ECA402 – Sistemas de Controle

Aula 05 – Dinâmica – Parte II e Critério de Routh-Hurwitz

Dinâmica – Parte II

Análise do Erro Estacionário

Análise do Erro Estacionário

· Erros estacionários decorrem da incapacidade (estrutural) de um sistema em seguir determinados sinais de entrada

> Um sistema pode não apresentar erro estacionário
> para entrada em degrau e erro não nulo para entrada em rampa

· A presença de erro estacionário depende da estrutura da função de transferência em malha aberta

Análise do Erro Estacionário

*** Classificação dos sistemas de controle**

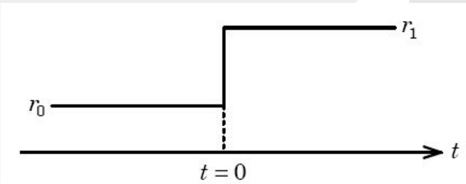
· Os sistemas de controle são categorizados em função de sua habilidade em acompanhar os sinais de referência a ele aplicados

> Sinais selecionados para a classificação:
> Degrau, rampa e parábola unitários

Diversos sistemas de controle operam com uma entrada de referência constante

Análise do Erro Estacionário

O sinal de referência pode mudar de um valor constante para outro – *mudança em degrau*



$$r(t) = r_0 + (r_1 - r_0)1(t)$$

Superposição de efeitos

A resposta do sistema ao sinal *r(t)* é dividida em:

1. Resposta ao sinal constante r_0

2. Resposta ao degrau de amplitude $(r_1 - r_0)$

Análise do Erro Estacionário

*** Função de malha aberta**

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K(\tau_a s+1)(\tau_a s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^N(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)}$$

Pólo na origem de multiplicidade *N*

N* representa o número de *integradores livres* na malha aberta e determina o *tipo do sistema

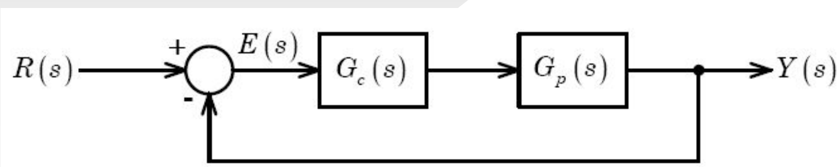
· O tipo não é a *ordem* do sistema:

***N*↑ ⇒ precisão no acompanhamento da referência ↑**

***N*↑ ⇒ estabilidade abalada**

Análise do Erro Estacionário

*** Sistema com realimentação unitária**



Hipótese: O sistema é estável

· Descrição:

$$\begin{cases} Y(s) = \dfrac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}R(s) \\ E(s) = R(s) - Y(s) = \dfrac{1}{1+G_c(s)G_p(s)} \end{cases}$$

Análise do Erro Estacionário

· Aplicando o Teorema do Valor Final da transformada de Laplace:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G_p(s)G_c(s)}$$

· Definem-se *constantes de erro estático* como figuras de mérito para os sistemas de controle

· Na análise, a saída do sistema será chamada *posição* e suas taxas de variação serão ditas *velocidade* e *aceleração*

Análise do Erro Estacionário

*** Constante de erro de posição K_p: Definida a partir da resposta ao degrau unitário**

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{1+G_c(0)G_p(0)} = \frac{1}{1+K_p}$$

Constante de erro de posição

· Sistema tipo 0: $K_p = \lim_{s\to 0}\frac{K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = K$

· Sistema tipo 1 ou superior:

$$K_p = \lim_{s\to 0}\frac{K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^N(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = \infty \; (N \geq 1)$$

Análise do Erro Estacionário

· Assim: $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \; (N=0) \;\; ; \;\; e_{ss} = 0 \; (N \geq 1)$

Um sistema apresentará erro estacionário para entrada em degrau unitário se não possuir Integradores livres no ramo direto

· Se for aplicado um degrau com amplitude *A*:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \; (N=0) \;\; ; \;\; e_{ss} = 0 \; (N \geq 1)$$

Análise do Erro Estacionário

*** Constante de erro de velocidade K_v: Definida a partir da resposta a rampa unitária**

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G_c(s)G_p(s)}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{K_v}$$

