Capítulo 7 – Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- Lógica Proposicional é bastante útil para demonstrar como se raciocionar de maneira lógica, mas ela não é suficiente. Ela não nos dá meios de expressar, por exemplo: se "João está com Maria", então "Maria está com João".
- Para fazer isto, precisamos de meios para falar sobre um objeto, um indivíduo, afim de estabelecer propriedades do mesmo e de relacioná-lo com outros possíveis objetos.

7.1 – Funções, predicados e relações

- Ao invés de utilizar somente uma linguagem exclusiva, dado um domínio qualquer, a lógica de primeira ordem nos permite especificar símbolos que representam objetos pertencentes a este domínio.
- Como exemplo, vamos tomar o domínio como sendo o dos números naturais:
- Existem objetos: os números 0, 1, 2, 3, ...
- Existem funções: adição, multiplicação, "elevar ao quadrado", "raiz quadrada", ...
- Existem predicados: par, ímpar, primo, composto.
- Existem relações: Maior que, menor que, igual a, ...

- Para nossa linguagem, escolheremos os símbolos **1, 2, 3, soma, mul, quadrado, par, ímpar, primo** e assim por diante, para denotar essas coisas. Também teremos variáveis x, y e z, podendo representar qualquer número natural.

- As funções podem ter diferentes números de argumentos: se **x** e **y** são números naturais, faz sentido escrever **mul(x, y)** e **quadrado(x)**. Assim, **mul** leva dois argumentos, enquanto **quadrado** leva apenas um.

- Predicados e relações também podem ser visto da mesma maneira. Os predicados **par(x)** e **primo(x)** recebem um argumento, enquanto as relações binárias **divisível(x, y)** e **menorque(x, y)** tomam dois argumentos.

- Funções são diferentes dos predicados! Ambos aceitam um ou mais argumentos, mas uma função retorna um valor, enquanto um predicado é verdadeiro ou falso. Podemos pensar que o predicativo retorna uma proposição(que pode ser falsa, ou verdadeira).

- Podemos pensar nos símbolos 1,2,3,… como tipos especiais de função que recebem zero argumentos. Analogamente, podemos considerar os predicados que recebem zero argumentos como sendo os valores lógicos constantes, $\top$ e $\bot$.

- Na matemática comum, muitas vezes usamos a notação “infix” para funções e relações binárias. Por exemplo, geralmente escrevemos **x × y** ou **x . y** em vez de **mul (x, y)**, e escrevemos **x <y** ao invés de **menorque(x, y)**. Usaremos essas convenções ao escrever provas em dedução natural, que também são suportadas pelo Lean.

- Vamos tratar a relação de igualdade, x = y, como uma relação binária especial que é incluída em todas as linguagens de primeira ordem.

- Assim como a Lógica Proposicional (LP), a LPO permite que formemos expressões mais complexas a partir de outras mais simples.

- x + y + z;

  (x + 1) × y × y;

  quadrado(x + y × z).

Estas expressões recebem o nome de termos.

- Podemos usar nosso predicados e relações para fazer afirmações sobre nossas expressões:
- $par(x + y + z)$
- $primo((x + 1) \times y \times y)$
- $quadrado(x + y \times z) = w$
- $(x + y) < z$

- Podemos ir além e usar conectivos proposicionais para construir expressões ainda mais complexas:

- $par(x + y + z) \land primo((x + 1) \times y \times y)$
- $\neg(quadrado(x + y \times z) = w) \lor (x + y < z)$
- $x < y \land par(x) \land par(y) \rightarrow x + 1 < y$

- Todas expressões vistas acima são chamadas de fórmulas; Ao contrário de termos, que representam objetos, fórmulas transmitem informações sobre objetos de um determinado domínio.

7.2 – Quantificador Universal - $\forall$

- Uma das partes da LPO que a torna tão poderosa é que ela nos permite fazer afirmações gerais utilizando **quantificadores**.
- A afirmação "para todo x" é representada pelo quantificador universal $\forall$ junto da variável x: $\forall x$.
- $\forall x$, ... diz que todos os valores possíveis de x possuem a propriedade ...

