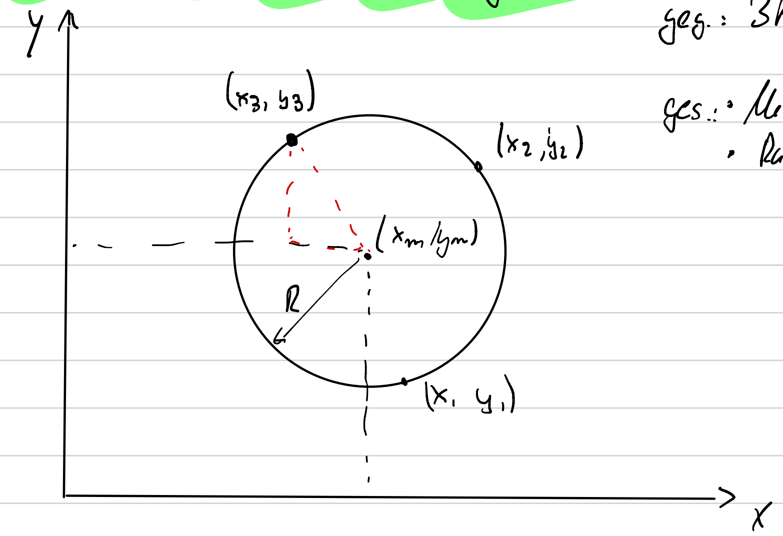
Das Kreisproblem | Vorlesung 1

gég.: 3 Punkte (x_i, y_i)

ges.: • Mittelpunkt (x_m, y_m)
• Radius R



Vorgehensweise:

- Aufstellen der Gleichungen
- Programmierung
- Austesten

Kreisgleichung:

$$(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2 = R^2$$
$$(x_2 - x_m)^2 + (y_2 - y_m)^2 = R^2$$
$$(x_3 - x_m)^2 + (y_3 - y_m)^2 = R^2$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_m + x_m^2 + y_1^2 - 2y_1 y_m + y_m^2 = R^2$$
$$x_2^2 - 2x_2 x_m + x_m^2 + y_2^2 - 2y_2 y_m + y_m^2 = R^2$$

$$\overset{=\bar{x}_{12q}}{(x_1^2 - x_2^2)} - 2x_m \overset{\bar{x}_{12}}{(x_1 - x_2)} + \overset{\bar{y}_{12}}{(y_1^2 - y_2^2)} - 2y_m \overset{\bar{y}_{12}}{(y_1 - y_2)} = 0$$

$$\underset{\bar{x}_{13}}{(x_1^2 - x_3^2)} - 2x_m \underset{\bar{x}_{13}}{(x_1 - x_3)} + \underset{\bar{y}_{13q}}{(y_1^2 - y_3^2)} - 2y_m \underset{\bar{y}_{13}}{(y_1 - y_3)} = 0$$

$$\bar{x}_{12q} - 2\bar{x}_{12} x_m + \bar{y}_{12q} - 2\bar{y}_{12} \cdot y_m = 0$$

$$\bar{x}_{13q} - 2\bar{x}_{13} x_m + \bar{y}_{13q} - 2\bar{y}_{13} \cdot y_m = 0$$

$$\Rightarrow y_m = \frac{-\bar{x}_{12q} + 2\bar{x}_{12} x_m - \bar{y}_{12q}}{-2\bar{y}_{12}}$$

analog: $y_m = \dfrac{-\bar{x}_{13q} - 2\bar{x}_{13} x_m - \bar{y}_{13q}}{-2y_{13}}$

$$\frac{-\bar{x}_{12q} + 2\bar{x}_{12} x_m - \bar{y}_{12q}}{-2\bar{y}_{12}} - \frac{-\bar{x}_{13q} - 2\bar{x}_{13} x_m - \bar{y}_{13q}}{-2\bar{y}_{13}} = 0$$

$$x_m \underbrace{\left(\frac{-x_{12q}}{y_{12}} - \frac{x_{13q}}{\bar{y}_{13}} \right)} = \underbrace{\frac{\bar{x}_{12q} + \bar{y}_{12q}}{2\bar{y}_{12}} - \frac{\bar{x}_{13q} + \bar{y}_{13q}}{2\bar{y}_{13}}}$$

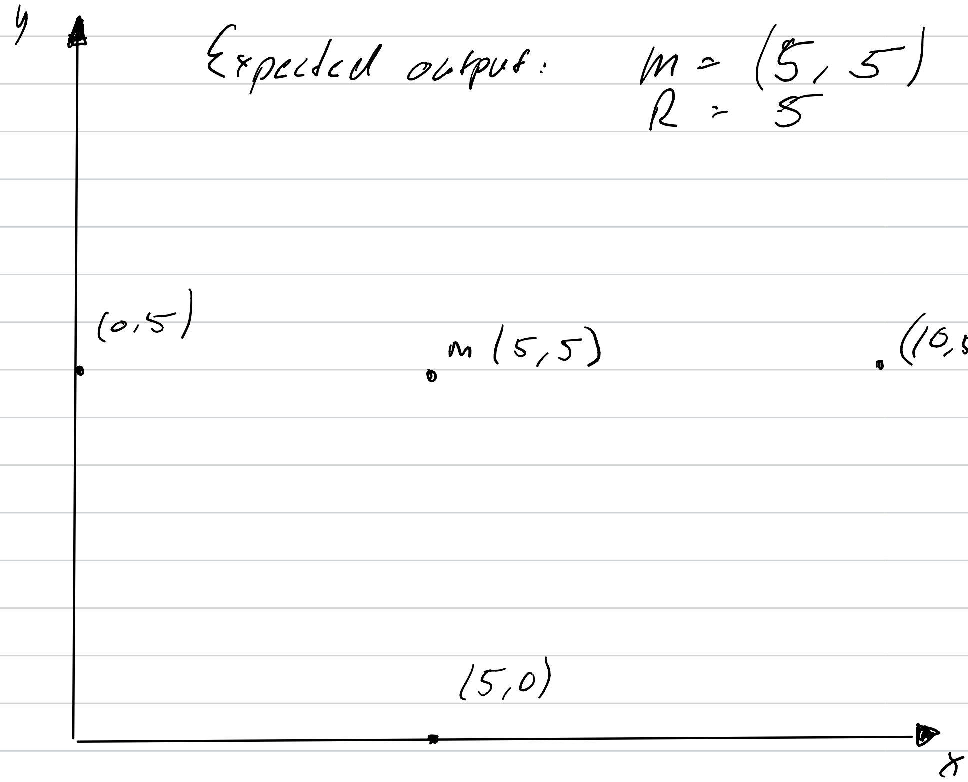
$$x_m = b/a$$

1. Reihenfolge: (5,0), (0,5), (10,5)

(0,5), (5,0), (10,5)

