



UNIVERSITÀ DI PERUGIA
Dipartimento di Matematica e Informatica



SIMULAZIONE

Gestione code di un Salone Parrucchieri

Professore

Prof. Tasso Sergio

Studente

Bocchini Fabio mat. 340600
Fagiolo Fabrizio mat. 349370

Anno Accademico 2022-2023

Indice

1	Obiettivo	3
2	Definizione del Modello	4
2.1	Stima dei Parametri	5
2.2	Distribuzioni Teoriche	6
3	Modello Reale	8
3.1	Analisi Matematica del Modello allo stato iniziale	9
3.1.1	Modello M/D/1: "Shampoo"	9
3.1.2	Modello M/M/1: "Taglio capelli Uomo"	10
3.1.3	Modello M/M/M: "Taglio capelli Donna"	11
3.1.4	Modello M/M/1: "Cassa"	13
3.2	Confronto tra i risultati	14
4	Miglioramento del modello	17
4.1	Analisi Matematica del Modello Migliorato	18
4.1.1	Modello M/M/m: "Taglio"	18
4.2	Confronto tra i risultati	20
5	Arena	23
5.1	Modulo Create	23
5.2	Modulo Process	24
5.3	Impostazioni per l'esecuzione	26
6	Conclusioni	27
6.1	Suggerimenti	30

1 Obiettivo

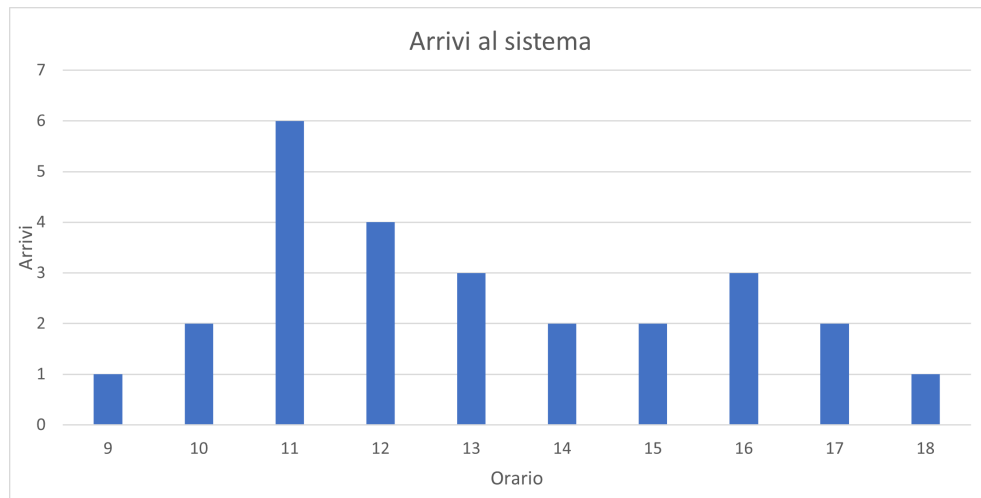
Il responsabile del Salone di parrucchieri del vostro quartiere ha problemi a determinare il numero di addetti da attivare, considerando la turnistica e l'afflusso settimanale. Decidete quindi di simulare il modello di sistema ponendovi voi stessi dei limiti (per es. attesa max in coda tollerata dai/dalle clienti). Sviluppate il modello di simulazione e implementatelo nel linguaggio che desiderate. Tentate di stimare, a partire da reali osservazioni, i modelli di arrivo e di servizio, così come la disciplina delle code. Usate parte delle osservazioni per sviluppare le distribuzioni empiriche e convalidate poi il simulatore usando le rimanenti osservazioni (al 90% del livello di confidenza). Quindi cercate di determinare le soluzioni per i problemi del responsabile.

2 Definizione del Modello

Il salone di parrucchieri unisex “Evos” in Via Luigi Bonazzi, 24, 06123 Perugia (PG) che abbiamo preso in analisi, è composto da un ingresso, dov’è possibile scegliere il tipo di trattamento che può essere consulatato durante l’attesa, visibile sul tabellone dietro le casse. Il cliente che arriva, per prima cosa viene accolto da un addetto allo shampoo laverà i capelli del cliente. Successivamente il cliente verrà servito da un parrucchiere a seconda del sesso, andremo quindi a differenziare due diverse postazioni una per i tagli da uomo ed una per i tagli da donna. Inizialmente andiamo a supporre che gli arrivi siano rappresentati per il 50% dalle signore e il restante 50% dai signori. Dopo il rispettivo taglio di capelli il cliente esce e paga in una cassa unica. L’intero sistema è basato su una politica di coda FIFO.

2.1 Stima dei Parametri

Il simulatore realizzato si basa sui modelli che andremo a descrivere nella prossima sezione estrapolati dal modello operativo reale del salone e dalle nostre proposte per migliorare l'efficienza del sistema nelle giornate dove si registra un'affluenza maggiore (solitamente martedì). Per essere più coerenti con il funzionamento del sistema reale, sono state effettuate le misurazioni del numero di arrivi dei clienti e i tempi medi di servizio di postazioni di taglio e cassa. Abbiamo quindi ricavato i seguenti parametri per la simulazione dove le postazioni hanno tempi:



- $E(T_{s_{sciampo}}) = 10$ minuti

Rappresenta la media del tempo di servizio relativo al lavaggio dei capelli del cliente

- $E(T_{s_{taglio-Uomo}}) = 20$ minuti

Rappresenta la media del tempo di servizio relativo al taglio per l'uomo

- $E(T_{s_{taglio-Donna}}) = 80$ minuti

Rappresenta la media del tempo di servizio relativo al taglio per la donna

- $E(T_{s_{cassa}}) = 3$ minuti

Rappresenta la media del tempo di servizio relativo al pagamento del trattamento

2.2 Distribuzioni Teoriche

Partendo dal numero di arrivi è stata calcolata la media campionaria e la varianza per poi confrontarle, si nota subito che si tratta di una distribuzione Poissoniana.

Dato che il numero di osservazioni è inferiore a 30 è stato possibile eseguire il test di Komorov per convalidare la distribuzione Poissoniana.

