ECA402 – Sistemas de Controle

Aula 07 – Projeto Algébrico de Controladores

Controle de velocidade – *cruise control*

*** Objetivo: manter constante a velocidade de um veículo, mesmo na presença de distúrbios**

Mudanças na inclinação da estrada
Resistência do ar (força de arrasto)

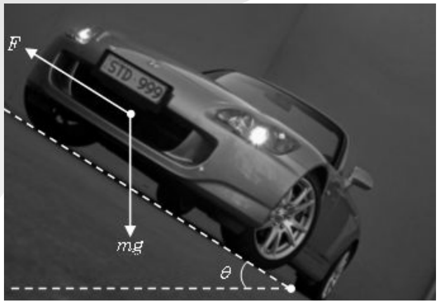
*** Funcionamento: A diferença entre a velocidade atual e desejada gera um sinal de realimentação que é enviado ao dispositivo atuador, influenciando a aceleração do veículo**

É preciso determinar como a velocidade é influenciada pela aceleração e pela inclinação da estrada

Controle de velocidade – *cruise control*

*** Modelagem matemática: Balanço de momento**

v **= velocidade desenvolvida pelo automóvel**
m **= massa do veículo**
θ = inclinação da estrada
c **= coeficiente de arrasto**
F **= força gerada pelo motor**



$$m\frac{dv}{dt} + cv = F - mg\theta$$

F α *u*
(acelerador)

Aproximação: *senθ* ≅ θ

Controle de velocidade – *cruise control*

· Para um veículo em particular:

$$\frac{dv}{dt} + 0{,}02v = u - 10\theta \;\; , 0 \le u \le 1$$

- O veículo não vence uma ladeira com inclinação > 10%
- A velocidade máxima é de 50 m/s = 180 km/h

*** Especificação de desempenho: Manter constante a velocidade desenvolvida pelo veículo em condições estacionárias**

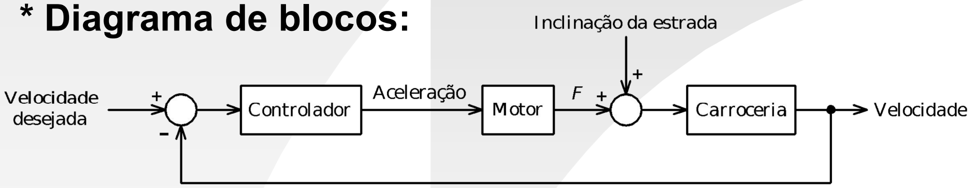
Controlador com ação integral - PI

Controle de velocidade – *cruise control*

*** Controlador PI:**

$$u = k(v_r - v) + k_i \int_0^t \left(v_r - v(\tau)\right) d\tau$$

*** Diagrama de blocos:**



· **Erro de controle em malha fechada:** $e = v_r - v$

Como o erro é influenciado pela inclinação da estrada?

$$\frac{d^2e}{dt^2} + (0{,}02 + k)\frac{de}{dt} + k_i e = 10\frac{d\theta}{dt}$$

Controle de velocidade – *cruise control*

$$\frac{d^2e}{dt^2} + (0{,}02 + k)\frac{de}{dt} + k_i e = 10\frac{d\theta}{dt}$$

· **Se θ e e forem constantes ⇒ $e = 0$**

· **Analogia com sistema massa-mola-amortecedor:**

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

k_p influencia a relação de amortecimento

k_i influencia a velocidade da resposta (resistência mecânica ao movimento)

Controle de velocidade – *cruise control*

· **Polinômio característico:** $s^2 + (0{,}02 + k)s + k_i$

· **Comparando com o padrão:** $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

