

Relazione sulla verifica sperimentale delle condizioni di equilibrio meccanico

28 marzo 2024

Introduzione

L'obiettivo di questo esperimento è quello di verificare le condizioni di equilibrio meccanico di un corpo tramite l'analisi delle forze agenti su di esso. In particolare si osserva un corpo sul quale agiscono due forze elastiche e la forza peso.

Materiali e strumenti

Materiali

- Pile (utilizzate come corpi massivi)
- Filo di nylon inestensibile
- Recipiente in plastica
- Chiodi
- Elastici (spessore di circa 2mm)
- Elastici (spessore di circa 8mm)
- Molle di penna a sfera meccanica

Strumenti

Strumento	Sensibilità	Portata
Righello	0.5 mm	20 cm
Bilancia digitale	1 g	2 Kg
Goniometro	1°	180°

Tabella 1: Strumenti utilizzati

Descrizione

Verifica e calibrazione del dinamometro:

Poiché non si ha a disposizione un dinamometro calibrato, si è deciso di utilizzare un oggetto elastico per misurare le forze agenti sul corpo.

Dunque è necessario avere una molla o un elastico di cui si conosce la lunghezza a riposo e la costante elastica k così da poter misurare la forza che agisce su di esso tramite la misurazione diretta dell'allungamento in accordo con la legge di Hooke.

Poiché non tutti gli oggetti elastici seguono la legge di Hooke, è necessario verificare che gli oggetti scelti abbiano un comportamento simile a quello di una molla ideale.

Per eseguire questa verifica si misura l'allungamento di un oggetto elastico al variare della massa ad esso applicata.

Si misura la lunghezza a riposo dell'oggetto elastico.

Si posiziona quindi l'oggetto elastico, con l'ausilio del filo di nylon, come in figura 1 e si annota la lunghezza dell'oggetto in tensione variando la massa applicata, precedentemente misurata con la bilancia digitale.

Si misura quindi la lunghezza dell'oggetto elastico a riposo e si verifica che sia uguale alla lunghezza a riposo misurata prima dell'esperimento.

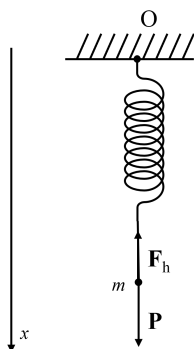


Figura 1: Configurazione sperimentale per la verifica del comportamento elastico dell'oggetto.

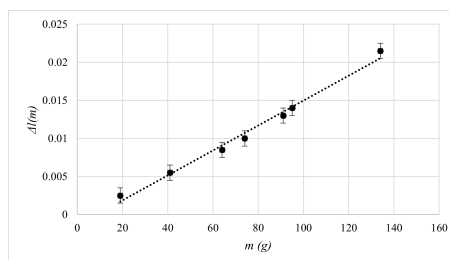
Elaborazione misure per la verifica del dinamometro:

Data la configurazione rappresentata in figura 1, si osserva che il corpo è in quiete. Dunque per i principi della dinamica, la somma delle forze agenti sul corpo è nulla:

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_h = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - k(l - l_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{l - l_0}$$

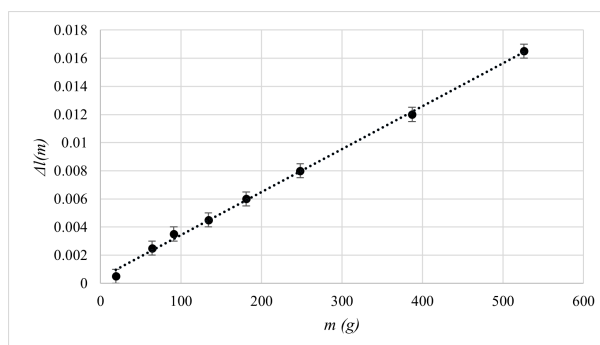
Si riportano le misure effettuate per una elastico di spessore 8 mm, una molla di una penna meccanica, e un elastico di spessore 2 mm:

m (massa)	l (lunghezza)	k
$(117 \pm 1) \text{ g}$	$(137.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(290 \pm 50) \text{ Nm}^{-1}$
$(135 \pm 1) \text{ g}$	$(129.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(220 \pm 30) \text{ Nm}^{-1}$
$(249 \pm 1) \text{ g}$	$(148.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(163 \pm 8) \text{ Nm}^{-1}$
$(387 \pm 1) \text{ g}$	$(159.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(146 \pm 4) \text{ Nm}^{-1}$
$(526 \pm 1) \text{ g}$	$(173.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(129 \pm 2) \text{ Nm}^{-1}$
$(623 \pm 1) \text{ g}$	$(183.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(122.2 \pm 1.7) \text{ Nm}^{-1}$

Tabella 2: Elastico 8 mm ($l_0 = 133.0 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$)

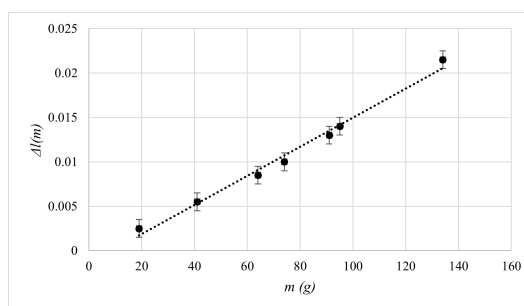
$$\sigma_k = 18 \text{ Nm}^{-1}$$

m (massa)	l (lunghezza)	k
$(19 \pm 1) \text{ g}$	$(25.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(400 \pm 500) \text{ Nm}^{-1}$
$(64 \pm 1) \text{ g}$	$(27.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(250 \pm 70) \text{ Nm}^{-1}$
$(91 \pm 1) \text{ g}$	$(28.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(260 \pm 50) \text{ Nm}^{-1}$
$(134 \pm 1) \text{ g}$	$(29.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(290 \pm 50) \text{ Nm}^{-1}$
$(181 \pm 1) \text{ g}$	$(31 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(300 \pm 30) \text{ Nm}^{-1}$
$(248 \pm 1) \text{ g}$	$(33 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(300 \pm 30) \text{ Nm}^{-1}$
$(387 \pm 1) \text{ g}$	$(37 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(316 \pm 18) \text{ Nm}^{-1}$
$(526 \pm 1) \text{ g}$	$(41.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(313 \pm 13) \text{ Nm}^{-1}$

Tabella 3: Molla ($l_0 = 25.0 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$)

$$\sigma_k = 160 \text{ Nm}^{-1}$$

m (massa)	l (lunghezza)	k
$(19 \pm 1) \text{ g}$	$(108.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(70 \pm 20) \text{ Nm}^{-1}$
$(41 \pm 1) \text{ g}$	$(111.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(73 \pm 9) \text{ Nm}^{-1}$
$(64 \pm 1) \text{ g}$	$(114.0 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(74 \pm 6) \text{ Nm}^{-1}$
$(74 \pm 1) \text{ g}$	$(115.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(73 \pm 5) \text{ Nm}^{-1}$
$(91 \pm 1) \text{ g}$	$(118.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(69 \pm 4) \text{ Nm}^{-1}$
$(95 \pm 1) \text{ g}$	$(119.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(67 \pm 3) \text{ Nm}^{-1}$
$(134 \pm 1) \text{ g}$	$(127 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(61 \pm 2) \text{ Nm}^{-1}$

Tabella 4: Elastico 2 mm ($l_0 = 105.5 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$)

$$\sigma_k = 5 \text{ Nm}^{-1}$$

Dall'analisi delle costanti elastiche si osserva che l'elastico con spessore di 2 mm è l'oggetto che meglio si comporta come una molla ideale.

Per questo motivo si utilizzerà l'elastico di spessore 2 mm come dinamometro per le misure successive e si considererà la sua costante elastica pari a $70 \text{ Nm}^{-1} \pm 5 \text{ Nm}^{-1}$.

Descrizione esperimento:

Data una superficie fissa, piana e parallela al terreno si posizionano due elastici con lunghezza a riposo e costante elastica note come in figura 2 con l'ausilio di filo di nylon inestensibile¹ e chiodi.