Categorie	Frequenze f_i	Totale	Ris	$f(i)$	$p(i)$	$d(i)$	$D(i)$	D
1	2	2	5,12	0,2	0,1931113034	0,2	0,1931113034	0,006888696643
2	4	8	1,44	0,4	0,2510446944	0,6	0,4441559977	0,1558440023
3	2	6	0,32	0,2	0,2175720684	0,8	0,6617280662	0,1382719338
4	1	4	1,96	0,1	0,1414218445	0,9	0,8031499107	0,09685008934
5	0	0	0	0	0,07353935914	0,9	0,8766892698	0,0233107302
6	1	6	11,56	0,1	0,03186705563	1	0,9085563254	0,09144367458
Somme	10	26	20,04					

Tabella 1: Convalida tramite Kolmogorov-Smirnov

- Media campionaria: $26/10 = 2,6$

Dalla media possiamo calcolare i tempi di interarrivo: $60/2,6 = 23$ minuti

- Variazione Standard: $20,04/(10 - 1) = 2,266666667$
- DMax: 0,1558440023

Per il test del Komorov in tabella gli arrivi sono stati raggruppati per ora utilizzando sei categorie.

Successivamente siamo andati a calcolare la probabilità teorica usando la formula della distribuzione poissoniana.

$$p(i) = \frac{e^{-media} * media^{categoria_i}}{categoria_i!}$$

Dopo aver stimato la probabilità teorica siamo andati a fare la somma cumulativa delle $f(i)$ inserendo sotto alla colonna chiamata $d(i)$, mentre sotto la colonna $D(i)$ abbiamo inserito la somma cumulativa della probabilità teorica $p(i)$.

Da qui siamo andati a prendere il valore più grande all'interno della colonna D che è risultato essere:

Dmax: 0,155844002

Una volta completati tutti i calcoli, abbiamo confrontato il valore ottenuto nella tabella di Kolmogorov Smirnov precisamente alla riga corrispondente al valore delle osservazioni totali.

Il valore essendo sotto la soglia di 0,23 e quindi al di sotto di $D_{0,10}$ risulta accettare la distribuzione data.

3 Modello Reale

Il modello che presentiamo ora è quello su cui abbiamo eseguito le misurazioni del numero di arrivi dei clienti e dei tempi di servizio. Il modello è costituito da una sola cassa aperta che possiamo approssimare con un modello teorico $M/M/1$, mentre nelle postazioni di taglio abbiamo 1 operatore per il taglio dei capelli da uomo ($M/M/1$) e 3 operatori per il taglio di capelli delle donne ($M/M/3$). In più abbiamo all'entrata uno sciapista che si occupa di lavare la testa di tutti i clienti che entrano nel locale, quest'ultimo viene approssimato con un modello $M/D/1$.

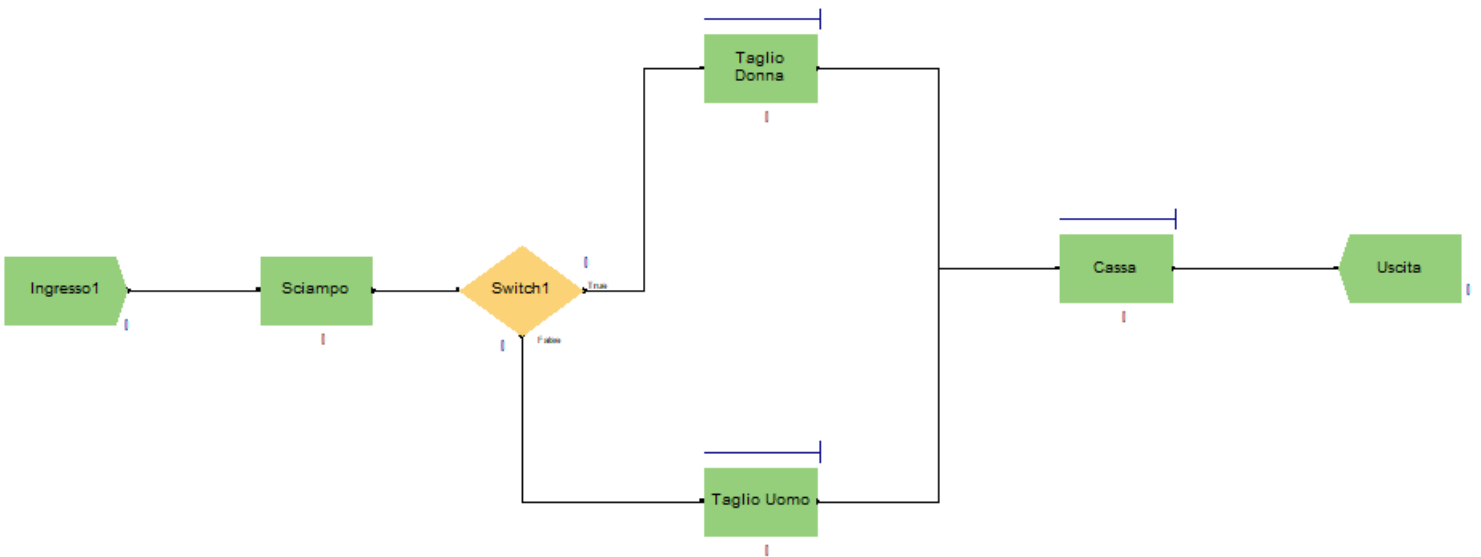


Figura 1: Modello Reale su Arena

3.1 Analisi Matematica del Modello allo stato iniziale

3.1.1 Modello M/D/1: "Shampoo"

$$\lambda = \frac{1}{23} \text{min}^{-1}$$

$$\mu = \frac{1}{10} \text{min}^{-1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{23}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{23}$$

Numero medio di utenti nel sistema:

$$N = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{10}{23} + \frac{\left(\frac{10}{23}\right)^2}{2\left(1 - \frac{10}{23}\right)} = \frac{180}{299} = 0,6$$