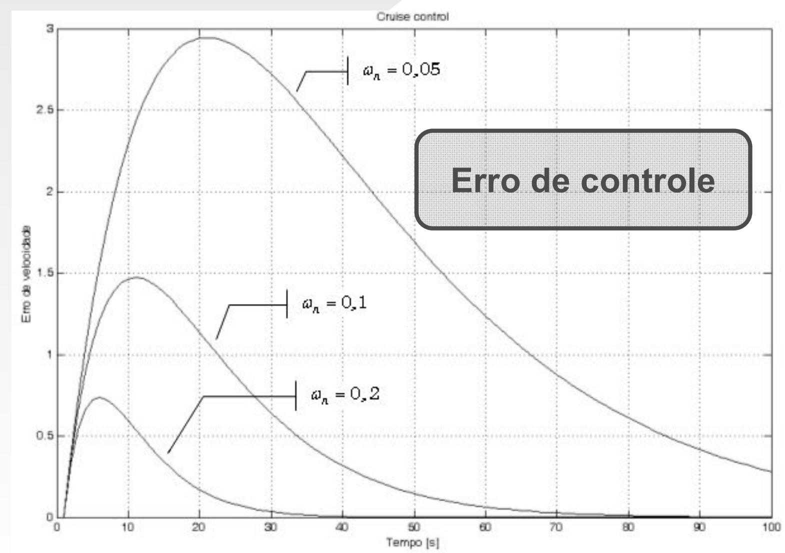
$$k = 2\zeta\omega_n - 0{,}02 \quad ; \quad k_i = \omega_n^2$$

· **Para resposta sem oscilações ⇒ $\zeta = 1$**

· **Logo, o único parâmetro de projeto é a freqüência natural ω_n**

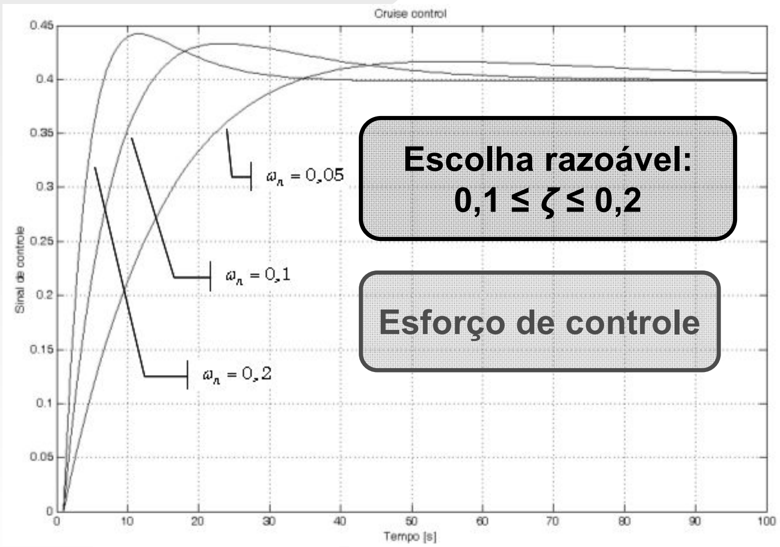
Controle de velocidade – *cruise control*

*** Escolha de ω_n:**



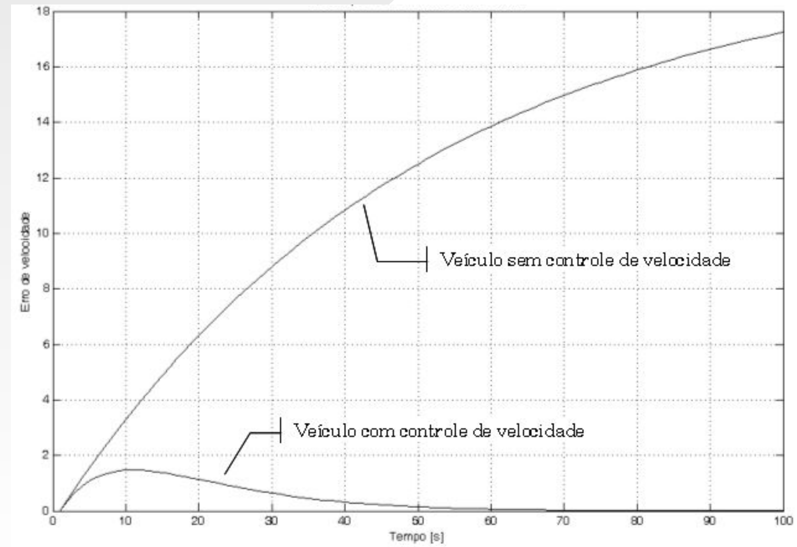
Controle de velocidade – *cruise control*