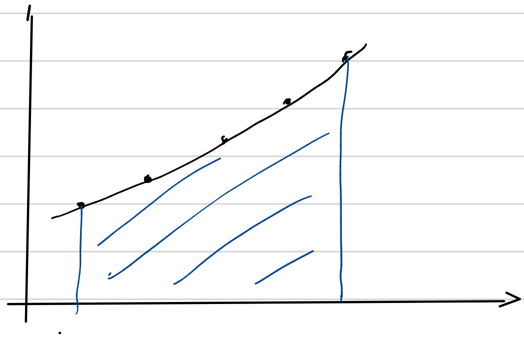
Expected output: $m = (5,5)$

$R = 5$



Numerische Integration

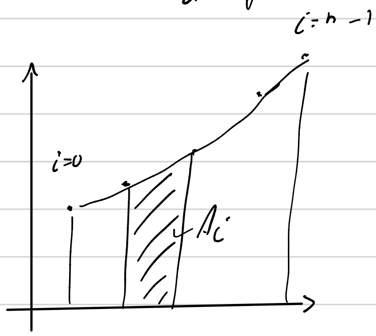
Problem:



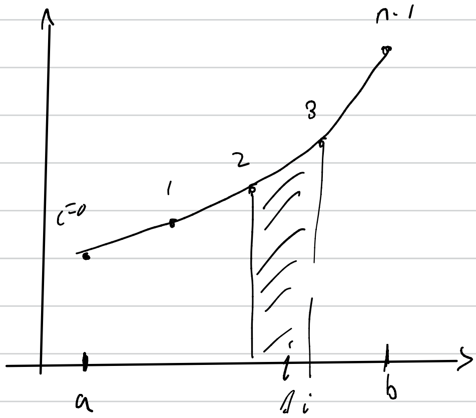
- entweder sind n Aufpunkte gegeben
- oder Aufpunkte einer Funktion $f(x)$ z.B. $f(x) = (\cos x)^{e^{x^2}}$

-> gesucht: $A = \int_a^b f(x)\,dx$

Lösung:



$$A = \sum_i A_i$$



Trapezregel:

$$A_i = (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2}$$

$$A = \sum_{i=1}^{i=n-1} (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2}$$

Austesten: $f(x) = x^2$

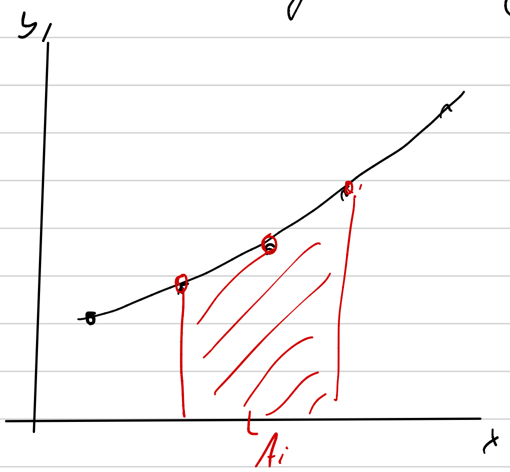
$x_{n-1} = 7$

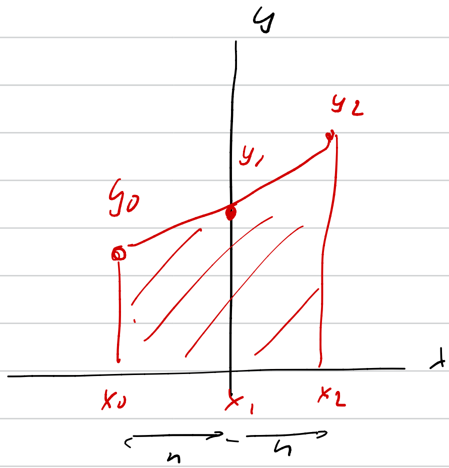
$x_0 = -5$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|^7 = 156$$

Die Simpson Integration

- dient der Verbesserung der numerischen Genauigkeit
- Prinzip: es werden jeweils durch drei Aufpunkte eine Parabel gelegt und dann die Integration ausgeführt





Gliederung der Parabel: $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Aufstellen des Gl. Systems

$$y_0 = a_2 h^2 - a_1 h + a_0 \quad (1) \qquad (\mathrm{I})$$

$$y_1 = a_0 \quad (2) \qquad (\mathrm{II})$$

$$y_2 = a_2 h^2 + a_1 \cdot h + a_0 \quad (3) \qquad (\mathrm{III})$$

$$a_0 = y_1$$

$\mathrm{I} + \mathrm{III}$: $y_0 + y_2 = 2a_2 h^2 + 2y_1$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2h^2}(y_0 + y_2) - \frac{y_1}{h^2}$$

$\rightarrow a_1$ wird nicht benötigt

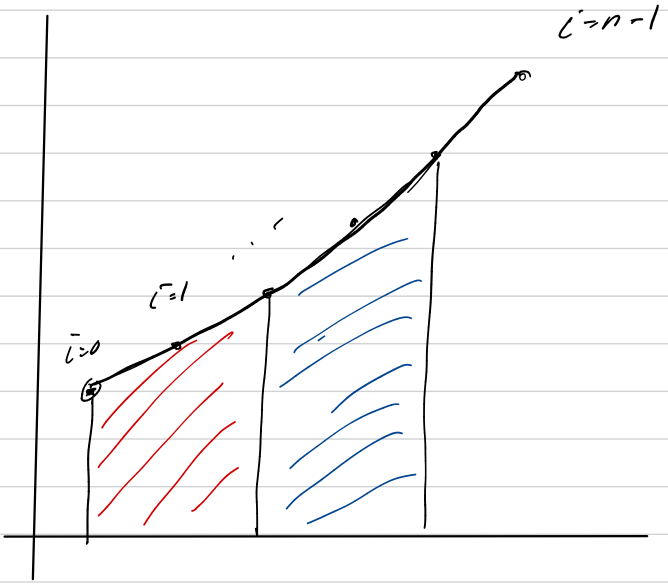
$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \int_{x_0=-h}^{x_2=+h} (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\,dx = a_2 \frac{x^3}{3}\Big|_{-h}^{h} + \cancel{a_1 \frac{x^2}{2}\Big|_{-h}^{h}} + a_0 x\Big|_{-h}^{h}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{2}{3} a_2 h^3 + 2a_0 h$$

Koeff einsetzen:

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2y_1 h$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



$$A_{0-2} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$A_{2-4} = \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$A_{n-3-n-1} = \frac{h}{3}\left(y_{n-3} + 4y_{n-2} + y_{n-1}\right)$$

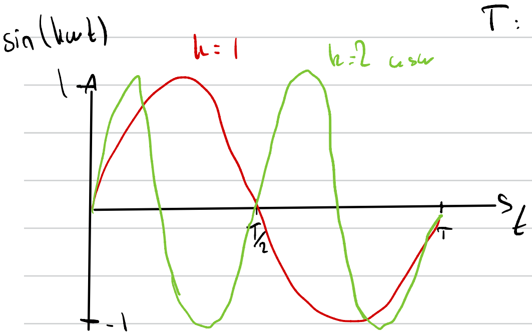
$\sum A$ Simpson Regel

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_{n-1}} y\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sum_{i=1}^{n-2} y_i + 2\sum_{i=2}^{n-3} y_i + y_{n-1}\right)}$$

Die Fourieranalyse

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\, dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ Kreisfrequenz}$$

T: Schwingungsdauer

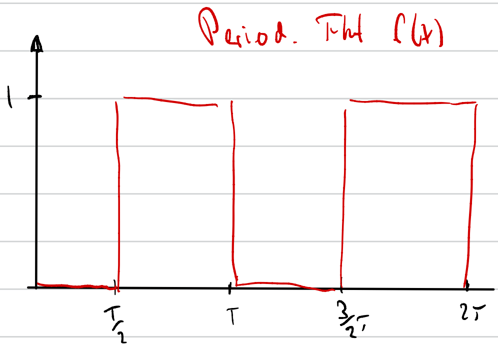


Orth. Beziehungen:

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(m\omega t)\, dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(m\omega t)\, dt \begin{cases} \frac{T}{2} & m = k \\ 0 & \neq k \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(m\omega t)\, dt = 0$$



Approx von $f(t)$ durch

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Annahme: Es gibt einen Satz von Koeffizienten a_k und b_k $(k=1 \dots \infty)$ sowie a_0, mit denen $f(t)$ approx. werden kann.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \qquad | \cdot \sin(m\omega t)$$

$$\int_0^T f(t)\cdot \sin(m\omega t) = \int_0^T \frac{a_0}{2} \sin(m\omega t)\, dt + \int_0^T \left(\sum a_k \cos(k\omega t)\cdot \sin(m\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\sin(m\omega t)\right) dt$$

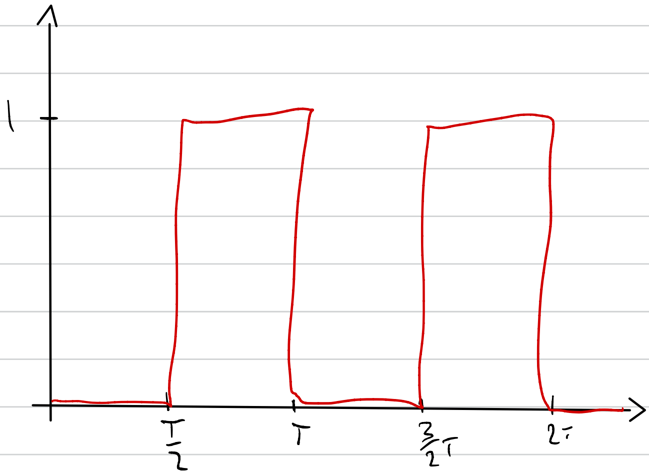
$$\int_0^T f(t)\cdot \sin(m\omega t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_0^T \cos(k\omega t)\sin(m\omega t)\, dt + b_k \int_0^T \sin(k\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\, dt \right]$$

$$\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k \int_0^T \sin(k\omega t)\cdot \sin(m\omega t)\, dt \right] = b_m \frac{T}{2}$$

$m = k$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\omega t)\, dt$$

Index wechsel $m \to k$ $\qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\, dt \qquad k = 1, 2, 3, \dots, \infty$



$$f(t) = \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt$$

$$k=0 \qquad a_0 = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T} dt = \frac{2}{T}\left(T - \frac{T}{2}\right) = 1$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_{T/2}^{0} \cos(k\omega t)\, dt = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{k\omega} \sin(k\omega t)\right]_{T/2}^{T} = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T} \sin(k\omega t)\, dt = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{k\omega}\left(-\cos(k\omega t)\right)\right]_{T/2}^{T}$$

$$b_k = -\frac{2}{Tk\omega}\left[\cos(k\omega t)\right]_{T/2}^{T} \underset{k=1}{=} -\frac{2}{Tk\omega}\left[1 - (-1)\right] = -\frac{4}{Tk\omega}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{Tk\omega} \sin(k\omega t) \qquad k = 1, 3, 5, \ldots$$

Lösen von linearen Gleichungssystemen

Viele Probleme in der Numerik beinhalten das Lösen eines linearen, algebraischen Gleichungssystems

$$a_{11} x_1 + a_{11} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = R_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = R_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = R_n$$

oder in Matrixform geschrieben:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

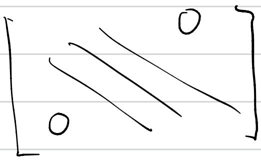
Koeffizientenmatrix   Lösungsvektor   Rechte Seite

↳ $A \cdot \vec{x} = \vec{R}$

Ein Gleichungssystem heißt diagonaldominant, wenn

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad i = 1..n$$

Ein Gleichungssystem heißt tridiagonal, wenn



Gleichungssystem lösen → Gleichungen miteinander kombinieren ①
→ iterativ ②

zu ①: Gauß ; Thomas

zu ②: Gauß Seidel Algorithmus

zu ① Gauß Algorithmus

Ziel: Erzeugen einer Dreiecksmatrix → Quasi Scientific Computing

Anwendung: Für vollbesetzte Matrizen

Nachteil: Rechenzeit $\sim n^3$ → $O(n) = n^3$

↳ Anwendbar bis ca. 400 Gl. → Dann Rundungsfehler zu groß

→ Programmcode → Ende Video 3

zu ② Gauß Seidel Algorithmus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\Big(R_1 - \sum_{j\neq 1} a_{1j} x_j\Big) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\Big(R_2 - \sum_{j\neq 2} a_{2j} x_j\Big) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\Big(R_n - \sum_{j\neq n} a_{nj} x_j\Big) \end{aligned}$$

Man schätzt willkürlich einen Lösungsvektor

z.B. $\vec{x} = (0 \dots 0)^T$

Man gelangt zu einem besseren Schätzwert durch

$$x_k^{\beta+1} = \frac{1}{a_{kk}}\Big(R_k - \sum_{j\neq k} a_{kj} x_j\Big) \qquad k = 1 \dots n$$

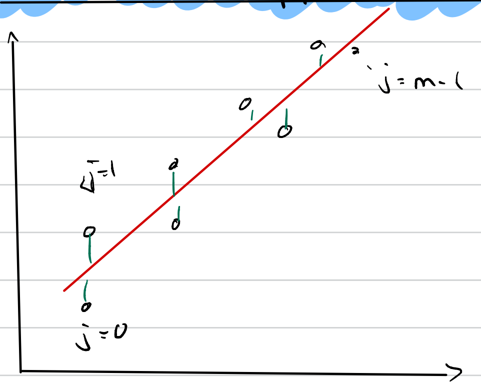
β → Iterationsindex

Hinreichende Bedingung (für Konvergenz)

$$|a_{kk}| \geq \sum_{k\neq j} |a_{kj}|$$

Wenn Gleichungssystem diagonal-dominant ist, konvergiert der Algorithmus gegen die Lösung des Gleichungssystems.