- $\forall x((par(x) \vee impar(x)) \wedge \neg(par(x) \wedge impar(x)))$
- $\forall x(par(x) \leftrightarrow 2 \mid x)$
- $\forall x(par(x) \rightarrow par(x^2))$
- $\forall x(par(x) \leftrightarrow ímpar(x+1))$
- $\forall x(prime(x) \wedge x > 2 \rightarrow ímpar(x))$
- $\forall x, \forall y, \forall z\ (x \mid y \wedge y \mid z \rightarrow x \mid z)$

- É comum combinar quantificadores de mesmo tipo. Assim, poderíamos reescrever a última expressão da seguinte maneira: $\forall x, y, z\ (x \mid y \land y \mid z \to x \mid z)$.

- Algumas observações quanto a sintaxe:

- Na lógica simbólica, o quantificador universal se liga com quem está mais próximo. Por exemplo, $\forall x P \lor Q$ é interpretado como $(\forall x P) \lor Q$ e escreveríamos $\forall x\ (P \lor Q)$ para estender o escopo.
- Após o quantificador $\forall x$, a variável x se torna ligada. Por exemplo, a expressão ($\forall x$ (par (x) v ímpar (x)) expressa que cada número é par ou ímpar. A declaração não é sobre x; x é uma variável fictícia, um marcador que representa o objeto abordado dentro de uma frase. Pensamos na expressão $\forall x$ (par(x) v ímpar(x)) como sendo o mesmo que a expressão $\forall y$ (par(y) v ímpar (y)). Lean também trata essas expressões como as mesmas.

- Uma variável que não está vinculada é chamada de livre.
- As fórmulas na lógica de primeira ordem dizem coisas sobre suas variáveis livres. Por exemplo, a fórmula $\forall y(x \leq y)$ diz que x é menor ou igual a todo número natural. A fórmula $\forall z(x \leq z)$ diz exatamente a mesma coisa.
- Podemos sempre renomear uma variável ligada, desde que escolhamos um nome que não entre em conflito com outro nome que já esteja em uso.
- Por outro lado, a fórmula $\forall y\ (w \leq y)$ diz que w é menor ou igual a todos os números naturais. Esta é uma afirmação totalmente diferente: diz algo sobre w, em vez de x. Assim, renomear uma variável livre muda o significado de uma fórmula.
- Algumas fórmulas não possuem nenhuma variável livre. Fórmulas deste tipo são chamadas de sentenças e estas fazem uma afirmação total, que pode ser verdadeira ou falsa.

- Vamos simbolizar a seguinte frase em LPO:
- Para cada par de inteiros, a e b, se $b \neq 0$, não é o caso que $a^2 = 2b^2$.

- $\forall a,b\ (b \neq 0 \rightarrow \neg(a^2=2b^2))$. Poderíamos substituído o $b \neq 0$ por $\neg(b=0)$.

- Como podemos provar esse teorema? Uma possível maneira é através da prova por absurdo.Tendo dois inteiros a e b, assumimos que $b \neq 0$ é válido e que $a^2=2b^2$ é válido. A partir disso, desenvolvemos nossa prova, até chegarmos em uma contradição.
- Em outras palavras, o que estamos fazendo é mostrando que o essa "afirmação universal" é válida para todos a e b arbitrários. Aqui está a prova organizada em dedução natural:

$$\begin{array}{c}
\overline{b \neq 0}^{\,1} \qquad\qquad \overline{a^2 = 2 \times b^2}^{\,2} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg(a^2 = 2 \times b^2)}\,2}{b \neq 0 \to \neg(a^2 = 2 \times b^2)}\,1}{\forall b\,(b \neq 0 \to \neg(a^2 = 2 \times b^2))}}{\forall a\,\forall b\,(b \neq 0 \to \neg(a^2 = 2 \times b^2))}
\end{array}$$

- Depois de termos cancelados todas as hipóteses, provamos que $b \neq 0 \to \neg(a^2 = 2 \times b^2)$. Como não havíamos feito nenhuma suposição sobre a ou b, eles são arbitrários, ou seja, podem ser qualquer valor. Por isso, podemos aplicar os quantificadores universais ao final da prova.

- Assim, a regra de introdução do quantificador universal é:

$$\frac{A(x)}{\forall x\ A(x)}$$

- Neste caso, x não pode ser uma variável livre de algum hipótese que não foi cancelada. Observe também que $\forall xA(x)$ é igual a $\forall yA(y)$, desde que y não seja uma variável livre em A.
- Para a regra de eliminação, vamos ver um exemplo:
- Suponha que sabemos que todos os números naturais são pares ou ímpares. Assim, a partir disso, temos a seguinte expressão: ∀x(par(x) v ímpar(x)). Assim, se x = t, temos que t é par ou t é ímpar, ou seja, par(t) v ímpar(t). Observe que t é arbitrário.

