Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Городянский Фёдор Николаевич

Содержание

# Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

# Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,7 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,7 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

# Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [@wiki:bash].

# Выполнение лабораторной работы

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за , – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров (), а полярная ось проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время катер и лодка окажутся на одном расстоянииx от полюса. За это время лодка пройдет , а катер (или , в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как или (во втором случае ). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниеx можно найти из следующего уравнения:

Отсюда мы найдем два значения и , задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: - радиальная скорость и - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, . Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем .

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус , .

Получаем:

Из чего можно вывести:

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

С начальными условиями для первого случая:

Или для второго:

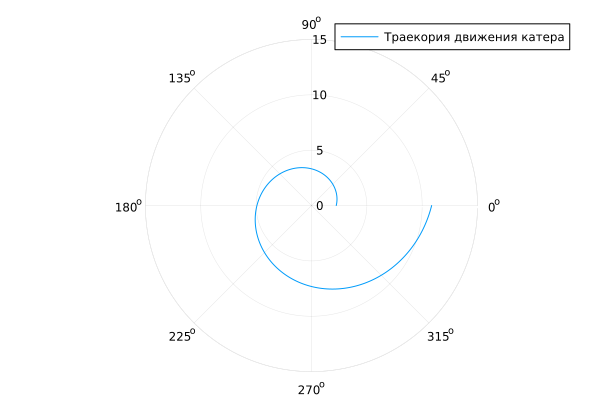
Исключая из полученной системы производную по , можно перейти к следующему уравнению:

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

## Построение модели

using DifferentialEquations, Plots  
  
# расстояние от лодки до катера  
  
k = 11.7  
  
# начальные условия для 1 и 2 случаев  
  
r0 = k/4.7  
r0\_2 = k/2.7  
theta0 = (0.0, 2\*pi)   
theta0\_2 = (-pi, pi)  
  
# данные для движения лодки браконьеров  
  
fi = 3\*pi/4;  
t = (0, 50);  
  
# функция, описывающая движение лодки браконьеров  
  
x(t) = tan(fi)\*t;  
  
# функция, описывающая движение катера береговой охраны  
  
f(r, p, t) = r/sqrt(15.11)  
  
# постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая  
  
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)  
  
sol = solve(prob, saveat = 0.01)  
  
# отрисовка траектории движения катера  
  
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения катера")

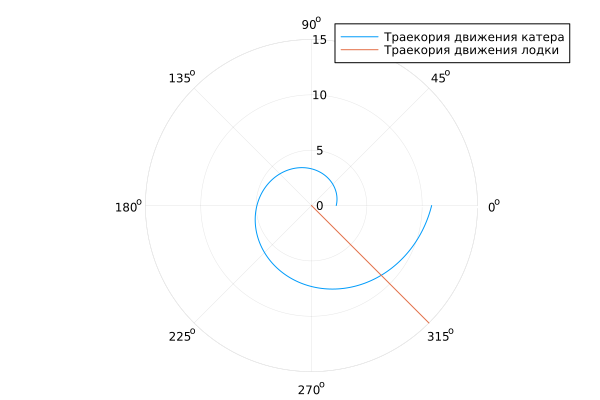
В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:001]):



Траекория движения катера в 1 случае

## необходимые действия для построения траектории движения лодки  
  
ugol = [fi for i in range(0,15)]  
  
x\_lims = [x(i) for i in range(0,15)]  
  
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером  
  
plot!(ugol, x\_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки")

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:002]):



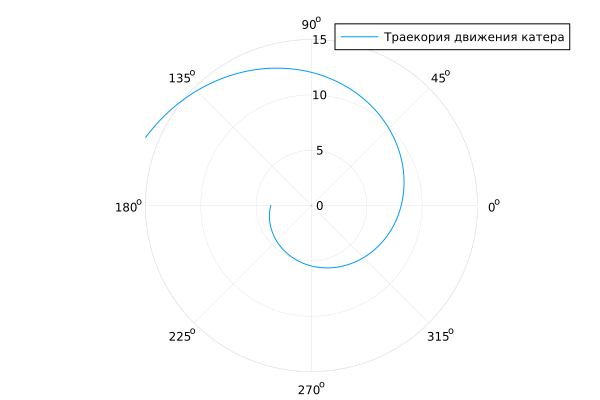
Траекория движения катера и лодки

# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны  
  
y(x)=(1170\*exp(10\*x)/(sqrt(1581)))/(407)  
  
  
  
# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения  
  
y(fi)  
  
# точка пересечения лодки и катера для 1 случая  
  
1.2357999444838665e9

Теперь перейдем к решению в случае 2.

# постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая  
  
prob\_2 = ODEProblem(f, r0\_2, theta0\_2)  
  
sol\_2 = solve(prob\_2, saveat = 0.01)  
  
# отрисовка траектории движения катера  
  
plot(sol\_2.t, sol\_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траекория движения катера")

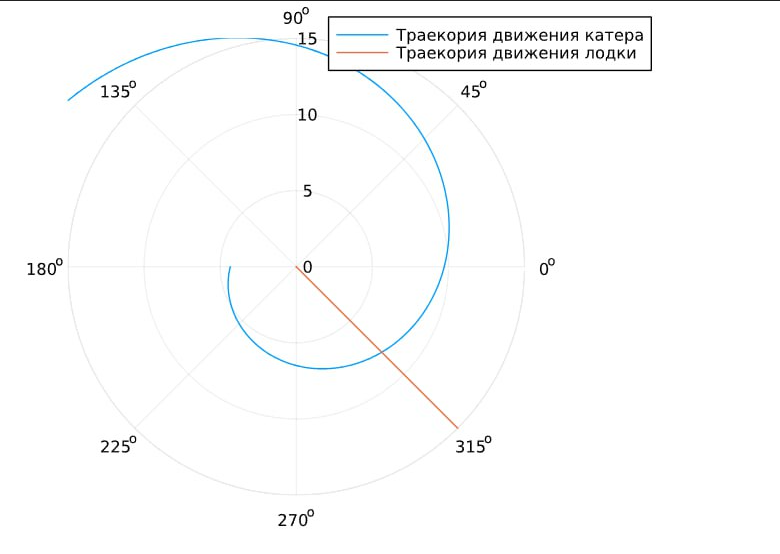
В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:003]):



Траекория движения катера во 2 случае

# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером  
  
plot!(ugol, x\_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки")

В результате получаем такой рисунок (рис. [-@fig:004]):



Траекория движения катера во 2 случае

# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случая  
  
y2(x)=(117\*exp((10\*x/sqrt(1511))+(10\*pi/sqrt(1511))))/(27)  
  
# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения  
  
y2(fi-pi)  
  
# точка пересечения лодки и катера для 2 случая  
7.944543860150496

# Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построил математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

# Список литературы