Least square approximation



m Aufpunkte

$$y = a_0 + a_n x^1 + a_n x^2 + \dots a_n x^n$$

Koeffizienten $a_0 \dots a_n$ sollen so bestimmt werden, dass:

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\bar{y}_j - y_j)^2 = \text{minimum}$$

Vorgehensweise: Der Ausdruck wird als Funktion der Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ aufgefasst

$$F(a_0, \dots, a_n) = \sum_{j=0}^{m-1} (\bar{y}_j - y_j)^2 \rightarrow \text{Bestimmung des Extremwertes}$$

Notwendige Bedingung für einen Extremwert

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} \equiv 0 \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} \equiv 0 \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial a_n} \equiv 0 \qquad k = 0 \dots n$$

$$F(a_0, \dots, a_n) = \sum_{j=0}^{m-1} (\bar{y}_j - y_j)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 2 \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (\bar{y}_j - y_j) \frac{\partial y_i}{\partial a_k} = 0 \qquad k = 0 \dots n$$

$$y_i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \Rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \left(\hat{y}_j - \sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i\right) x_j^k \equiv 0$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i x_j^k\right) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{y}_j x_j^k$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i x_j^k \right) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{y}_j x_j^k$$

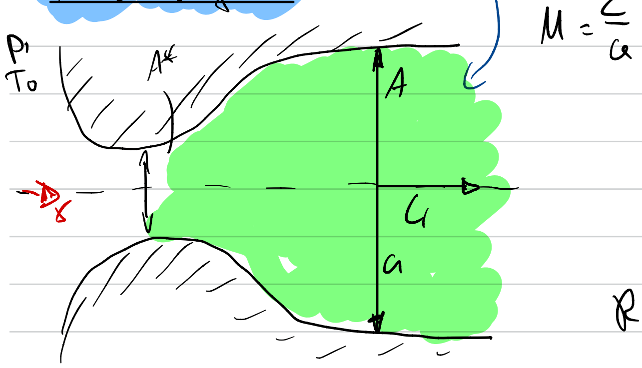
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m-1} a_i x_j^i x_j^k \right) = \sum_{j}^{m-1} \bar{y}_j x^k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \sum_{j=0}^{m-1} x_j^i x_j^k \right) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{y}_j x_j^k \qquad k = 0..n$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{m-1} x_j^0 x_j^0 & \sum_{j=0}^{m-1} x_j^1 x_j^0 & \dots & \sum_{j=0} x_j^n x_j^0 \\ \sum_{j=0} x_j^0 x_j^1 & \sum_{j=0}^{m-1} x_j^1 x_j^1 & \dots & \sum_j x_j^n x_j^1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_j x_j^0 x_j^n & \sum_j x_j^1 x_j^n & & \sum_j x_j^n x_j^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{m-n} \bar{y}_j x_j^0 \\ \sum_j \bar{y}_j x_j^1 \\ \vdots \\ \sum_j^{m-1} y_i x_j^n \end{bmatrix}$$

↳ Restliche Berechnung via Gauss (Seidel) z.B.

Newton Verfahren



$M = \frac{c}{a}$ Mach-Zahl

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\left(M^2 - 1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}$$

κ – Isentropenexponent

$$\kappa = 1.4 \qquad \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[1 + \frac{1}{6}\left(M - 1\right)^2\right]^3$$

↳ Muss iterativ gelöst werden

Newton Verfahren -> Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle

$$\frac{A}{A^*} - \frac{1}{M}\left[1 + \frac{1}{6}\left(M^2 - 1\right)\right]^3 \qquad \kappa = 1{,}4$$

Taylorreihenentwicklung $\quad F(M) = \frac{A}{A^*} - \frac{1}{M}\left[1 + \frac{1}{6}\left(M^2 - 1\right)\right]^3$

$$F(M + \Delta M) = F(M) + \frac{\partial F}{\partial M}\Delta M + \text{höhere Glieder} \stackrel{!}{=} 0$$

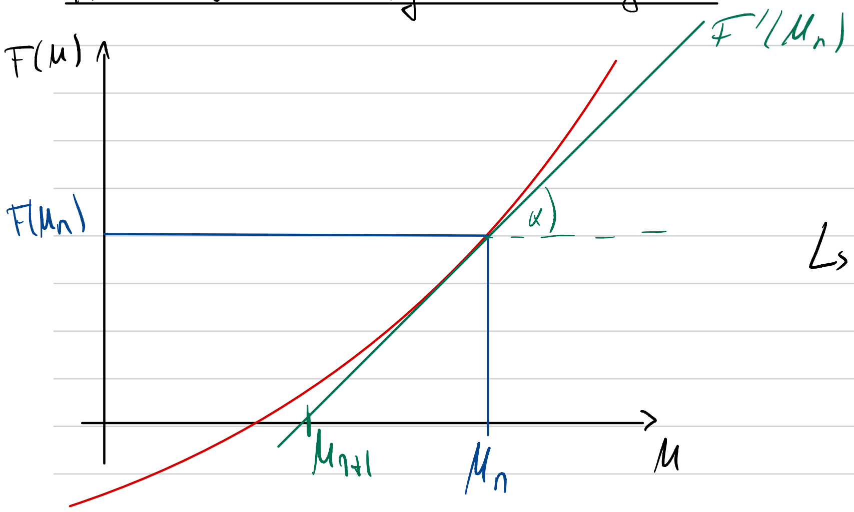
$$\Rightarrow \Delta M = -\frac{F(M)}{F'(M)} \qquad \underbrace{M_{n+1} - M_n}_{\Delta M} = -\frac{F(M)}{F'(M)}$$

$$\boxed{M_{n+1} = M_n - \frac{F(M_n)}{F'(M_n)}}$$

Formel für das Newtonverfahren

Iteratives Schätzen eines besseren Schätzwertes

Anschauliche Erklärung Newton Verfahren



Es gilt: $\tan(\alpha) = \frac{F(M_n)}{M_n - M_{n+1}} = F'(M_n)$

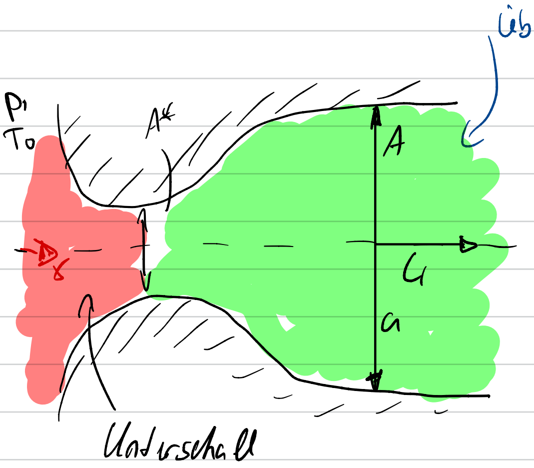
$$↳ M_{n+1} = M_n - \frac{F(M_n)}{F'(M_n)}$$

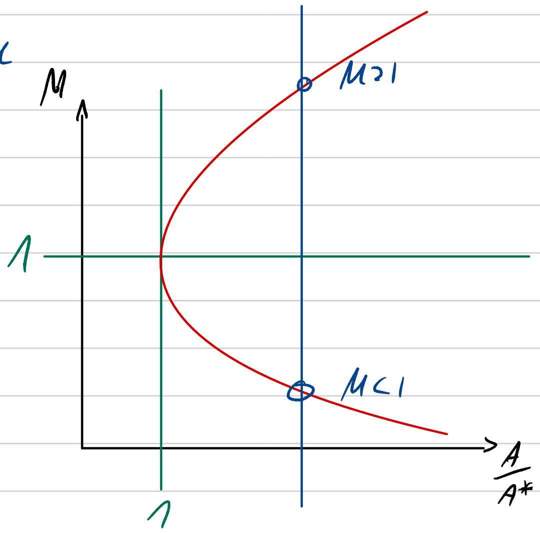
Anwendung bei einer Laval Düse

$$F(M) = \frac{A}{A^*} - \frac{1}{M}\left(1 + \frac{1}{6}\left(M^2 - 1\right)\right)^3$$

$$F'(M) = -\left(-\frac{1}{M^2}\left(1 + \frac{1}{6}\left(M^3 - 1\right)\right)^3 + \frac{1}{M}\, 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\left(M^3 - 1\right)\right)^2 \frac{1}{3} M\right)$$

$$F'(M) = \left(1 + \frac{1}{6}\left(M^3 - 1\right)\right)^2 \left(\frac{1}{M^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\left(M^3 - 1\right)\right) - 1\right)$$





