

Relazione sulla verifica sperimentale delle condizioni di equilibrio meccanico

27 marzo 2024

Introduzione

L'obiettivo di questo esperimento è quello di verificare le condizioni di equilibrio meccanico di un corpo tramite la misura delle forze agenti su di esso. In particolare, per misurare le forze, si utilizzerà un dinamometro precedentemente calibrato.

Materiali e strumenti

Materiali

- Pile (utilizzati come corpi massivi)
- Filo di nylon inestensibile
- Recipiente in plastica
- Chiodi
- Elastici (spessore di circa 2mm)
- Elastici (spessore di circa 8mm)
- Molle di penna a sfera meccanica

Strumenti

| Strumento | Sensibilità | Portata |
|-------------------|-------------|---------|
| Righello | 0.5 mm | 20 cm |
| Bilancia digitale | 1 g | 2 Kg |
| Goniometro | 1° | 180° |

Tabella 1: Strumenti utilizzati

Descrizione

Verifica e calibrazione del dinamometro:

Poiché non si ha a disposizione un dinamometro calibrato, si è deciso di utilizzare un oggetto elastico.

Dunque è necessario avere una molla o un corpo elastico di cui si conosce la costante elastica k così da poter misurare la forza che agisce su di esso tramite la misurazione diretta dell'allungamento in accordo con la legge di Hooke.

Poiché non tutti gli oggetti elastici seguono la legge di Hooke, è necessario verificare che gli oggetti scelti abbiano un comportamento simile a quello di una molla ideale.

Per eseguire questa verifica si misura l'allungamento di un oggetto elastico al variare della massa ad esso applicata.

Si posiziona quindi l'oggetto elastico, con l'ausilio del filo di nylon, come in figura 1 e si annota la lunghezza dell'oggetto in tensione variando la massa applicata, precedentemente misurata con la bilancia digitale.

Si misura quindi la lunghezza dell'oggetto elastico a riposo.

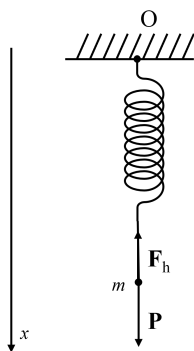


Figura 1: Configurazione sperimentale per la verifica del comportamento elastico dell'oggetto.

Elaborazione misure per la verifica del dinamometro:

Data la configurazione rappresentata in figura 1, si osserva che il corpo è in quiete. Dunque per i principi della dinamica, la somma delle forze agenti sul corpo è nulla:

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_h = 0 \quad \Rightarrow \quad mg - k(l - l_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta l}$$

Si riportano le misure effettuate per una elastico di spessore 8 mm , una molla di una penna meccanica, e un elastico di spessore 2 mm :

| m (massa) | l (lunghezza) | k |
|------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| $(117 \pm 1)\text{ g}$ | $(137.0 \pm 0.5)\text{ mm}$ | $(290 \pm 70)\text{ Nm}^{-1}$ |
| $(135 \pm 1)\text{ g}$ | $(129.0 \pm 0.5)\text{ mm}$ | $(220 \pm 40)\text{ Nm}^{-1}$ |
| $(249 \pm 1)\text{ g}$ | $(148.0 \pm 0.5)\text{ mm}$ | $(163 \pm 11)\text{ Nm}^{-1}$ |
| $(387 \pm 1)\text{ g}$ | $(159.0 \pm 0.5)\text{ mm}$ | $(146 \pm 6)\text{ Nm}^{-1}$ |
| $(526 \pm 1)\text{ g}$ | $(173.0 \pm 0.5)\text{ mm}$ | $(129 \pm 3)\text{ Nm}^{-1}$ |
| $(623 \pm 1)\text{ g}$ | $(183.0 \pm 0.5)\text{ mm}$ | $(122 \pm 2)\text{ Nm}^{-1}$ |

Tabella 2: Elastico 8 mm ($l_0 = 133\text{ mm} \pm 0.5\text{ mm}$)