*** Escolha de ω_n:**



Controle de velocidade – *cruise control*

*** Avaliação do projeto: Resposta a θ = 4% com ζ = 0,1**



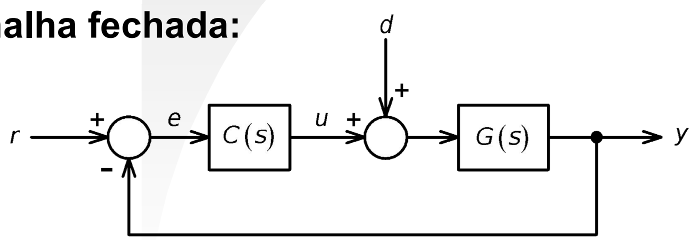
Controle de sistemas de primeira ordem

*** Sistema a ser controlado:** $G(s) = \dfrac{b}{s+a}$

*** Uma especificação de desempenho: ausência de erro estacionário para entrada em degrau ⇒ PI**

$$C(s) = k + \frac{k_i}{s}$$

*** Sistema em malha fechada:**



Controle de sistemas de primeira ordem

*** Projeto: Função de malha aberta**

$$L(s) = G(s)C(s) = \frac{kbs + k_i b}{s(s+a)} = \frac{n_L(s)}{d_L(s)}$$

· Função de malha fechada (de *r* para *y*):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{n_L(s)}{d_L(s)+n_L(s)} = \frac{b(ks+k_i)}{s^2+(a+bk)s+bk_i}$$

· Polinômio característico:

$$d_L(s) + n_L(s) = s^2 + (a+bk)s + bk_i$$

Controle de sistemas de primeira ordem

$$d_L(s) + n_L(s) = s^2 + (a + bk)s + bk_i$$

· Comparando com o padrão: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

$$\boxed{k = \frac{2\zeta\omega_n - a}{b} \quad ; \quad k_i = \frac{\omega_n^2}{b}}$$

Projeto por *alocação de pólos*:

As especificações de desempenho determinam os pólos em malha fechada, o que culmina na sintonia de k e k_i

Controle de sistemas de primeira ordem

· Deve-se notar que o sistema em malha fechada possui um zero real, o que acarreta ultrapassagem significativa

*** Evitando a ultrapassagem: O controlador projetado fundamenta-se na realimentação do erro de controle:**

$$u(t) = k(r(t) - y(t)) + k_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))\, d\tau$$

A ultrapassagem ocorre porque o controlador reage violentamente a uma mudança em degrau na referência

Controle de sistemas de primeira ordem

· Modificando a lei de controle:

$$u(t) = -k\, y(t) + k_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))\, d\tau$$

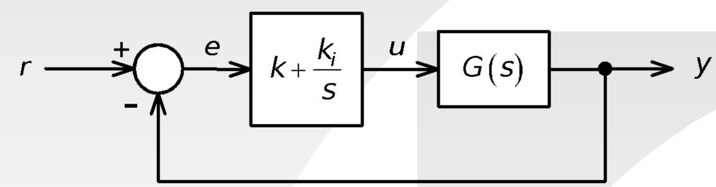
· A nova função de transferência em malha fechada é expressa por:

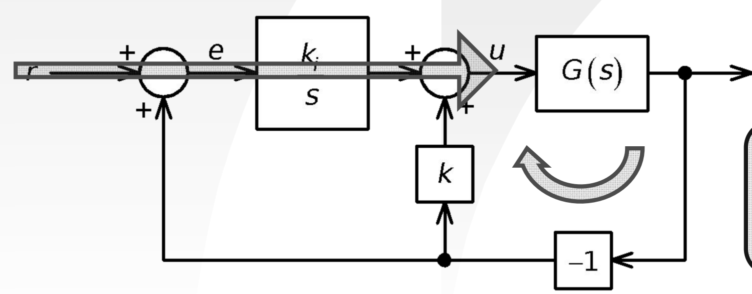
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bk_i}{s^2 + (a + bk)s + bk_i} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Não há zero real ⇒ menor ultrapassagem para o mesmo valor de ζ

