1 Аннотация

В данной работе производится сравнение нескольких методов численного дифференцирования по критерию абсолютной погрешности на примере нескольких функций.

2 Методология

В рамках работы проводится сравнительный анализ точности различных методов численного дифференцирования. В качестве эталона для оценки погрешности используются значения производных, полученные аналитически в заданных точках.

2.1 Тестовые функции и точки вычисления

Для исследования выбраны следующие функции с соответствующими точками вычисления производной:

- $f_1(x) = \sin(x^2)$ в точке $x_1 = 2.0$
- $f_2(x) = \cos(\sin(x))$ в точке $x_2 = \pi/4$
- $f_3(x) = \exp(\sin(\cos(x)))$ в точке $x_3 = 1.0$
- $f_4(x) = \ln(x + 3)$ в точке $x_4 = 0.5$
- $f_5(x) = (x + 3)^{0.5}$ в точке $x_5 = 0.5$

Выбранные точки достаточно удалены от особых точек функций (точек разрыва, недифференцируемости и других особенностей), что обеспечивает корректность применения численных методов.

2.2 Исследуемые методы численного дифференцирования

Рассматриваются пять формул численного дифференцирования различных порядков точности:

1. Правая разностная производная (первый порядок точности):
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
2. Левая разностная производная (первый порядок точности):
$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$
3. Центральная разностная производная (второй порядок точности):
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$
4. Формула с четвертым порядком точности:
$$f'(x) \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{3} \cdot \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h}$$
5. Формула с шестым порядком точности:
$$f'(x) \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{3}{5} \cdot \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h} + \frac{1}{10} \cdot \frac{f(x+3h) - f(x-3h)}{6h}$$

2.3 Параметры вычислительного эксперимента

- **Шаг дифференцирования:** Величина шага h варьируется по закону $h_n = \dfrac{2}{2^n}$, где $n = 1, 2, \ldots, 21$
- **Метрика погрешности:** Для каждого метода, каждой функции и каждого значения шага h_n вычисляется абсолютная погрешность

$$\Delta(h) = |f'_{\text{числ}}(x_i) - f'_{\text{ан}}(x_i)|$$

  где x_i - точка вычисления для соответствующей функции
- **Визуализация:** Зависимости $\Delta(h)$ для различных методов представляются в виде графиков в логарифмическом масштабе

3 Исследование

Код на Python приведён в приложенном файле lab1.py.

