2/03/23

- TRASFORMATA DI FOURIER

LA TRASFORMATA È DEFINITA COME

$$\hat{f}(\lambda) = \int_R f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx, \quad \lambda \in R$$

λ = FREQUENZA E NUMERO REALE

→ $\hat{f} \in L^1(R)$?

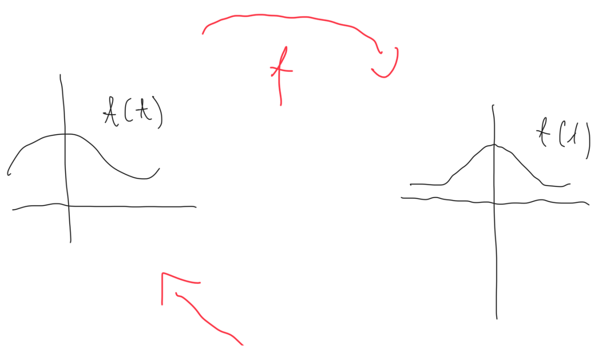
VADO AD INVERTIRE LA TRASFORMATA OVVERO VOGLIO TROVARE LA f

SPESSO ABBIAMO LA BANDA DEL SEGNALE

$$f(x) = \left[\int_R f(x) \cdot e^{i\lambda x}\, d\lambda \right]$$

→ VOGLIO ASSICURARMI CHE SIA FINITO!

→ POSSO QUINDI ANDARE A RICOSTRUIRE IL SEGNALE NEL TEMPO CON L'INVERSA DELLA TRASFORMATA DI FOURIER



→ VOGLIAMO OTTENERE IL SEGNALE.

→ SE LA FUNZIONE PASSA IN BANDA SI PERDE!

RISOLTO DAL SEGUENTE TEOREMA

TEOREMA

C_0 = INSIEME FUNZIONI CONTINUE

SE $f \in L^1(R) \wedge C^0(R)$ O SE $\hat{f} \in L^1(R)$

QUINDI INVERTITA

$$f(x) = \int_R \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

TRASFORMATA INVERSA FOURIER

$\hat{f}^{-1}$

→ QUANDO TRASFORMATA DI FOURIER STA IN L^1?

* L'ARRIVEREMO A CAPIRE!

1) RISULTATO DELLA TRASFORMATA

- TEOREMA

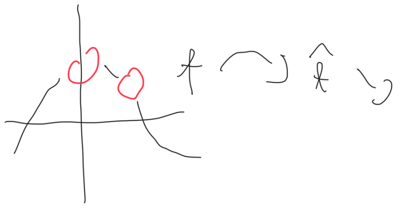
SE $f \in L^1(R)$ RISULTA CHE LA TRASFORMATA DI FOURIER È CONTINUA IN R

$$\lim_{\lambda \to +\infty} |\hat{f}(\lambda)| = 0$$

PER SCRIVERE LA TRASFORMATA DEVE ESSERE CONTENUTA IN L^1

→ NON È DETTO CHE LE FUNZIONI SIANO IN L^1 E CONTINUE!

SE $f \in L^1(R)$ NON È DETTO CHE SIA CONTINUA



O DISCONTINUITÀ

1) LA TRASFORMATA DI FOURIER PUÒ ESSERE ANCHE CONTINUA SE LA

FOURIER È UN OPERATORE LINEARE!

CI DOMANDIAMO ORA VOGLIO FARE LA TRASFORMATA DELLA DERIVATA E LEGARLA ALLA FUNZIONE CHE NON VIENE DERIVATA

RISOLTO DA TEOREMA

TEOREMA

$C^1 R$ = DERIVATA PRIMA CONTINUA

$C^2 R$ = DERIVATA 2° CONTINUA

SE $f \in L^1(R) \cap C^1(R)$

$f' \in L^1(R)$

FUNZIONE HA PUNTI DI DISCONTINUITÀ

→ DETTA REGOLARIZZANTE!

2) LA FUNZIONE SI SCHIACCIA A 0 ALL'INFINITO!

