Lorenzo Bocola, Federico Salonico

RELAZIONE DELL'ESPERIENZA DI LABORATORIO SUL CALCOLO DELL'INDUTTANZA DI UN SOLENOIDE

Introduzione

L'obiettivo di questo esperimento è la misurazione dell'induttanza di un solenoide tramite l'analisi della risposta in frequenza di un circuito RLC.

Materiali e strumenti

Materiali

- Condensatori [1]
- Resistore da 10005 $\Omega \pm 15\Omega$
- Breadboard e cavi per collegamenti
- Induttore da 500 $\mu H \pm 10\%$[2]
- Generatore di frequenze [3]

Strumenti

Tabella 1: Strumenti utilizzati

Strumento	Sensibilità	Portata
Oscilloscopio (tensione)	$500\,\mu V$	$200\,V$
Oscilloscopio (tempo)	$40\,ns$	–
Mutimetro (resistenza)[4]	$1\,\Omega$	$60\,M\Omega$
Mutimetro (capacità)[4]	$1\,pF$	$60\,mF$

[1] Vedi tabella 2.
[2] Questo valore non è stato misurato ma si fa riferimento a quanto riportato sul componente.
[3] Lo strumento preseta un'impedenza interna di 900Ω rappresentata nella figura 1 come R1.
[4] La tolleranza dello strumento è pari a 0.5%.

Tabella 2: Condensatori utilizzati

Nome	Valore
C_1	$8.27\ \mu F \pm 40\ nF$
C_2	$3.780\ \mu F \pm 19\ nF$
C_3	$1.990\ \mu F \pm 10\ nF$
C_4	$882\ nF \pm 4\ nF$
C_5	$634\ nF \pm 3\ nF$
C_6	$426\ nF \pm 2\ nF$
C_7	$305.8\ nF \pm 1.5\ nF$
C_8	$196.8\ nF \pm 1.0\ nF$
C_9	$154.8\ nF \pm 0.8\ nF$
C_{10}	$105.2\ nF \pm 0.5\ nF$

Descrizione dell'esperimento

Si misura il valore della capacità dei condensatori e della resistenza del resistore attraverso il multimetro, quindi si realizza un circuito RLC con il resistore, uno dei condensatori e l'induttore in serie al generatore di frequenze (Figura 1). Successivamente si collegano le 3 sonde dell'oscilloscopio GND, P1 e P2 come mostrato in figura 1. Realizzato il circuito si effettua l'anlisi della risposta in frequenza attraverso l'apposito software, ottenendo il guadagno ovvero il rapporto tra le differenze di potenziale GND-P1 e GND-P2 per le frequenze in uno spettro compreso tra 1kHz e 500kHz. Si ripete il procedimento per ogni condensatore.

