz quadrada", ...
- Existem predicados: par, ímpar, primo, composto.
- Existem relações: Maior que, menor que, igual a, ...
- Para nossa linguagem, escolheremos os símbolos 1, 2, 3, soma, mul, quadrado, par, ímpar, primo e assim por diante, para denotar essas coisas. Também teremos variáveis x, y e z, podendo representar qualquer número natural.

- As funções podem ter diferentes números de argumentos: se x e y são números naturais, faz sentido escrever mul(x, y) e quadrado(x). Assim, mul leva dois argumentos, enquanto quadrado leva apenas um.
- Predicados e relações também podem ser visto da mesma maneira. Os predicados par(x) e primo(x) recebem um argumento, enquanto as relações binárias divisível(x, y) e menorque(x, y) tomam dois argumentos.
- Funções são diferentes dos predicados! Ambos aceitam um ou mais argumentos, mas uma função retorna um valor, enquanto um predicado é verdadeiro ou falso. Podemos pensar que o predicativo retorna uma proposição (que pode ser falsa, ou verdadeira).
- Podemos pensar nos símbolos 1,2,3,... como tipos especiais de função que recebem zero argumentos. Analogamente, podemos considerar os predicados que recebem zero argumentos como sendo os valores lógicos constantes, T e ⊥.

- Na matemática comum, muitas vezes usamos a notação "infix" para funções e relações binárias. Por exemplo, geralmente escrevemos x × y ou x . y em vez de mul (x, y), e escrevemos x <y ao invés de menorque(x, y).
 Usaremos essas convenções ao escrever provas em dedução natural, que também são suportadas pelo Lean.
- Vamos tratar a relação de igualdade, x = y, como uma relação binária especial que é incluída em todas as linguagens de primeira ordem.
- Assim como a Lógica Proposicional (LP), a LPO permite que formemos expressões mais complexas a partir de outras mais simples.
- x + y + z; $(x + 1) \times y \times y;$ $quadrado(x + y \times z).$

Estas expressões recebem o nome de termos.



$$\rightarrow$$
 par(x + y + z)

$$\rightarrow$$
 primo((x + 1) × y × y)

$$ightharpoonup$$
 quadrado(x + y × z) = w

$$\rightarrow$$
 $(x + y) < z$

Podemos ir além e usar conectivos proposicionais para construir expressões ainda mais complexas:

$$ightharpoonup$$
 par(x + y + z) \wedge primo((x + 1) \times y \times y)

$$\neg$$
 (quadrado(x + y × z) = w) v (x + y < z)

$$\rightarrow$$
 x < y \land par(x) \land par(y) \rightarrow x + 1 < y

■ Todas expressões vistas acima são chamadas de fórmulas; Ao contrário de termos, que representam objetos, fórmulas transmitem informações sobre objetos de um determinado domínio.

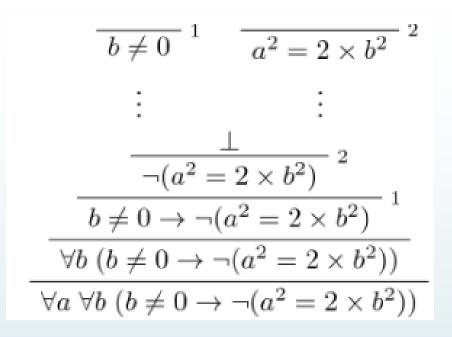
7.2 – Quantificador Universal - V

- Uma das partes da LPO que a torna tão poderosa é que ela nos permite fazer afirmações gerais utilizando quantificadores.
- A afirmação "para todo x" é representada pelo quantificador universal ∀ junto da variável x: ∀x.
- ► ∀x, ... diz que todos os valores possíveis de x possuem a propriedade ...
- \rightarrow $\forall x((par(x)v impar(x)) \land \neg(par(x) \land impar(x)))$
- \rightarrow $\forall x(par(x) \leftrightarrow 2 \mid x)$
- $ightharpoonup \forall x(par(x) \rightarrow par(x^2))$
- ► $\forall x (prime (x) \land x > 2 \rightarrow impar(x))$
- \rightarrow $\forall x, \forall y, \forall z (x | y \land y | z \rightarrow x | z)$

