

# Appunti di Analisi I

Analisi Matematica - Informatica - 23/24

Federico Zotti

2023-09-30

## Indice

<b>Insiemi</b>	<b>4</b>
Notazione . . . . .	4
Prodotto cartesiano . . . . .	4
Esempio . . . . .	5
Insieme delle parti . . . . .	5
Esempio . . . . .	5
<b>Funzioni</b>	<b>5</b>
Funzioni Iniettive e Suriettive . . . . .	6
Immagine e controimmagine . . . . .	7
<b>Numeri Reali</b>	<b>7</b>
Insiemi numerici . . . . .	7
Proprietà dei numeri reali . . . . .	7
Algebriche . . . . .	8
Di Ordinamento . . . . .	8
Assioma di Continuità . . . . .	9
Sottoinsiemi dei reali . . . . .	9

## *Indice*

<b>Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo</b>	<b>9</b>
Estremo superiore ed Estremo inferiore . . . . .	10
Caratterizzazione di inf e sup . . . . .	11
<b>Funzioni reali</b>	<b>12</b>
Grafici, Iniettività e Suriettività . . . . .	12
<b>Funzioni elementari</b>	<b>13</b>
Potenze pari . . . . .	13
Potenze dispari . . . . .	14
Esponenziali . . . . .	14
Funzioni trigonometriche . . . . .	15
Seno . . . . .	15
Coseno . . . . .	15
Tangente . . . . .	16
<b>Trasformazione di grafici</b>	<b>16</b>
<b>Successioni</b>	<b>16</b>
Terminologia . . . . .	16
Successioni a valori reali . . . . .	17
Limite di una successione . . . . .	17
Teorema di unicità del limite . . . . .	18
Limitatezza delle successioni convergenti . . . . .	18
Teorema di permanenza del segno . . . . .	19
Retta reale estesa . . . . .	19
Teoremi algebrici . . . . .	20
Teoremi di confronto . . . . .	20
<b>Tecniche di calcolo dei limiti</b>	<b>21</b>
Disuguaglianza di Bernoulli . . . . .	22
Dimostrazione teorema del confronto a 2 . . . . .	22

## *Indice*

<b>Criterio del rapporto &amp; Criterio della radice</b>	<b>23</b>
Criterio del rapporto . . . . .	23
Criterio della radice . . . . .	23
Fattoriale . . . . .	24
Gerarchia degli infiniti . . . . .	24
Criterio del rapporto-radice . . . . .	25
Dimostrazione del criterio della radice . . . . .	27

## Insiemi

### Notazione

Per *elenco*: Prima operazione, poi insieme di partenza

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$B = \{ n^2 \mid n \text{ naturale} \}$$

Per *proprietà*: Prima insieme che scelgo, poi la proprietà che verifico

$$C = \{ n \text{ naturale} \mid n \text{ è un quadrato} \}$$

Altri simboli:

appartiene  $\rightarrow a \in A$

non appartiene  $\rightarrow a \notin A$

è sottoinsieme  $\rightarrow A \subseteq B$

è sottoinsieme stretto  $\rightarrow A \subset B$

insieme vuoto  $\rightarrow \emptyset$

unione  $\rightarrow A \cup B \mid \vee$

intersezione  $\rightarrow A \cap B \mid \wedge$

sottrazione  $\rightarrow A \setminus B$

cardinalità  $\rightarrow |A|$

### Prodotto cartesiano

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , il loro **prodotto cartesiano** è l'insieme delle coppie  $(a, b)$  con  $a \in A, b \in B$ .

Si indica con  $A \times B$ .

## Funzioni

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

### Esempio

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

### Insieme delle parti

Dato  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$  è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $A$ .

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

### Esempio

$$A = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}\}$$

## Funzioni

Come si descrive una funzione:

1. Un insieme di partenza ( $A$ ) (*dominio*);
2. Un insieme di arrivo ( $B$ ) (*codominio*);
3. Una serie di regole che ad ogni elemento di  $A$  associa un **unico** elemento di  $f(a) \in B$ .

$$f : A \rightarrow B$$

Il grafico di una funzione è:

## Funzioni

$$\begin{aligned} g &= \{ (a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A \} \\ &= \{ (a, b) \in A \times B \mid b = f(a) \} \end{aligned}$$

### Funzioni Iniettive e Suriettive

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione.