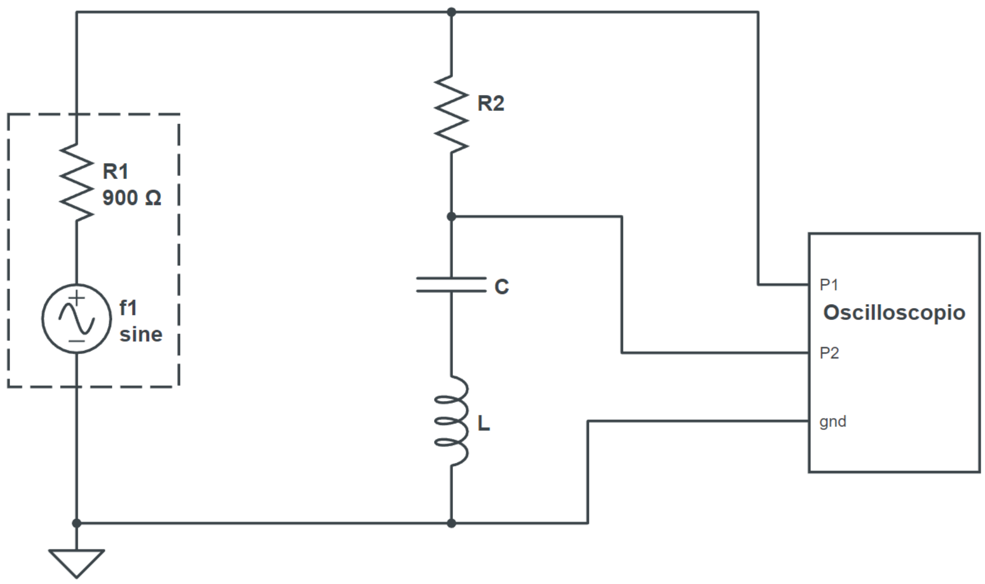
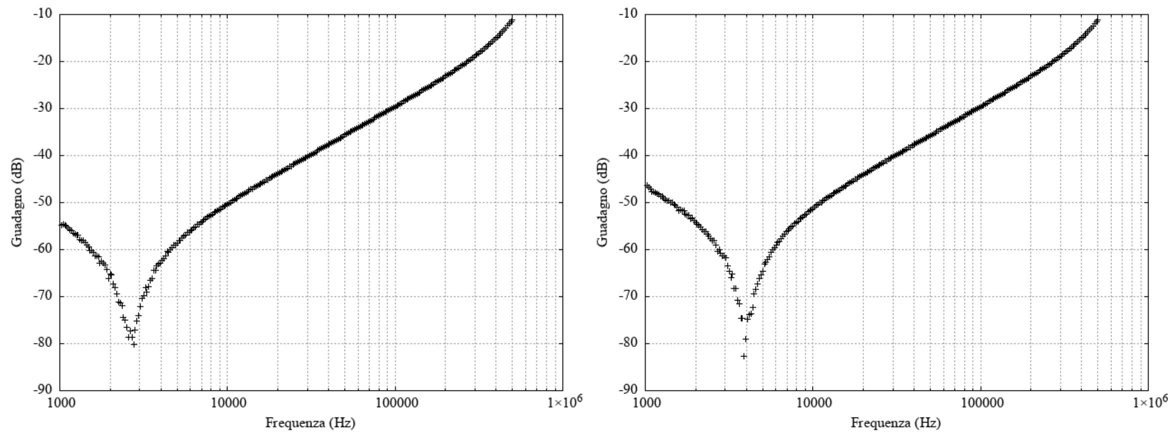


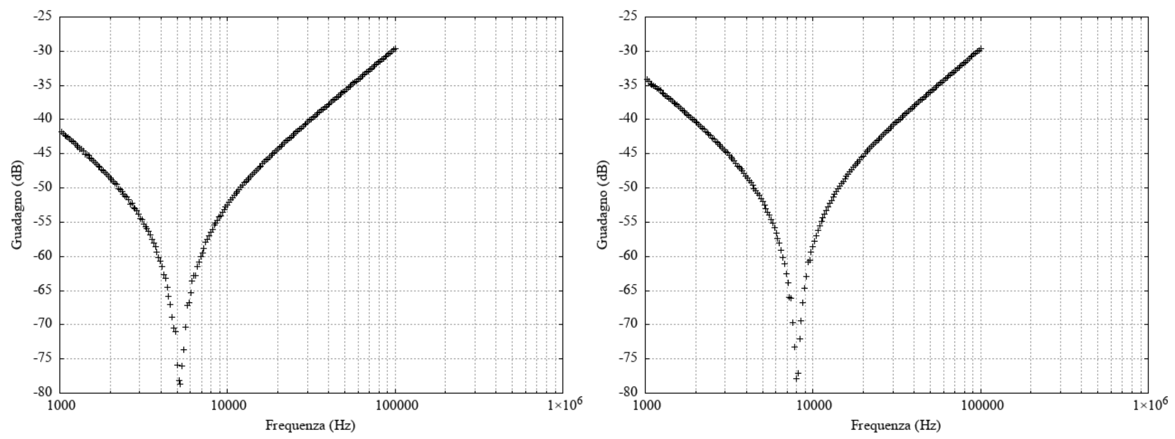
Figura 1: Circuito utilizzato durante l'esperimento