3.1.2 Modello M/M/1: "Taglio capelli Uomo"

$$\lambda = \frac{1}{23} * \frac{1}{2} = \frac{1}{46} min^{-1}$$

$$\mu = \frac{1}{20} min^{-1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{46}}{\frac{1}{20}} = \frac{10}{23} = 0,4347 minuti$$

Media del numero di utenti nel sistema:

$$N = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\frac{10}{23}}{(1 - \frac{10}{23})^2} = \frac{230}{169} = 1,36$$

Media del numero di utenti in coda:

$$W = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} = \frac{(\frac{10}{23})^2}{(1 - \frac{10}{23})} = \frac{100}{299} = 0,33$$

Tempo medio di attesa:

$$T_w = \frac{\frac{\rho}{\mu}}{1 - \rho} = \frac{\frac{\frac{10}{23}}{\frac{1}{20}}}{1 - \frac{10}{23}} = \frac{200}{13} = 15,38 min$$

Tempo medio di risposta:

$$R = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{20}}}{1 - \frac{10}{23}} = \frac{460}{13} = 35,38 min$$

3.1.3 Modello M/M/M: "Taglio capelli Donna"

$$\lambda = \frac{1}{23} * \frac{1}{2} = \frac{1}{46} min^{-1}$$

$$\mu = \frac{1}{80} min^{-1}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{46}}{3 * \frac{1}{80}} = \frac{40}{69} = 0,5797 minuti$$

Probabilità di avere 0 utenti nel sistema:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} = \\ &= \left[1 + \frac{(3\frac{40}{69})^0}{0!} + \frac{(3\frac{40}{69})^1}{1!} + \frac{(3\frac{40}{69})^2}{2!} + \frac{(3\frac{40}{69})^3}{3!} \frac{1}{1-\frac{40}{69}} \right]^{-1} = \\ &= \frac{667}{4227} = 0,16 \end{aligned}$$

Probabilità di avere 3 utenti nel sistema:

$$\pi_k = \frac{(m\rho)^k}{k!} \pi_0 = \frac{(3\frac{40}{69})^3}{3!} * 0,16 = \frac{32000}{36501} * 0,16 = 0,88 * 0,16 = 0,14$$

Media del numero di utenti nel sistema:

$$N = m\rho + \pi_m \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 3\frac{40}{69} + 0,14 \frac{\frac{40}{69}}{(1-\frac{40}{69})^2} = 2,19$$

Media del numero di utenti in coda:

$$W = \pi_m \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = 0,14 * \frac{\frac{40}{69}}{(1 - \frac{40}{69})^2} = 0,144 * \frac{2760}{841} = 0,14 * 3,28 = 0,46$$

Tempo medio di attesa:

$$T_w = \frac{\pi_m}{m\mu(1 - \rho)^2} = \frac{0,14}{3\frac{1}{80}(1 - \frac{40}{69})^2} = 14min$$

Tempo medio di risposta:

$$R = \frac{1}{\mu} + T_w = \frac{1}{\frac{1}{80}} + 14 = 94min$$

3.1.4 Modello M/M/1: "Cassa"

$$\lambda = \frac{1}{23} \text{min}^{-1}$$

$$\mu = \frac{1}{3} \text{min}^{-1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{23} = 0,1304 \text{min}$$

Media del numero di utenti nel sistema:

$$N = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\frac{3}{23}}{(1-\frac{3}{23})^2} = \frac{69}{400} = 0,17$$

Media del numero di utenti in coda:

$$W = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{(\frac{3}{23})^2}{(1-\frac{3}{23})} = \frac{9}{460} = 0,02$$

Tempo medio di attesa:

$$T_w = \frac{\frac{\rho}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{\frac{3}{23}}{\frac{1}{3}}}{1-\frac{3}{23}} = \frac{9}{20} = 0,45 \text{min}$$

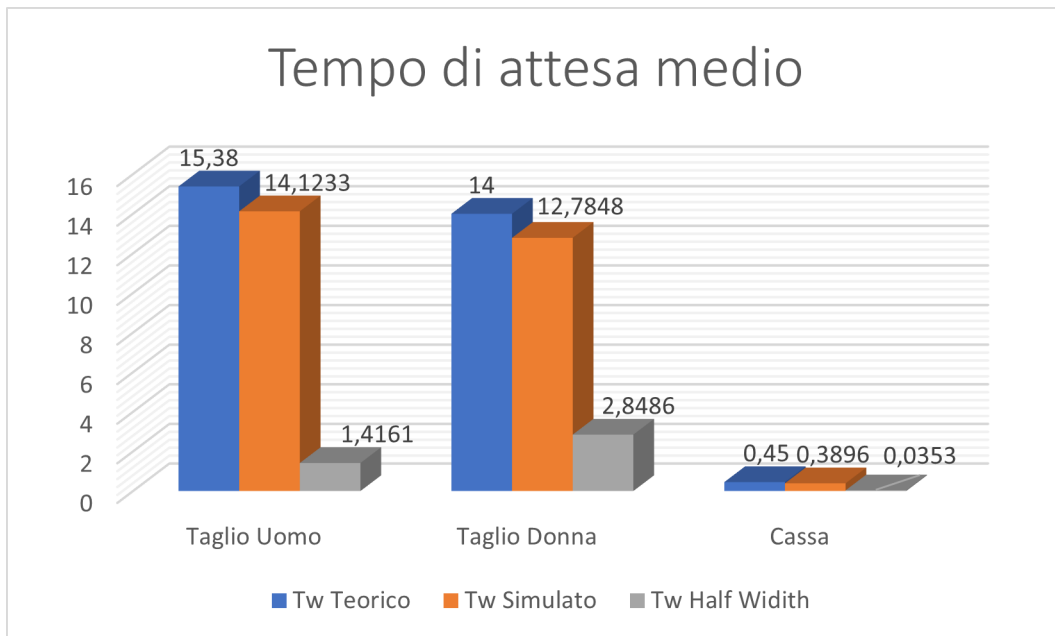
Tempo medio di risposta:

$$R = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{3}}}{1-\frac{3}{23}} = \frac{69}{20} = 3,45 \text{min}$$

