Lógica Híbrida Intuicionista: Introdução e Pesquisa

Por: Torben Braüner

1. Lógica Híbrida Clássica

O que é Lógica Híbrida?

- O termo lógica híbrida cobre um grande número de lógicas obtidas ao adicionar mais poder de expressão à Lógica Modal.
- O tipo mais básico desta lógica é obtido ao se adicionar nominais a sua estrutura.
- Nominais são interpretados de tal maneira que são verdadeiros em apenas um dado ponto, e falso em todos os outros.
- Estes pontos geralmente são interpretados como possíveis mundos, estados em um computador, datas, localizações, estados epistêmicos, etc.

- Exemplo:

São dez horas da noite, dia 5 de Maio de 2007.

- Esta condição é verdadeira somente às dez horas da noite do dia 5 de Maio de 2007 e falso em todas as outras.
- Ela não poderia ser utilizada na lógica modal, pois esta só dispõe dos símbolos proposicionais comuns, que não possuem esta restrição de serem verdadeiros em apenas um momento.

- Para sermos capazes de formalizar afirmações como sendo verdadeiras em algum destes casos particulares, iremos adicionar uma estrutura chamada de operadores de satisfação.
- Eles são formalizados pela formula @ar, onde a é algum nominal e r é uma é um símbolo proposicional qualquer, como “está chovendo”. A parte @a da formula é chamada de operador de satisfação. Em geral, se a é um nominal e φ é uma formula arbitrária, então a formula $@_a\varphi$ pode ser formada.Esta formula é chamada de afirmação de satisfação.
- Esta formula implica que φ é verdadeiro em um dado ponto, mais precisamente o ponto que o nominal a descreve.
- Formulas são definidas pela seguinte gramática:

$$S ::= p \mid a \mid S \wedge S \mid S \rightarrow S \mid \perp \mid \Box S \mid @_a S$$

Definição 1 – Um modelo para a lógica Clássica Híbrida é a tupla *(W, R, {Vw}w∈W)*

- W é um conjunto não-vazio; Seus elementos são chamados de mundos;
- R é a relação binária em W, chamada de relação de acessibilidade;
- Vw é uma função que, para todo w pertencente a W, ele atribui um valor de {0,1} para cada símbolo proposicional.
- O par (W, R) é chamado de estrutura do modelo e este modelo está baseado nessa estrutura.
- Obs.: Um modelo da lógica híbrida é o mesmo que um modelo da lógica modal.

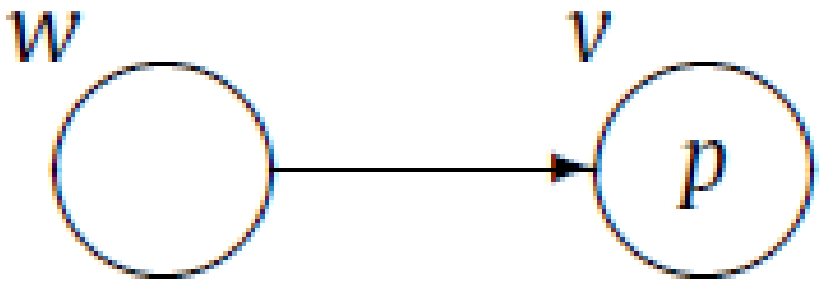
- Dado um modelo $\mathfrak{M} = (W, R, \{V_w\}_{w \in W})$, uma atribuição é uma função g que para cara nominal, ela atribui um element de W. A relação $\mathfrak{M}, g, w \models \phi$ é definida por indução. *w* é um element de *W*, e φ é a formula.

- Aqui estão algumas propriedades que este modelo pode attender:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, g, w \models p & \text{iff} & V_w(p) = 1 \\
\mathfrak{M}, g, w \models a & \text{iff} & w = g(a) \\
\mathfrak{M}, g, w \models \phi \wedge \psi & \text{iff} & \mathfrak{M}, g, w \models \phi \text{ and } \mathfrak{M}, g, w \models \psi \\
\mathfrak{M}, g, w \models \phi \rightarrow \psi & \text{iff} & \mathfrak{M}, g, w \models \phi \text{ implies } \mathfrak{M}, g, w \models \psi \\
\mathfrak{M}, g, w \models \bot & \text{iff} & \text{falsum} \\
\mathfrak{M}, g, w \models \Box\phi & \text{iff} & \text{for any } v \in W \text{ such that } wRv, \mathfrak{M}, g, v \models \phi \\
\mathfrak{M}, g, w \models @_a\phi & \text{iff} & \mathfrak{M}, g, g(a) \models \phi
\end{array}
$$

- Por convenção, $\mathfrak{M}, g \models \phi$ significa $\mathfrak{M}, g, w \models \phi$ e $\mathfrak{M} \models \phi$ significa $\mathfrak{M}, g \models \phi$.