- $f$  si dice **iniettiva** se manda elementi distinti di  $A$  in elementi distinti di  $B$ .

$$a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ovvero se

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- $f$  si dice **suriettiva** se ogni elemento di  $B$  è ottenuto da almeno un elemento di  $A$  tramite  $f$ .

$$\forall b \in B \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Una funzione si dice **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Teorema: Una funzione  $f : A \rightarrow B$  è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione  $g : B \rightarrow A$  t.c. :

$$g(f(a)) = a \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \forall b \in B$$

Osservazione:

$$f : A \rightarrow B$$

## Numeri Reali

- è iniettiva se ogni elemento di  $B$  è ottenuto da al più un elemento di  $A$  tramite  $f$ ;
- è suriettiva se ogni elemento di  $B$  è ottenuto da almeno un elemento di  $A$  tramite  $f$ .

### Immagine e controimmagine

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione.

- Se  $b = f(a)$  con  $a \in A, b \in B$ , si dice che  $b$  è *immagine di  $a$  tramite  $f$* ;
- Sia  $C \subseteq A$  un sottoinsieme, si dice *immagine di  $C$  tramite  $f$*  l'insieme degli elementi di  $B$  che sono immagine di elementi di  $C$ .  $f(C) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$
- Immagine di  $A$ :  $f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$
- Sia  $D \subseteq B$  un sottoinsieme, si dice **controimmagine di  $D$  tramite  $f$**  l'insieme di tutti gli elementi di  $A$  che hanno immagine contenuta in  $D$ .
- Controimmagine di  $D$ :  $f^{-1}(D) = \{ a \in A : f(a) \in D \}$  (definita anche se  $f$  non è invertibile).

## Numeri Reali

### Insiemi numerici

- **Naturali:**  $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- **Razionali:**  $\mathbb{Z} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \} \}$
- **Reali:**  $\mathbb{R}$
- **Irrazionali:**  $\mathbb{Q}$
- **Complessi:**  $\mathbb{C}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

### Proprietà dei numeri reali

Sono di tre tipi:

## Numeri Reali

- Algebriche;
- Di Ordinamento;
- Assioma di Continuità.

### Algebriche

Sui numeri reali sono definite due operazioni  $+$  e  $\cdot$ , dette somma e prodotto, con le seguenti proprietà:

- Relative alla somma:
  - **Commutativa:**  $a + b = b + a \forall a, b \in \mathbb{R} \ (n, z, q, r, c)$
  - **Asociativa:**  $(a + b) + c = a + (b + c) \forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (n, z, q, r, c)$
  - **Elemento neutro somma:**  $\exists 0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a + 0 = a \forall a \in \mathbb{R} \ (n, z, q, r, c)$
  - **Esistenza dell'inverso:**  $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a + b = 0 \ (z, q, r, c)$
- Relative al prodotto:
  - **Commutativa:**  $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in \mathbb{R} \ (n, z, q, r, c)$
  - **Associativa:**  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (n, z, q, r, c)$
  - **Elemento neutro prodotto:**  $\exists 1 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot 1 = a \forall a \in \mathbb{R} \ (n, z, q, r, c)$
  - **Esistenza dell'inverso:**  $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot b = 1 \ (q, r, c)$
- **Distributiva:**  $a \cdot (b + c) = ab + ac \forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (n, z, q, r, c)$

### Di Ordinamento

Dati due numeri reali  $x$  e  $y$ , si ha sempre che  $x \geq y$  oppure  $x \leq y$ . Tale ordinamento ha le proprietà:

- **Riflessiva:**  $x \geq x \forall x \in \mathbb{R}$
- **Antisimmetrica:** se  $x \geq y \wedge y \geq x$ , allora  $x = y$
- **Transitiva:** se  $x \geq y \wedge y \geq z$ , allora  $x \geq z$
- se  $x \geq y$ , allora  $x + z \geq y + z \forall z \in \mathbb{R}$
- se  $x \geq y$ , allora  $x \cdot z \geq y \cdot z \forall z \in \mathbb{R} \text{ con } z \geq 0$

Queste valgono in  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , ma non in  $\mathbb{C}$ .



### Assioma di Continuità

Dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  sottoinsiemi diversi da  $\emptyset$ . Diciamo che  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$  se  $a \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$ .

