

1 Аннотация

В данной лабораторной работе исследуются методы решения нелинейных уравнений и нелинейных систем уравнений. Для нескольких отобранных уравнений, систем и их решений получены зависимости убывания невязки от номера итерации, на основе которых проведено небольшое сравнение методов.

2 Методология

В данной работе для изучения методов решения нелинейных уравнений и нелинейных систем уравнений выбраны следующие задачи:

1. Нелинейные уравнения:

$$x^2 - \frac{e^x}{5} = 0 \quad (1)$$

$$x2^x - 1 = 0 \quad (2)$$

2. Нелинейные системы уравнений:

$$\begin{cases} x - \cos y - 3 = 0, \\ \cos x - 1 + y - 0.5 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} (x - 1.4)^2 - (y - 0.6)^2 - 1 = 0, \\ 4.2x^2 + 8.8y^2 - 1.42 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Справочная информация об используемых методах приведена в разделе “Описание методов” ниже. Комментарии по конкретной реализации (см. соответствующие Python исходники):

1. Выбранная точность $\epsilon = 10^{-7}$;
2. Ограничение на максимальное число итераций: 1000;
3. В методе простой итерации (далее МПИ) приведение к виду $X = G(X)$ производится путём выбора $G(X) = x - F(X)$;
4. В МПИ условие Липшица проверяется в начальной точке с $q < 0.9$;
5. В обоих методах Ньютона якобиан вычисляется численно, используя формулу разностной числовой производной;
6. В обоих методах Ньютона для решения СЛАУ используется алгоритм LU-разложения из предудыщей лабораторной работы.

Для всех уравнений строятся графики ($y = f(x)$ в одномерном случае, кривые $F(x, y) = 0$ в двумерном) и по ним в одномерном случае определяются отрезки, содержащие корни, и приближённые значения искомых решений в многомерном. Для уравнений (1), (2) используются все методы (для многомерных методов в качестве начального приближения берутся середины найденных отрезков), для систем уравнений (3), (4) - только предназначенные для систем уравнений. Для каждого решения и каждого метода строится график зависимости невязки от номера итерации. В качестве невязки берётся евклидова норма значения функции в данной точке.

3 Описание методов

3.1 Нелинейные уравнения

3.1.1 Метод половинного деления (бисекции)

Тип метода: Итерационный численный метод решения нелинейных уравнений.

Условия применимости:

1. Функция $f(x)$ должна быть непрерывной на отрезке $[a, b]$
2. На концах интервала значения функции должны иметь разные знаки: $f(a) \cdot f(b) < 0$

Алгоритм:

1. Выбирается начальный интервал $[a, b]$, содержащий корень
2. Вычисляется середина интервала: $c = \frac{a+b}{2}$
3. Проверяется знак $f(c)$:
 - Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, корень находится в $[a, c]$
 - Иначе корень в $[c, b]$
4. Процесс повторяется с новым интервалом

Критерий остановки:

$$|b - a| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(c)| < \varepsilon$$

где ε — заданная точность.

3.1.2 Метод хорд

Тип метода: Итерационный метод решения нелинейных уравнений.

Условия применимости:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$ (на концах отрезка функция принимает значения разных знаков)
3. Производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a, b]$

Алгоритм:

1. Выбрать начальный отрезок $[a, b]$, где функция меняет знак
2. Зафиксировать конец отрезка, где знак функции совпадает со знаком второй производной:
 - Если $f(a) \cdot f''(a) > 0$, то a — неподвижный конец
 - Иначе b — неподвижный конец
3. Вычислить новое приближение:

$$x = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

4. Обновить интервал:

- Если $f(a) \cdot f(x) < 0$, то $b = x$
- Иначе $a = x$

5. Повторять шаги 3-4 до достижения заданной точности

Критерий остановки:

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

3.2 Нелинейные системы уравнений

3.2.1 Метод простой итерации

Тип метода: Итерационный метод решения систем нелинейных уравнений.