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

7.3. O quantificador existencial - ∃

- Em contrapartida ao quantificador universal, temos o quantificador existencial. Ele é usado para afirmar que alguma coisa acontecerá em algum momento, em um determinado contexto. Aqui estão alguns exemplos, ainda no domínio dos naturais e suas respectivas representações em LPO:

- Existem números ímpares compostos(maior que 1 e não primo).
- Todo número natural maior que 1 tem pelo menos um divisor primo.
- Para cada n, se n tem um divisor primo menor que n, então n é composto.

- $\exists n(\text{ímpar}(n) \land \text{composto}(n))$
- $\forall n(n > 1 \rightarrow \exists p(\text{primo}(p) \land p | n))$
- $\forall n((\exists p\ (p | n \land \text{primo}(p) \land p < n)) \rightarrow \text{composto}(n))$

- Depois de escrevermos ∃n, a variável n está ligada na fórmula. Portanto, as fórmulas ∃n(composto(n)) e ∃m(composto(m)) são consideradas as mesmas.
- Para provarmos o quantificador existencial, dado alguma afirmação, basta apresentarmos um exemplo onde ela é válida.
- Por exemplo, queremos provar que existe algum número ímpar que é composto. Para provar isto, poderíamos fornecer um número que atenda ambos os predicados: Ser ímpar e ser composto. Poderíamos usar 15, 9, 35, ... O número em si não importa, desde que o que escolhemos satisfaz nossa afirmação. Assim:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ odd(15) \wedge composite(15)\end{array}}{\exists n\ (odd(n) \wedge composite(n))}$$

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$$

- Nesta regra, t é arbitrário. Nesta fórmula, ele recebe o nome de "testemunha".
- A regra de eliminação se parece com a regra de eliminação da disjunção. Vamos ver um exemplo:
- **Para cada n, se n tem um divisor primo menor que n, então n é composto.**
- Suponha que sabemos que n é um número natural e que existe um primo p tal que p < n e p | n. Como fazermos para provar que n é um número composto?
- Primeiro, assumimos que há algum p que satisfaz as propriedades: **p é primo, p < n e p | n**, e a partir disso desenvolvemos nosso raciocínio sobre p. Assim como no "raciocínio em partes" da disjunção, as suposições são apenas temporárias: se pudermos mostrar que n é composto a partir delas, então mostramos que n é composto, a partir da hipótese que tal p existe.

- Observe que nesse padrão de raciocínio, p deve ser “arbitrário”. Não devemos assumir nada mais sobre p de antemão e nem fazer nenhuma outra suposição ao longo do caminho. A conclusão também não deve mencionar esse p. Ele só deverá ter as propriedades do que estamos querendo provar. Só assim poderemos dizer que a nossa conclusão veio da suposição que tal p exista.
- Em dedução natural, a regra é expressa da seguinte maneira:

$$\dfrac{\exists x A(x) \qquad \begin{array}{c}\overline{A(y)}^{\,1}\\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\,1$$

- Da mesma forma como raciocinamos anteriormente, y não pode ser uma variável livre em B. A hipótese A(y) é descarregada no final da prova, e pode ser usada quantas vezes for necessária durante a mesma.

7.4 – Relativização e Classificação

- Em LPO, ao escolhermos um domínio de nosso interesse, temos uma certa quantidade de objetos pertencentes a este domínio e quantificadores universais e existenciais que abrangem esse mesmo domínio.
- Suponha que nosso domínio seja uma cidade, e que designamos uma relação **ama(x, y)** para determinar se x ama y. Se quiséssemos falar que toda pessoa ama alguém, escreveríamos o seguinte:
- $\forall x\ \exists y(ama(x,y))$.
- Suponha, agora, que queremos falar que dizer que todas as mulheres são fortes e que todos os homens são bonitos. Faríamos isso da seguinte maneira:
- $\forall x\ (mulher(x) \rightarrow forte(x))$
- $\forall x\ (homem(x) \rightarrow bonito(x))$