- lacktriangle É comum combinar quantificadores de mesmo tipo. Assim, poderíamos reescrever a última expressão da seguinte maneira: $\forall x, y, z \ (x \mid y \land y \mid z \rightarrow x \mid z)$.
- Algumas observações quanto a sintaxe:
- Na lógica simbólica, o quantificador universal se liga com quem está mais próximo. Por exemplo, \forall xPvQ \text{ \text{e}} interpretado como (\forall xP) v Q e escrever\text{iamos}
 \forall x (PvQ) para estender o escopo.
- Após o quantificador ∀x, a variável x se torna ligada. Por exemplo, a expressão (∀x (par (x) v ímpar (x)) expressa que cada número é par ou ímpar. A declaração não é sobre x; x é uma variável fictícia, um marcador que representa o objeto abordado dentro de uma frase. Pensamos na expressão ∀x (par(x) v ímpar(x)) como sendo o mesmo que a expressão ∀y (par(y) v ímpar (y)). Lean também trata essas expressões como as mesmas.

- Uma variável que não está vinculada é chamada de livre.
- As fórmulas na lógica de primeira ordem dizem coisas sobre suas variáveis livres. Por exemplo, a fórmula $\forall y (x \le y)$ diz que x é menor ou igual a todo número natural. A fórmula $\forall z (x \le z)$ diz exatamente a mesma coisa.
- Podemos sempre renomear uma variável ligada, desde que escolhamos um nome que não entre em conflito com outro nome que já esteja em uso.
- Por outro lado, a fórmula ∀y (w ≤ y) diz que w é menor ou igual a todos os números naturais. Esta é uma afirmação totalmente diferente: diz algo sobre w, em vez de x. Assim, renomear uma variável livre muda o significado de uma fórmula.
- Algumas fórmulas não possuem nenhuma variável livre. Fórmulas deste tipo são chamadas de sentenças e estas fazem uma afirmação total, que pode ser verdadeira ou falsa.

- Vamos simbolizar a seguinte frase em LPO:
- ▶ Para cada par de inteiros, a e b, se b \neq 0, não é o caso que a² = 2b².
- ▶ $\forall a,b (b\neq 0 \rightarrow \neg (a^2=2b^2))$. Poderíamos substituído o $b\neq 0$ por $\neg (b=0)$.
- Como podemos provar esse teorema? Uma possível maneira é através da prova por absurdo. Tendo dois inteiros a e b, assumimos que b≠0 é válido e que a²=2b² é válido. A partir disso, desenvolvemos nossa prova, até chegarmos em uma contradição.
- Em outras palavras, o que estamos fazendo é mostrando que o essa "afirmação universal" é válida para todos a e b arbitrários. Aqui está a prova organizada em dedução natural:



Depois de termos cancelados todas as hipóteses, provamos que b≠0→¬(a²=2×b²). Como não havíamos feito nenhuma suposição sobre a ou b, eles são arbitrários, ou seja, podem ser qualquer valor. Por isso, podemos aplicar os quantificadores universais ao final da prova. Assim, a regra de introdução do quantificador universal é:

$$\frac{A(x)}{\forall x \ A(x)}$$

- Neste caso, x não pode ser uma variável livre de algum hipótese que não foi cancelada. Observe também que ∀xA(x) é igual a ∀yA(y), desde que y não seja uma variável livre em A.
- ▶ Para a regra de eliminação, vamos ver um exemplo:
- Suponha que sabemos que todos os números naturais são pares ou ímpares. Assim, a partir disso, temos a seguinte expressão: ∀x(par(x) v ímpar(x)). Assim, se x = t, temos que t é par ou t é ímpar, ou seja, par(t) v ímpar(t). Observe que t é arbitrário.