Условия применимости:

1. Система должна быть приведена к виду $X = G(X)$, где G — сжимающее отображение
2. Существует константа $q < 1$: $\|G(X_1) - G(X_2)\| \leq q\|X_1 - X_2\|$
3. Начальное приближение X_0 должно находиться в области сходимости

Алгоритм:

1. Привести систему $F(X) = 0$ к эквивалентному виду $X = G(X)$
2. Выбрать начальное приближение X_0 и точность ε
3. Выполнять итерации:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= G(X_k) \\ \|X_{k+1} - X_k\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Критерий остановки:

$$\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon$$

3.2.2 Метод Ньютона (Ньютона-Рафсона)

Тип метода: Итерационный метод решения систем нелинейных уравнений.

Условия применимости:

1. Функция $F(X)$ должна быть дифференцируема в окрестности решения
2. Матрица Якоби $J(X)$ не должна быть вырожденной в решении
3. Начальное приближение X_0 должно быть достаточно близко к корню

Алгоритм:

1. Задать начальное приближение X_0 , точность ε , максимальное число итераций N
2. Для $k = 0, 1, \dots, N$:
 - (a) Вычислить $F_k = F(X_k)$ и матрицу Якоби $J_k = J(X_k)$
 - (b) Решить систему линейных уравнений: $J_k \cdot \Delta X_k = -F_k$
 - (c) Обновить решение: $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$
 - (d) Проверить условие остановки

Критерий остановки:

$$\|\Delta X_k\| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \|F(X_{k+1})\| < \varepsilon$$

3.2.3 Модифицированный метод Ньютона

Тип метода: Итерационный метод решения систем нелинейных уравнений.

Условия применимости:

1. Функция $F(X)$ должна быть дифференцируемой в окрестности решения
2. Матрица Якоби $J(X)$ должна быть обратима в начальном приближении
3. Начальное приближение X_0 должно быть достаточно близко к решению

Алгоритм:

1. Выбрать начальное приближение X_0 и точность ε
2. Вычислить матрицу Якоби $J_0 = J(X_0)$ один раз в начальной точке
3. Для $k = 0, 1, 2, \dots$ до достижения точности:
 - (a) Вычислить $F_k = F(X_k)$
 - (b) Решить систему линейных уравнений: $J_0 \Delta X_k = -F_k$
 - (c) Обновить решение: $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$
 - (d) Проверить условие остановки

Критерий остановки:

$$\|F(X_{k+1})\| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \|\Delta X_k\| < \varepsilon$$

Особенность: Матрица Якоби вычисляется только один раз, что уменьшает вычислительную сложность, но может снизить скорость сходимости.

4 Исследование

4.1 Нелинейные уравнения

График для уравнения (1) приведён на рис. 1. По нему определяются отрезки, содержащие все корни:

1. $[-1, 0]$
2. $[0, 1]$
3. $[4, 5]$

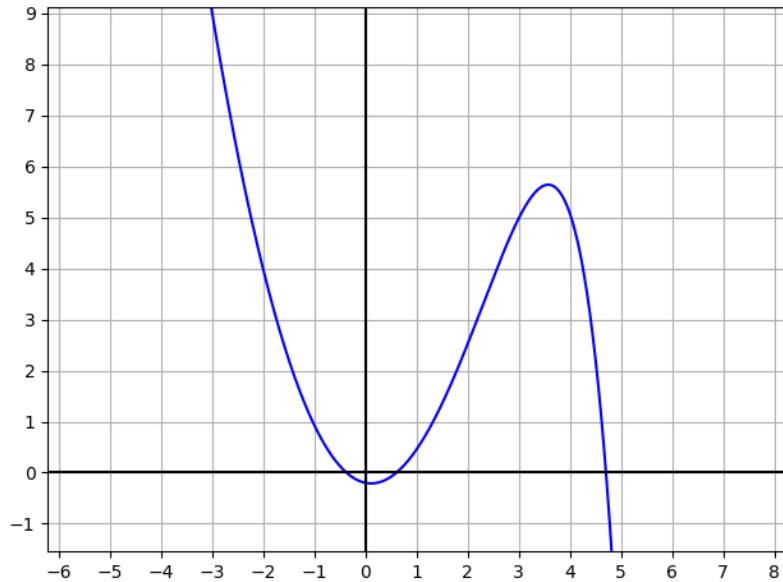


Рис. 1

На рис. 2 приведены все три найденные решения и графики убывания невязки в зависимости от номера итерации. МПИ сошёлся только в одной точке, в остальных нарушалось условие Липшица.

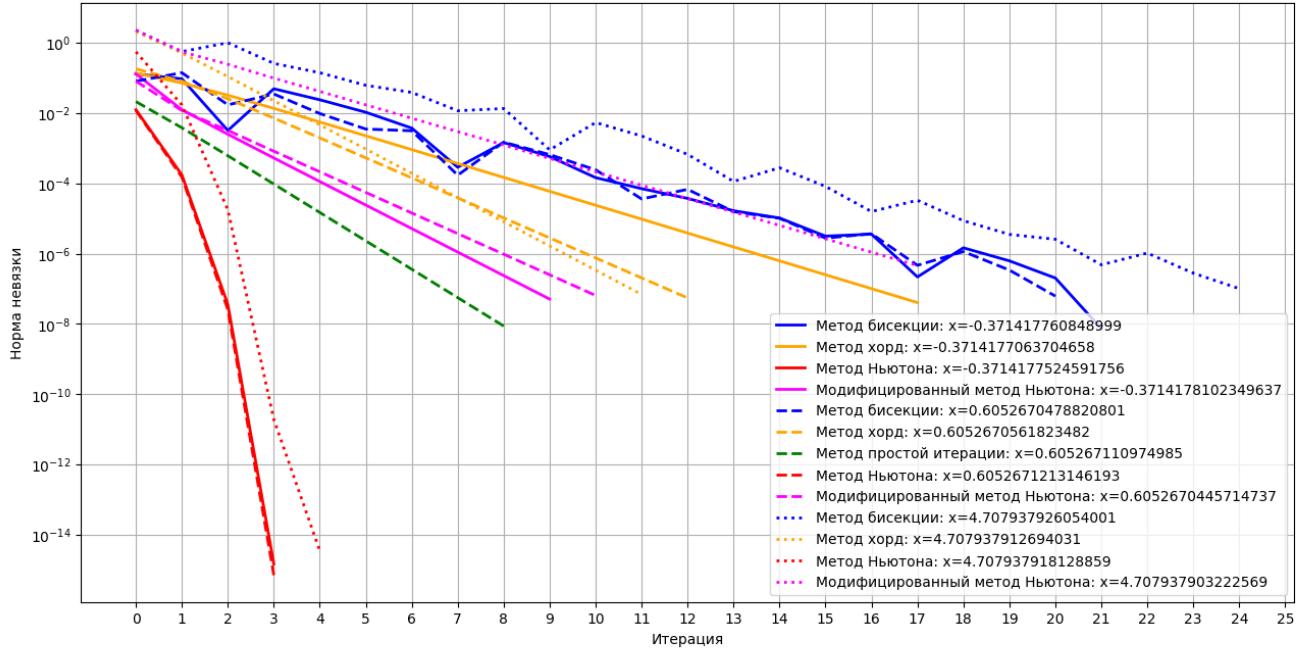


Рис. 2

График для уравнения (2) приведён на рис. 3. По нему определяются отрезки, содержащие все корни:

1. $[0, 1]$

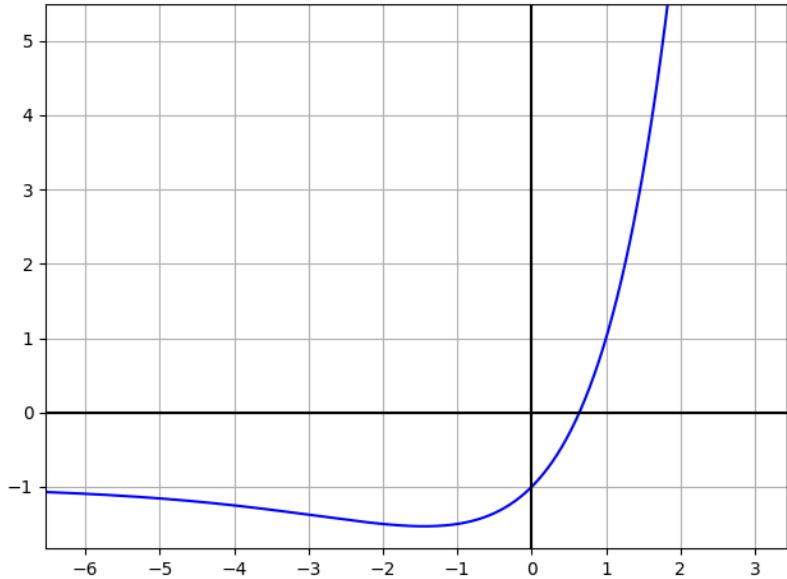


Рис. 3

На рис. 4 приведено найденное решение и графики убывания невязки в зависимости от номера итерации. МПИ в данной точке не сошёлся.

