8. Dedução Natural para Lógica de Primeira Ordem

- No último capítulo, vimos as regras de introdução e eliminação dos quantificadores. Aqui estão elas, para uma breve recapitulação:

$$\frac{A(x)}{\forall y\, A(y)}\ \forall\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{\forall x\, A(x)}{A(t)}\ \forall\mathrm{E}$$

- Na regra de introdução, x não deve ser uma variável livre em qualquer outra hipótese que não foi cancelada. Na eliminação, t não deve ser uma variável ligada em A.

$$\frac{A(t)}{\exists x\, A(x)}\ \exists\mathrm{I} \qquad\qquad \dfrac{\exists x\, A(x) \qquad \begin{matrix} \overline{A(y)}^{\,1} \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{B}\ 1\ \exists\mathrm{E}$$

- Na regra de introdução, t não pode ser uma variável ligada em A. Na regra de eliminação, y não pode ser uma variável livre em B ou em alguma outra hipótese não cancelada.

$$\frac{}{t = t}\ \text{refl} \qquad \frac{s = t}{t = s}\ \text{symm} \qquad \frac{r = s \qquad s = t}{r = t}\ \text{trans}$$

$$\frac{s = t}{r(s) = r(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s = t \qquad P(s)}{P(t)}\ \text{subst}$$

8.2 – O Quantificador Universal

- Após esta pequena revisão, vamos resolver alguns exemplos, começando pelo quantificador universal.
- O exemplo que iremos provar é o seguinte: Se para todo x, A(x) é válido e, para todo x, B(x) é válido, então, pra todo x, A(x) e B(x) são válidos.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\forall x\; A(x)}^{\,1}}{A(y)} \qquad \dfrac{\overline{\forall x\; B(x)}^{\,2}}{B(y)}}{A(y) \wedge B(y)}}{\forall y\; (A(y) \wedge B(y))}}{\forall x\; B(x) \rightarrow \forall y\; (A(y) \wedge B(y))}\;{}^{2}}{\forall x\; A(x) \rightarrow (\forall x\; B(x) \rightarrow \forall y\; (A(y) \wedge B(y)))}\;{}^{1}$$

- Outro exemplo:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\forall x \ A(x)}^{\;1}}{A(y)}}{A(y) \lor B(y)}}{\forall x \ (A(x) \lor B(x))}}{\forall x \ A(x) \to \forall x \ (A(x) \lor B(x))} \; 1$$

- Da terceira para a quarta linha, fomos capazes de fazer a introdução do quantificador universal pois y é arbitrário; Não assumimos nenhuma hipótese sobre ele.

- Vamos ver um exemplo agora relacionado aos números naturais. Suponha que definimos **par** e **ímpar** de tal maneira que obtemos as seguintes premissas:

$$\forall n\ (\neg even(n) \to odd(n))$$
$$\forall n\ (odd(n) \to \neg even(n))$$

- A partir disso, podemos provar $\forall n\ \neg(even(n) \land odd(n))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{odd(n) \to \neg even(n)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{even(n) \land odd(n)}\,H}{odd(n)}}{\neg even(n)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{even(n) \land odd(n)}\,H}{even(n)}}{\bot}}{\neg(even(n) \land odd(n))}\,H}{\forall n\ \neg(even(n) \land odd(n))}$$

- Podemos ir além e provar ∀n(even(n) ∨ odd(n)):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{even(n) \lor \neg even(n)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{even(n)}\,{}^{1}}{even(n) \lor odd(n)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall n\ (\neg even(n) \to odd(n))}}{\neg even(n) \to odd(n)} \qquad \dfrac{}{\neg even(n)}\,{}^{1}}{odd(n)}}{even(n) \lor odd(n)}}{even(n) \lor odd(n)}\,{}^{1}}{\forall n\ (even(n) \lor odd(n))}$$

