0. Simulation (génération pseudo aléatoire)

1. Proba = mesure d'incertitude (aléa)
2. la proba n'existe pas (© De Finetti)
3. monde = {certain} ∪ {incertain}

certain → sûr / impossible

incertain (aléatoire) → possible ⟺ Proba mesure de possibilité

Informatique ∈ {certain} (monde binaire : 0/1)

⟹ comment générer de l'aléa dans un monde certain ?

c'est impossible ⍨

Sol approximative : génération avec un comportement "comme si" aléa

Next :
- définir proba
- définir éléments aléa (v.a) et caractériser leur comportement
- essayer de l'imiter (

A. Définition de proba

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace de probabilité

- $\mathbb{P}$ ↳ mesure de proba : $\mathbb{P} : (\Omega, \mathcal{A}) \longmapsto [0,1]$
- $\mathcal{A}$ → σ-algèbre
- Ω → ensemble fondamental / univers (ses éléments sont des événements notés $\omega \in \Omega$)

Eg lancé d'un dé

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Axiomes de Kolmogorov :

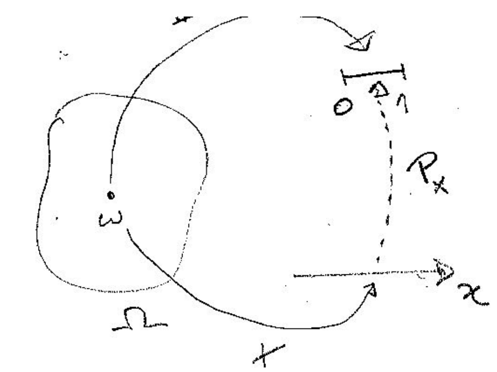
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\forall E_1, E_2, \dots, E_n$ ensemble dénombrable d'événements incompatibles ($E_i \cap E_j$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

Prop (Exo)

- $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

B. Variables aléatoires (réelles)



<u>Def</u> v.a. application $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (mesurable)

univers — réels

$\forall I \subset \mathbb{R}, \quad X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in I\}$ existe et correspond à un évènement.

- 2 types $\begin{cases} - \text{discrète} \\ - \text{continue} \end{cases}$

<u>Ex</u> lancé de dé, $X = \begin{cases} 1 & \text{si nombre pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- $X(\{1\}) = 0$
- $X(\{2\}) = 1$

<u>Ex</u> Expé aléatoire : "Mesurer la taille d'enfants d'une école"

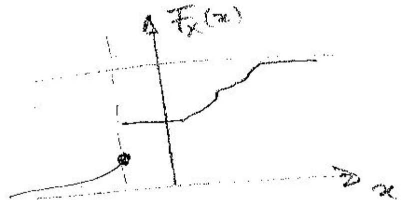
$X =$ "taille de l'enfant en cms", $X \in \mathbb{R}_+$.

<u>Def 1</u> Fonction de répartition, $F_X(x) = P_X(X \leq x) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x]))$ existence

<u>Prop</u>. F_X est non décroissante sur $\mathbb{R}$

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$



- F_X est càdlàg (continue à droite et a une limite à gauche)

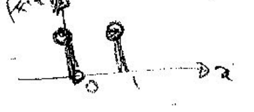
<u>Def 2</u> (Fonction de masse) : X v.a discrète avec support $x_1 < x_2 < \dots < x_m$: La fonction de masse de probabilité est définit par

$$p_X(x_\cdot) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{si } x = x_1, x_2, \dots, x_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, $F_X(x_i) = \sum_{j : x_j \leq x_i} p_X(x_j)$

<u>Ex</u> (lancé du dé, cont) $\quad$ support$(X) = \{0, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} P_X(X=0) = 1/2 \\ P_X(X=1) = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } X = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



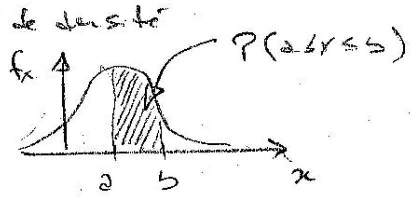
Déf 7 (fonction de densité) X v.a (abs) continue, alors f_X f° de densité est définie par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Prop.
1) $f_X(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1.$

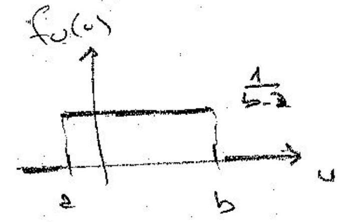
ces propriétés caractérisent une f° de densité

3) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

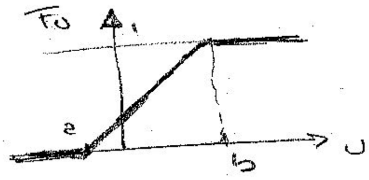


Ex. • $U \sim Unif([a,b])$ v.a. uniforme

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq u \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



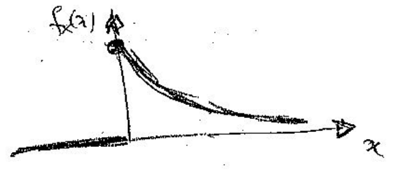
$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq u \leq b \\ 1 & \text{si } u > b \end{cases}$$



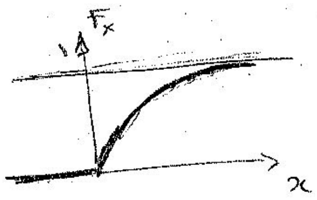
! cas spécial $a=0, b=1$

• $X \sim Exp(\lambda)$ v.a. exponentielle $(\lambda > 0)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



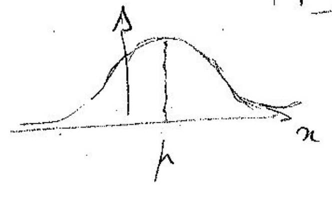
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



• $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, normale $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+)$

! cas spécial $\mu=0, \sigma=1$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$



$F_X(x)$ = pas d'expression analytique.