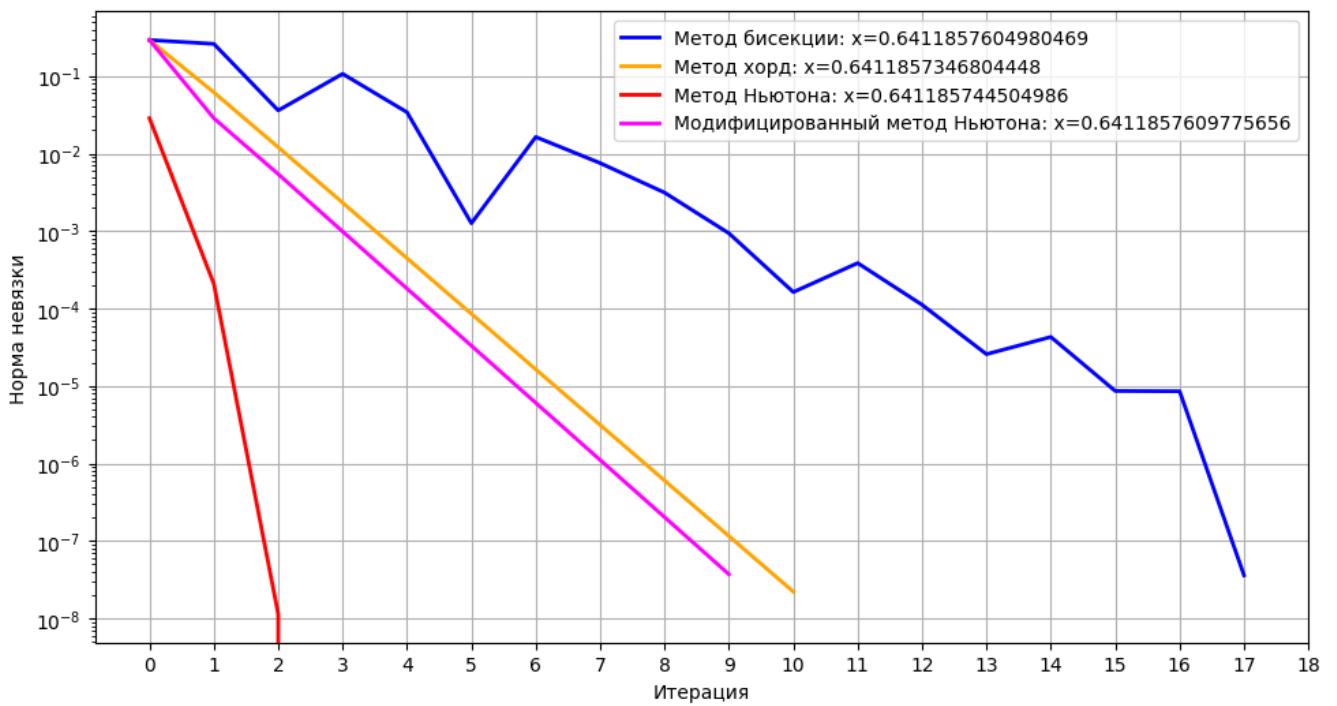


Рис. 4

4.2 Нелинейные системы уравнений

График для системы уравнений (3) приведён на рис. 5. По нему определяется приближённое решение:

1. (3.5, 1.5)

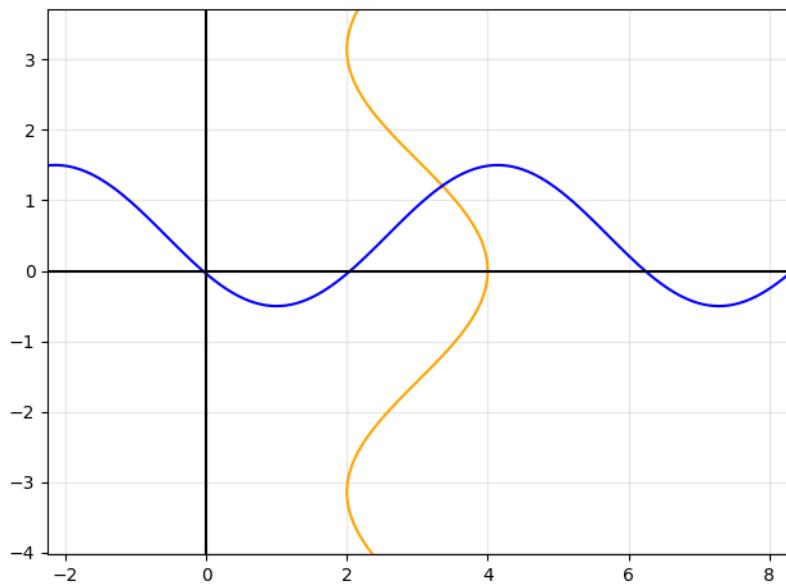


Рис. 5

На рис. 6 приведено найденное решение и графики убывания невязки в зависимости от номера итерации.