Si appende quindi un corpo di massa m_i ai due elastici e si misura la variazione di lunghezza di ciascun elastico. Dopo aver ripetuto le misure variando la massa si misurano gli angoli θ_A tra il primo elastico e la superficie piana e θ_B tra il secondo elastico e la superficie piana.

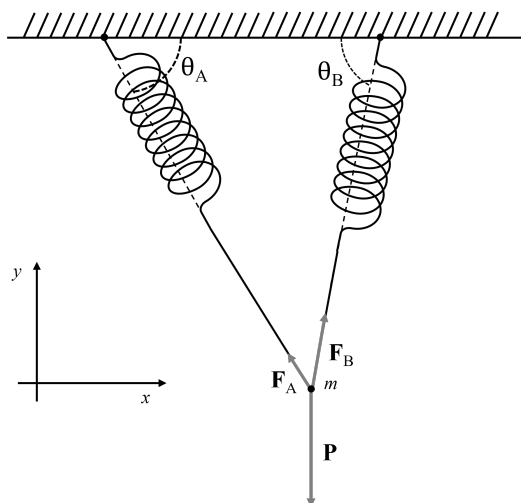


Figura 2: Configurazione sperimentale

¹Il filo si considera inestensibile in quanto, con lo stesso strumento utilizzato durante l'esperimento, non si apprezzano variazioni in lunghezza per tensioni inferiori ai 15 N

Misure ed elaborazione dati

$$\theta_A = 43^\circ$$

$$\theta_B = 76^\circ$$

$$l_{A_0} = l_{B_0} = 105.5 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm} = l_0$$

$$k_A = k_B = 70 \text{ Nm}^{-1} \pm 5 \text{ Nm}^{-1} = k$$

i	m_i	l_{A_i}	l_{B_i}
1	$(203 \pm 1) \text{ g}$	$(112.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(127.0 \pm 0.5) \text{ mm}$
2	$(178 \pm 1) \text{ g}$	$(110.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(125.5 \pm 0.5) \text{ mm}$
3	$(155 \pm 1) \text{ g}$	$(107.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(122.5 \pm 0.5) \text{ mm}$
4	$(247 \pm 1) \text{ g}$	$(115.5 \pm 0.5) \text{ mm}$	$(133.0 \pm 0.5) \text{ mm}$

Tabella 5: Misure rilevate

Si osserva che il corpo è inizialmente in quiete e rimane in quiete.

Dunque, per il secondo principio della dinamica, la somma delle forze agenti sul corpo è nulla.

In particolare:

$$\begin{cases} x : & \mathbf{F}_{A_x} + \mathbf{F}_{B_x} = 0 \\ y : & \mathbf{F}_{A_y} + \mathbf{F}_{B_y} + \mathbf{P} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x : & F_{B_x} - F_{A_x} = 0 \\ y : & F_{A_y} + F_{B_y} - m_i g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x : & F_B \cos \theta_B - F_A \cos \theta_A = 0 \\ y : & F_A \sin \theta_A + F_B \sin \theta_B - m_i g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x : & k(l_{B_i} - l_0) \cos \theta_B - k(l_{A_i} - l_0) \cos \theta_A = 0 \\ y : & k(l_{A_i} - l_0) \sin \theta_A + k(l_{B_i} - l_0) \sin \theta_B - m_i g = 0 \end{cases}$$

i	$\mathbf{F}_{A_x} + \mathbf{F}_{B_x}$	$\mathbf{F}_{A_y} + \mathbf{F}_{B_y} + \mathbf{P}$
1	$-(0.01 \pm 0.08) \text{ N}$	$(0.2 \pm 0.3) \text{ N}$
2	$-(0.08 \pm 0.08) \text{ N}$	$(0.1 \pm 0.2) \text{ N}$
3	$-(0.19 \pm 0.09) \text{ N}$	$(0.3 \pm 0.2) \text{ N}$
4	$(0.05 \pm 0.09) \text{ N}$	$(0.1 \pm 0.3) \text{ N}$

Tabella 6: Risultati

Conclusione

Dalle misurazioni effettuate si osserva che, in accordo con i principi della dinamica, la somma delle forze agenti sul corpo non è apprezzabile dagli strumenti di misura utilizzati.