L'assioma di continuità dice che se  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$  allora esiste almeno un  $c \in \mathbb{R}$  t.c.  $c \geq a \forall a \in A; c \leq b \forall b \in B$ .

$c$  non è obbligato ad essere unico;  $c$  può appartenere ad  $A$ , a  $B$  o anche a entrambi (in questo caso è unico elemento "separatore").

### Esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 > 2\}$$

$$\text{se } a \in A, b \in B \rightarrow a < b$$

$$c^2 = 2$$

Questo è impossibile in  $\mathbb{Q}$ , quindi l'assioma di continuità non vale in  $\mathbb{Q}$ .

Conclusione: sui numeri reali,  $\sqrt{2}$  è l'elemento separatore tra  $A$  e  $B$  e si può dimostrare che è unico.

### Sottoinsiemi dei reali

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  è l'intervallo separato da estremi  $a, b \in \mathbb{R}$  (con  $a < b$ ).

- $]a, b[ = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b\}$

### Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme *non vuoto*.

$M \in \mathbb{R}$  si dice **maggiorante** di  $A$  se  $M \geq a \forall a \in A$

### *Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo*

$m \in \mathbb{R}$  si dice **minorante** di  $A$  se  $m \leq a \forall a \in A$

Minoranti e maggioranti non sono obbligati ad esistere. Ad esempio  $A = \mathbb{N}$  ha minoranti ma non ha maggioranti.

Se esiste un maggiorante invece, ne esistono infiniti. Se  $M$  è un maggiorante, anche  $M + 1$  lo è. Lo stesso vale per i minoranti.

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  si dice **superiormente limitato** se ammette un maggiorante e **inferiormente limitato** se ammette un minorante. Si dice **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

Esempi:

- $A = (0, +\infty)$  è inferiormente limitato ma non superiormente
- $B = \{ \frac{1-n}{2} : n \in \mathbb{N} \}$  è superiormente limitato, ma non inferiormente
- $C = (1, 7]$  è limitato

$M \in \mathbb{N}$  si dice **massimo** di  $A$  (e si scrive  $M = \max A$ ) se  $M \in A \wedge M \geq a \forall a \in A$

$m \in \mathbb{N}$  si dice **minimo** di  $A$  (e si scrive  $m = \min A$ ) se  $m \in A \wedge m \leq a \forall a \in A$

$\max$  e  $\min$  non sono obbligati ad esistere, nemmeno per insiemi limitati.

Esempio:

- $A = (0, 1)$  non ha nè  $\max$ , nè  $\min$

$\max$  e  $\min$ , se esistono, sono **unici**.

### **Estremo superiore ed Estremo inferiore**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ .

Si dice che  $\sup A = +\infty$  se  $A$  non è superiormente limitato o  $\sup A = L \in \mathbb{R}$  se lo è e  $L$  è il minimo dei maggioranti.

## *Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo*

Si dice che  $\inf A = -\infty$  se  $A$  non è inferiormente limitato o  $\inf A = l \in \mathbb{R}$  se  $l$  è e  $l$  è il massimo dei minoranti.

Esempi:

- $\sup \mathbb{N} = +\infty$
- $\inf \mathbb{N} = 0$
- $\sup (0, 1) = 1$

**Teo:** Se  $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  è superiormente limitato, allora il minimo dei maggioranti esiste.

**Dimostrazione:** Sia  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \forall a \in A\}$  l'insieme dei maggioranti. Allora  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$ . Per l'*assioma di continuità* c'è un elemento separatore  $c \in \mathbb{R}$ , ovvero  $c \leq b \forall b \in B$  e  $c \geq a \forall a \in A \implies c \in B$ . Quindi  $c = \min B$ .

**Esercizio per casa** #todo/compito: Enunciare e dimostrare il teorema analogo per il massimo dei minoranti.

### Caratterizzazione di inf e sup

- $\sup A = +\infty$  se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$  t.c.  $a \geq M$  (ovvero se posso trovare elementi di  $A$  grandi quanto voglio)
- $\inf A = -\infty$  se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$  t.c.  $a \leq M$
- $\sup A = L \in \mathbb{R}$  se
  - $a \leq L \forall a \in A$  ( $L$  è un maggiorante)
  - $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$  t.c.  $a \geq L - \varepsilon$
- $\inf A = L \in \mathbb{R}$  se
  - $a \geq L \forall a \in A$  ( $L$  è un minorante)
  - $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$  t.c.  $a \leq L + \varepsilon$

Se esiste  $M = \max A$  allora  $\sup A = M$ . Se esiste  $m = \min A$  allora  $\inf A = m$ .  $\sup A$  non è obbligato ad appartenere ad  $A$ , ma se vi appartiene è il **massimo**. Stessa cosa per  $\inf A$ .