3.2 Confronto tra i risultati

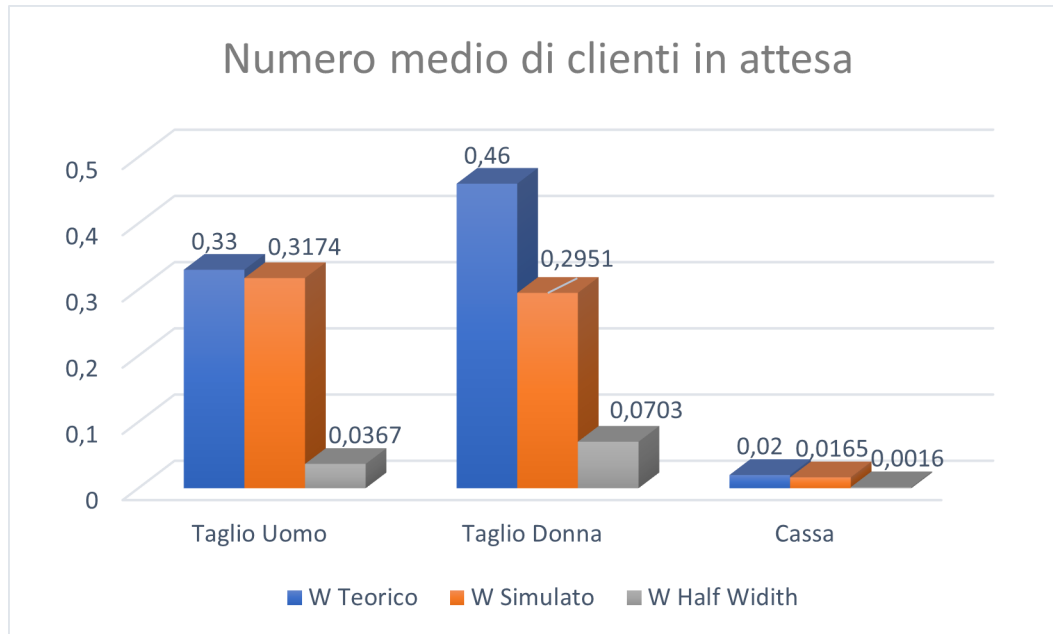
	T_w Teorico	T_w Simulato	T_w Half Width
Taglio Uomo	15,38	14,1233	1,4161
Taglio Donna	14	12,7848	2,8486
Cassa	0,45	0,3896	0,0353

Tabella 2: Tempo d'attesa



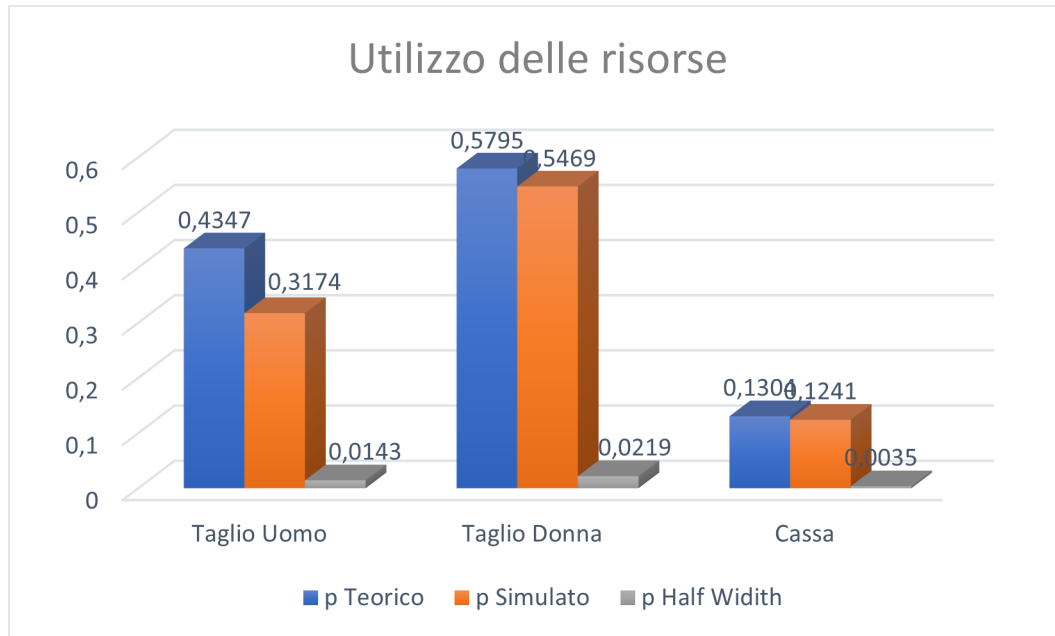
	<i>W</i> Teorico	<i>W</i> Simulato	<i>W</i> Half Width
Taglio Uomo	0,33	0,3174	0,0367
Taglio Donna	0,46	0,2951	0,0703
Cassa	0,02	0,0165	0,0016

Tabella 3: Numero medio di clienti in attesa



	ρ Teorico	ρ Simulato	ρ Half Width
Taglio Uomo	0,4347	0,3174	0,0143
Taglio Donna	0,5795	0,5469	0,0219
Cassa	0,1304	0,1241	0,0035

Tabella 4: Utilizzo delle risorse



Come possiamo notare i risultati teorici e quelli simulati sono abbastanza **simili**, sia nel taglio di capelli delle donne che degli uomini. La piccola differenza tra i valori è data da **l'half-width** (pari a 2,84 per le donne) che rappresenta l'intervallo di variabilità del risultato. Negli tagli degli uomini **l'half-width** ha uno scarto leggermente più basso, pari al 1,4161. Nella cassa invece i valori reali ed i valori teorici sono **molto vicini**. Nonostante i tempi di attesa relativamente bassi, abbiamo comunque deciso di andare a migliorare il nostro modello.

