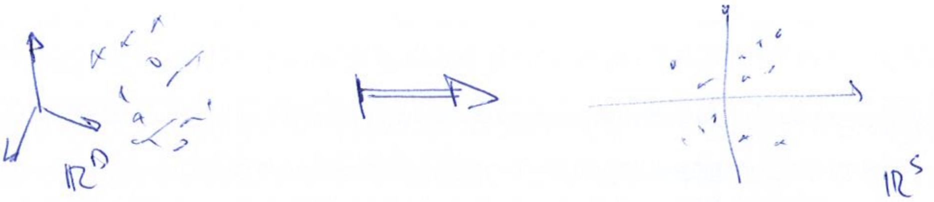
Algorithme t-SNE



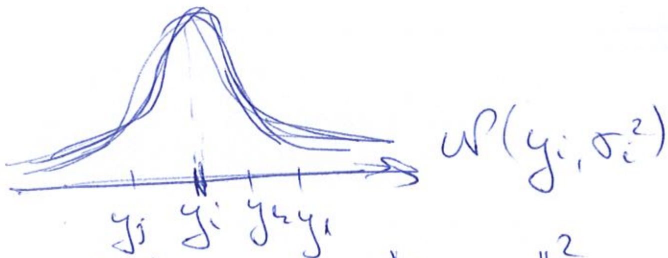
$s \ll D$

$Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ $\qquad\qquad$ $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Key : on veut conserver les chances d'être dans le même voisinage

Notion de voisinage $\quad \delta_{ij} = \|y_i - y_j\|_2$ (dist euclid en $\mathbb{R}^D$)

$d_{ij} = \|x_i - x_j\|_2$ (——— $\mathbb{R}^s$)



$$\longrightarrow \propto e^{-\frac{\|y_j - y_i\|^2}{2\sigma_i^2}} = e^{-\frac{\delta_{ij}^2}{2\sigma_i^2}} = f(\delta_{ij}/\sigma_i)$$

$$f(u) := e^{-u^2/2}$$

$$p_{j|i} = \begin{cases} \dfrac{f(\delta_{ij}/\sigma_i)}{\sum_{k \neq i} f(\delta_{ik}/\sigma_i)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Similarité $\quad p_{ij}(\underset{\substack{\| \\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)}}{\Sigma}) = \dfrac{p_{i|j} + p_{j|i}}{2n}$

De manière similaire on pose

$$q_{ij}(\nu) = \begin{cases} \dfrac{t(d_{ij}, \nu)}{\sum_{k \neq i} t(d_{ik}, \nu)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$t(u, \nu) := \left(1 + u^2/\nu\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Fonction de perte (ou coût)

$$\boxed{\mathcal{L}(Y, X, \Sigma, \nu) = D_{KL}(p \| q) = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(\Sigma) \log \frac{p_{ij}(\Sigma)}{q_{ij}(\nu)}}$$

(divergence de Kullback Leibler)

- $p_{ij} \uparrow$ et $q_{ij} \downarrow$ $\Rightarrow$ pénalité $\uparrow$
- $p_{ij} \downarrow$ et $q_{ij} \uparrow$ $\Rightarrow$ pas grave

Gradient (si $\nu = 1$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 4 \sum_{j \neq i} (p_{ij} - q_{ij})(1 + \|x_i - x_j\|^2)^{-1}(x_i - x_j)$$