## Funzioni reali

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oppure  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Grafico di  $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$  ( $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

Proprietà di simmetria:

- $f$  si dice **pari** se  $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$  (*simmetrica rispetto all'asse  $y$* )
- $f$  si dice **dispari** se  $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$  (*simmetrica rispetto all'origine*)
- $f$  si dice **periodica** se  $\exists T > 0$  t.c.  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  (*il grafico si ottiene traslando il pezzo  $[0, T]$  in  $[T, 2T]$ ,  $[T, 3T]$ , ...*)

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è dispari, allora  $f(0) = 0$ .

Se  $T$  è un periodo, anche  $2T, 3T, 4T, \dots$  lo sono. Il **minimo periodo** è il più piccolo  $T$  (se esiste) per cui vale  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Proprietà di **monotonia**:

- $f$  si dice **monotona**:
  - $f$  si dice **strettamente crescente** se  $x > y \implies f(x) > f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
  - $f$  si dice **strettamente decrescente** se  $x > y \implies f(x) < f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $f$  si dice **debolmente crescente** se  $x > y \implies f(x) \geq f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $f$  si dice **debolmente decrescente** se  $x > y \implies f(x) \leq f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$

Se  $f$  è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente. Se  $f$  è strettamente decrescente allora è anche debolmente decrescente.

Se  $f$  è sia deb. crescente che deb. decrescente allora è **costante**.

## Grafici, Iniettività e Suriattività

- Suriattiva  $\iff$  in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *almeno* una freccia (*tutto l'asse  $y$  è "coperto"*)
- Iniettiva  $\iff$  in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *al più* (0|1) una freccia (*l'asse  $y$  è "coperto" solo una volta*)

## Funzioni elementari

- Retta orizzontale:  $y = \lambda$
- Grafico di  $f$ :  $y = f(x)$
- Intersezioni:  $f(x) = \lambda$

$f$  iniettiva  $\iff f(x) = \lambda$  ha al più una soluz.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$f$  suriettiva  $\iff f(x) = \lambda$  ha almeno una soluz.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Se  $f$  è pari o periodica non è iniettiva. Se  $f$  è strettamente crescente o strettamente decrescente allora è iniettiva.

## Funzioni elementari

### Potenze pari

$$f(x) = x^{2k} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Con  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*non iniettiva o suriettiva*).
- Con  $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  (*iniettiva ma non suriettiva*)
- Con  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (*non iniettiva ma suriettiva*)
- Con  $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (*biunivoca*)

Quindi l'inverso è

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$g(x) = \sqrt{x^{2k}}$$

**Oss:**  $f(x) = x^{2k}$  è una funzione *pari*, strettamente crescente su  $[0, +\infty)$  e strettamente decrescente su  $[-\infty, 0)$ .

**Oss:** la funzione  $f(x) = |x|$  ha le stesse proprietà.

## Potenze dispari

$$f(x) = x^{2k+1} \quad k \in \mathbb{N}$$

È una funzione dispari.

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*biunivoca*)

L'inverso è definito come

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sqrt{x^{2k+1}}$$

Vale lo stesso per  $f(x) = \frac{1}{x^k}$

[!warning] Confermare la funzione

**Oss:**  $f(x) = x^{2k+1}$  è strettamente crescente su  $\mathbb{R}$ .

## Esponenziali

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 1$$

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*iniettiva*)
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \log_a x$$

**Ese:** fate lo stesso per  $f(x) = a^x$  con  $0 < a < 1$

**Oss:** se  $a \in (0, 1)$  allora  $b = \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$ .

## Funzioni trigonometriche

### Seno

$$f(x) = \sin x$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo minimo  $2\pi$  ed è dispari ( $\sin(-x) = -\sin x$ ).

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(x) = \arcsin x$$

**Oss:**  $\arcsin(\sin(\frac{3}{4}\pi)) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3}{4}\pi$

### Coseno

$$f(x) = \cos x$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo minimo  $2\pi$  ed è pari ( $\cos x = \cos(-x)$ ).