8.3 – Quantificador Existencial

- Como havia sido dito anteriormente, para utilizar a regra de eliminação do quantificador existencial, seguimos este raciocínio: Se conhecemos ∃xA(x), podemos raciocionar sobre um y (arbitrário) que satisfaça A(y), a fim de chegar a uma conclusão. Este raciocínio é fundamental na hora de construirmos provas.
- Vamos montar a prova do seguinte argumento: Se conhecemos que existe algo que satisfaz tanto A quanto B, então sabemos que existe algo que satisfaça A, em particular.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x(A(x)\land B(x))}\,{}^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(y)\land B(y)}\,{}^{2}}{A(y)}}{\exists x A(x)}}{\exists x A(x)}\,2}{\exists x(A(x)\land B(x)) \to \exists x A(x)}\,1$$

- Vamos provar o seguinte: se tem algo que satisfaz A ou B, então tem algo que satisfaça A ou tem algo que satisfaça B.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\exists x\,(A(x)\lor B(x))}\,{}^{1}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{}{A(y)\lor B(y)}\,{}^{2}
      \quad
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(y)}\,{}^{3}}{\exists x\,A(x)}}{\exists x\,A(x)\lor\exists x\,B(x)}
      \quad
      \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B(y)}\,{}^{3}}{\exists x\,B(x)}}{\exists x\,A(x)\lor\exists x\,B(x)}
    }{\exists x\,A(x)\lor\exists x\,B(x)}\,{}^{3}
  }{\exists x\,A(x)\lor\exists x\,B(x)}\,{}^{2}
}{\exists x\,(A(x)\lor B(x))\to\exists x\,A(x)\lor\exists x\,B(x))}\,{}^{1}
$$

- Outra demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\exists x\,(A(x)\wedge B(x))}^{\,2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\forall x\,(A(x)\to\neg B(x))}^{\,1}}{A(x)\to\neg B(x)} \quad \dfrac{\overline{A(x)\wedge B(x)}^{\,3}}{A(x)}}{\neg B(x)} \qquad \dfrac{\overline{A(x)\wedge B(x)}^{\,3}}{B(x)}}{\bot}}{\bot}\,{}^{3}}{\neg\exists x\,(A(x)\wedge B(x))}\,{}^{2}}{\forall x\,(A(x)\to\neg B(x))\to\neg\exists x\,(A(x)\wedge B(x))}\,{}^{1}$$

- Nesta prova, a regra de eliminação do quantificador existencial (indicada pelo 3) é usada para cancelar duas hipóteses ao mesmo tempo (?).
- Note que quando esta regra é aplicada, $\forall x\ (A(x) \to \neg B(x))$ ainda não foi cancelado. Assim, devemos tomar cuidado para garantir que x não é uma variável livrena fórmula que temos até agora.

- Aqui está um outro exemplo: Se x não ocorre em P, então ∃x P é equivalente a P:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\exists x\, P}^{\,1} \qquad \overline{P}^{\,2}}{P}\,{\scriptstyle 2} \qquad \dfrac{\overline{P}^{\,1}}{\exists x\, P}}{\exists x\, P \leftrightarrow P}\,{\scriptstyle 1}$$

- Na esquerda, assumimos ∃x P para chegar em P. Assumimos P, e, com isso, podemos aplicar a regra de eliminação de ∃, pois x não ocorre em P. Na direita, usamos a introdução do quantificador existencial.

8.4 - Igualdade

- Vamos começar relembrando (mais uma vez) as regras relacionadas a igualdade:

$$\frac{}{t = t} \qquad \frac{s = t}{t = s} \qquad \frac{r = s \qquad s = t}{r = t}$$

$$\frac{s = t}{r(s) = r(t)} \qquad \frac{s = t \qquad P(s)}{P(t)}$$

- Suponha que r(x) = (x + y) x (z + 0).
- Se x = 0, r(0) = (0 + y) x (z + 0).
- Se x = u + v, r(u + v) = ((u + v) + y) x (z + 0).
- E se u + v = 0?