Controle de sistemas de primeira ordem

· Diagrama de blocos:





Sistema com dois graus de liberdade

Controle de sistemas de segunda ordem

*** Controle PD: Hipótese – o sistema não possui zero real**

$$G(s)=\frac{b}{s^2+a_1 s+a_2}\ ;\ C(s)=k+k_d s$$

· Função de malha aberta:

$$L(s)=G(s)C(s)=\frac{bk_d s+bk}{s^2+a_1 s+a_2}=\frac{n_L(s)}{d_L(s)}$$

· Função de malha fechada (de *r* para *y*):

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}=\frac{n_L(s)}{n_L(s)+d_L(s)}=\frac{b(k_d s+k)}{s^2+(a_1+bk_d)s+a_2+bk}$$

Controle de sistemas de segunda ordem

· Polinômio característico: $s^2+(a_1+bk_d)s+a_2+bk$

· Comparando com o padrão: $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$

$$\boxed{k=\frac{\omega_n^2-a_2}{b}\ ;\ k_d=\frac{2\zeta\omega_n-a_1}{b}}$$

· Pode-se reescrever a função de malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(2\zeta\omega_n-a_1)s+\omega_n^2-a_2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$e_{ss}\neq 0$ sempre que $a_2\neq 0$

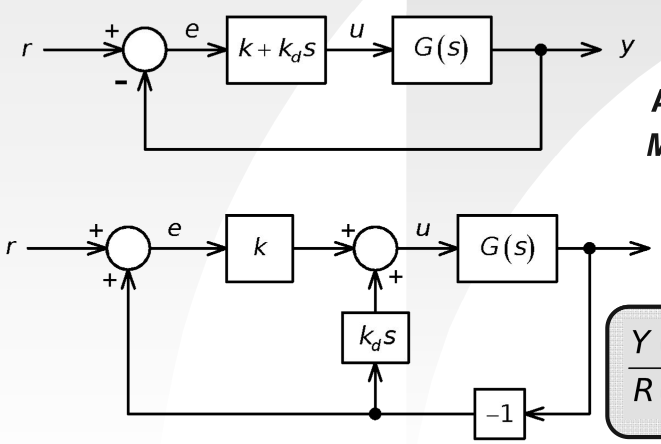
$e_{ss}\downarrow$ se $|a_2| \ll \omega_n^2$

A presença do zero real eleva a ultrapassagem

Controle de sistemas de segunda ordem

· Controlador com dois graus de liberdade:

$$U(s)=k\big(R(s)-Y(s)\big)-k_d sY(s)$$



Ausência de zero:

$M_{pt}\downarrow$ para mesmo ζ

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2-a_2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}$$

Controle de sistemas de segunda ordem

*** Controle PI:** $G(s)=\dfrac{b_1 s+b_2}{s^2+a_1 s+a_2}\ ;\ C(s)=k+\dfrac{k_i}{s}=\dfrac{ks+k_i}{s}$

· Função de malha aberta:

$$L(s)=G(s)C(s)=\frac{(ks+k_i)(b_1 s+b_2)}{s^3+a_1 s^2+a_2 s}=\frac{n_L(s)}{d_L(s)}$$

· Polinômio característico:

$$n_L(s)+d_L(s)=s^3+(a_1+kb_1)s^2+(a_2+kb_2+k_i b_1)+b_2 k_i$$

· Comparando com o padrão:

$$\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)(s+\alpha\omega_n)=s^3+(\alpha+2\zeta)\omega_n s^2+(1+2\alpha\zeta)\omega_n^2 s+\alpha\omega_n^3$$

Controle de sistemas de segunda ordem

$$a_1 + b_1 k = (\alpha + 2\zeta)\,\omega_n \;\; ; \;\; a_2 + b_1 k_i + b_2 k = (1 + 2\alpha\zeta)\,\omega_n^2 \;\; ; \;\; b_2 k_i = \alpha\omega_n^3$$

3 equações e 2 parâmetros livres...
Alternativa: **tornar ω_n um parâmetro de projeto**