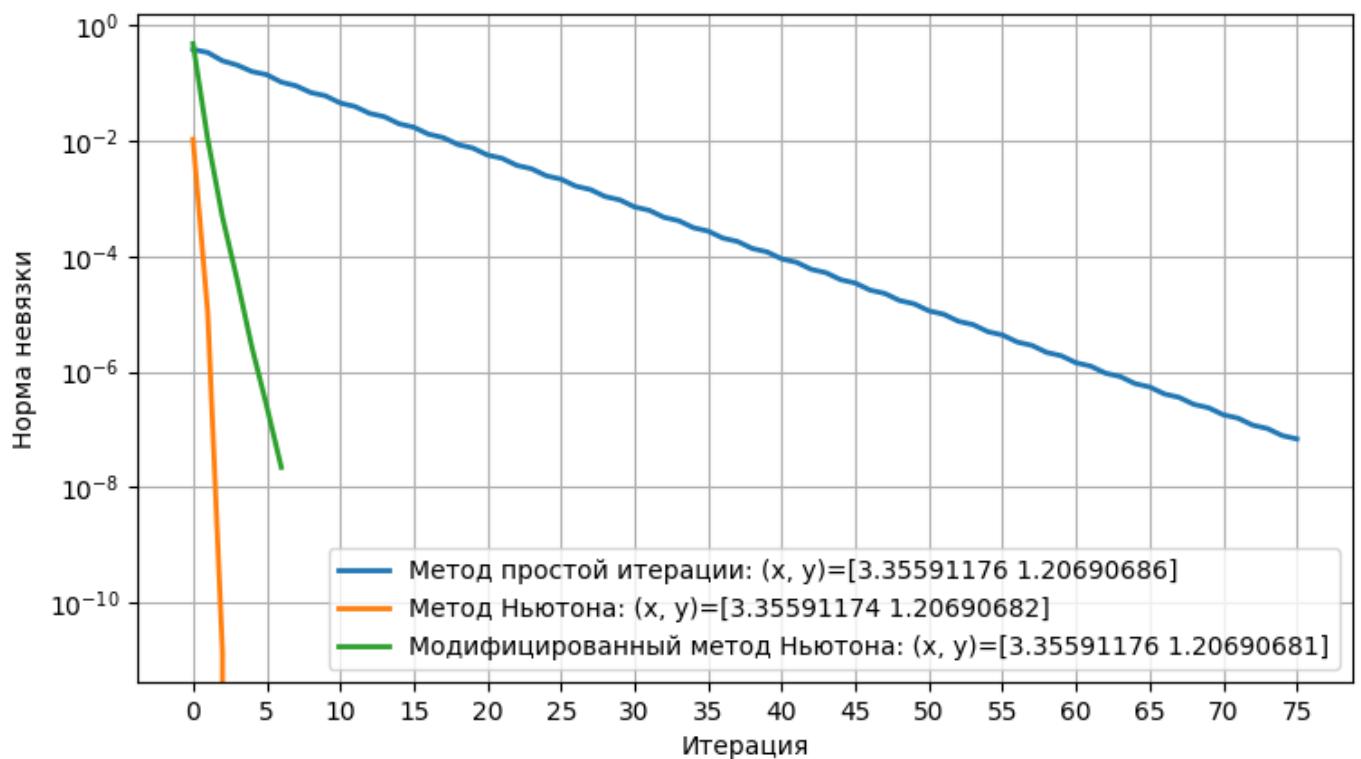


Рис. 6

График для системы уравнений (4) приведён на рис. 7. По нему определяются приближённые решения:

1. $(0, -0.4)$
2. $(0.4, 0.4)$

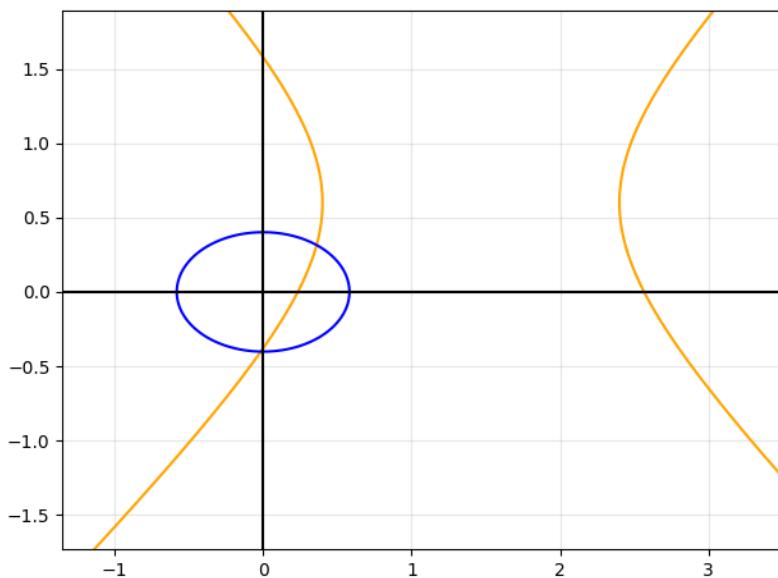


Рис. 7

На рис. 8 приведено найденное решение и графики убывания невязки в зависимости от номера итерации. МПИ не сошёлся в обеих точках.