Dati

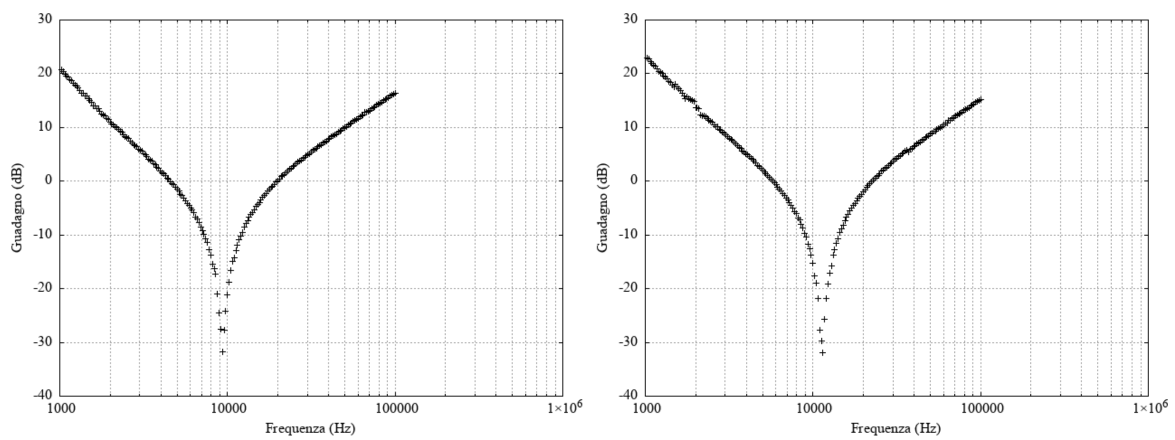
Vista la mole di dati per misurazione[5] verranno riportati solamente i grafici dell’analisi in frequenza del circuito che riportano sull’asse delle ascisse la frequenza in scala logaritimica e sull’asse delle ordinate il guadagno in dB, ovvero $20\log\frac{V_{LC}}{V_{R2LC}}$.[6]



Grafici 1 e 2



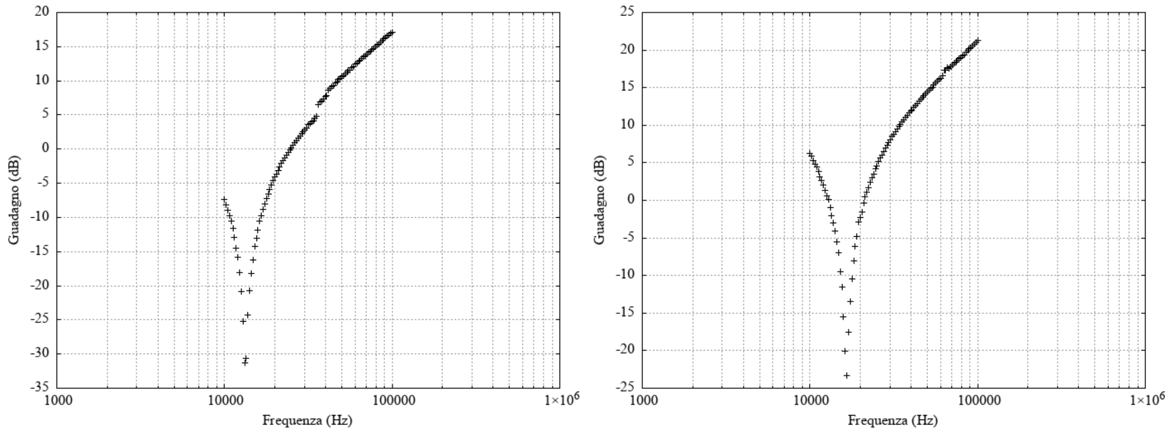
Grafici 3 e 4



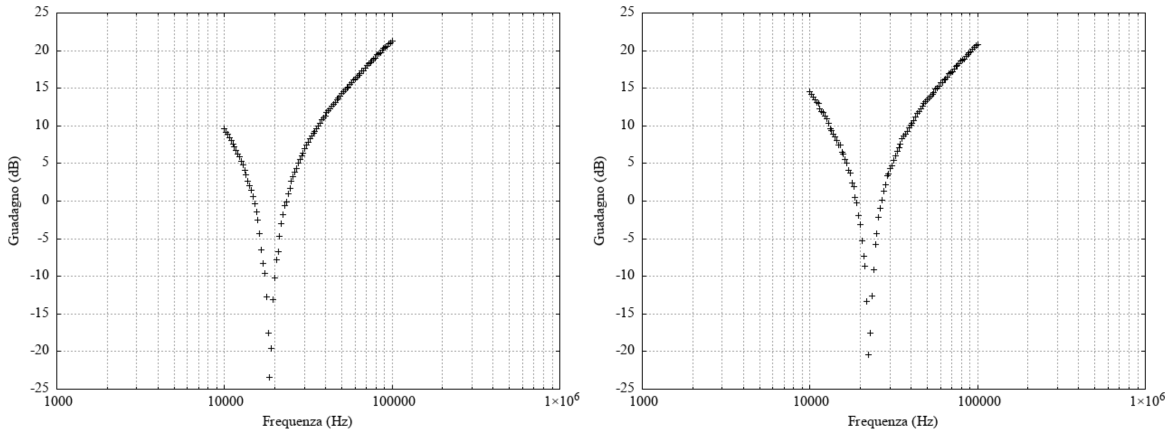
Grafici 5 e 6

[5] Nell’ordinde delle centinaia di dati per misurazione.

