$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

Formulario Equazioni Differenziali

Formulario sulla terza e ultima parte dell'esame di
Calcolo Integrale

made by *Valerio Fontana*

22 Maggio 2023

Indice

Equazioni Lineari del Primo Ordine

Un'equazione lineare del primo ordine viene rapresentata come

$$y' + a(x)y = b(x)$$

1.1 Equazioni Lineari del Primo Ordine Omogene

Se $b(x) = 0$, quindi se l'equazione nella forma generalizzata diventa $y' + a(x)y = 0$, allora la soluzione generale a quest'ultima è

$$y = ke^{-\int a(x)dx}$$

con k costante reale arbitraria.

Prendendo come esempio l'equazione

$$y' + x^2 y = 0$$

potendo essere generalizzata come $y' + a(x)y = 0$, la sua soluzione generale sarà

$$y = ke^{-\int x^2 dx} = ke^{-\frac{x^3}{3}}$$

1.2 Equazioni Lineari del Primo Ordine non Omogene

Se invece $b(x) \neq 0$, quindi se l'equazione nella forma generalizzata rimane $y' + a(x)y = b(x)$, la soluzione generale sarà invece

$$y = e^{-\int a(x)dx} \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + c$$

con c costante reale arbitraria.

Prendendo come esempio l'equazione

$$y' + 2y = 3x$$

potendo essere generalizzata come $y' + a(x)y = b(x)$, la sua soluzione generale sarà

$$y = e^{-\int 2dx} \int 3xe^{\int 2dx} dx + c = e^{-2x} \int 3xe^{2x} dx + c = e^{-2x}(\frac{3xe^{2x}}{2} - \frac{3e^{2x}}{4}) + c = \frac{3x}{2} - \frac{3}{4} + ce^{-2x}$$

Equazioni Differenziali a Variabili Separabili

Nelle Equazioni differenziali a variabili separabili viene rappresentata come

$$y' = f(x)g(y)$$

ad esempio, nell'equazione $y' = 2xy^2$, $f(x) = 2x$ e $g(y) = y^2$.
Si risolve nei seguenti passaggi

1. Presa nella sua forma generale $y' = f(x)g(y)$
2. Possiamo riscrivere y' come $\frac{dy}{dx}$, ottenendo $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$
3. Dividiamo entrambi i membri per $g(y)$, ottenendo $\frac{dy}{g(y)dx} = f(x)$,
   e dopo ancora moltiplichiamo entrambi i membri per dx, ottenendo $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
4. Infine integriamo entrambi i membri $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$, ottenendo cosi la soluzione generale

Riprendendo l'esempio

$$y' = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2 dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c} \textit{ soluzione generale}$$

Equazioni Differenziali Lineari del Secondo Ordine

Un'equazione lineare del secondo ordine viene rappresentata come

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

con a, b e c coefficienti reali costanti.

3.1 Equazioni Lineari del Secondo Ordine Omogene

Se $r(x) = 0$, quindi se l'equazione nella forma generalizzata diventa $ay'' + by' + cy = 0$, allora bisognerà studiare la sua equazione caratteristica di 2° grado con incognita z.

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\begin{cases} Se\ z_1 \neq z_2,\ quindi\ se\ \Delta > 0,\ y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x} \\ Se\ z_1 = z_2,\ quindi\ se\ \Delta = 0,\ y = c_1 e^{z_1 x} + x c_2 e^{z_1 x} \\ Se\ z_1 = a + i\beta\ e\ z_2 = a - i\beta,\ quindi\ se\ \Delta < 0,\ y = c_1 e^{ax} cos(\beta x) + e^{ax} c_2 sin(\beta x) \end{cases}$$

con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie.

- Data l'equazione $y'' - 6y' + 8y = 0$, la sua equazione caratteristica sarà $z^2 - 6z + 8 = 0$, avente come soluzioni $z_1 = \frac{6+\sqrt{36-32}}{2} = 4$ e $z_2 = \frac{6-\sqrt{36-32}}{2} = 2$.
Concludendo che la soluzione generale sarà $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$

- Data l'equazione $y'' - 6y' + 9y = 0$, la sua equazione caratteristica sarà $z^2 - 6z + 9 = 0$, avente come soluzioni $z_1 = z_2 = \frac{6}{2} = 3$.
Concludendo che la soluzione generale sarà $y = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x}$

- Data l'equazione $y'' + 4y' + 5y = 0$, la sua equazione caratteristica sarà $z^2 + 4z + 5 = 0$, avente come soluzioni $z_1 = -2 + i$ e $z_2 = -2 - i$.
Concludendo che la soluzione generale sarà $y = c_1 e^{-2x} cos(x) + c_2 e^{-2x} sin(x)$

3.2 Equazioni Lineari del Secondo Ordine non Omogene

Se invece $r(x) \neq 0$, quindi se l'equazione nella forma generalizzata diventa $ay'' + by' + cy = r(x)$, per risolverla bisognerà usare il metodo della variazione delle costanti.