In particolare si osserva che la somma delle forze in direzione x agenti sul corpo è mediamente pari a $-0.06 \text{ N} \pm 0.09 \text{ N}$, mentre in direzione y è mediamente pari a $0.2 \text{ N} \pm 0.3 \text{ N}$.

Si ipotizza che la differenza tra la precisione delle due misure sia dovuta al fatto che nella sola direzione y si confrontano forze di diversa natura (forza peso e forze elastiche).

Da questa osservazione si può dedurre che la forza elastica analizzata non abbia una dipendenza perfettamente lineare con l'allungamento del corpo elastico e che questo fattore è meno evidente quando si confrontano due forze elastiche date da allungamenti paragonabili di elastici simili.

A Propagazione dell'errore di misura

Errore di misura per il calcolo della costante elastica:

$$k_i = f(m_i, l_i, l_0) = \frac{m_i g}{l_i - l_0}$$

$$\Delta k_i = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial f}{\partial m}\right|_{m_i, l_i, l_0} \Delta m\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{m_i, l_i, l_0} \Delta l\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial f}{\partial l_0}\right|_{m_i, l_i, l_0} \Delta l_0\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{g}{l_i - l_0} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{gm_i}{-(l_i - l_0)^2} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{gm_i}{(l_i - l_0)^2} \Delta l_0\right)^2}$$

Errore di misura per il calcolo della forza risultante in direzione x:

$$F_{x_i} = f(k, l_0, \theta_A, \theta_B, l_{A_i}, l_{B_i}) = k(l_{B_i} - l_0) \cos \theta_B - k(l_{A_i} - l_0) \cos \theta_A$$

$$\Delta F_{x_i} = \left|\frac{\partial f}{\partial k} \Delta k\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial l_0} \Delta l_0\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \theta_A} \Delta \theta_A\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \theta_B} \Delta \theta_B\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial l_{A_i}} \Delta l_{A_i}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial l_{B_i}} \Delta l_{B_i}\right| =$$

$$|(l_{B_i} - l_0) \cos \theta_B - (l_{A_i} - l_0) \cos \theta_A| \Delta k + |-k \cos \theta_B + k \cos \theta_A| \Delta l_0 + |k(l_{A_i} - l_0) \sin \theta_A| \Delta \theta_A +$$

$$|-k(l_{B_i} - l_0) \sin \theta_B| \Delta \theta_B + |-k \cos \theta_A| \Delta l_{A_i} + |k \cos \theta_B| \Delta l_{B_i}$$

Errore di misura per il calcolo della forza risultante in direzione y:

$$F_{y_i} = f(k, l_0, \theta_A, \theta_B, l_{A_i}, l_{B_i}, m_i) = k(l_{A_i} - l_0) \sin \theta_A + k(l_{B_i} - l_0) \sin \theta_B - m_i g$$

$$\Delta F_{y_i} = \left|\frac{\partial f}{\partial k} \Delta k\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial l_0} \Delta l_0\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \theta_A} \Delta \theta_A\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \theta_B} \Delta \theta_B\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial l_{A_i}} \Delta l_{A_i}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial l_{B_i}} \Delta l_{B_i}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial m} \Delta m\right| =$$

$$|(l_{A_i} - l_0) \sin \theta_A + (l_{B_i} - l_0) \sin \theta_B| \Delta k + |(-k \sin \theta_A - k \sin \theta_B)| \Delta l_0 + |k(l_{A_i} - l_0) \cos \theta_A| \Delta \theta_A +$$

$$|k(l_{B_i} - l_0) \cos \theta_B| \Delta \theta_B + |k \sin \theta_A| \Delta l_{A_i} + |k \sin \theta_B| \Delta l_{B_i} + |-g| \Delta m$$