C. Génération pseudo-aléatoire (générateur congruentiel linéaire)

- But : obtenir $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ suite de réalisations aléatoires selon une loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Rmq. La précision numérique d'un ordi est limitée (ε-machine)

$\Rightarrow$

Sol Suite $\boxed{X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m}$

avec
- $a \in \mathbb{N}$ (multiplicateur)
- $c \in \mathbb{N}$ (incrément)
- $m \in \mathbb{N}$ (module)
- $X_0 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (graine ou seed)

- mod = reste de la division euclidienne

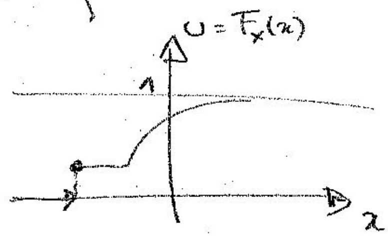
Rmq
- $X_n \in \{0, \dots, m-1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $U_n = \dfrac{X_n}{m-1} \in [0,1[\quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Si $m = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, alors mod est rapide (arithmétique binaire)

Ex $a = 25$, $c = 16$, $m = 256 \Rightarrow$ ok ou très mauvais selon le choix de la graine. (cf. notebook sur moodle)

1) Méthode de l'inverse

Déf 1 (Fonction quantile) X v.a, F_X sa f° de répartition, on appelle F_X^{-1} sa f° quantile : $F_X^{-1}(u) \; \{\inf x : F_X(x) = u\}$



Rmq
- valide pour X discrète ou cont.
- $F_X^{-1}(F_X(x)) = x$

Thm X v.a, F_X sa f° de répartition. On considère $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y = F_X^{-1}(U)$. Alors $F_Y = F_X$

Pr
$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \le y) &= P(F_X^{-1}(U) \le y) \\ &= P(U \le F_X(y)) \quad && \left[\begin{matrix}\text{composition} \\ F(F^{-1}) = I\end{matrix}\right] \\ &= F_X(y). && [\text{déf } F_U] \end{aligned}$$

Ex $X \sim \mathcal{U}([1,3]) \Rightarrow F_X(x) = 2(x-1)$ si $x \in (1,3)$

$\Rightarrow F_X^{-1}(y) = 2y+1$ avec $y \in (0,1)$

Ex $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\log(1-y)$

2) Méthode du rejet

X v.a de densité f_X et f° de répartition F_X

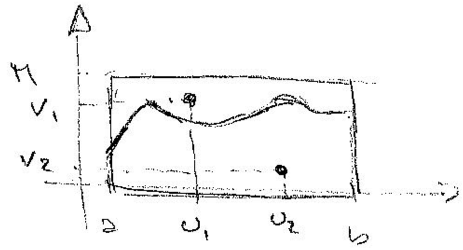
Hypothèses : • f_X est à support compact sur $[a,b]$

• $\exists M$ majorant de f_X : $f_X(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$

Algorithme (i) on tire $U \sim \mathcal{U}nif([a,b])$ et

$V \sim \mathcal{U}nif([0,M])$ de manière indép.

(ii) Si $V \leq f_X(U)$, on garde $X = U$, sinon répéter (i).



Ici on garde U_1 mais on rejette U_2.

3) Méthode de Box-Müller (simulation de normales)

$(X,Y) \sim \mathcal{N}_2(\underline{0}, I)$ vecteur normal

matrice identité

vecteur nul

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}, \quad x,y \in \mathbb{R}^2$$

Si on passe en coordonnées polaires $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \boxed{\frac{1}{2\pi}}\boxed{e^{-\frac{\rho^2}{2}} \cdot \rho} = f_{R,\Theta}(\rho,\theta)$$

$|J_\phi|$ déterminant de la matrice Jacobienne

$\Theta \sim \mathcal{U}nif([0,2\pi])$

$\Rightarrow R^2 \sim \mathcal{E}xp(1/2)$ $\left(F_{R^2}(\rho) = \int_{-\infty}^{\rho} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\,dr = 1 - e^{-r^2/2}\right)$

Algorithme (i) On tire $U_1 \sim \mathrm{Unif}([0,1]) \rightarrow R = \sqrt{-2\ln U_1}$

(ii) on tire $U_2 \sim \mathrm{Unif}([0,1]) \rightarrow \Theta = 2\pi U_2$

(iii) On pose : $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$

<u>To do</u> Exos 12, 13, 14, 15, 17 from Ch1B moodle