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$g(x) = \arccos x$$

**Oss:**  $\arccos(\cos(\frac{3}{2}\pi)) \neq \frac{3}{2}\pi$

## Trasformazione di grafici

### Tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo minimo  $\pi$  ed è dispari (*solo suriettiva*)
- $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  è dispari (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$g(x) = \arctan x$$

## Trasformazione di grafici

Dato  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- *Simmetria* assiale rispetto all'asse  $x$ :  $y = -f(x)$
- *Simmetria* assiale rispetto all'asse  $y$ :  $y = f(-x)$
- *Traslazione* del vettore  $(0, c)$  (verso l'alto se  $c > 0$ ):  $y = f(x) + c$
- *Traslazione* del vettore  $(-c, 0)$  (verso sinistra se  $c > 0$ ):  $y = f(x + c)$
- *Compressione* verso l'asse  $x$  (dilatazione se  $c > 1$ ):  $y = f(x) \cdot c$
- *Dilatazione* verso l'asse  $y$  (compressione se  $c > 1$ ):  $y = f(x \cdot c)$
- *Ribaltamento* sull'asse  $x$ :  $y = |f(x)|$
- *Ribaltamento* sull'asse  $y$ :  $y = f(|x|)$

## Successioni

### Terminologia

Sia  $\mathcal{P}(n)$  una affermazione a proposito del numero  $n \in \mathbb{N}$ . Sarà vera o falsa a seconda del valore di  $n$ .

Diciamo che:



## Successioni

- $\mathcal{P}(n)$  è vera *frequentemente* se è vera per infiniti  $n \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{P}(n)$  è vera *definitivamente* se è vera “da un certo punto in poi”, cioè se  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $\mathcal{P}(n)$  è vera  $\forall n \geq n_0$

**Oss:** Definitivamente  $\implies$  Frequentemente.

**Es:**

1.  $n^2 \geq 1000$  è vera definitivamente
2.  $n^3$  è multiplo di 8 è vera frequentemente, ma non definitivamente
3.  $n + 1 \geq 3^n$  è falsa definitivamente

## Successioni a valori reali

**Def rigida:** una successione a valori reali è una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Di solito, invece di scrivere  $a(n)$ , si scrive  $a_n$ .

**Oss:** così non è possibile considerare  $a_n = \frac{1}{n}$ .

**Def più elastica:** una successione a valori reali è una funzione  $a : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{N}$ , tale che  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  per cui  $\forall n \geq n_0, n \in A$  (tale che  $n \in A$  definitivamente).

## Limite di una successione

Sia  $a_n$  una successione. Abbiamo 4 possibili comportamenti:

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$  ( $a_n \rightarrow \ell$ ;  $\ell \in \mathbb{R}$ )
2.  $\lim a_n = +\infty$  ( $a_n \rightarrow +\infty$ )
3.  $\lim a_n = -\infty$  ( $a_n \rightarrow -\infty$ )
4.  $\lim a_n$  non esiste ( $a_n$  è indeterminata)

**Def:**

- Una successione è di tipo 4. se non è di nessun degli altri tipi
- Una successione è di tipo 2. se  $\forall M \in \mathbb{R}, a_n \geq M$  definitivamente ( $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_n \geq M \forall n \geq n_0$ )

## Successioni

- Una successione è di tipo 3. se  $\forall m \in \mathbb{R}, a_n \leq m$  definitivamente ( $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_n \leq m \forall n \geq n_0$ )
- Una successione è di tipo 1. se
  - $\forall \varepsilon > 0, a_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$  definitivamente  $\vee$
  - $\forall \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$  definitivamente  $\vee$
  - $\forall \varepsilon > 0, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$  definitivamente

Varianti di 1.:

- $a_n \rightarrow \ell^+$  tende a  $\ell$  da destra se  $\forall \varepsilon > 0, \ell < a_n \leq \ell + \varepsilon$  definitivamente
- $a_n \rightarrow \ell^-$  tende a  $\ell$  da sinistra se  $\forall \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n < \ell + \varepsilon$  definitivamente

## Teorema di unicità del limite

Una successione ricade sempre in uno e uno solo dei quattro tipi di comportamento. Se poi ricade nel tipo 1. ( $\ell \in \mathbb{R}$ ), il valore  $\ell$  è unico.