- Seja W = {w, v} e R = {(w,v)} e além disso, Vw(p) = 0 e Vv (p) = 1. A fim de demonstrar a demonstração de um modelo, vamos ignorer todas as outras proposições diferentes de P. Assim, um modelo pode ser representado como:



- f Onde os círculos representam mundos e as arestas indicam que os mundos são relacionados através da relação de acessibilidade. Se uma proposição está dentro de um círculo, isso signfica que ela é verdadeira nele e se ele não estiver lá, significa que ele é falso.

Observações Finais:

- Hibridizar a Lógica Modal a dá mais poder expressivo. Isso pode ser observado na formula $c \rightarrow \Box\, \neg c$. É fácil de observar que esta estrutura é válida se e somente se a moldura é irreflexiva. Assim, irreflexibilidade pode ser expressa por uma fórmula lógica-híbrida, mas a mesma não pode ser expressa por nenhuma fórmula da Lógica Modal.

2. Do clássico para a lógica híbrida intuicionista

O que é lógica intuicionista híbrida?

- A lógica intuicionista híbrida é obtida ao trocar a base lógica da Lógica Modaql Híbrida por uma base intuicionista. Assim, duas lógicas são combinadas: A lógica intuicionista e a lógica híbrida modal.
- Segundo a semântica padrão de Kripke, a lógica intuicionista é interpretada em termos de um conjunto de "estados de conhecimento", equipados com uma ordem parcial chamada de "ordem parcial epistêmica", onde a interpretação dos símbolos proposicionais é preservada pela ordem parcial.
- As formulas da lógica híbrida intuicionista são as mesmas da lógica clássica híbrida, a única diferença é que os conectivos ∨ e ♦ são considerados como primitivos.

- Um dos motivos por trás da combinação das lógicas é que queremos ter uma leitura intuicionista da lógica híbrida, onde existe uma distinção entre o jeito que raciocinamos e sobre o que o raciocínio fala sobre.
- Nós mantemos os estados de conhecimento separados dos possíveis mundos da modal. Também mantemos a parte epistêmica de ordem parcial separada da interpretação da lógica híbrida assim como as relações de acessibilidade envolvidas em interpretar operadores modais.

Definição 2: Um modelo para a lógica intuicionista híbrida lógica é a tupla

$$(W, \leqslant, \{D_w\}_{w \in W}, \{\sim_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$$

- W é um set não vazio parcialmente ordenado por <=;
- Para cada w, Dw é um set não vazio tal que w <= v implica que Dw ⊆ Dv;
- Para cada w, ~w é uma relação de equivalência em Dw tal que w <= v implica que ~w ⊆ ~v;
- Para cada w, Rw é uma relação binária em Dw tal que w <= v implica Rw ⊆ Rv;
- Para cara w, Vw é uma função tal que para cada símbolo proposicional p atribui um subconjunto de Dw de forma que w <= v implica que Vw (p) ⊆ Vv (p).

- Os elementos de W são estados de conhecimento;
- O conjunto Dw é o conjunto de possíveis mundos conhecidos no estado de conhecimento w;
- ~w é o conjunto de identidades conhecidas entre possíveis mundos;
- A relação Rw é o conjunto de relações conhecidas entre possíveis mundos;
- Vw(p) é o conjunto de possíveis mundos onde p é conhecido como verdadeiro.
- A tupla $(W, \leqslant, \{D_w\}_{w \in W}, \{\sim_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W})$ é chamada de molde para a lógica intuicionista híbrida e o modelo é dito baseado neste molde.

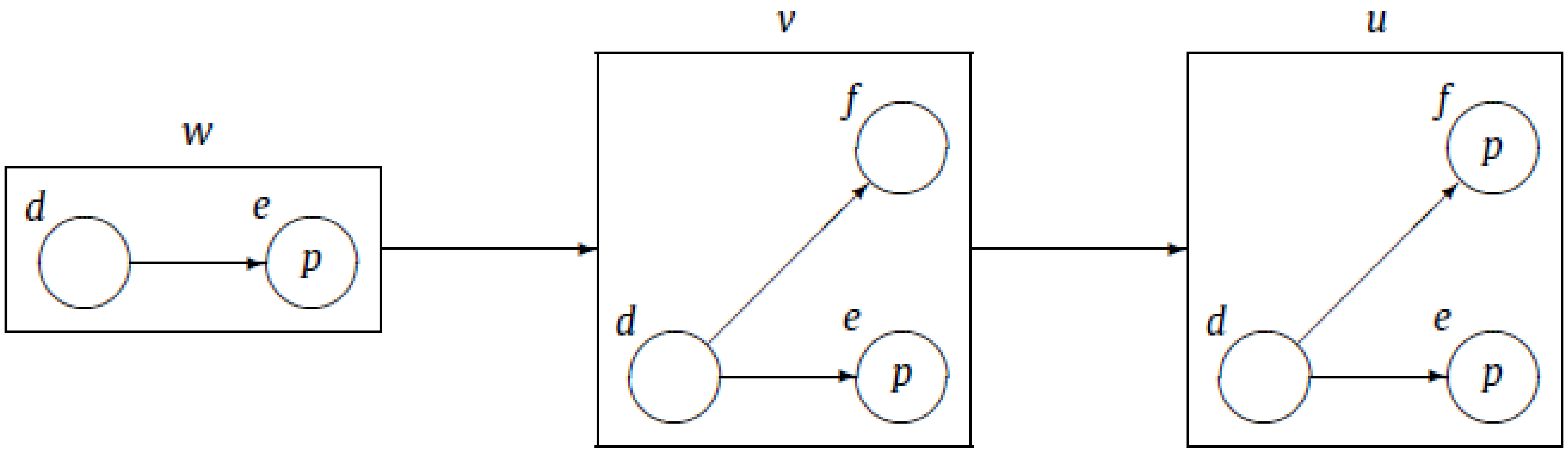
- Observação:
- A ordem parcial epistêmica <= preserva todos os conhecimentos desta tupla, para que, se um avanço para um "estado de conhecimento maior" for feito, então todo conhecimento anterior é preservado.