Constante de erro de velocidade

· Sistema tipo 0: $K_v = \lim_{s\to 0}\frac{sK(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = 0$

· Sistema tipo 1:

$$K_v = \lim_{s\to 0}\frac{sK(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = K$$

Análise do Erro Estacionário

· Sistema tipo 2 ou superior:

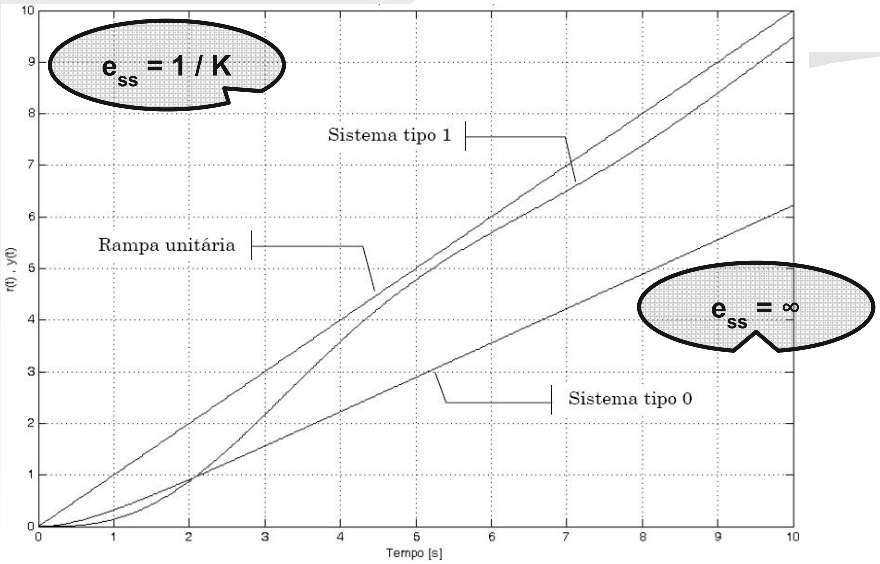
$$K_v = \lim_{s\to 0}\frac{sK(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^N(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = \infty \; (N \geq 2)$$

· Assim: $e_{ss} = \infty \; (N=0) \;\; ; \;\; e_{ss} = \frac{1}{K} \; (N \geq 1) \;\; ; \;\; e_{ss} = 0 \; (N \geq 2)$

O erro de velocidade não representa um *erro na velocidade* e sim um erro de posição devido a uma entrada em rampa

Análise do Erro Estacionário

· **Respostas a rampa unitária**



Análise do Erro Estacionário

· **Se for aplicada uma rampa de inclinação *A*:** $e_{ss} = \dfrac{A}{K_v}$

*** Constante de erro de aceleração K_a: Definida a partir da resposta ao sinal parabólico**

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G_c(s)G_p(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{K_a}$$

Constante de erro de aceleração

· **Sistema tipo 0:** $K_a = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{s^2 K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = 0$

Análise do Erro Estacionário

· **Sistema tipo 1:**

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = 0$$

· **Sistema tipo 2:**

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^2(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = K$$

· **Sistema tipo 3 ou superior:**

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^N(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_p s+1)} = \infty \ (N \geq 3)$$

Análise do Erro Estacionário

· **Assim:**

$$e_{ss} = \infty \ (N=0, N=1) \ ; \ e_{ss} = \frac{1}{K} \ (N=2) \ ; \ e_{ss} = 0 \ (N \geq 3)$$

*** Quadro resumo:**

	Entradas			Constantes de erro estático
Tipo (N)	Degrau ($1/s$)	Rampa ($1/s^2$)	Parábola ($1/s^3$)	
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	$K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_c(s)G_p(s)$
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞	$K_v = \lim\limits_{s\to 0} s\,G_c(s)G_p(s)$
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2 G_c(s)G_p(s)$

Critério de Routh-Hurwitz

BIBO Estabilidade

*** *Definição:* Um sistema é BIBO estável se, para qualquer *entrada limitada*, mantém uma *saída limitada* ao longo do tempo**

bounded-input bounded-output

Conseqüência:* Todos os pólos da função de transferência em *malha fechada* devem estar localizados no *semi-plano esquerdo* do plano complexo *s