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

7.3. O quantificador existencial - 3

- Em contrapartida ao quantificador universal, temos o quantificador existencial. Ele é usado para afirmar que alguma coisa acontecerá em algum momento, em um determinado contexto. Aqui estão alguns exemplos, ainda no domínio dos naturais e suas respectivas representações em LPO:
- Existem números ímpares compostos (maior que 1 e não primo).
- Todo número natural maior que 1 tem pelo menos um divisor primo.
- Para cada n, se n tem um divisor primo menor que n, então n é composto.
- → ∃n(ímpar(n)∧ composto(n))
- ightharpoonup ∀n(n > 1 → ∃p(primo(p)∧pIn))
- ► $\forall n((\exists p (p \mid n \land primo(p) \land p < n)) \rightarrow composto(n))$

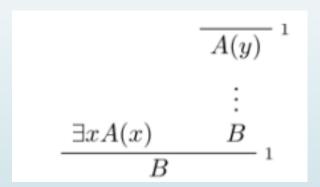
- Depois de escrevermos ∃n, a variável n está ligada na fórmula. Portanto, as fórmulas ∃n(composto(n)) e ∃m(composto(m)) são consideradas as mesmas.
- Para provarmos o quantificador existencial, dado alguma afirmação, basta apresentarmos um exemplo onde ela é válida.
- Por exemplo, queremos provar que existe algum número ímpar que é composto. Para provar isto, poderíamos fornecer um número que atenda ambos os predicados: Ser ímpar e ser composto. Poderíamos usar 15, 9, 35, O número em si não importa, desde que o que escolhemos satisfaz nossa afirmação. Assim:

```
 \vdots \\ \frac{odd(15) \land composite(15)}{\exists n \ (odd(n) \land composite(n))}
```

 $\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$

- Nesta regra, t é arbitrário. Nesta fórmula, ele recebe o nome de "testemunha".
- A regra de eliminação se parece com a regra de eliminação da disjunção. Vamos ver um exemplo:
- Para cada n, se n tem um divisor primo menor que n, então n é composto.
- Suponha que sabemos que n é um número natural e que existe um primo p tal que p < n e p | n. Como fazermos para provar que n é um número composto?
- Primeiro, assumimos que há algum p que satisfaz as propriedades: p é primo, p < n e p | n, e a partir disso desenvolvemos nosso raciocínio sobre p. Assim como no "raciocínio em partes" da disjunção, as suposições são apenas temporárias: se pudermos mostrar que n é composto a partir delas, então mostramos que n é composto, a partir da hipótese que tal p existe.</p>

- Observe que nesse padrão de raciocínio, p deve ser "arbitrário". Não devemos assumir nada mais sobre p de antemão e nem fazer nenhuma outra suposição ao longo do caminho. A conclusão também não deve mencionar esse p. Ele só deverá ter as propriedades do que estamos querendo provar. Só assim poderemos dizer que a nossa conclusão veio da suposição que tal p exista.
- Em dedução natural, a regra é expressa da seguinte maneira:



■ Da mesma forma como raciocinamos anteriormente, y não pode ser uma variável livre em B. A hipótese A(y) é descarregada no final da prova, e pode ser usada quantas vezes for necessária durante a mesma.

7.4 – Relativização e Classificação

- Em LPO, ao escolhermos um domínio de nosso interesse, temos uma certa quantidade de objetos pertencentes a este domínio e quantificadores universais e existenciais que abrangem esse mesmo domínio.
- Suponha que nosso domínio seja uma cidade, e que designamos uma relação ama(x, y) para determinar se x ama y. Se quiséssemos falar que toda pessoa ama alguém, escreveríamos o seguinte:
- $\forall x \exists y (ama(x,y)).$
- Suponha, agora, que queremos falar que dizer que todas as mulheres são fortes e que todos os homens são bonitos. Faríamos isso da seguinte maneira:
- \rightarrow $\forall x (mulher(x) \rightarrow forte(x))$
- $ightharpoonup \forall x (homem(x) \rightarrow bonito(x))$

- Isto que acabamos de demonstrar se chama de uma instância de relativização.
- O quantificador universal varia sobre todas as pessoas na cidade, mas esse dispositivo nos dá uma maneira de usar a implicação para restringir o escopo de nossas declarações para homens e mulheres, respectivamente.
- Podemos também relativizar o quantificador existencial para dizer coisas como "alguma mulher é forte" e "algum homem é bonito".
- \rightarrow $\exists x (mulher(x) \land strong(x))$
- \blacksquare $\exists x (homem(x) \land good-looking(x))$
- Agora, vamos supor que estamos estudando geometria. Queremos expressar que por dois pontos, p e q, só podem passar uma única retas.
- Após escolher nosso domínio como um que abranja tanto pontos como retas, utilizaremos a relativização para poder escrever nossa afirmação:
- ▶ $\forall p, q, L, M \text{ (ponto(p) } \land \text{ ponto(q) } \land \text{ linha(L) } \land \text{ linha(M) } \land \text{ porcima(p,L) } \land \text{ porcima(p,M) } \land \text{ porcima(q,M)} \rightarrow L = M).$