4 Miglioramento del modello

Dalle analisi successivamente ottenute abbiamo consigliato al proprietario di non differenziare i tagli tra uomini e donne, quindi avere parrucchieri in grado di gestire entrambe i tagli e di aumentare il numero di parrucchieri che tagliavano in contemporaneo i capelli (in questo esempio 4). La coda nuova è qui M/M/M dove il tempo di servizio esponenziale è 50 minuti (media tra 80 e 20 dell'altro modello). Come vedremo successivamente nei risultati, questa aggiunta permetterà, di far diminuire drasticamente il tempo di attesa in coda sia per le donne che per gli uomini facendolo diventare vermente basso.

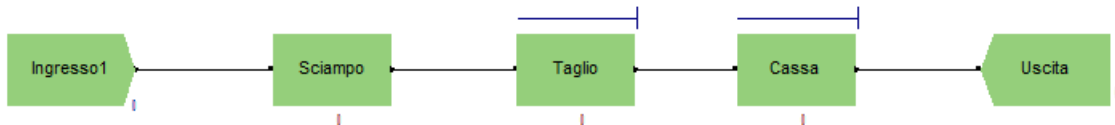


Figura 2: Modello Migliorato su Arena

4.1 Analisi Matematica del Modello Migliorato

4.1.1 Modello M/M/m: "Taglio"

$$\lambda = \frac{1}{23} \text{min}^{-1}$$

$$\mu = \frac{1}{50} \text{min}^{-1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{23}}{4 * \frac{1}{50}} = \frac{25}{46} = 0,5434 \text{min}$$

Probabilità di avere 0 utenti nel sistema:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} = \\ &= \left[\sum_{k=0}^3 \frac{(4\frac{25}{46})^k}{k!} + \frac{(4\frac{25}{46})^4}{4!} \frac{1}{1-\frac{25}{46}} \right]^{-1} = \\ &= \frac{33327}{309527} = 0,12\end{aligned}$$

Probabilità di avere 4 utenti nel sistema:

$$\pi_k = \frac{(m\rho)^k}{k!} \pi_0 = \frac{(4\frac{25}{46})^4}{4!} * 0,12 = 0,93 * 0,12 = 0,11$$

Media del numero di utenti nel sistema:

$$N = m\rho + \pi_m \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 4\frac{25}{46} + 0,11 * \frac{\frac{25}{46}}{(1-\frac{25}{46})^2} = 2,45$$

Media del numero di utenti in coda:

$$W = \pi_m \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = 0,11 * \frac{\frac{25}{46}}{(1 - \frac{25}{46})^2} = 0,29$$

Tempo medio di attesa:

$$T_w = \frac{\pi_m}{m\mu(1 - \rho)^2} = \frac{0,11}{4\frac{1}{50}(1 - \frac{25}{46})^2} = 5,5min$$

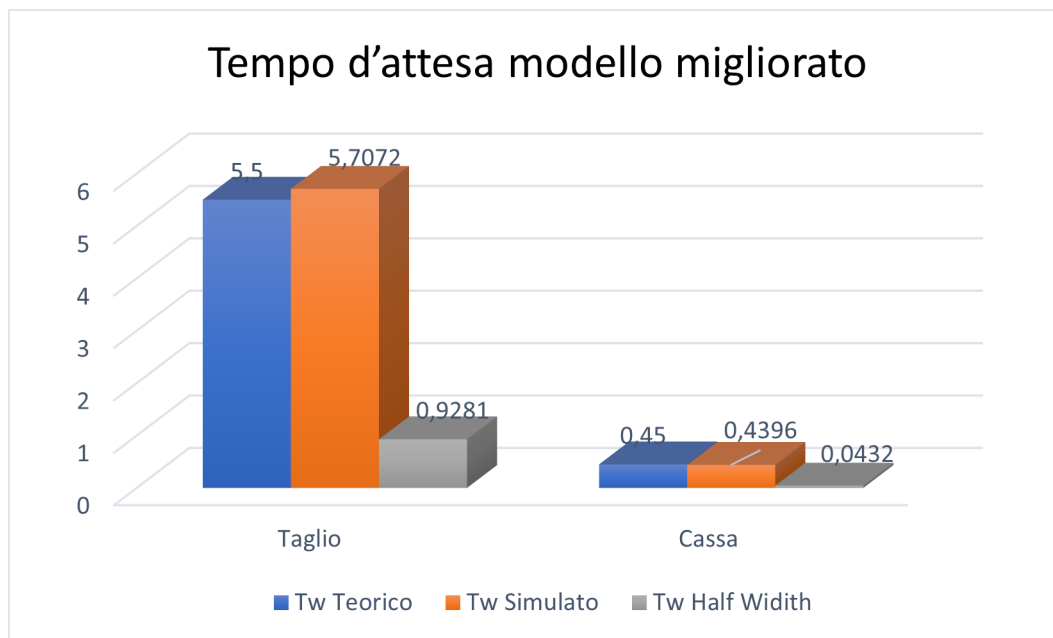
Tempo medio di risposta:

$$R = \frac{1}{\mu} + T_w = \frac{1}{\frac{1}{50}} + 5,5 = 55,5min$$

4.2 Confronto tra i risultati

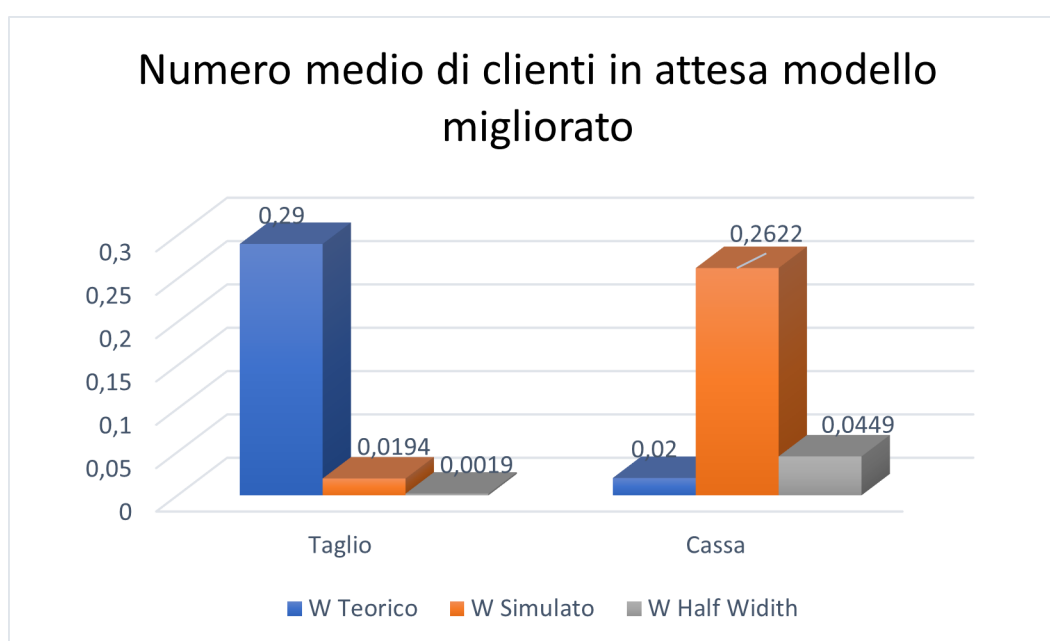
	T_w Teorico	T_w Simulato	T_w Half Width
Taglio	5,5	5,7072	0,9281
Cassa	0,45	0,4396	0,0432

Tabella 5: Tempo d'attesa modello migliorato



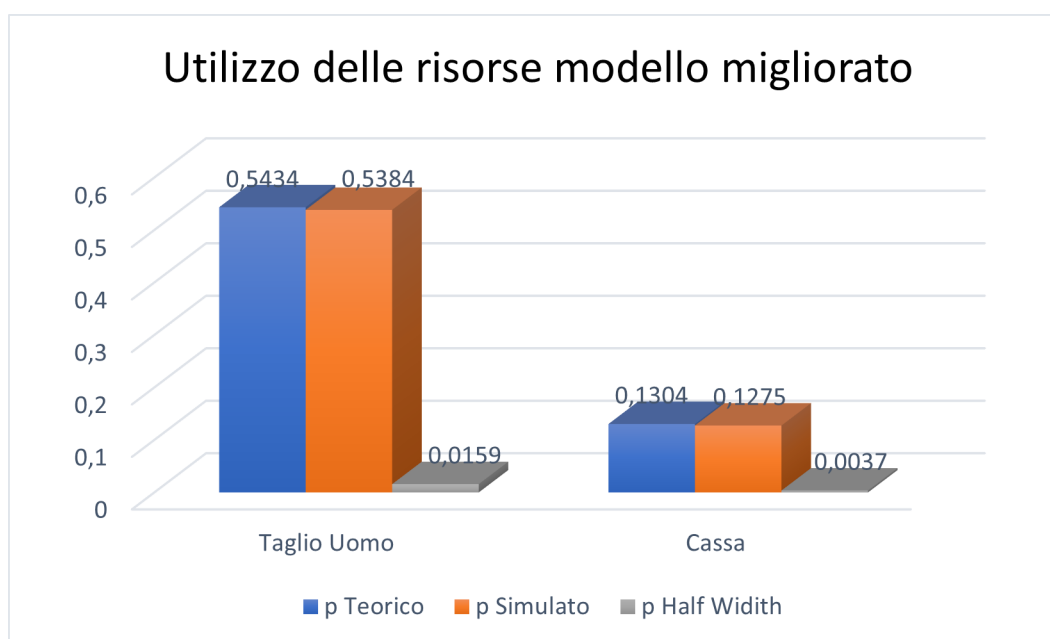
	<i>W</i> Teorico	<i>W</i> Simulato	<i>W</i> Half Width
Taglio	0,29	0,0194	0,0019
Cassa	0,02	0,2622	0,0449

Tabella 6: Numero medio di clienti in attesa modello migliorato



	ρ Teorico	ρ Simulato	ρ Half Width
Taglio	0,5434	0,5384	0,0159
Cassa	0,1304	0,1275	0,0037

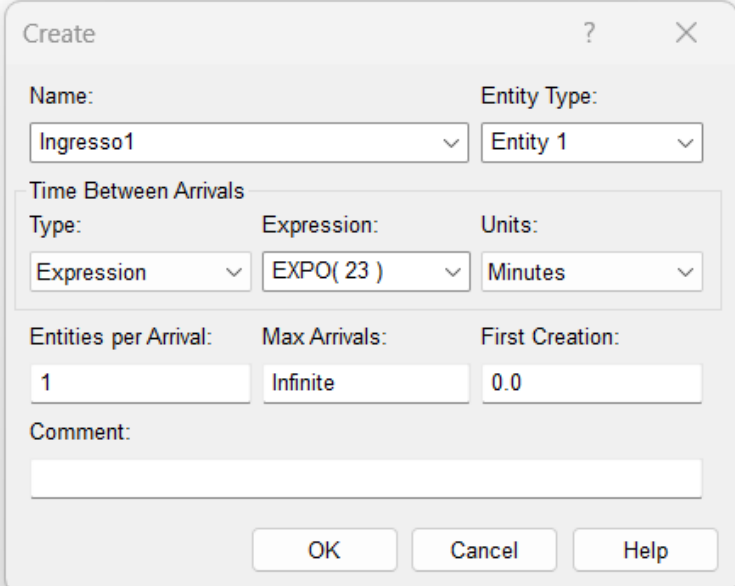
Tabella 7: Utilizzo risorse modello migliorato



5 Arena

5.1 Modulo Create

Il modulo Create permette di simulare la generazione degli arrivi. Nel caso del salone, gli arrivi si generano attraverso una distribuzione esponenziale con tempo di interarrivo pari a 23 minuti.