$M<1$ $\qquad$ $M>1$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[1 + \frac{1}{6}\left(M^2 - 1\right)\right]^3$$

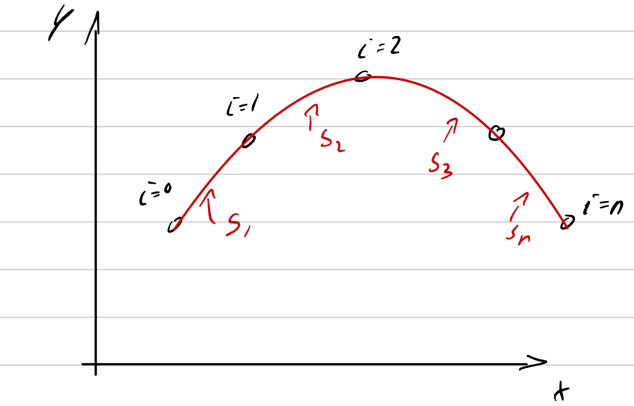
Programm: Abfrage Überschall – Unterschall

Startwert generieren, der als Anfangslösung für das Newton Verfahren verwendet wird

Die Spline Funktion

→ Es gibt mehrere Arten von Spline Funktionen, z.B. kubischen Spline, Bezier Spline und B-Spline

Problem:



n+1 Aufpunkte

gegeben sind i (x_i, y_i)

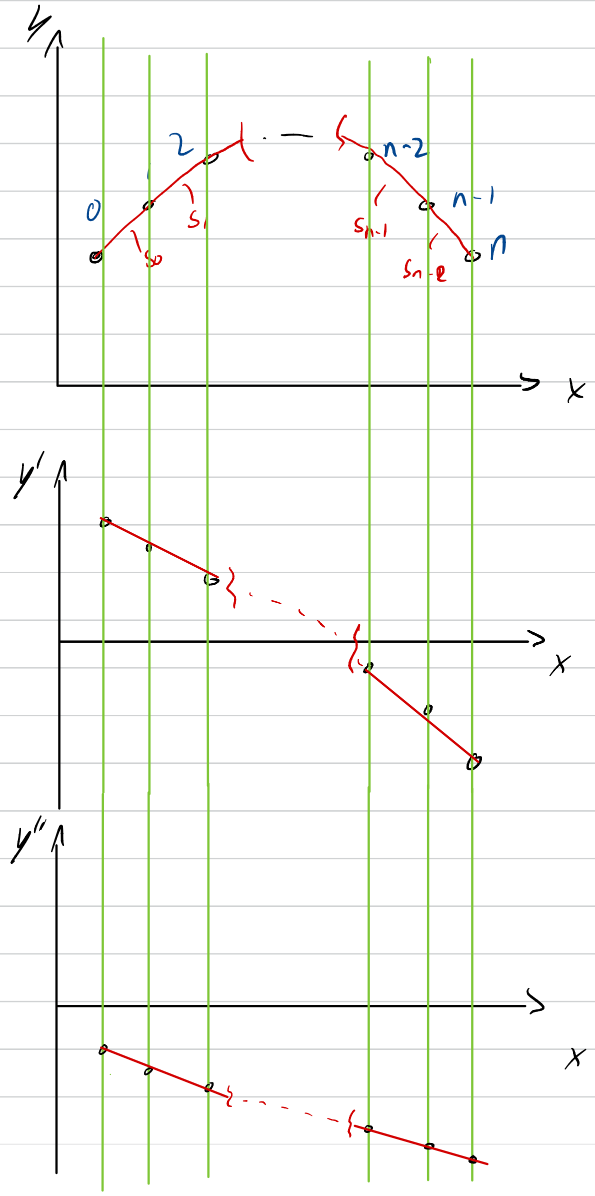
$i = 0, \dots, n$

gesucht sind S_i für die Intervalle $[x_i; x_{i+1}]$
$i = 0, \dots, n-1$

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$$

gefordert: erste + zweite Ableitung soll stetig sein



Für S_i im Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ gilt:

$$S_i(x) = a_i(x_i - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

Einführung einer Abkürzung

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

nun gilt:

$$S_i(x_i) = d_i \quad (1)$$

$$S_i(x_{i+1}) = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad (2)$$

$$S_i'(x_i) = c_i \quad (3)$$

$$S_i'(x_{i+1}) = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i \quad (4)$$

$$S_i''(x_i) = 2b_i \quad (5)$$

$$S_i''(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2b_i \quad (6)$$

Gleichungen oben umstellen nach a_i, b_i, c_i, d_i und $S^*(x_{i+})$ als Unbekannte betrachten -> Ziel Bestimmung von a_i, b_i, c_i, d_i

$$a_i = \frac{1}{6h_i}\left(y''_{i+1} - y''_i\right) \qquad (8)$$

$$b_i = \frac{y''_i}{2}$$

unbekannt

$$c_i = (y_{i+1} - y_i)\frac{1}{h_i} - a_i h_i^2 - b_i h_i$$

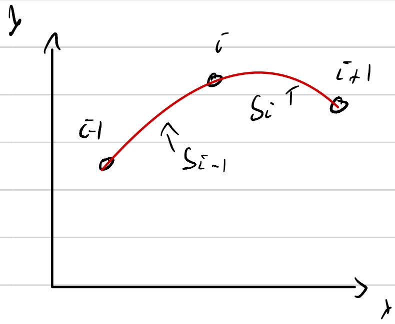
$$= (y_{i+1} - y_i)\frac{1}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(y''_{i+1} - y''_i\right) - y''_i \frac{h_i}{2}$$

$$= \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6}\left(y''_{i+1} - 2y''_i\right)$$

bekannt unbekannt

$$d_i = y_i$$

bekannt



$$S_i'(x_{i+1}) = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{6}h_i\left(2y''_{i+1} + y''_i\right)$$

Wechsel des Index:

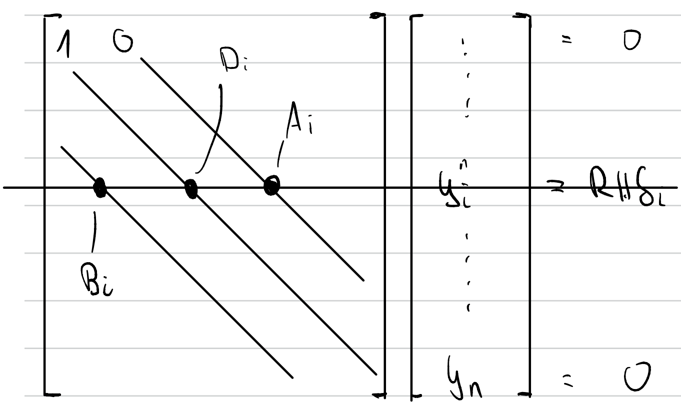
$$S'_{i-1}(x_i) \equiv S'_i(x_i) = c_i$$