1. Si trova la soluzione generale $y_A = c_1 y_1 + c_2 y_2$ dell'equazione omogenea associata $ay'' + by' + cy = 0$
2. Si trova una soluzione particolare $y_P = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ dell'equazione non omogenea risolvendo il seguente sistema
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = r(x) \end{cases}$$
3. La soluzione generale dell'equazione è la somma delle soluzioni y_A e y_P, ovvero $y = y_A + y_P$

Data l'equazione differenziale $y'' - 4y' + 4y = x$,
si trova per prima cosa la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

$$z_1 = z_2 = 2$$

$$y_A = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

successivamente si trova una soluzione particolare dell'equazione non omogenea impostiamo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)(e^{2x}) + c_2'(x)(xe^{2x}) = 0 \\ c_1'(x)(2e^{2x}) + c_2'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) = x \end{cases}$$

sostituendo $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ con u e v, si ottiene

$$\begin{cases} u * e^{2x} + v * xe^{2x} = 0 \\ u * 2e^{2x} + v * (e^{2x} + 2xe^{2x}) = x \end{cases}$$

dividendo entrambe le equazioni per e^{2x} si ottiene

$$\begin{cases} u + vx = 0 \\ 2u + v + 2vx = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -vx \\ 2(-vx) + v + 2vx = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -vx \\ v = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -x^2 \\ v = x \end{cases}$$

risostituendo u e v con $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ si ottiene

$$\begin{cases} c_1'(x) = -x^2 \\ c_2'(x) = x \end{cases}$$

integrando entrambi i membri si ottiene

$$\begin{cases} c_1(x) = -\frac{x^3}{3} + k_1 \\ c_2(x) = \frac{x^2}{2} + k_2 \end{cases}$$

quindi la soluzione particolare dell'equazione non omogenea sarà

$$y_P = -\frac{x^3}{3}e^{2x} + \frac{x^2}{2}xe^{2x}$$

e infine la soluzione generale dell'equazione differenziale sarà

$$y = y_A + y_P = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} - \frac{x^3}{3}e^{2x} + \frac{x^2}{2}xe^{2x}$$

$$y = (c_1 - \frac{x^3}{3})e^{2x} + (c_2 + \frac{x^2}{2})xe^{2x}$$

$$y = c_1 - \frac{x^3}{3} + (c_2 + \frac{x^2}{2})x$$

$$y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} + c_1 + c_2x$$

$$y = \frac{-2x^3 + 3x^3}{6} + c_1 + c_2x$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 + c_2x$$

Problema di Cauchy

Il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione particolare di un'equazione differenziale per una funzione $y = f(x)$ che soddisfi una condizione iniziale specifica, solitamente indicata con y_0.

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

4.1 Problema di Cauchy per Equazioni Lineari del Primo Ordine

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y' = -e^{-x}$$

$$\int y' dx = \int -e^{-x} dx$$

$$y = e^{-x} + c$$

A questo punto s'impone la condizione iniziale $y_0 = 3$, dove $x = 0$ e $y = f(x) = f(0) = 3$

$$3 = e^{-0} + c$$

$$3 = 1 + c$$

$$3 - 1 = c$$

$$2 = c \ quindi \ c = 2$$

$$\begin{cases} y = e^{-x} + c \ soluzione \ generale \\ y = e^{-x} + 2 \ soluzione \ particolare \end{cases}$$

4.2 Problema di Cauchy per Equazioni Lineari del Secondo Ordine

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 2x \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

conoscendo y'', andiamo a ricavarci rispettivamente y' e y.

$$y' = \int y'' dx = \int 2x dx = x^2 + c_1$$

$$y = \int y' dx = \int (x^2 + c_1) dx = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2 \; \textit{soluzione generale}$$

Per trovare le 2 costanti c_1 e c_2 bisognerà imporre le condizioni iniziali a loro 'associate'.

Per trovare il valore di c_1, viene imposta la prima condizione $y'(1) = 2$, con $x = 1$ e $y' = f'(x) = f'(1) = 2$, ricordando che

$$y' = x^2 + c_1$$

sostituendo i termini ove possibile si ottiene

$$2 = 1^2 + c_1$$

$$2 - 1 = c_1$$

$$1 = c_1 \; \textit{quindi} \; c_1 = 1$$

Trovata la prima incognita della soluzione particolare, si può imporre la seconda condizione $y(1) = 3$ con $x = 1$ e $y = f(x) = f(1) = 3$, ricordando che

$$y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

e che $c_1 = 1$, sostituendo i termini ove possibile si ottiene

$$3 = \frac{1^3}{3} + 1 + c_2$$

$$3 - \frac{1}{3} - 1 = c_2$$

$$2 - \frac{1}{3} = c_2$$

$$\frac{5}{3} = c_2 \; \textit{quindi} \; c_2 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2 \; \textit{soluzione generale} \\ y = \frac{x^3}{3} + x + \frac{5}{3} \; \textit{soluzione particolare} \end{cases}$$