Misure ed elaborazione dati

| i | d_i (diametro) | c_i (circonferenza) |
|-----|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 37.0 mm \pm 0.5 mm | 116 mm \pm 1 mm |
| 2 | 54.0 mm \pm 0.5 mm | 171 mm \pm 1 mm |
| 3 | 61.0 mm \pm 0.5 mm | 192 mm \pm 1 mm |
| 4 | 70.5 mm \pm 0.5 mm | 218 mm \pm 1 mm |
| 5 | 85.5 mm \pm 0.5 mm | 271 mm \pm 1 mm |
| 6 | 89.5 mm \pm 0.5 mm | 279 mm \pm 1 mm |
| 7 | 104.5 mm \pm 0.5 mm | 325 mm \pm 1 mm |
| 8 | 134.0 mm \pm 0.5 mm | 408 mm \pm 1 mm |
| 9 | 149.5 mm \pm 0.5 mm | 466 mm \pm 1 mm |
| 10 | 151.0 mm \pm 0.5 mm | 476 mm \pm 1 mm |
| 11 | 167.5 mm \pm 0.5 mm | 531 mm \pm 1 mm |
| 12 | 198.5 mm \pm 0.5 mm | 625 mm \pm 1 mm |
| 13 | 211.0 mm \pm 0.5 mm | 660 mm \pm 1 mm |
| 14 | 220.0 mm \pm 0.5 mm | 688 mm \pm 1 mm |
| 15 | 293.5 mm \pm 0.5 mm | 911 mm \pm 1 mm |

Tabella 3: Misure rilevate

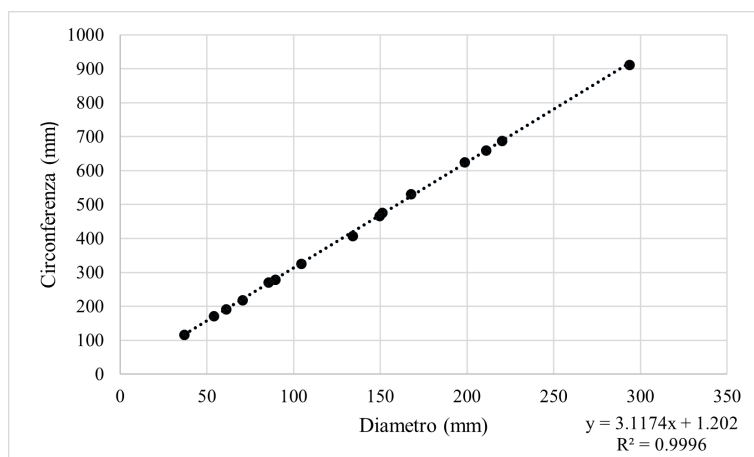


Grafico 1: Relazione tra circonferenza e diametro

Detto $n = 15$ il numero di misurazioni effettuate si ha che:

$$\bar{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{d_i} = 3.128$$

$$\text{Dati} \quad \bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i = 422 \text{ mm} \quad \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = 135.1 \text{ mm}$$

si considera la funzione $f(c, d) = \frac{c}{d}$; dunque, tramite analisi della propagazione dell'errore di misura, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= \sqrt{\left(\left|\frac{\partial f(c, d)}{\partial c}\right|_{\bar{c}, \bar{d}} \Delta c\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial f(c, d)}{\partial d}\right|_{\bar{c}, \bar{d}} \Delta d\right)^2} = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial \frac{c}{d}}{\partial c}\right|_{\bar{c}, \bar{d}} \Delta c\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial \frac{c}{d}}{\partial d}\right|_{\bar{c}, \bar{d}} \Delta d\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{d}} \Delta c\right)^2 + \left(-\frac{\bar{c}}{(\bar{d})^2} \Delta d\right)^2} = 0.014 \end{aligned}$$

Si riportano anche i valori di semidispersione, deviazione standard e coefficiente di correlazione lineare quadratico:

$$\frac{\pi_{max} - \pi_{min}}{2} = 0.06$$

$$\sigma_{\pi} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\pi} - \pi_i)^2} = 0.03$$

$$R^2 = 0.9996$$

Conclusione

Dalle misurazioni effettuate segue che la costante matematica del π risulta essere pari a 3.128 ± 0.014 .

Si nota che il valore esatto $\pi \approx 3.14159 \dots$ rientra nell'intervallo $(\bar{\pi} - \Delta\pi; \bar{\pi} + \Delta\pi)$.

Infine si ipotizza che il valore misurato sia inferiore al valore esatto a causa di un errore sistematico nella misurazione della circonferenza dovuta all'approssimazione di brevi archi di circonferenza con corde.¹

¹ Per questo motivo l'incertezza sulla misura della circonferenza risulta diversa rispetto all'incertezza sulla misura del diametro nonostante gli strumenti utilizzati per entrambe le misure siano i medesimi