- Isto que acabamos de demonstrar se chama de uma **instância de relativização**.
- O quantificador universal varia sobre todas as pessoas na cidade, mas esse dispositivo nos dá uma maneira de usar a implicação para restringir o escopo de nossas declarações para homens e mulheres, respectivamente.
- Podemos também relativizar o quantificador existencial para dizer coisas como "alguma mulher é forte" e “algum homem é bonito".
- $\exists x\ (\text{mulher}(x) \wedge \text{strong}(x))$
- $\exists x\ (\text{homem}(x) \wedge \text{good-looking}(x))$
- Agora, vamos supor que estamos estudando geometria. Queremos expressar que por dois pontos, p e q, só podem passar uma única retas.
- Após escolher nosso domínio como um que abranja tanto pontos como retas, utilizaremos a relativização para poder escrever nossa afirmação:
- $\forall p, q\ , L\ , M\ (\text{ponto}(p) \wedge \text{ponto}(q) \wedge \text{linha}(L) \wedge \text{linha}(M) \wedge \text{porcima}(p,L) \wedge \text{porcima}(q,L) \wedge \text{porcima}(p,M) \wedge \text{porcima}(q,M) \rightarrow L = M)$.

- Trabalhar com um predicado pode se tornar extremamente cansativo, ainda mais quando trabalharmos com expressões ainda maiores. Poderíamos utilizar uma "extensão" da lógica de primeira ordem chamada de "*many-sorted first-order logic*".
- Em muitas lógicas ordenadas, podemos ter diferentes objetos pertencentes a um mesmo domínio, e separar quais variáveis vão "percorrer" sobre cada objeto diferente.
- Além disso, a especificação de funções e predicados nos indica qual tipo de argumento eles estão esperando (e, no caso das funções, qual tipo de argumento eles retornam).
- Assim, poderíamos classificar as variáveis p, q, r ... variando sobre os pontos , as variáveis L, M , N, ... variando sobre as retas e a relação porcima(p, L) relacionando as duas. Dessa forma, poderíamos reduzir a afirmação acima para isso:
- $\forall p, q, L, M\ (porcima(p,L) \land porcima(q,L) \land porcima(p,M) \land porcima(q,M) \rightarrow L=M)$.

7.5 Igualdade

- Em LPO, usamos a expressão s = t para indicar que s e t são “iguais”, “idênticos”.
- Em outras palavras, estamos querendo dizer que duas descrições diferentes se referem ao mesmo objeto. Como podemos utilizar essa noção de “equivalência” para praticamente qualquer domínio de objetos, este é um assunto interessante a ser trabalho dentro da lógica.
- Falar sobre igualdade e identidade pode ser complicado e levantar várias questões filosóficas. Assim, para não termos confusão, iremos definir que a igualdade deve satisfazer as seguintes propriedades axiomáticas:

- Reflexividade: t=t, para qualquer termo t
- Simetria: se s=t, então t=s
- Transitividade: se r=s e s=t, então r=t

- Se duas expressões são iguais, devemos ser capazes de substituir uma pela outra. Por exemplo, se s = t e temos A(t) e A(s), podemos concluir que A(t) = A(s). Assim, se s = t, então A(t) = A(s).
- Podemos escrever as regras de introdução e remoção da igualdade da seguinte maneira:

$$\frac{}{t = t} \qquad \frac{s = t}{t = s} \qquad \frac{r = s \qquad s = t}{r = t}$$

$$\frac{s = t}{r(s) = r(t)} \qquad \frac{s = t \qquad P(s)}{P(t)}$$

- No próximo capítulo, usaremos elas de uma melhor maneira, quando formos montar nossas provas em dedução natural.

- Usando igualdade, podemos criar ainda mais quantificadores:

- Nós podemos expressar “há pelo menos dois elementos x tais que A(x) mantém” como: $\exists x \exists y\ (x \neq y \land A(x) \land A(y))$.
- Podemos expressar “há no máximo dois elementos x tais que A (x) mantém” como: $\forall x \forall y \forall z\ (A(x) \land A(y) \land A(z) \rightarrow x = y \lor y = z \lor x = z)$. Isso indica que se temos três elementos j para os quais A(j) é válido, então dois deles devem ser iguais.
- Podemos expressar “há exatamente dois elementos x tais que A (x) mantém” como a conjunção das duas afirmações acima.

- O quantificador $\exists!x\,(A(x))$ é usado para expressar que existe um único x capaz de satisfazer A(x). Poderíamos expressar isso utilizando os outros quantificadores:
- $\exists x\, A(x) \land \forall y \forall y'\, (A(y) \land A(y') \rightarrow y = y')$.
- A primeira parte nos diz que existe um X que satisfaça A, enquanto a segunda parte nos diz que se existem dois objetos que satisfazem A, então esses objetos são iguais. Ainda outra forma:
- $\exists x\, A(x) \land \forall y\, (A(y) \rightarrow y = x)$.