$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Formulario Limiti Notevoli

Formulario in preparazione
del primo esonero di
Calcolo Differenziale

author Valerio Fontana

13 novembre 2023

Indice

Capitolo 1

Limiti Notevoli

1.1 Limiti tendenti a 0 (funzioni)

- Logaritmi

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}} \implies \text{Cambio di base} \implies \log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} \implies$$

$$\implies \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln(a)}}{x} = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{\ln(a)}},\ \text{con } a>0,\ a\neq 1,\ c=e$$

- Esponenziali

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln(a)}{1} = 1\cdot\ln(a) = \boxed{\ln(a)},\ \text{con } a>0$$

- Potenze con Differenze

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^c-1}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{c\cdot(1+x)^{c-1}}{1} = c\cdot 1^{c-1} = \boxed{c},\ \text{con } c\in\mathbb{R}$$

- Funzioni Goniometriche

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{1} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}} \implies \text{L' Hopital} \implies \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \boxed{1}$$

1.2 Limiti tendenti a infinito (successioni)

- Numero di Nepero

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x} \implies \text{Definizione numero di Nepero} \implies \boxed{e}$$

- Successioni Esponenziali

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} a^x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } -1<a<1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0^+}, \text{ con } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{x!}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}, \text{ con } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{x^x}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}, \text{ con } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x!}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^x}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x!}{x^x}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}$$

- Successioni Radicali

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}}} \implies \text{Definizione radice n-esima} \implies \boxed{1}, \text{ con } a>0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}} \implies \text{Definizione radice n-esima} \implies \boxed{1}$$

- Successioni Logaritmiche

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \log_a(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x!}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^x}} \implies \text{Gerarchia degli Infiniti} \implies \boxed{0}$$

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima, cioè se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(1+a_n)}{a_n} = \frac{1}{\ln(a)} \quad \forall a>0, a \neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{a_n}-1}{a_n} = \ln(\alpha) \quad \forall \alpha>0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^\alpha-1}{a_n} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{(a_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan(a_n)}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(a_n)}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(a_n)}{a_n} = 1$$