$i = 1, \dots, n-2$

$$\frac{1}{h_i}(y_i - y_{i-1}) + \frac{1}{6}h_{i-1}\left(2y''_i - y''_{i-1}\right) = \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_i}{6}\left(y''_{i+1} + 2y''_i\right)$$

$$\underbrace{h_{i-1}}_{A_{i-1}} y''_{i-1} + 2\underbrace{(h_{i-1} + h_i)}_{D_i} y''_i + \underbrace{h_i}_{A_i} y''_{i+1} = \underbrace{\frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})}_{RHS_i}$$

für $i = 1, \dots, n-1$



<u>Vorgehensweise zum Lösen</u>

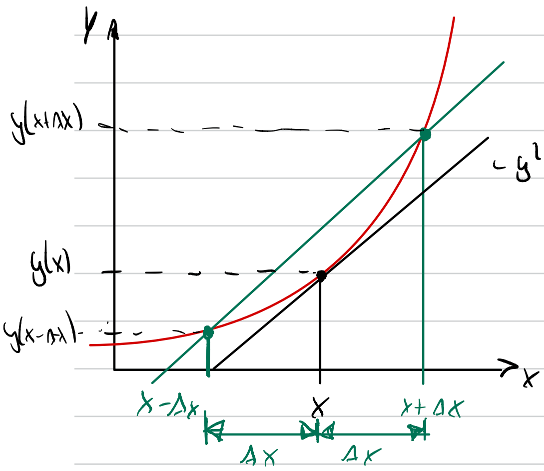
- Berechnung der y''_i mit Thomas Algo
- Berechnung a_i, b_i, c_i, d_i
- Berechnung des Spline Wertes

Das Differenzenverfahren

Verfahren zum Lösen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen

Prinzip: Ersetzen der Differentialquotienten durch Differenzenquotienten

Anschaulich:



$$y' \approx \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2 \cdot \Delta x} - \underbrace{O(\Delta x^2)}_{\text{Fehler 2. Ordnung}}$$

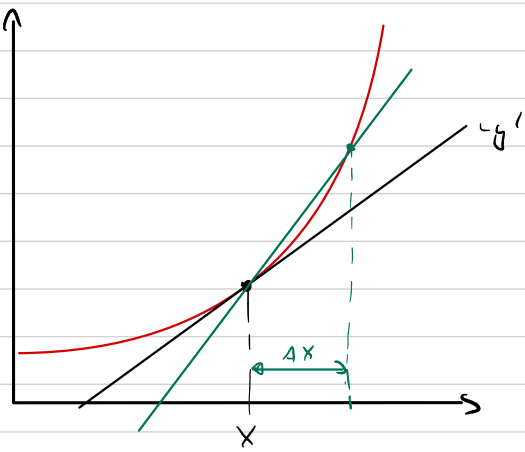
↳ Zentraler Differenzenquotient

genauere Betrachtung: Taylorreihenentwicklung

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \frac{dy}{dx}\Big|_x \Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{2!}\Delta x^2 + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{1}{6}\Delta x^3 + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{\Delta x^4}{24} + \dots$$

$$y(x-\Delta x) = y(x) - \frac{dy}{dx}\Big|_x \Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{2!}\Delta x^2 - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{1}{6}\Delta x^3 + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{\Delta x^4}{24} + \dots$$

$$y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x) = 2\frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{2}{3}\frac{d^3y}{dx^3}\Delta x^3 + \dots$$



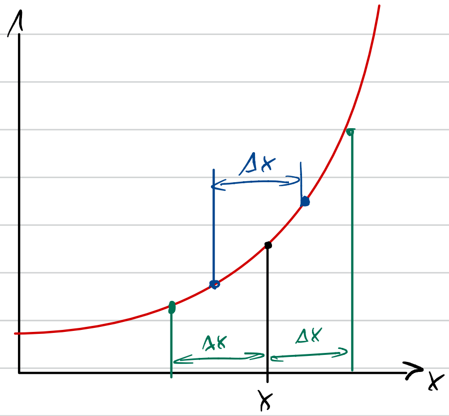
$$y' \sim \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Vorwärtsdifferenzenquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} - O(\Delta x)$$

Fehler 1. Ordnung

↳ Analog: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$ Rückwärtsdifferenzenquotient



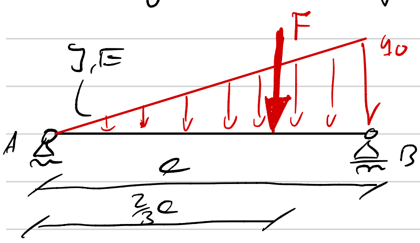
$$y''(x) \approx \frac{\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} - \dfrac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$y''(x) \sim \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$y(x+\Delta x) + y(x-\Delta x) = 2y(x) + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{\Delta x^4}{12}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

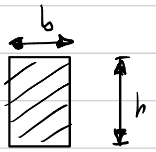
Anwendungsbeispiel: Biegebalken



$\ell = 1m$ $\quad q_0 = 200\ N/m$

$b = 3cm$ $\quad \ell = 6cm$

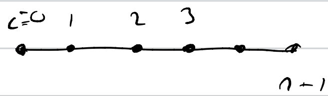
$J = 5.4 \cdot 10^{-7}\ m^4$ $\quad F = \frac{q_0 \ell}{2}$



1. Berechnung der Lagerkräfte -> trivial $\quad \boxed{F_B = \frac{2}{3}F \quad F_A = \frac{1}{3}F}$

2. Momentenverlauf

$$M(x) = \frac{q_0}{\ell}\frac{x^3}{6} - \frac{q_0 \ell}{6}x$$



n Aufpunkte

3. Biegelinie $\quad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M(x) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{q_0 x \ell}{6EJ}\left(\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 1\right)$

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{q_0 \cdot x \cdot \ell}{6EJ}\left(\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 1\right) \qquad i = 1, \dots, n-2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ b_i & d_i & a_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{i-1} \\ \vdots \\ w_{i+1} \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ RHS_i \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Randbedingung

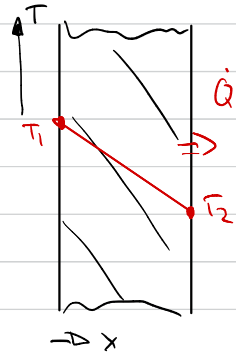
$$RHS_i = \frac{q_0 x \ell \Delta x^2}{6EJ} \cdot \left(\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 1\right)$$

Randbedingung

Wärmeleitung explizit

Grundlagen Wärmeleitung

Fouriersches Wärmeleitungsgesetz



$\dot{Q} \sim A$

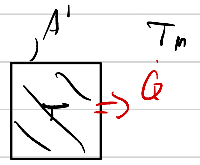
$\dot{Q} \sim -\frac{\partial T}{\partial x}$

