Содержание

1. Основные алгебраические структуры

1.1. Бинарные операции и их свойства

Определение 1.1. *Пусть A - множество. Бинарной операцией на множестве A называется отображение:*

$$f : A^2 \to A \quad (f : A \times A \to A) \tag{1}$$

Замечание 1.2. *Если f - бинарная операция на A и пара $(a, b) \in A^2$, то образ пары (a, b) при отображении f называется значением операции f на элементах a и b (результатом применения операции f к элементам a и b) и обозначается $f(a, b)$ или afb.*

Пример 1.3. Примеры бинарных операций

1) Сложение и усножение на множествах N, N_0, Z, Q, R.

2) Вычитание на Z, Q, R - определеноб N, N_0 - не определено.

3) Пусть f_1, f_2 такие, что $f_1 : (1, n)^2 \to (\overline{1, n})$, $f_2 : (\overline{1, n})^2 \to (1, n)$ при этом
$$f_1(a, b) = \max\{a, b\}, \quad f_2(a, b) = \min\{a, b\} \tag{2}$$

   Так как $\forall a, b \in \overline{1, n}$ max и min однозначно определены и содержатся во множестве от $\overline{1, n}$, то отображения f_1, f_2 являются бинарными операциями на множестве $\overline{1, n}$.

4) M - множество, $P(M)$ - множество всех подмножеств, тогда пересечение и объединение $\forall A, B \in P(M)$ является бинарными операциями на множестве $P(M)$.

Определение 1.4. *Бинарная операция $*$ на множестве M называется ассоциативной, если $\forall a, b \in M$ выполняется условие $(a*b)*c = a*(b*c)$. Примерами ассоциативных операций могут служить бинарные операции из примера 1.3.*

Определение 1.5. *Бинарная операция $*$ на множестве M называется коммутативной, если $\forall a, b \in M$ выполняется условие*

$$a * b = b * a \tag{3}$$

Пример 1.6. Примеры коммутативных и некоммутативных операций:

1) Коммутативные - пункты $1, 3, 4$ из 1.3.

2) Некоммутативная - пункт 2 из 1.3, декартово произведение, композиция.

Замечание 1.7. *Для отдельных элементов $a, b \in M$ равенство $a * b = b * a$ может выполняться в том случае, если операция $*$ не коммутативна. Такие элементы называются перестановочными (коммутирующими) друг с другом*

Пример 1.8. $a = 0, b = 0 : \quad a - b = b - a$

Замечание 1.9. *Свойства ассоциативности и коммутативности операции независимы. пример коммутативной но не ассоциативной операции:*

$$a * b = \frac{a+b}{2} \tag{4}$$

Определение 1.10. *Бинарная операция $*$ на множестве M называется леводистрибутивной(праводистрибутивной) относительно операции $\circ$ если $\forall\ a, b, c \in M$ выполнено условие:*

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c) \qquad \text{- леводистрибутивная} \tag{5}$$

$$(b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a) \qquad \text{- праводистрибутивная} \tag{6}$$

если выполняются оба этих равенства, то говорят, что $*$ дистрибутивна относительно операции $\circ$. Например умножение дистрибутивна к сложению.

1.2. Алгебраические структуры с одной бинарной операцией

Определение 1.11. *Алгебраической структурой (алгеброй) называется множество с системой операций.*

Определение 1.12. *Множество G с одной бинарной операцией называют группоидом, обозначают $(G, *)$.*

Замечание 1.13. *Из определения группоида следует, что если множество G - конечно, то правило по которому можно найти значение операции $*$. $\forall a, b \in G$, можно записать в таблицу $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ - т.к. G - конечно.*

$$\begin{pmatrix} * & a_1 & \ldots & a_j & \ldots & a_n \\ a_1 & a_1 * a_1 & \ldots & a_1 * a_j & \ldots & a_1 * a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_i & a_i * a_1 & \ldots & a_i * a_j & \ldots & a_i * a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_n * a_1 & \ldots & a_n * a_j & \ldots & a_n * a_n \end{pmatrix}$$

Определение 1.14. *Пусть $G_1 \subset G$, $\exists(G, *)$, G_1 называют замкнутым относительно операции $*$, если выполнены условия $\forall a, b \in G : ab \in G_1$.*
В этом случае группоид $(G_1, *)$ называют подгруппоидом группоида $(G, *)$.

Определение 1.15. *Элемент Λ группоида $(G, *)$ называют нейтральным, если $\forall a \in G$ выполнено:*

$$\Lambda * a = a \tag{7}$$

Пример 1.16. [
]

1) $(N_0, +)(Q, +)$ 0-нейтральные

2) $(N_0, \bullet)(Q, \bullet)$ 1-нейтральные

3) $(N, +)(Z, +)$ не имеют нейтрального элемента

Утверждение 1.17. *Если в группоиде $(G, *)$ существует нейтральный элемент, то он единственный.*

Доказательство. пусть это не так, тогда Λ_1, Λ_2 - нейтральные элементы группоида $(G, *)$. Т.к. Λ_1 - нейтральный, то $\Lambda_1 * \Lambda_2 = \Lambda_2$, а т.к. Λ_2 - нейтральный, то $\Lambda_1 * \Lambda_2 = \Lambda_1$.
Тогда $\Lambda_1 = \Lambda_2$. $\square$