The 'Create' dialog box in Arena simulation software is shown. It contains the following fields and controls:

- Name:** Ingresso1
- Entity Type:** Entity 1
- Time Between Arrivals:**
 - Type:** Expression
 - Expression:** EXPO(23)
 - Units:** Minutes
- Entities per Arrival:** 1
- Max Arrivals:** Infinite
- First Creation:** 0.0
- Comment:** (empty text box)
- Buttons:** OK, Cancel, Help

Figura 3: Modulo Create

5.2 Modulo Process

Questo modulo permette di rappresentare la coda che si genera all'interno del sistema. E' possibile specificare i parametri relativi alla distribuzione dei tempi di servizio e al numero di serventi. Nel caso in esame i tempi di servizio sono tutti esponenziali con valore medio pari a 10/min per lo shampo, 50/min per il taglio e 3/min per la cassa. Le code presenti sono a singolo e a multi serviente di tipo FIFO, tutte rappresentabili attraverso code di tipo M/M/1 o M/M/M.

Process

Name: Sciampo Type: Standard

Logic
Action: Delay

Delay Type: Constant Units: Minutes Allocation: Value Added
Value: 10

☒ Report Statistics
Comment:

OK Cancel Help

Figura 4: Modulo Process Shampo

Process

Name: Taglio Type: Standard

Logic

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

Resource, TaglioU, 1
<End of list>

Add...
Edit...
Delete

Delay Type: Expression Units: Minutes Allocation: Value Added

Expression: EXPO(50)

☒ Report Statistics

Comment:

OK Cancel Help

Figura 5: Modulo Process Taglio

Process

Name: Cassa Type: Standard

Logic

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

Resource, Rcassa, 1
<End of list>

Add...
Edit...
Delete

Delay Type: Expression Units: Minutes Allocation: Value Added

Expression: EXPO(3)

☒ Report Statistics

Comment:

OK Cancel Help

Figura 6: Modulo Process Cassa

	Name	Type	Capacity	Busy / Hour	Idle / Hour	Per Use	StateSet Name	Failures	Report Statistics	Comment
1	Rcassa	Fixed Capacity	1	0.0	0.0	0.0		0 rows	<input checked="" type="checkbox"/>	
2	TaglioU	Fixed Capacity	4	0.0	0.0	0.0		0 rows	<input checked="" type="checkbox"/>	

Figura 7: Lista delle risorse

Com'è possibile vedere dalla lista delle risorse sotto la voce di taglio abbiamo inserito la capacità di 4 andando così a aumentare il numero di servienti a 4.

5.3 Impostazioni per l'esecuzione

Il numero di repliche eseguite è stato 100. Il salone lavora 9 ore per 5 giorni a settimana, dal martedì al sabato e quindi il parametro replication length è stato settato su 5 giorni e hours per day a 9.

The screenshot shows the 'Run Setup' dialog box with the 'Replication Parameters' tab selected. The settings are as follows:

- Replication Parameters:**
 - Number of Replications: 100
 - Start Date and Time: mercoledì 15 febbraio 2023 18:17:01
 - Warm-up Period: 0.0 Seconds
 - Replication Length: 5 Days
 - Hours Per Day: 9
 - Terminating Condition: (empty field)
 - Base Time Units: Minutes
- Parallel Replications:**
 - ☐ Run Replications in Parallel ☐ Disable Parallel Replications Status Dialog
 - Number of Parallel Processes: 16
 - Parallel Replication Input Data Files: (empty field) [Add]

Buttons at the bottom: OK, Annulla, Applica, ?

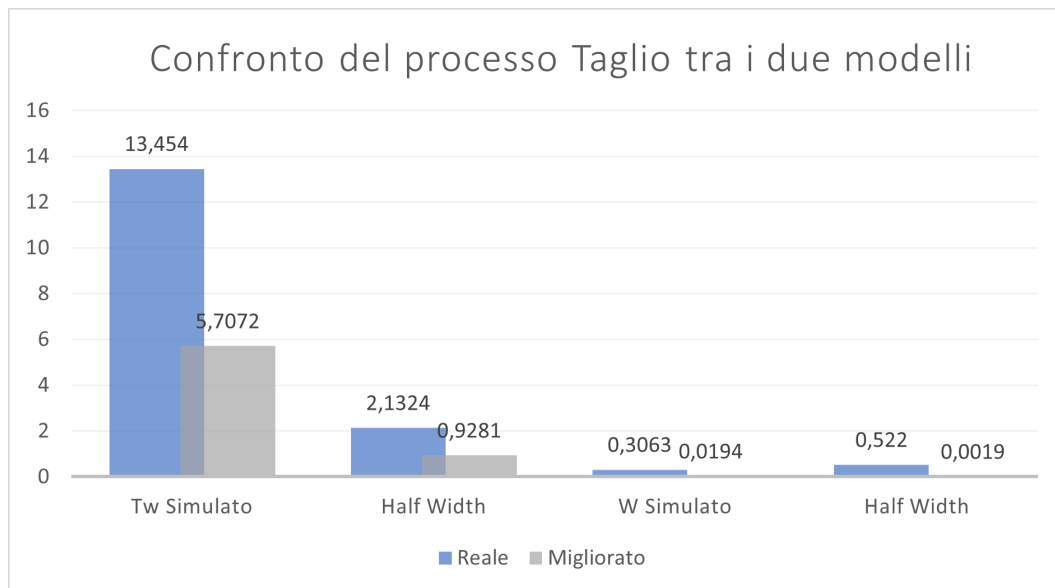
Figura 8: Numero di repliche e parametri

6 Conclusioni

Dai dati precedentemente analizzati è possibile notare come il miglioramento del modello porti ad **una diminuzione** del tempo di attesa medio da 13,4540 a 5,7072 nel processo di taglio e anche ad **una diminuzione** del numero medio di clienti in attesa che passa da 0,3063 a 0,0194.