$\dot{Q} \sim -\frac{\partial T}{\partial x} \cdot A$

$\dot{Q} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot A$

↑ Wärmeleitfähigkeit $\frac{W}{mK}$

Wärmeübergang



$T > T_m$

$A' \rightarrow$ Oberfläche des Körpers

$\dot{Q} \sim A' \qquad \dot{Q} \sim T - T_m$

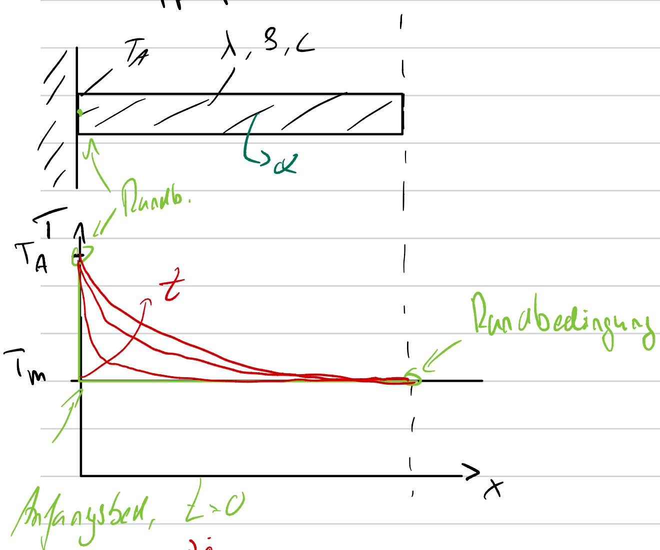
$\dot{Q} \sim (T - T_m)\, A'$

$\dot{Q} = \alpha\, (T - T_m)\, A'$

↳ Wärmeübertragungskoeffizient

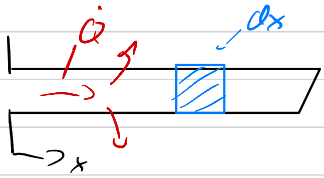
Instationäre Wärmeleitung (1D)

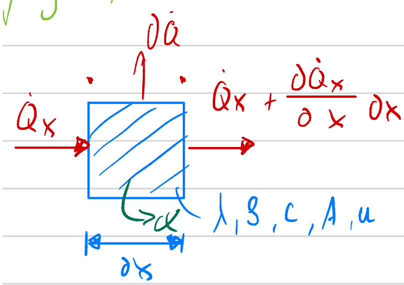
Kühlrippenproblem



Ziel: Berechnung der Temperaturverteilung der Funktion von x und t!

Aufstellen der entsprechenden DGL:





$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{Q}_x - \left(\dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}\, \partial x\right) - \partial \dot{Q}$$

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Zeitliche Änderung der Wärmeenergie des Rippenelements

einströmende $\frac{\text{Wärme}}{\text{Zeit}} - \sum$ ausström. $\frac{\text{Wärme}}{\text{Zeit}}$

$$\partial \dot{Q} = \alpha \cdot U \cdot \partial x\, (T - T_u)$$

$$Q = \rho \cdot A \cdot \partial x \cdot c \cdot T$$

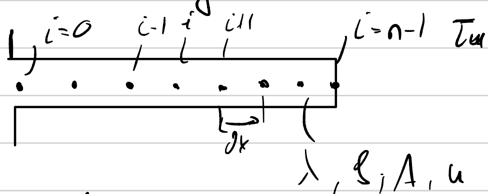
↑ $\frac{J}{kg \cdot K}$

→ Ineinander Einsetzen:

$$\frac{\partial\,(\rho\cdot A\cdot dx\cdot c\cdot T)}{\partial t} = \lambda\cdot A\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx - \alpha\,U\,dx\,(T-T_u)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho\cdot c}}_{=a\ \text{(Temperaturleitfähigkeit)}}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\alpha\cdot U}{\rho\cdot A\cdot c}\,(T-T_u)$$

Diskretisierung der DGL:

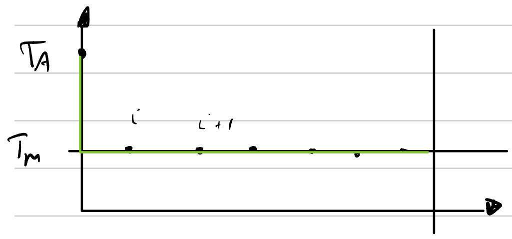


$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\alpha\cdot U}{\rho\cdot A\cdot C}\,(T-T_m)$$

n- Aufpunkte

explizites Differenzenverfahren

$$\boxed{\frac{T_i^{m+1}-T_i^{m}}{\Delta t} = a\,\frac{T_{i-1}^{m}-2T_i^{m}+T_{i+1}^{m}}{\Delta x^2} - \frac{\alpha\cdot U}{\rho\cdot A\cdot C}\,(T_i^{m}-T_u)}$$



$$\to T_i^{m+1} = a\cdot\frac{T_{i+1}^{m}-2T_i^{m}+T_{i-1}^{m}}{\Delta x^2}\,\Delta t - \frac{\alpha\cdot U\cdot\Delta t}{\rho\cdot A\cdot c}\,(T_i^{m}-T_u) + T_i^{m}$$

Explizit, weil umstellbar nach T_i^{m+1} → Man kann es ausrechnen

Nachteil: Δt nicht beliebig groß wählbar $\quad \Delta t < 0.5\,\frac{\Delta x^2}{a}$

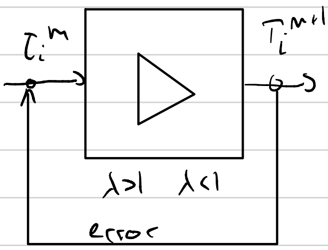
↳ neigt zur Instabilität

Es muss kein Gleichungssystem gelöst werden

Wärmeleitung implizit

Instabilität: Wenn Δt zu groß gewählt wird, neigen die expliziten Verfahren zur Instabilität

Algorithmus



→ Wenn $\lambda > 1$ → Error explodiert

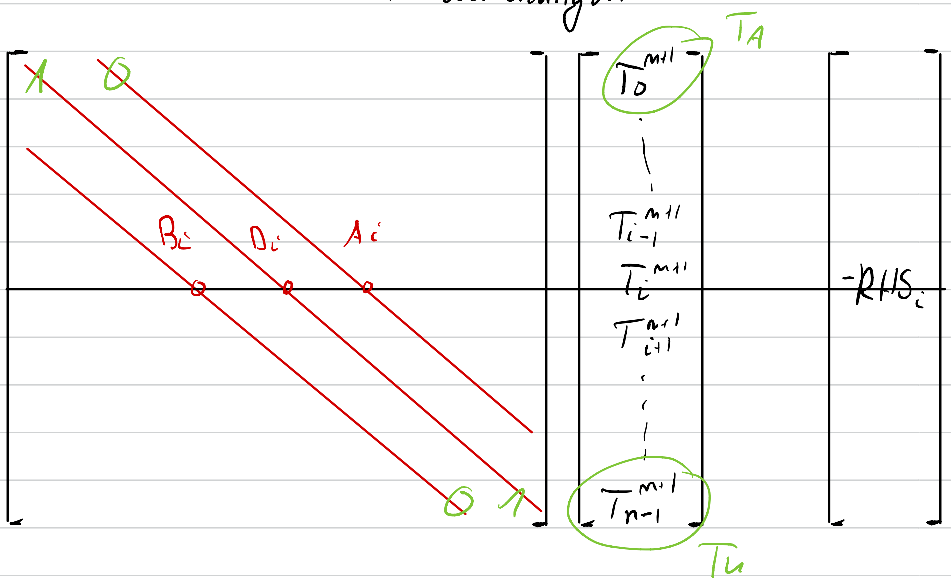
Implizite Differenzenverfahren:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\rho \cdot A \cdot c}(T - T_a)$$