2 SIGNIFICATI TEOREMA PRECEDENTE

TEOREMA

SE $f, g \in L^1(R)$

$(\alpha f + \beta g)(\lambda)$

$\to \hat{f}(\lambda) + \beta\, \hat{g}(\lambda)$

CI DICE CHE LA TRASFORMATA DI

$$\boxed{\hat{f'}(\lambda) = i\lambda\, \hat{f}(\lambda)}, \quad \lambda \in R$$

LEGAME PRECEDENTE

SI PUÒ ESTENDERE ALLE DERIVATE SUCCESSIVE!

$C^n(R) = \{ f : R \to R \ \exists\, f^n \in [R] \}$

↪ DA RICONTROLLARE

$n \geq 2$ E $f^{(i)} \in L^1(R)$ $\exists$ 1 ... n

SE ESISTE LA 2° DERIVATA ESISTONO n DERIVATE

... DI QUALUNQUE ORDINE ALLA TRASFORMATA DELLA f

$$|\hat{f}(\lambda)| = 0$$

$$|\hat{f}(\lambda)| = |\lambda|^K |\hat{f}(\lambda)| = 0$$

COROLLARIO

SE $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$

E $f_j \in L^1(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$

$\rightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} |\lambda|^K |\hat{f}(\lambda)| = 0$.

$\rightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} \dfrac{|\hat{f}(\lambda)|}{\frac{1}{|\lambda|^2}} = 0$

$\rightarrow$ QUINDI

$\hat{f}(\lambda)$ E' UN INFINITESIMO PIÙ VELOCE DI $\frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \lambda \rightarrow +\infty$

$\alpha = 2 > 1 \rightarrow$ INTEGRABILE

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

$\rightarrow$ QUINDI SE MODULO E' INTEGRABILE STA IN L^1

TEOREMA

SIA $f \in L^1 \cap C^0(\mathbb{R})$

SE $\hat{f}(\lambda) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$

ALLORA $f(x) = 0$

COROLLARIO

SIANO f E g IN $L^1 \cap C^0(\mathbb{R})$

SE $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \hat{f}_\lambda - \hat{g}_\lambda = 0 \iff (f - g)(\lambda) = 0$

$\rightarrow (f - g)(x) = 0$

SE HO LE STESSE TRASFORMATE AVRÒ LE STESSE FUNZIONI!

TEOREMA

SE $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

$\rightarrow f \times g \in L^1(\mathbb{R})$

$\rightarrow \widehat{(f \cdot g)}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda)$

LA TRASFORMATA DI FOURIER TRASFORMA IL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE IN UN PRODOTTO USUALE!

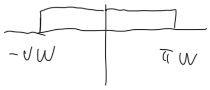
IL SEGNALE SI CONOSCE DI PIÙ IN BANDA CHE NEL PRODOTTO DEL TEMPO!

CAMPIONAMENTO

PRESO UN SEGNALE CONTINUO CHE STA IN L^2

E CHE IL SEGNALE SIA A BANDA LIMITATA

$[\Omega] > \pi w$



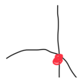
IL SEGNALE S È QUINDI LA SOMMA

$F(S) = \sum S \frac{K}{W}$

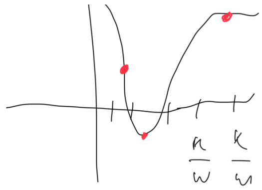
DOVE LA DISTANZA TRA UN ELEMENTO E L'ALTRO È UGUALE

$\frac{K}{W}$ = ISTANTI TEMPORALI O NODI

LA FORMULA PERMETTE QUINDI DI RICOSTRUIRE IL SEGNALE CIOÈ LA FUNZIONE CHE INTERPOLA I PUNTI



(AMPIEZZA)



RIESCO QUINDI A RICOSTRUIRE IL SEGNALE IN OGNI ISTANTE t

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S \frac{k}{W} \sin(Wt - k)$$

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

SE RICOSTRUISCO UN'APPROSSIMAZIONE DEVO STARE ATTENTO ALL'ERRORE LEGATO AD ESSO (ERRORE DI APPROSSIMAZIONE)

$\Delta t = \frac{1}{W}$ → INTERVALLO TEMPORALE