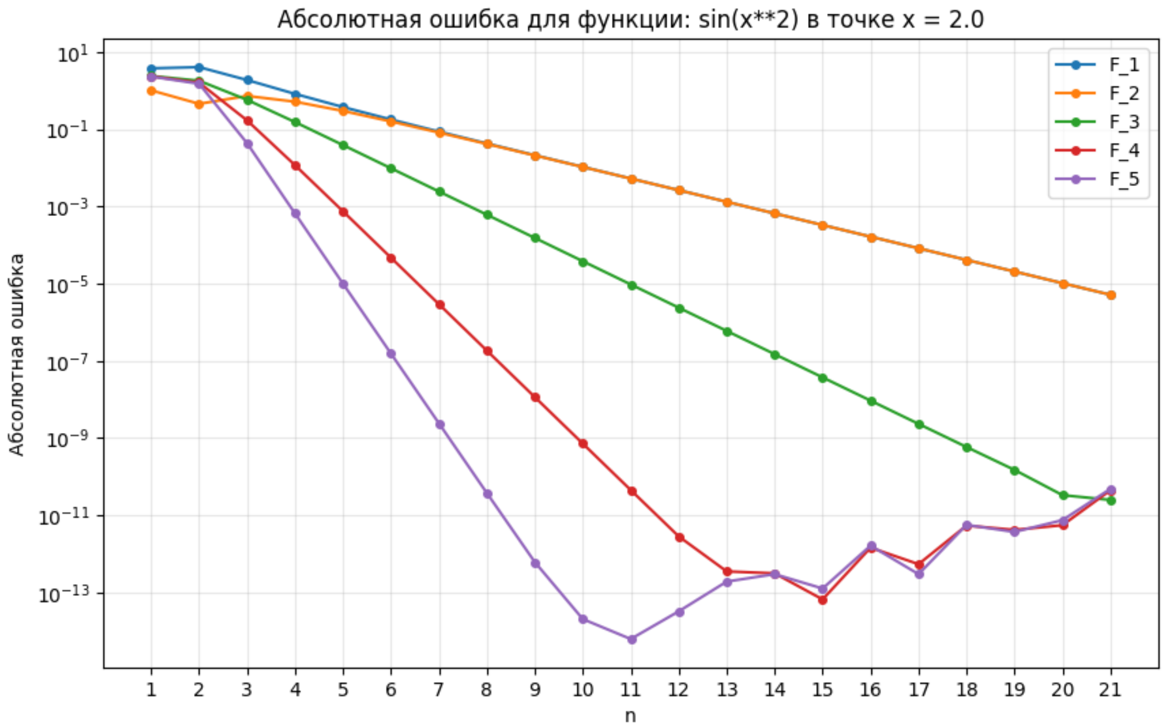


Рис. 1

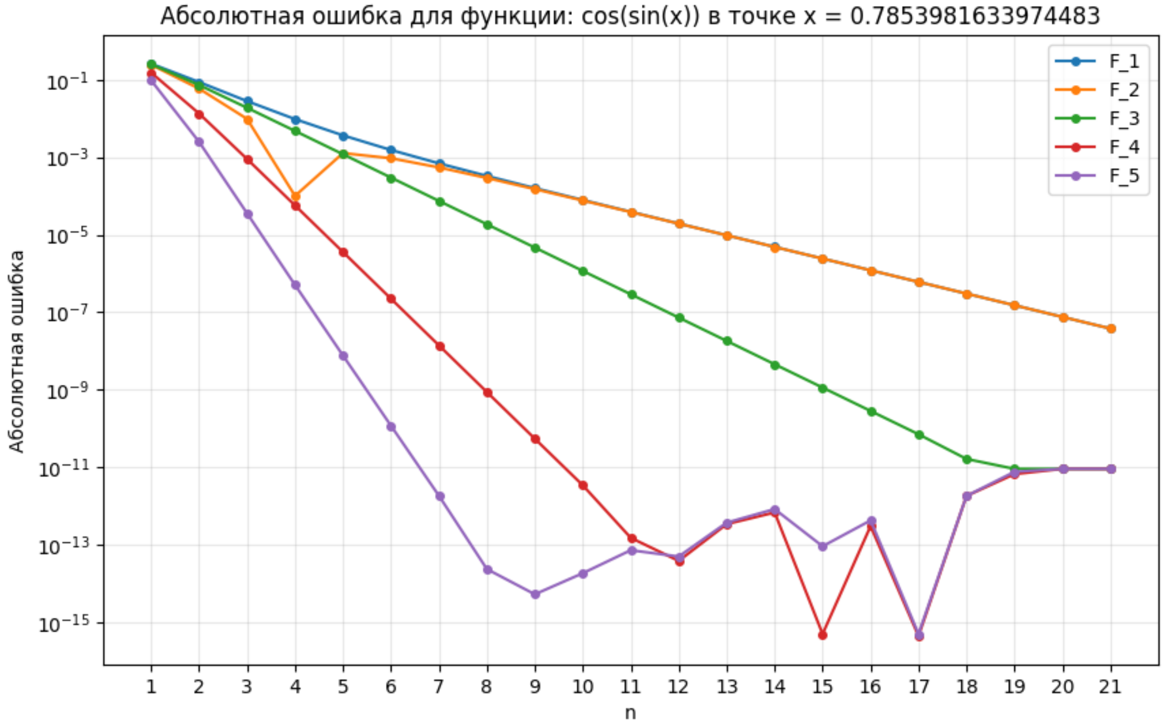

Абсолютная ошибка для функции: cos(sin(x)) в точке x = 0.7853981633974483
Абсолютная ошибка
n
F_1
F_2
F_3
F_4
F_5