n- Aufpunkte

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^{m+1} - 2 \cdot T_i^{m+1} + T_{i-1}^{m+1}}{\Delta x^2} - \frac{\partial U}{\rho \cdot A \cdot c}\left(T_i^{m+1} - T_a\right) \quad \Big| \cdot \Delta t$$

n- Gleichungen



$$D_i = 1 + a \cdot \Delta t \,\Delta x^2 - \frac{\partial U \,\Delta t}{\rho \cdot A \cdot c}$$

$$B_i = -\frac{a}{\Delta x^2}\Delta t$$

$$A_i = B_i$$

$$RHS_i = T_u \frac{\partial U \,\Delta t}{\rho \cdot A \cdot c} + T_i^m$$

Zeitschrittverfahren

Problem: $\frac{dy}{dt} = v(t)$
$\hat{=}$ Geschwindigkeit

Anfangsbedingung

Berechne $y(t)$ unter der Vorgabe $v(t)$ und $y(t=0) = \bar{y}_0$

Einfachstes Verfahren: $\int_t^{t+\Delta t} \frac{dy}{dt} dt = \int_t^{t+\Delta t} v(t)\, dt$

$$y(t+\Delta t) - y(t) = v(t)\Delta t$$

$y(t+\Delta t) = y(t) + v(t)\,\Delta t$ Euler Vorwärtsverfahren

$y(t+\Delta t) = y(t) + v(t+\Delta t)\Delta t$ Euler Rückwärtsverfahren

oder

$y(t+\Delta t) = y(t) + v\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$ Midpoint Rule oder Leap-Frog Methode

und:

$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{v(t+\Delta t) + v(t)}{2}\,\Delta t$ Crank Nicolson Verfahren

Predictor - Corrector Methode

$\frac{dy}{dt} = v(t, y, P(t))$ (2-Schritt Verfahren)

Predictor-Schritt: $y^*_{n+1} = y_n + v(t, y, P(t))\,dt$ (Euler vorwärts Schritt)

Corrector Schritt $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(v(t_n, y, P(t_n)) + v(t_{n+1}, y^*_{n+1}, P(t_{n+1})\right)\Delta t$

Runge Kutta Verfahren   4-Schritt Verfahren

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y)$$

$$k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$k_1 = F(t, y)$$

$$k_2 = F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + k_1 \frac{\Delta t}{2}\right)$$

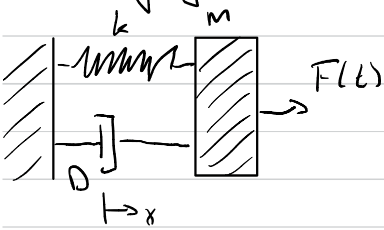
$$k_3 = F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + k_2 \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$k_4 = F(t + \Delta t, y + k_3 \Delta t)$$

$$y_{n+1} = y_n + k \cdot \Delta t$$

Das Vorgehen ist von 4. Ordnung genau!

Schwingungsproblem:

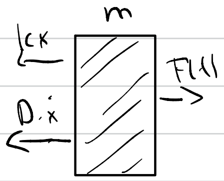


$$m\ddot{x} = \sum F_i$$

$$m\ddot{x} = -D\dot{x} - kx + F(t)$$

$$m\ddot{x} + D\dot{x} + kx = F(t) \qquad | : m$$

Freischneiden $\mapsto x$



$$\ddot{x} + \frac{D}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

$$\dot{x} = y \qquad \ddot{x} = \dot{y}$$

$$\dot{y} + \frac{D}{m}y + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

$$\dot{x} = y$$

Zahlenwerte: $k = 5\ \frac{N}{m}$ $\quad D = 1\ \frac{Ns}{m}$ $\quad F(t) = 0$

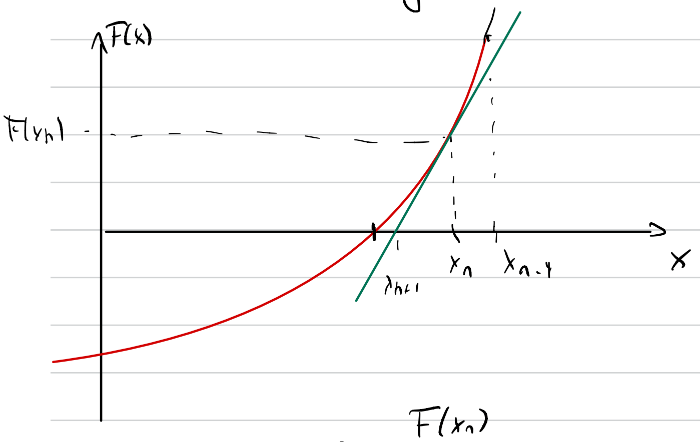
$m = 1kg$

Anfangsbed.: $\dot{x}(t=0) = 1\ \frac{m}{s}$

$y(t) = 0$

Runge - Kutta - Verfahren

Einschub: Erweiterung des Newton Verfahrens



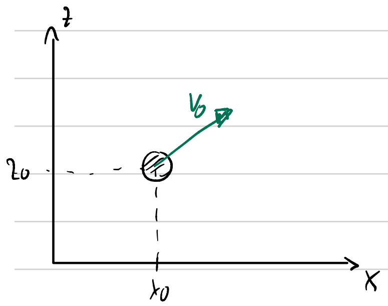
$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

→ Bilde Sekante für Ableitung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{\frac{F(x_{n-1}) - F(x_n)}{x_{n-1} - x_n}} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

Fliegender Fußball:

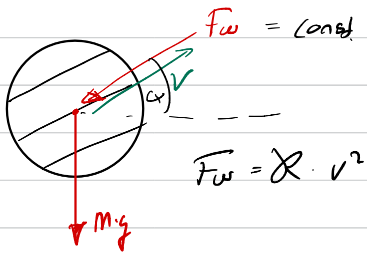


Ziel: Flugdaten berechnen

$x(t), z(t)$ mit $x(t=0) = x_0$ $\quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$

$z(t=0) = z_0$ $\quad \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$

Bewegungsgleichung:



$F_W = \aleph \cdot v^2$

$$m\ddot{x} = \sum F_i$$

$$m\ddot{x} = -F_W \cdot \cos(\alpha)$$

$$m\ddot{x} = -\aleph v^2 \cdot \cos(\alpha) = -\aleph \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\aleph}{m} \cdot \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{iz}$$

$$m\ddot{z} = -m \cdot g - \aleph \cdot v^2 \sin(\alpha)$$

$$\dot{z} = v \cdot \sin(\alpha) \qquad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

$$m\ddot{z} = -mg - \aleph \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = -g - \frac{\aleph}{m} \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

Zahlenwerte: $k = 0{,}3$ $m = 1kg$ $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ $\dot{x}(t=0) = 10 \frac{m}{s}$ $\dot{z}(t=0) = 20 \frac{m}{s}$

c_w - Wert

$$c_w^i = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} v^2 \cdot \pi \cdot R^2}$$

$$F_W = c_w(Re) \frac{\rho}{2} v^2 \pi R^2$$

$$Re = \frac{v \cdot 2R \cdot \rho}{\mu}$$

$$F_W = k \cdot v^2$$

$$k = c_w(Re) \frac{\rho}{2} \pi R^2$$