- Para dar um exemplo da representação de modelos desta lógica, vamos considerar W como sendo = {w, v, u} e que <= é o fecho transitivo e reflexive da relação {(w,v),(v,u)}.
- Para simplificar a representação, vamos ignorar a relação ~w e todos os outros símbolos proposicionais sem ser p. Os outros conjuntos e relações estão definidas da seguinte forma:

$$D_w = \{d, e\} \qquad D_v = \{d, e, f\} \qquad D_u = \{d, e, f\}$$

$$R_w = \{(d, e)\} \qquad R_v = \{(d, e), (d, f)\} \qquad R_u = \{(d, e), (d, f)\}$$

$$V_w(p) = \{e\} \qquad V_v(p) = \{e\} \qquad V_u(p) = \{e, f\}$$



w
d
e
p
v
f
d
e
p
u
f
p
d
e
p

- Neste modelo, estado de conhecimento é representado por uma caixa contendo um modelo para a lógica híbrida, que é modelado segundo a mesma definição 1 da lógica híbrida modal.
- A seta indica que dois estados de conhecimento estão relacionados através da ordem parcial epistêmica. Setas geradas pela reflexividade e pela transitividade são ocultadas.
- Importante: Se um símbolo proposicional não dentro de um possível mundo, isto signfica que não é conhecido se aquele símbolo é verdadeiro naquele mundo em questão (ou seja, isso não quer dizer que ele não falso, como no caso clássico).

- Dado um modelo $\mathfrak{M} = (W, \leqslant, \{D_w\}_{w\in W}, \{\sim_w\}_{w\in W}, \{R_w\}_{w\in W}, \{V_w\}_{w\in W})$ e um elemento w pertencente a W, uma atribuição-w é uma função g que para cada nominal, ele designa um de Dw.
- Se g é um função do tipo atribuição-w e w <= v, então g também é uma função do tipo atribuição-v.
- A relação $\mathfrak{M}, g, w, d \models \phi$ é definida por indução, onde w é um element de W, g é uma atribuição-w, d é um elemento de Dw e φ é uma formula qualquer.
- Aqui estão algumas condições para que estas relações sejam válidas:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, g, w, d \models p & \text{iff} & d \in V_w(p) \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models a & \text{iff} & d \sim_w g(a) \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models \phi \wedge \psi & \text{iff} & \mathfrak{M}, g, w, d \models \phi \text{ and } \mathfrak{M}, g, w, d \models \psi \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models \phi \vee \psi & \text{iff} & \mathfrak{M}, g, w, d \models \phi \text{ or } \mathfrak{M}, g, w, d \models \psi \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models \phi \rightarrow \psi & \text{iff} & \text{for all } v \geqslant w, \\
 & & \mathfrak{M}, g, v, d \models \phi \text{ implies } \mathfrak{M}, g, v, d \models \psi \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models \bot & \text{iff} & \text{falsum} \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models \Box\phi & \text{iff} & \text{for all } v \geqslant w, \text{for all } e \in D_v, \\
 & & d R_v e \text{ implies } \mathfrak{M}, g, v, e \models \phi \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models \Diamond\phi & \text{iff} & \text{for some } e \in D_w, d R_w e \text{ and } \mathfrak{M}, g, w, e \models \phi \\
\mathfrak{M}, g, w, d \models @_a\phi & \text{iff} & \mathfrak{M}, g, w, g(a) \models \phi
\end{array}
$$

Proposition 3 *(Monotonicity). If* $\mathfrak{M}, g, w, d \models \phi$ *and* $w \leqslant v$*, then* $\mathfrak{M}, g, v, d \models \phi$.

Proposition 4. *If* $\mathfrak{M}, g, w, d \models \phi$ *and* $d \sim_w d'$*, then* $\mathfrak{M}, g, w, d' \models \phi$.