	T_W Simulato	Half Width	W Simulato	Half Width
Reale	13,4540	2,1324	0,3063	0,522
Migliorato	5,7072	0,9281	0,0194	0,0019

Tabella 8: Confronto del processo Taglio tra i due modelli

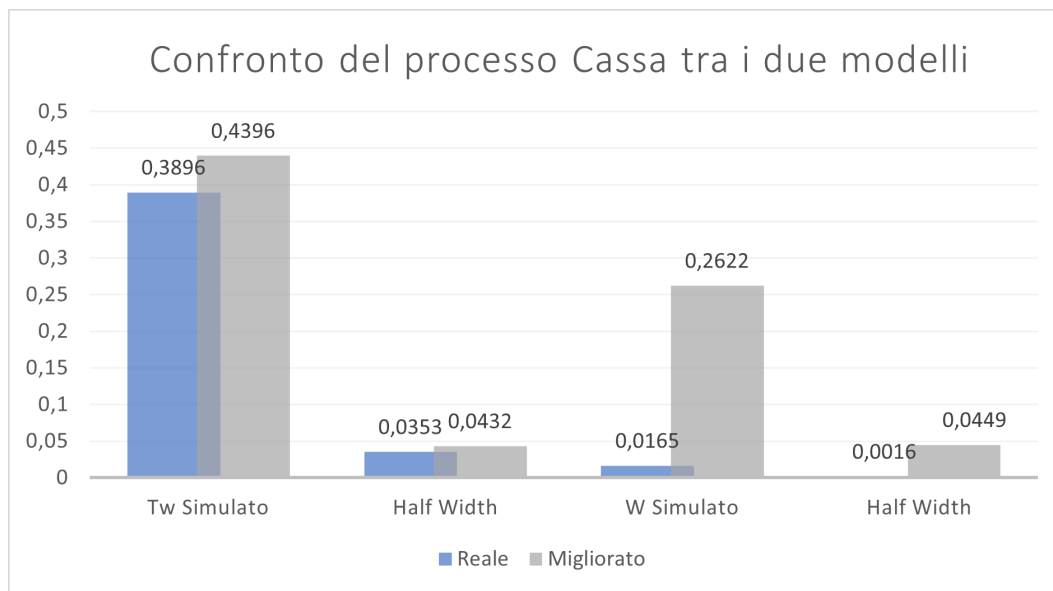


Per calcolare i valori del modello reale è stata calcolata la media tra i valori del processo **Taglio Uomo** e del processo **Taglio Donna**

In più è possibile notare come il modello migliorato porti ad **piccolo aumento** del tempo di attesa medio da 0,3896 a 0,4396 nel processo cassa e anche ad **un aumento** del numero medio di clienti in attesa che passa da 0,0165 a 0,2633

	T_W Simulato	Half Width	W Simulato	Half Width
Reale	0,3896	0,0353	0,0165	0,0016
Migliorato	0,4396	0,0432	0,2622	0,0449

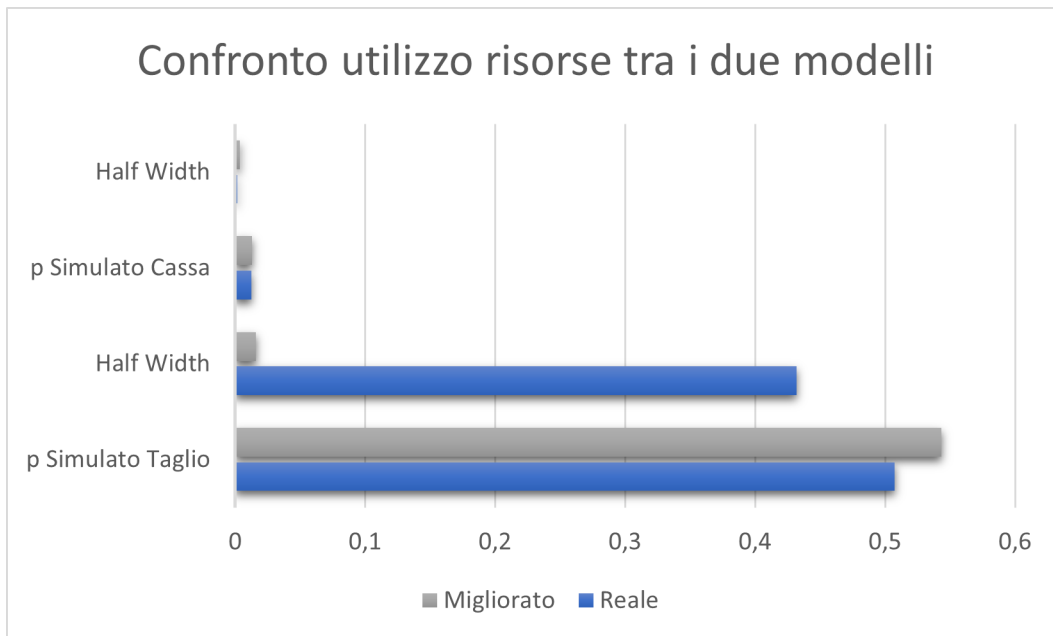
Tabella 9: Confronto del processo Cassa tra i due modelli



Anche in questo caso è possibile notare come il modello migliorato porti ad **piccolo aumento** del tempo dell'utilizzo delle risorse 0,5071 a 0,5434 nel processo di taglio e anche ad un **aumento minimo** dell'utilizzo delle risorse della cassa, da 0,1241 a 0,1274

	ρ Simulato Taglio	Half Width	ρ Simulato Cassa	Half Width
Reale	0,5071	0,4321	0,1241	0,00143
Migliorato	0,5434	0,0159	0,1274	0,0037

Tabella 10: Confronto utilizzo risorse tra i due modelli



La colonna Half Width all'interno del report permette di determinare se il modello convalida o meno il simulatore. Se compare un valore numerico **molto basso** come nel nostro caso, significa che il nostro modello convalida al 95% di confidenza.

6.1 Suggestimenti

L'obiettivo del progetto era quello di determinare il numero di dipendenti da attivare in un salone per il taglio di capelli per uomini e donne, tenendo presente che il tempo d'attesa in coda massimo tollerato da quest'ultimi era tra i 10 e i 15 minuti. Abbiamo dimostrato come nel sistema iniziale il tempo di attesa in coda effettivo era abbastanza buono sia per gli uomini che per le donne, ma siamo riusciti comunque a migliorarlo di molto scendendo sotto la soglia dei 10 minuti. Il consiglio quindi che possiamo dare al locale, affinché sia efficiente, è quello di assumere almeno 4 parrucchieri in grado di gestire sia tagli da uomo che da donna per limitare il tempo di attesa in coda.