Рис. 2

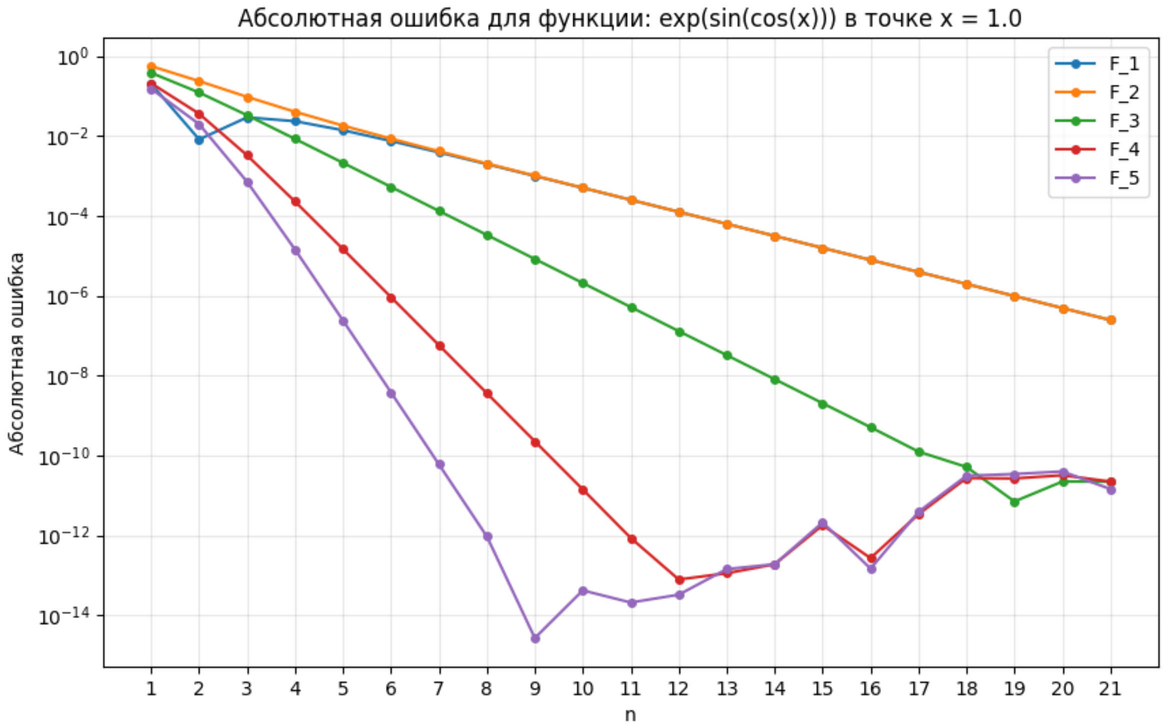
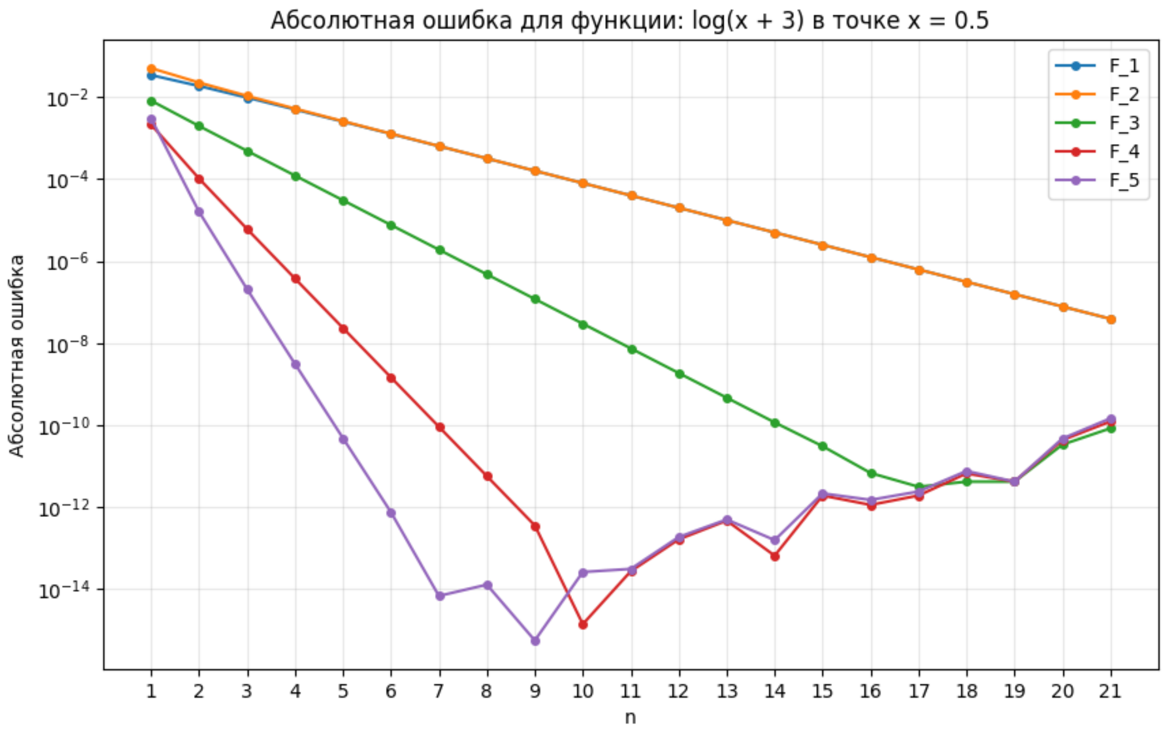
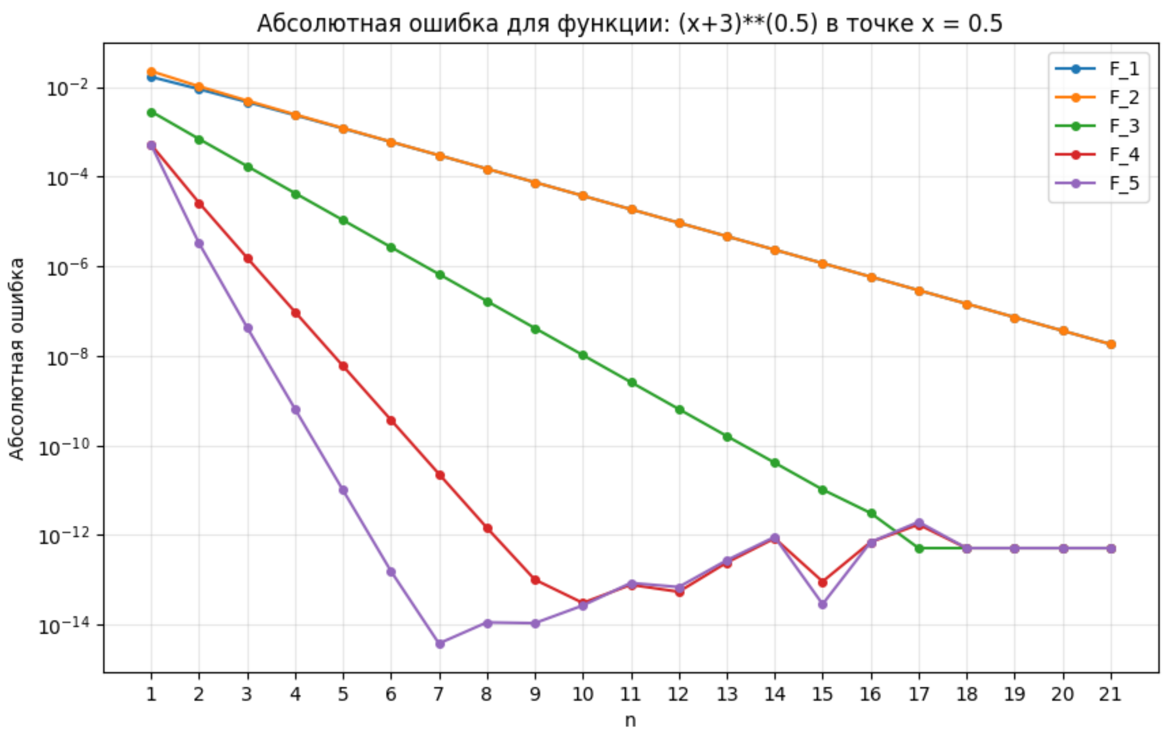