- Trabalhar com um predicado pode se tornar extremamente cansativo, ainda mais quando trabalharmos com expressões ainda maiores. Poderíamos utilizar uma "extensão" da lógica de primeira ordem chamada de "many-sorted first-order logic".
- Em muitas lógicas ordenadas, podemos ter diferentes objetos pertencentes a um mesmo domínio, e separar quais variáveis vão "percorrer" sobre cada objeto diferente.
- Além disso, a especificação de funções e predicados nos indica qual tipo de argumento eles estão esperando (e, no caso das funções, qual tipo de argumento eles retornam).
- Assim, poderíamos classificar as variáveis p, q, r ... variando sobre os pontos , as variáveis L, M , N, ... variando sobre as retas e a relação porcima(p, L) relacionando as duas. Dessa forma, poderíamos reduzir a afirmação acima para isso:
- ▶ $\forall p, q, L, M \text{ (porcima(p,L) } \land \text{ porcima(q,L) } \land \text{ porcima(p,M) } \land \text{ porcima(q,M)} \rightarrow \text{L=M)}.$

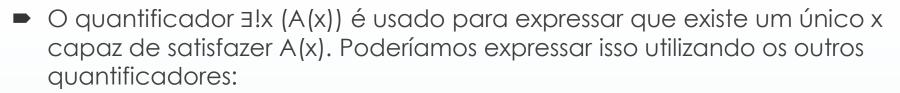
7.5 Igualdade

- Em LPO, usamos a expressão s = t para indicar que s e t são "iguais", "idênticos".
- Em outras palavras, estamos querendo dizer que duas descrições diferentes se referem ao mesmo objeto. Como podemos utilizar essa noção de "equivalência" para praticamente qualquer domínio de objetos, este é um assunto interessante a ser trabalho dentro da lógica.
- Falar sobre igualdade e identidade pode ser complicado e levantar várias questões filosóficas. Assim, para não termos confusão, iremos definir que a igualdade deve satisfazer as seguintes propriedades axiomáticas:
- Reflexividade: t=t, para qualquer termo t
- Simetria: se s=t, então t=s
- Transitividade: se r=s e s=t, então r=t

- Se duas expressões são iguais, devemos ser capazes de substituir uma pela outra. Por exemplo, se s = t e temos A(t) e A(s), podemos concluir que A(t) = A(s). Assim, se s = t, então A(t) = A(s).
- Podemos escrever as regras de introdução e remoção da igualdade da seguinte maneira:

No próximo capítulo, usaremos elas de uma melhor maneira, quando formos montar nossas provas em dedução natural.

- Usando igualdade, podemos criar ainda mais quantificadores:
- Nós podemos expressar "há pelo menos dois elementos x tais que A(x) mantém" como: ∃x∃y (x ≠ y ∧ A(x) ∧ A(y)).
- Podemos expressar "há no máximo dois elementos x tais que A (x) mantém" como: ∀x∀y∀z (A(x) ∧ A(y) ∧ A(z) → x = y v y = z v x = z). Isso indica que se temos três elementos j para os quais A(j) é válido, então dois deles devem ser iguais.
- Podemos expressar "há exatamente dois elementos x tais que A (x) mantém" como a conjunção das duas afirmações acima.



- \rightarrow $\exists x \land (x) \land \forall y \forall y' (\land (y) \land \land (y') \rightarrow y = y').$
- A primeira parte nos diz que existe um X que satisfaça A, enquanto a segunda parte nos diz que se existem dois objetos que satisfazem A, então esses objetos são iguais. Ainda outra forma:
- \blacksquare $\exists x \land (x) \land \forall y (\land (y) \rightarrow y = x).$