$$\frac{u + v = 0}{((u + v) + y) \times (z + 0) = (0 + y) \times (z + 0)}$$

- Se utilizarmos o axioma reflexivo, t = t, ele não conta como uma hipótese. É uma regra que podemos “introduzir” sem utilizar premissas.

$$\frac{u+v=0 \qquad x+(u+v)<y}{x+0<y}$$

- No próximo exemplo, utilizamos a reflexão e a substituição:

$$\frac{u+v=0 \qquad \overline{((u+v)+y)\times(z+0)=((u+v)+y)\times(z+0)}}{((u+v)+y)\times(z+0)=(0+y)\times(z+0)}$$

- As regras de igualdade nos permitem fazer cálculos na lógica simbólica. Utilizamos estas mesmas regras e algumas identidades. As seguintes identidades valem para todo x, y e z. Imagine que os quantificadores universais estão explícitos antes de cada identidade:

  - commutativity of addition: $x + y = y + x$
  - associativity of addition: $(x + y) + z = x + (y + z)$
  - additive identity: $x + 0 = 0 + x = x$
  - additive inverse: $-x + x = x + -x = 0$
  - multiplicative identity: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
  - commutativity of multiplication: $x \cdot y = y \cdot x$
  - associativity of multiplication: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  - distributivity: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

- Se quiséssemos provar alguma destas identidades, usaríamos as regras da igualdade para orientar nossas equações e finalizar nossa prova. Veja só a prova da identidade $\forall x, y, z\ ((x+y)+z = (x+z)+y)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{assoc}}}{(x+z)+y = x+(z+y)}}{x+(z+y) = (x+z)+y} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{comm}}}{y+z = z+y} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\text{assoc}}}{(x+y)+z = x+(y+z)}}{(x+y)+z = x+(z+y)}}{\dfrac{(x+y)+z = (x+z)+y}{\forall x, y, z\ ((x+y)+z = (x+z)+y)}}$$

8.5 – Contraexemplos e quantificadores relativizados

- Dado uma fórmula $\forall x\, A(x)$, um contraexemplo é um valor de t tal que $\neg A(t)$ é válido.
- Tal contraexemplo mostra que a fórmula original não é válida por causa da seguinte equivalência: $\neg\forall x\, A(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg\forall x\,A(x)}^{\,1}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg(\exists x\,\neg A(x))}^{\,4}\qquad \dfrac{\overline{\neg A(x)}^{\,5}}{\exists x\,\neg A(x)}}{\perp}}{A(x)}{\scriptstyle 5}}{\forall x\,A(x)}}{\perp}}{\exists x\,\neg A(x)}{\scriptstyle 4} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{\exists x\,\neg A(x)}^{\,1}\qquad \dfrac{\overline{\neg A(y)}^{\,3}\qquad \dfrac{\overline{\forall x\,A(x)}^{\,2}}{A(y)}}{\perp}}{\perp}{\scriptstyle 3}}{\neg\forall x\,A(x)}{\scriptstyle 2}}{\neg\forall x\,A(x)\leftrightarrow\exists x\,\neg A(x)}{\scriptstyle 1}$$

- Na etapa 4, onde usamos a prova por absurdo, não poderíamos ter usado a introdução do quantificador existencial, por que só temos o $\neg\forall x\, A(x)$ como hipótese, e não temos como provar $\neg A(t)$ a partir disso.
- No Capítulo 7, vimos exemplos de como usar a relativização para restringir o escopo de um quantificador universal. Suponha que queremos dizer "todo número primo é maior que 1".
- Na lógica de primeira ordem, isso pode ser escrito como $\forall n(\text{prime}(n) \to n > 1)$. A razão é que a afirmação original é equivalente à afirmação “para cada número natural, se for primo, então é maior que 1 ”.
- Da mesma forma, suponha que queremos dizer "existe uma número primo maior que 100.” Isso equivale a dizer “existe um número natural que é primo e maior que 100”, que pode ser expressa como $\exists n\ (\text{primo}\ (n) \wedge n > 100)$.