Абсолютная ошибка для функции: exp(sin(cos(x))) в точке x = 1.0
Абсолютная ошибка
n
F_1
F_2
F_3
F_4
F_5

Рис. 3



Абсолютная ошибка для функции: log(x + 3) в точке x = 0.5
F_1
F_2
F_3
F_4
F_5
Абсолютная ошибка
n

Рис. 4



Абсолютная ошибка для функции: (x+3)**(0.5) в точке x = 0.5
F_1
F_2
F_3
F_4
F_5
Абсолютная ошибка
n

Рис. 5

4 Обсуждение результатов

Первые два метода F_1 F_2 имеют практически одинаковую абсолютную погрешность начиная с некоторого малого n на всех графиках. Это закономерно следует из того, что оба метода первого порядка. У обоих методов на всех функциях ошибка уменьшается линейно в логарифмических координатах.

Третий метод F_3, имеющий второй порядок точности, так же имеет качественно одинаковый вид на всех графиках. Отличие от первых двух состоит в отходе от линейности начиная с $n = 18 \pm 2$, что, скорее всего, вызвано ограничением точности представления чисел с плавающей запятой, до которого “не доходят” первые два метода.

Методы F_4 и F_5 качественно ведут себя так же, как третий, но упираются в ограничение точности представления раньше, т.к. являются методами четвертого и шестого порядка соответственно. При этом на всех графиках ожидаемо наблюдается, что линейный участок пятого метода заканчивается при меньших n, чем у четвертого. Вне линейного (в логарифмических координатах) участка абсолютная ошибка у обоих методов во многих точках совпадает и сильно “скачет”. Вид этого нелинейного участка зависит не только от конкретных функций, но и от точки вычисления. Видно, что на всех функциях пятый метод достигает наименьшего значения ошибки.

5 Вывод

Использование пятого метода для вычисления производной может быть оправдано, но требуется экспериментальный подбор максимального значения $n \approx 10$, попадающего на линейный участок, иначе не будет достигнута минимально возможная ошибка. В приложениях, где важна производительность, четвертый метод может быть предпочтительнее, т.к. он требует меньшего числа операций и дает не значительно большую ошибку, чем пятый.