Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Городянский Фёдор Николаевич

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,7 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,7 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [@wiki:bash].

Выполнение лабораторной работы

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{3.7v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{3.7v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{3.7v} \text{ – в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{3.7v} \text{ – во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \dfrac{11.7}{4,7}$ и $x_2 = \dfrac{11.7}{2,7}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и - v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \dfrac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\dfrac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\dfrac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\dfrac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{16.11v^2 - v^2} = \sqrt{15.11}v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.11}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.11}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \dfrac{11.7}{4.7} \end{cases} \tag{1}$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \dfrac{11.7}{2.7} \end{cases} \tag{2}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{15.11}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Построение модели

```
using DifferentialEquations, Plots

# расстояние от лодки до катера

k = 11.7

# начальные условия для 1 и 2 случаев
```

```
r0 = k/4.7
r0_2 = k/2.7
theta0 = (0.0, 2*pi)
theta0_2 = (-pi, pi)

# данные для движения лодки браконьеров

fi = 3*pi/4;
t = (0, 50);

# функция, описывающая движение лодки браконьеров

x(t) = tan(fi)*t;

# функция, описывающая движение катера береговой охраны

f(r, p, t) = r/sqrt(15.11)

# постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая

prob = ODEProblem(f, r0, theta0)

sol = solve(prob, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения катера"
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:001]):

Рис. 1: Траекория движения катера в 1 случае

```
## необходимые действия для построения траектории движения лодки

ugol = [fi for i in range(0,15)]

x_lims = [x(i) for i in range(0,15)]

# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки"
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:002]):

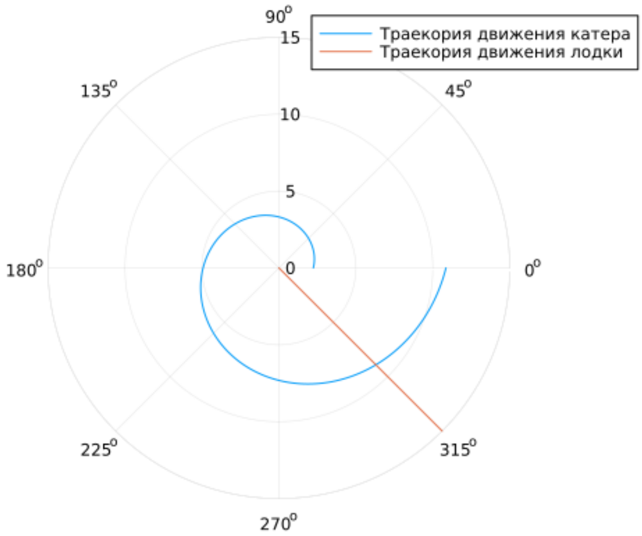

Рис. 2: Траекория движения катера и лодки

```
# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны

y(x)=(1170*exp(10*x)/(sqrt(1581)))/(407)



# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нах

y(fi)

# точка пересечения лодки и катера для 1 случая

1.2357999444838665e9
```

Теперь перейдем к решению в случае 2.

```
# постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая

prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)

sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траекория движения кате
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:003]):

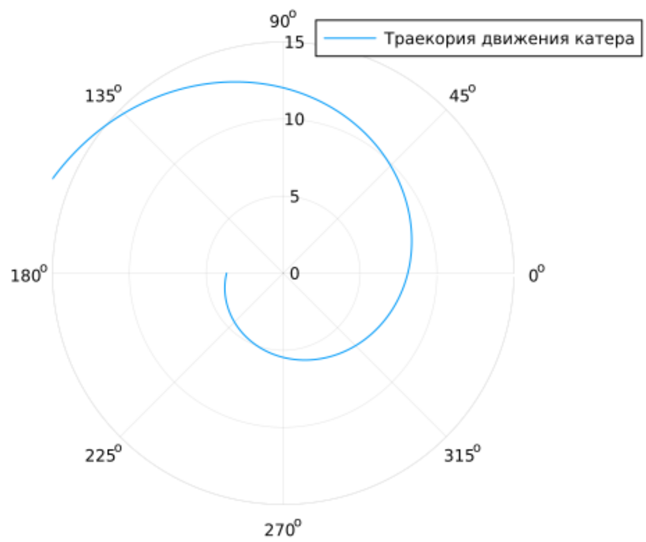

Рис. 3: Траекория движения катера во 2 случае

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки"
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:004]):

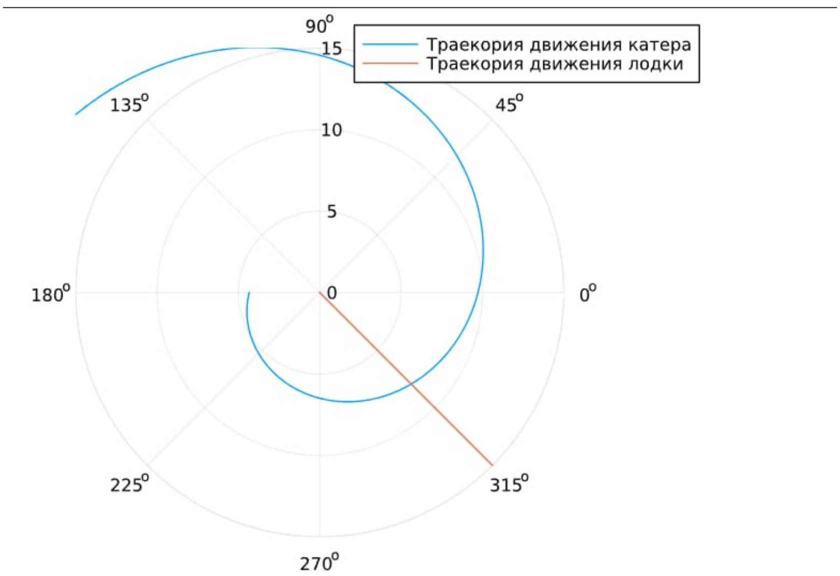

Рис. 4: Траекория движения катера во 2 случае

```
# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случая

y2(x)=(117*exp((10*x/sqrt(1511))+(10*pi/sqrt(1511))))/(27)

# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нах

y2(fi-pi)

# точка пересечения лодки и катера для 2 случая
7.944543860150496
```

Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построил математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

Список литературы