Polinômios a coeficientes reais

*** Polinômio do segundo grau:**

$$Q_2(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2$$

Raízes

*** Polinômio do terceiro grau:**

$$Q_3(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) =$$
$$= \left[s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2\right](s - p_3) =$$
$$= s^3 - (p_1 + p_2 + p_3)s^2 + (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)s - p_1 p_2 p_3$$

Soma das raízes

Soma dos produtos das combinações das raízes, tomadas duas a duas

Polinômios a coeficientes reais

· Polinômio de ordem *n* : $Q_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$

$a_{n-1} =$ **Negativo da soma de todas as raízes**

$a_{n-2} =$ **Soma dos produtos de todas as combinações possíveis das raízes, tomadas duas a duas**

$a_{n-3} =$ **Negativo da soma dos produtos de todas as combinações possíveis das raízes, tomadas três a três**

⋮

$a_0 = (-1)^n$ **multiplicado pelo produto de todas as raízes**

Polinômios a coeficientes reais

* **Polinômio de ordem *n* :** $Q_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$

Se todas as *raízes* de um polinômio são *reais* e localizam-se no *semi-plano esquerdo*, então todos os *coeficientes* deste polinômio são *positivos e não nulos*

⇒ Se algum dos coeficientes for negativo, existe ao menos uma raiz real situada no semi-plano direito

⇒ Raízes complexas ocorrem em pares conjugados, logo as partes imaginárias dos produtos se cancelarão

Polinômios a coeficientes reais

* **Polinômio de ordem *n* :** $Q_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$

· Assim, vale a afirmação:

Se todas as *raízes* de um polinômio localizam-se no *semi-plano esquerdo*, então todos os *coeficientes* deste polinômio são *positivos e não nulos*

Polinômios a coeficientes reais

* **Polinômio de ordem *n* :** $Q_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$

Resumo:

***i)* Se algum coeficiente do polinômio é nulo, então nem todas as raízes localizam-se no semi-plano esquerdo**

***ii)* Se algum coeficiente do polinômio é negativo, então ao menos uma raiz localiza-se no semi-plano direito**

A recíproca da regra *ii)* não é verdadeira. Se todos os coeficientes de um polinômio são positivos, as raízes não estão necessariamente confinadas ao semi-plano esquerdo

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

· Procedimento analítico que determina, de forma indireta, se todas as raízes de um polinômio têm partes reais negativas

***Aplicação:* Sistemas LIT para os quais a equação característica é da forma**

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

O critério de Routh-Hurwitz fornece o *número de raízes* da equação característica (pólos do sistema em malha fechada) *que possuem parte real positiva*

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

*** Arranjo de Routh:**

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & \boxed{a_n} & \boxed{a_{n-2}} & \boxed{a_{n-4}} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & \boxed{a_{n-1}} & \boxed{a_{n-3}} & \boxed{a_{n-5}} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & \boxed{b_3} & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}$$

Coeficientes do polinômio tomados alternadamente

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & \boxed{a_n} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & \boxed{a_{n-1}} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & \boxed{b_1} & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & \boxed{c_1} & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \boxed{\vdots} & \vdots & & & \\
s^2 & \boxed{k_1} & k_2 & & & \\
s^1 & \boxed{l_1} & & & & \\
s^0 & \boxed{m_1} & & & &
\end{array}$$

De posse do arranjo de Routh, o *número de raízes* do polinômio que ocorrem no *semi-plano direito* do plano complexo é igual ao *número de mudanças de sinal* nos coeficientes da primeira coluna do arranjo

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

*** Inspeção do arranjo de Routh para sistemas de ordem reduzida**

· Sistema de primeira ordem com equação característica expressa por:

$$Q(s) = a_1 s + a_0$$

Sistema estável se ambos os coeficientes possuírem o mesmo sinal

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

*** Inspeção do arranjo de Routh para sistemas de ordem reduzida**

· Sistema de segunda ordem com equação característica expressa por:

$$Q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & a_1 & \\
s^0 & a_0 &
\end{array}$$

Sistema estável se todos os coeficientes possuírem o mesmo sinal – condição suficiente

Nota: para sistemas de ordem superior, é necessário, mas não suficiente, que todos os coeficientes da equação característica tenham o mesmo sinal

FIM