**Dim:** se  $a_n$  è di tipo 1. cioè  $a_n \rightarrow \ell$ , allora definitivamente  $\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$ .  $\ell - 1 \leq a_n$  implica che non può essere di tipo 3..  $a_n \leq \ell + 1$  implica che non può essere di tipo 2..

Inoltre se è di tipo 2., definitivamente si avrà  $a_n \geq 1$ . Se è di tipo 3., definitivamente si avrà  $a_n \leq -1$ . Queste condizioni non possono accadere insieme.

Infine, se  $a_n \rightarrow \ell_1, a_n \rightarrow \ell_2$  con  $\ell_1 \neq \ell_2$ , allora fisso  $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$ . Quindi  $a_n$  si ritrova in due intervalli contemporaneamente:  $\ell_1 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_1 + \varepsilon$  e  $\ell_2 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_2 + \varepsilon$ . Se  $\ell_1 < \ell_2$  allora  $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$ . Dunque  $a_n \leq \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon \leq a_n$  definitivamente. Questo è assurdo!

## Limitatezza delle successioni convergenti

- Se  $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  allora  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è limitato
- Se  $a_n \rightarrow +\infty$  allora  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è inferiormente limitato
- Se  $a_n \rightarrow -\infty$  allora  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è superiormente limitato

[!note] Dimostrazione nelle slide #todo/uni

### Teorema di permanenza del segno

- Se  $a_n \rightarrow \ell \in (0, +\infty)$  o se  $a_n \rightarrow +\infty$  allora  $a_n > 0$  definitivamente
- Se  $a_n \geq 0$  definitivamente e se  $a_n \rightarrow \ell$  allora  $\ell \geq 0$  oppure  $\ell = +\infty$

[!note] Dimostrazioni nelle slide #todo/uni

**Oss:** vale lo stesso risultato con i negativi.

[!todo] Enunciarlo e dimostrarlo #todo/uni

### Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- Posso scrivere  $a_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  per unificare i tipi 1., 2., 3.
- Le operazioni di  $\mathbb{R}$  si estendono a  $\overline{\mathbb{R}}$  *quasi bene*:

$$+x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$-x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{x}{+\infty} = 0$$

- Ci sono 2 eccezioni:

1. Le 7 forme indeterminate:

## Successioni

$$(+\infty) + (-\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$0^0$$

$$1^{\pm\infty}$$

$$(\pm\infty)^0$$

### 2. Le divisioni per 0

## Teoremi algebrici

Siano  $a_n, b_n$  successioni,  $a_n \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}, b_n \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ , allora:

$$a_n + b_n \rightarrow \ell_1 + \ell_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow \ell_1 - \ell_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow \ell_1 \cdot \ell_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow \ell_1^{\ell_2}$$

Con le dovute eccezioni di  $\infty$ .

## Teoremi di confronto

Se  $a_n \leq b_n$  definitivamente, allora:

1. Se  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ , allora  $a \leq b$
2. Se  $a_n \rightarrow +\infty$ , allora  $b_n \rightarrow +\infty$
3. Se  $b_n \rightarrow -\infty$ , allora  $a_n \rightarrow -\infty$

## Tecniche di calcolo dei limiti

Se  $a_n, b_n, c_n$  sono tali che  $a_n \leq b_n \leq c_n$  definitivamente e  $a_n \rightarrow \ell$ ,  $c_n \rightarrow \ell$  (lo stesso  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ) allora  $b_n \rightarrow \ell$ . (*teorema del carabiniere*).

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \cos n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos n \geq -1 \implies n + \cos n \geq n - 1$$

Per il teorema del confronto a 2, visto che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = [+ \infty - 1] = +\infty$ , ho che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \cos n = +\infty$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \sin n \leq \frac{1}{n}$$

E poichè  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , per il teorema del confronto a 3  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ .

## Tecniche di calcolo dei limiti

### Fatto N.1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty \quad \forall a > 0$$

### Fatto N.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0^+ \quad \forall a < 0$$

**Oss:**  $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{-a}} = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0^+$

[!note] Ricordare negli esercizi di scrivere *teoremi algebrici dove vengono usati*.

### Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1 \quad \text{si ha} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

---

#### Fatto N.3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \quad \forall a > 1$$

**Dim:**  $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) \rightarrow [1 + \infty(a-1)] = +\infty \Rightarrow a^n \rightarrow +\infty$  per il confronto a 2.