[6] Per convenzione si calcola il logaritmo del rapporto dei quadrati essendo più utile nel calcolo del guadagno in potenza di un sistema.



Grafici 7 e 8



Grafici 9 e 10

Elaborazione matematica

Data l'impraticità del calcolo di una soluzione all'equzione differenziale (ottenibile tramite la legge delle tensioni di Kirchhoff) si è deciso di utilizzare l'analisi di circuiti adoperando l'impedenza della quale segue una breve introduzione spiegandone la validità quale strumento matematico.

Introduzione all'analisi di circuiti attraverso l'impedenza

Una data tensione (o corrente) sinusoidale può essere scritta come:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\omega t+\phi)} + e^{-i(\omega t+\phi)}\right) \qquad [1.1]$$

data la natura lineare delle operazioni subite dalle tensioni e dalle correnti nell'analisi di circuiti RLC (somma, moltiplicazione per coefficienti e derivazione) le due "parti" possono essere analizzate indipendentemente e data la loro simmetria l'analisi di una può essere facilmente applicata all'altra, l'equazione [1.1] può essere quindi riscritta come

$$V(t) = V_0 \Re(e^{i(\omega t+\phi)}) \qquad [1.2]$$

dove il passaggio ai numeri reali è necessario solo al termine dell'analisi del circuito durante la quale si potrà utilizzare invece:

$$V(t) = V_0 e^{i(\omega t+\phi)} \qquad [1.3]$$

È possibile calcolare la tensione/corrente massima semplicemente calcolando il valore assoluto del coefficiente V_0 o I_0 che moltiplica $e^{i(\omega t+\phi)}$.

Sarà dunque possibile definire una quantità Z (analoga alla resistenza), chiamata impedenza, che rispetti la seguente legge:

$$V = ZI \qquad [1.4]$$

con V e I si indicano rispettivamente la tensione tra i capi e la corrente attraverso uno o più componenti (utilizzando tensioni e correnti complesse questo valore non dipenderà dal tempo). Il valore di questa impedenza può essere calcolato per condensatori e induttori come segue (è inutile specificare perché Z=R per un resistore).
Per il condensatore:

$$Q = VC \qquad [1.5]$$

dalla quale si ottiene

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(V_0 e^{i(\omega t+\phi)}\right) = CV_0 i\omega e^{i(\omega t+\phi)} \qquad [1.6]$$

L'impedenza sarà quindi equivalente a:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0 \omega e^{i(\omega t+\phi)}}{CV_0 i\omega e^{i(\omega t+\phi)}} = -i\frac{1}{\omega C} \qquad [1.7]$$

Per l'induttore:

$$V = L\frac{dI}{dt} \qquad [1.8]$$

seguendo un processo analogo si ottiene

$$Z = i\omega L \qquad [1.9]$$

Analisi del circuito

Per la legge delle tensioni di Kirchhoff si ottiene:

$$V_0 = V_{R_1} + V_{R_2} + V_L + V_C = V_{R_1} + R_2 I + i\omega L I - i\frac{I}{\omega C} = V_{R_1} + I\left(R_2 + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) \qquad [2.1]$$

analizzando l'impedenza in modulo si ottiene:

$$V_0 = V_{R_1} + I\sqrt{R_2^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad [2.2]$$

Per quanto detto nell'esposizione dei dati il guadagno è pari a:

$$20\log\frac{V_{LC}}{V_{R_2 LC}} = 20\log\left(\frac{V_L + V_C}{I\sqrt{R_2^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\right) = 20\log\left(\frac{\cancel{I}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\cancel{I}\sqrt{R_2^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\right) \qquad [2.3]$$

Dove $V_L \, e \, V_C$ sono le tensioni massime.
Il guadagno minimo si ottine qunado il numeratore è nullo [7]

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad [2.4]$$

Dall'equazione [2.4](sapendo che $\omega = 2\pi f$) si ottiene la retta (in forma Y = mX):

$$\frac{1}{4\pi^2 C} = Lf^2 \qquad [2.5]$$

Dall'equzione [2.5] si può ottenere L tramite il calcolo del coefficiente angolare della retta di regressione ottenta dai seguenti dati.