· **Caso particular: $b_1 = 0$**

$$\omega_n = \frac{a_1}{\alpha + 2\zeta} \;\; ; \;\; k = \frac{(1 + 2\alpha\zeta)\,\omega_n^2 - a_2}{b_2} \;\; ; \;\; k_i = \frac{\alpha\omega_n^3}{b_2}$$

ω_n (velocidade da resposta temporal) é determinado pela dinâmica do processo

Controle de sistemas de segunda ordem

· **Caso geral: b_1 , $b_2 \neq 0$**

- A freqüência ω_n é a solução real da equação

$$\alpha\, b_1^2\, \omega_n^3 - (1 + 2\alpha\zeta)\, b_1 b_2 \omega_n^2 + (\alpha + 2\zeta)\, b_2^2\, \omega_n + a_2 b_1 b_2 - a_1 b_2^2 = 0$$

- Os parâmetros do controlador serão dados por

$$k = \frac{(\alpha + 2\zeta)\,\omega_n - a_1}{b_1} \;\; ; \;\; k_i = \frac{\alpha\omega_n^3}{b_2}$$

Controle de sistemas de segunda ordem

*** Controle PID:** $G(s) = \dfrac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$

· **Lei de controle:**

$$U(s) = k\big(bR(s) - Y(s)\big) + \frac{k_i}{s}\big(R(s) - Y(s)\big) + k_d s\big(cR(s) - Y(s)\big)$$

Os parâmetros *b* e *c* regulam a amplitude da correção proporcional e derivativa

· **Função de malha aberta (para *b* = *c* = *1*):**

$$L(s) = \frac{\left(k_d s^2 + ks + k_i\right)\left(b_1 s + b_2\right)}{s\left(s^2 + a_1 s + a_2\right)} = \frac{n_L(s)}{d_L(s)}$$

Controle de sistemas de segunda ordem

· **Polinômio característico:**

$$Q(s) = (1 + b_1 k_d)\left(s^3 + \frac{a_1 + b_1 k + b_2 k_d}{1 + b_1 k_d} s^2 + \frac{a_2 + b_1 k_i + b_2 k}{1 + b_1 k_d} s + \frac{b_2 k_i}{1 + b_1 k_d}\right)$$

· **Comparando com o padrão:**

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)\left(s + \alpha\omega_n\right) = s^3 + (\alpha + 2\zeta)\,\omega_n s^2 + (1 + 2\alpha\zeta)\,\omega_n^2 s + \alpha\omega_n^3$$

$$\frac{a_1 + b_2 k_d + b_1 k}{1 + b_1 k_d} = (\alpha + 2\zeta)\,\omega_n$$

$$\frac{a_2 + b_2 k + b_1 k_i}{1 + b_1 k_d} = (1 + 2\alpha\zeta)\,\omega_n^2 \;\; ; \;\; \frac{b_2 k_i}{1 + b_1 k_d} = \alpha\omega_n^3$$

Controle de sistemas de segunda ordem

· **Os parâmetros do controlador são expressos por:**

$$k = \frac{a_2 b_2^2 - a_2 b_1 b_2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n - (b_2 - a_1 b_1)\left[b_2 (1 + 2\alpha\zeta)\omega_n^2 + \alpha b_1 \omega_n^3 \right]}{b_2^3 - b_1 b_2^2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n + b_1^2 b_2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n^2 - \alpha b_1^3 \omega_n^3}$$

$$k_i = \frac{\left(-a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2 + b_2^2\right)\alpha\omega_n^3}{b_2^3 - b_1 b_2^2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n + b_1^2 b_2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n^2 - \alpha b_1^3 \omega_n^3}$$

$$k_d = \frac{-a_1 b_2^2 + a_2 b_1 b_2 + b_2^2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n - b_1 b_2 \omega_n^2 (1 + 2\alpha\zeta) + b_1^2 \alpha\omega_n^3}{b_2^3 - b_1 b_2^2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n + b_1^2 b_2 (\alpha + 2\zeta)\omega_n^2 - \alpha b_1^3 \omega_n^3}$$