Logic and Proof - An introductory course for undergraduates.

By: Jeremy Avigad, Robert Y. Lewis and Floris van Doorn.

Capítulo 1 - Introdução

1.1 – Prova Matemática

- Ainda que exista evidência de atividades matemática desde o Antigo Egito, acredita-se que a matemática propriamente dita nasceu na Grécia, quando a prova dedutiva foi “criada”.
- O que conhecemos não é o que mais importa, e sim como conhecemos sobre esse assunto, como chegamos a este conhecimento e achar uma base sólida pra o mesmo através do método dedutivo.
- No seguinte slide demonstraremos uma prova comum de um exemplo bastante simples.

Se $x = 1$, então $x + 1 = 2$.

- A prova será feita por absurdo.
- Supondo, por absurdo, que $x \neq 1$, vamos analisar a segunda parte de nossa implicação.
- $X + 1 = 2 \rightarrow x = 1$. Isso é um absurdo, pois começamos nossa prova supondo que $x \neq 1$. Assim, nossa suposição é falsa e, portanto, $x = 1 \Rightarrow x + 1 = 2$.

1.2 – Lógica Simbólica

- Para entendermos como montar provas, estudar lógica simbólica será de grande ajuda, pois a mesma nos mune com um modelo idealizado de matemática e prova.
- Foi a partir dela que os antigos filósofos gregos desenvolveram a teoria do silogismo. Aristóteles observou que o estar certo não dependia do que afirmávamos, e sim da maneira com que as coisas afirmadas se relacionavam, do padrão que elas seguiam.

- Exemplo:
- Todo homem é um animal.
- Todo animal é mortal.
- Logo, todo homem é mortal.

- Seguindo a observação de Aristóteles, podemos generalizar esta sentença da seguinte maneira:

- Todo A é um B.
- Todo B é um C.
- Logo, toco A é um C.

- Podemos substituir A, B, C por qualquer formula ou afirmação, que serão verdadeiras ou falsas, dependendo do context em que estão. Porém, a formula geral se preserva: Se duas hipóteses são verdadeiras, a tese também será.

- Mais tarde, Leibniz propôs o design de uma “characteristica universalis”, (que era uma linguagem simbólica universal, onde alguém poderia expressar qualquer afirmação de modo preciso) e de um “calculus ratiocinatur” (que “ditaria” as regras para se montar um raciocínio). Apesar de dar passos nesta direação, seus esforços se transformaram no campo da lógica matemática mais tarde.
- Como o objetivo desta lógica é identificar elementos chave de alguma linha de raciocínio e argumentação e explicar como estas funcionam, vamos introduzir um conjunto de símbolos que para notações lógicas chave.

- $A \to B$, “if A then B“
- $A \wedge B$, “A and B“
- $A \vee B$, “A or B“
- $\neg A$, “not A“
- $\forall x\ A$, “for every x, A“
- $\exists x\ A$, “for some x, A“

- O Sistema de provas que usaremos é uma versão da dedução natural, usado para modelar estilos informais de argumento(?).
- A afirmação A é formada por um conjunto de hipóteses Γ. Isto é escrito da seguinte maneira: $\Gamma \vdash A$ (A é consequência de Γ). Se Γ e Δ são dois conjuntos de hipóteses finitas, escreveremos Γ,Δ para a união deste dois conjuntos.
- Munidos destas convenções, poderemos escrever a regra para o símbolo de conjunção da seguinte forma:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}$$

- Isto significa: Assumindo A a partir das hipóteses __ e assumindo B a partir das hipóteses __, A /\ B vem da hipótese de ambos __ e __.

- Poderemos também escrever tais provas de maneira mais compacta e simples, omitindo o conjunto das hipóteses. A escrita será feita desta maneira:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

- A complexidade de tais provas pode crescer muito, e as provas completas de fatos matemáticos até mesmo elementares podem se tornar bastante longas. Tais sistemas não são projetados para escrever matemática séria (?). Em vez disso, eles fornecem modelos idealizados de inferência matemática e, na medida em que capturam algo da estrutura de uma prova informal, nos permitem estudar as propriedades do raciocínio matemático.

1.4 – O ponto de vista semântico

- A verdade da expressão composta depende apenas de se os símbolos dos componentes denotam expressões verdadeiras ou falsas.
- Nesta perspectiva, a lógica não é tanto uma linguagem para afirmar a verdade, mas uma linguagem para descrever possíveis estados de coisas. Em outras palavras, a lógica fornece um idioma de especificação, com expressões que podem ser verdadeiras ou falsas dependendo de como interpretamos os símbolos que podem variar.
- Essa visão da lógica é importante na ciência da computação, onde usamos expressões lógicas para selecionar entradas de um banco de dados que atenda a determinados critérios.