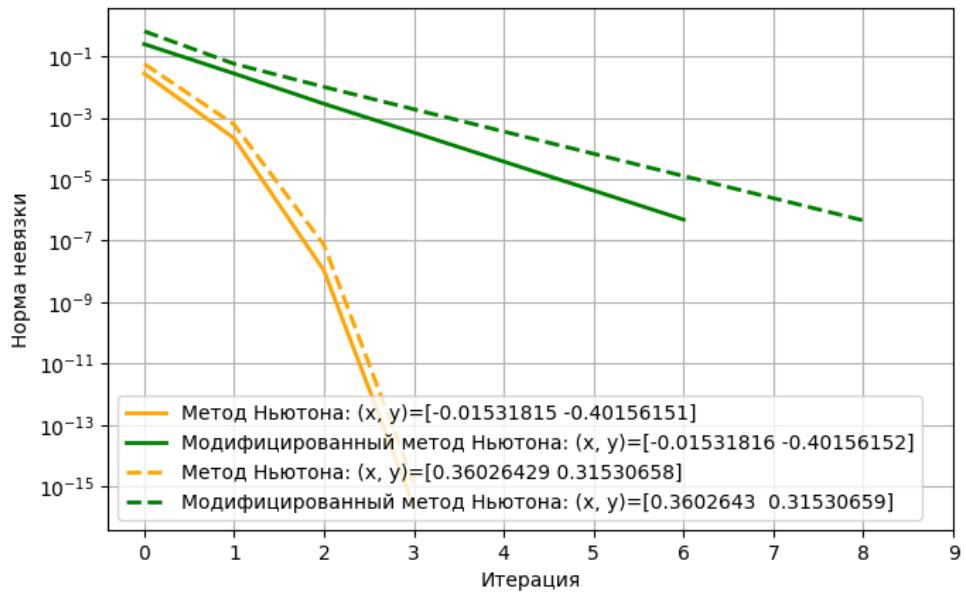


Рис. 8

5 Обсуждение результатов

По полученным результатам можно сделать несколько выводов:

1. Из всех рассмотренных методов МПИ - единственный, который сходился не во всех точках. В одномерном случае он сошёлся быстрее всех методов, кроме метода Ньютона. Однако в многомерном ему потребовалось на порядок больше итераций, чем двум другим многомерным методам.
2. Модифицированный метод Ньютона ожидаемо везде сходится медленнее, чем обычный метод Ньютона, но не более чем в пять раз. Также стоит отметить, что он требует вычисление якобиана только единожды. Из-за этого скорость сходимости может сильно зависеть от выбора начального приближения, а также может быть лучше общая производительность, чем у метода Ньютона. Обе гипотезы требуют отдельной проверки.
3. На рассмотренных нелинейных уравнениях метод хорд показал лучшие результаты, чем метод бисекций. Метод хорд имеет более строгие условия применимости, но их нетрудно удовлетворить, если выбирать начальный отрезок на основе графика.
4. Метод Ньютона сходится очень быстро (всего за несколько итераций) и в многомерном, и в одномерном (как более частном) случае. Такая скорость сходимости приводит к тому, что точность решения лучше заданного ϵ на несколько порядков, чего не наблюдается у других методов. Но нельзя забывать про значительную относительную вычислительную сложность.

6 Вывод

1. Метод простой итерации не рекомендуется использовать из-за слишком строгих условий сходимости, которым трудно удовлетворить.
2. Метод Ньютона отлично себя показал во всех случаях, включая одномерный, но если есть сильные ограничения по времени и достаточно большая размерность задачи, нужно либо тщательно оптимизировать вычисление якобиана и алгоритм решения СЛАУ, либо использовать модифицированный метод Ньютона.
3. Для проверки озвученных выше гипотез, касающихся модифицированного метода Ньютона (про выигрыш в общей производительности и зависимость скорости сходимости от начального приближения) требуются дополнительные исследования.