Introduzione agli Algoritmi
Esame Scritto a canali unificati
con idee per la soluzione

docenti: T. Calamoneri, A. Monti
Sapienza Università di Roma
Giugno 2022

Esercizio 1 (10 punti):
Per la soluzione di un certo problema disponiamo di un algoritmo iterativo con costo computazionale $\Theta\left(n^2\right)$. Ci viene proposto in alternativa un algoritmo ricorsivo il cui costo è catturato dalla seguente ricorrenza:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \Theta(1)$ per $n \geq 4$
$T(n) = \Theta(1)$ altrimenti
Dove a è una certa costante intera positiva con $a \geq 2$.

Determinare qual è il valore massimo che la costante intera a può avere perché l'algoritmo ricorsivo risulti asintoticamente più efficiente dell'algoritmo iterativo di cui disponiamo. **Motivare bene la vostra risposta.**

La risposta è 15.
Cominciamo col risolvere la ricorrenza. Applicando ad esempio il metodo principale abbiamo $f(n) = \Theta(1)$ mentre $n^{\log_4 a} \geq n^{log_4 2} = n^{\frac{1}{2}}$ si ha quindi $f(n) = O(n^{\log_4 a - \epsilon})$. Siamo pertanto nel primo caso del metodo e la soluzione della ricorrenza è $\Theta\left(n^{\log_4 a}\right)$.
Ora se $a = 16$ la ricorrenza ha soluzione $\Theta\left(n^{\log_4 16}\right) = \Theta\left(n^2\right)$ quindi perché l'algoritmo ricorsivo abbia costo computazionale inferiore a quella dell'algoritmo iterativo deve aversi $a \leq 15$.

Esercizio 2 (10 punti):
Sia A un array di n interi. Con la *coppia ordinata* (i, j), $0 \leq i \leq j < n$, rappresentiamo il suo sottoarray che parte dall'elemento in posizione i e termina con

l'elemento in posizione j, definiamo *valore* di un sottoarray come la somma dei suoi elementi.
Progettare un algoritmo che, dato un array A di interi positivi ed un intero positivo s, restituisce la coppia ordinata che rappresenta il sottoarray di A più a sinistra che ha valore s. Se un tale sottoarray non esiste, la funzione deve restituire $None$.
L'algoritmo deve avere costo computazionale $O(n)$.

Ad esempio, per $A = [1, 3, 5, 2, 9, 3, 3, 1, 6]$

- con $s = 7$ l'algoritmo deve restituire la coppia $(2, 3)$ (ci sono infatti in A tre sottoarray con valore 7 le cui coppie nell'ordine da sinistra a destra sono $(2, 3)$, $(5, 7)$, $(7, 8)$).
- con $s = 21$ l'algoritmo deve restituire $None$ in quanto A non ha sottoarray con valore 21 .

Dell'algoritmo proposto:

a) si dia la descrizione a parole;

b) si scriva lo pseudocodice;

c) si giustifichi il costo computazionale.

a) Consideriamo i vari sottoarray di A utilizzando due indici i e j al primo e all'ultimo elemento del sottoarray rispettivamente e una variabile tot con il valore del sottoarray. Inizializziamo i due indici a 0 e di conseguenza tot a $A[0]$. Incrementiamo di volta in volta gli indici distinguendo 3 possibili casi:

- **il valore del sottoarray in esame è inferiore ad s, bisognerà in questo caso incrementare j aggiungendo un altro elemento al sottoarray. Il valore del nuovo array sarà $tot + A[j]$.**
- **il valore del sottoarray in esame è s. In questo caso abbiamo trovato il sottoarray e restituiamo i due indici i e j.**
- **il valore del sottoarray è superiore ad s. In questo caso dobbiamo incrementare i escludendo il primo elemento dal sottoarray. Il valore del nuovo array sarà $tot - A[i - 1]$**

```
def es2(A,s):
    i=j=tot=0
    while j<len(A):
        print(i,j)
        tot+=A[j]
        while tot>s:
            tot-=A[i]
            i+=1
        if tot==s: return i,j
        j+=1
    return None
```

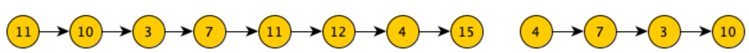
Ovviamente con le varie operazione di incremento di i e j dobbiamo far attenzione che si abbia sempre $i \leq j$ e $j < n$.

b) di seguito una possibile implementazione dell'algoritmo in Python:

c) il costo computazionale dell'algoritmo dipende dal numero di iterazioni dei $while$. Ad ogni iterazione del $while$ più interno si incrementa l'indice i e ad ogni iterazione del $while$ più esterno si incrementa l'indice j; questo significa che il numero di iterazioni è inferiore a $2n$ (infatti deve aversi sempre $i \leq j < n$ con all'inizio $i = j = 0$). Il costo dell'algoritmo è dunque $\Theta(n)$.

Esercizio 3 (10 punti): Si consideri una lista concatenata dove ogni nodo ha 2 campi, il campo `key` contenente un intero ed il campo `next` con il puntatore al nodo seguente (`next` vale $None$ per l'ultimo nodo della lista).

Bisogna aggiornare i puntatori della lista in modo da creare una nuova lista priva dei nodi con valore superiore a 10 e in cui i nodi rimanenti appaiono in ordine inverso rispetto all'originale. Ad esempio per la lista di seguito a sinistra la funzione deve restituire la lista di seguito a destra:



Progettare un **algoritmo** che, dato il puntatore p alla testa della lista, risolve il problema in tempo $\Theta(n)$ dove n è il numero di nodi della lista originaria. Lo spazio di lavoro dell'algoritmo proposto deve essere $\Theta(1)$ (in altri termini non è possibile definire e utilizzare altre liste o nodi).
Dell'algoritmo proposto:

a) si dia la descrizione a parole,

b) si scriva lo pseudocodice,

c) si giustifichi il costo computazionale.

a) Inizializzo un puntatore q ad una lista vuota questo sara' alla fine il puntatore alla nuova lista da restituire. Scorro la lista originaria e per ogni nodo che incontro, se la chiave del nodo è superiore a 10 semplicemente lo trascuro, in caso contrario lo aggancio in testa alla lista q.

b)

```
def es3(p):
    q = None
    while p:
        if p.key > 10 :
            p = p.next
        else:
            t = p.next
            p.next = q
            q = p
            p = t
    return q
```

c) Il while richiede di scorrere l'intera lista e costa dunque $\Theta(n)$.