[7] Teoricamente il guadagno dovrebbe assumere un valore di $-\infty$ ma a causa di una piccola resistenza nei cavi di induttore e condensatore in numeratore non si annulla ma diventa molto minore rispetto al denominatore quando le impedenze di indutore e condensatore sono equivalenti

Tabella 3: Punti di minimo dei grafici riportati nella sezione dati seconda parte

$Log(F_{min})$[8]
3.44 ± 0.1
3.59 ± 0.1
3.72 ± 0.1
3.90 ± 0.1
3.97 ± 0.1
4.06 ± 0.1
4.12 ± 0.1
4.22 ± 0.1
4.27 ± 0.1
4.34 ± 0.1

Tabella 4: elaborazione dei dati delle tabelle 3 e 2 secondo l'equazione [2.5]

f^2 (X)	$\frac{1}{4\pi^2 C}$(Y)
$7600000 Hz^2 \pm 300000 Hz^2$	$3060 F^{-1} \pm 15 F^{-1}$
$15100000 Hz^2 \pm 700000 Hz^2$	$6700 F^{-1} \pm 30 F^{-1}$
$28000000 Hz^2 \pm 1300000 Hz^2$	$12730 F^{-1} \pm 60 F^{-1}$
$63000000 Hz^2 \pm 3000000 Hz^2$	$28700 F^{-1} \pm 140 F^{-1}$
$87000000 Hz^2 \pm 4000000 Hz^2$	$40000 F^{-1} \pm 200 F^{-1}$
$132000000 Hz^2 \pm 6000000 Hz^2$	$59500 F^{-1} \pm 300 F^{-1}$
$174000000 Hz^2 \pm 8000000 Hz^2$	$82800 F^{-1} \pm 400 F^{-1}$
$280000000 Hz^2 \pm 13000000 Hz^2$	$128700 F^{-1} \pm 600 F^{-1}$
$350000000 Hz^2 \pm 16000000 Hz^2$	$163600 F^{-1} \pm 800 F^{-1}$
$480000000 Hz^2 \pm 20000000 Hz^2$	$240000 F^{-1} \pm 1200 F^{-1}$

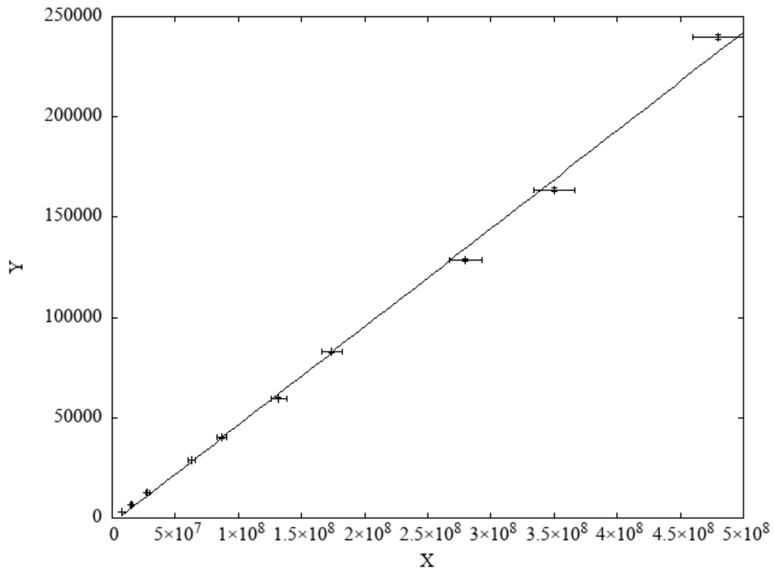


Grafico 1: Dati della tabella 4 elaborati

Conclusioni

Tramite la regressione lineare dei dati riportati nella tabella 4 si ottiene il coefficiente L dell'equazione [2.5], ovvero l'induttaza del solenoide pari a $490\,\mu H \pm 9\,\mu H$. Si nota come questo valore sia paragonabile a quello riportato sul componente stesso pari a $500\,\mu H \pm 1 \cdot 10^{-5} H$.

[8] per F_{min} si intende la frequenza relativa al minimo guadagno