#### Fatto N.4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad \forall 0 < a < 1$$

**Dim:**  $a = \frac{1}{b}$  con  $b > 1$  e  $b^n \rightarrow +\infty$  quindi  $a^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0^+$ .

#### Fatto N.5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 0$$

**Dim:**  $a^{\frac{1}{n}} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

[!warning] Finire la dim dalle slide.

### Dimostrazione teorema del confronto a 2

Sappiamo che  $a_n \leq b_n$  definitivamente

### *Criterio del rapporto & Criterio della radice*

1. Se  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , vogliamo dimostrare che  $a \leq b$

Per assurdo, se  $b < a$ , posso scegliere  $\varepsilon > 0$  tale che  $\varepsilon < \frac{a-b}{2} \Rightarrow b + \varepsilon < a - \varepsilon$ .

Allora definitivamente  $a_n \geq a - \varepsilon$  e  $b_n \leq b + \varepsilon$ , quindi  $b_n \leq b + \varepsilon < a - \varepsilon \leq a_n$  definitivamente.

Ciò significa che  $b_n < a_n$ , il che è assurdo.

2. Se  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $\forall M \in \mathbb{R}$ , ho  $a_n \geq M$  definitivamente  $\Rightarrow$  ho  $b_n \geq a_n \geq M$  definitivamente  $\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$ .
3. Uguale a 2..

## **Criterio del rapporto & Criterio della radice**

### **Criterio del rapporto**

Sia  $a_n$  una successione definitivamente positiva ( $> 0$ ). Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se  $\ell < 1$ ,  $a_n \rightarrow 0$
2. se  $\ell > 1$ ,  $a_n \rightarrow +\infty$
3. se  $\ell = 1$ , ??

### **Criterio della radice**

Sia  $a_n$  una successione definitivamente  $\geq 0$ . Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

### Criterio del rapporto & Criterio della radice

1. se  $\ell < 1$ ,  $a_n \rightarrow 0$
2. se  $\ell > 1$ ,  $a_n \rightarrow +\infty$
3. se  $\ell = 1$ , ??

**Es:**  $a_n = \frac{n^3}{2^n}$  con i teo. alg. ottengo  $[\frac{+\infty}{+\infty}]$ , quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{2}$$

per il criterio del rapporto  $a_n \rightarrow 0$ .

**Fatto N.6** (*Esponenziale batte potenza*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \forall b > 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

### Fattoriale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

**Fatto N.7** (*Il fattoriale batte l'esponenziale*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \quad \forall b > 0$$

$n^n$  batte il fattoriale.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

### Gerarchia degli infiniti

1.  $n^n$
2.  $n!$
3.  $b^n$
4.  $n^a$



## Criterio del rapporto & Criterio della radice

5.  $n$

**Attenzione:** nella gerarchia degli infiniti, dovete rispettare religiosamente le espressioni date.  $n!$  batte  $2^n$ , ma non so cosa fa con  $2^{(n^2)}$ .

### Criterio del rapporto-radice

Supponiamo  $a_n > 0$  definitivamente e che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad (\text{stesso } \ell)$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = ?$

Applico il criterio rapporto-radice con  $a_n = n$ , che è definitivamente  $> 0$ . Ho che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = ?$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{a}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{1}{n}})^a = 1$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 - n^2 + 1} = ?$

Ha senso perchè  $n^7 - n^2 + 1 \rightarrow +\infty \implies$  è definitivamente positiva per il teorema di permanenza del segno.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^7}} = 1 \cdot 1 = 1$$

**Fatto N.8**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1 \quad \forall \text{ polinomio}$$

**Fatto N.9**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = ?$

Metodo 1:  $\forall b > 1$  ho che  $n! > b^n$  (per il teo di permanenza del segno:  $\frac{b^n}{n!} \rightarrow 0 \implies$  definitivamente  $\frac{b^n}{n!} < 1 \implies b^n < n!$  definitivamente)  $\implies \sqrt[n]{n!} > b$  definitivamente  $\forall b > 1 \implies \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$ .

Metodo 2:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = ?$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

**Oss:** per  $n$  molto grandi,  $n!$  assomiglia a  $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = ?$

Applico il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n!}} = \frac{(2^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \dots$$

### **Dimostrazione del criterio della radice**

Supponiamo che  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell > 1$ , allora la media sarà un numero tra 1 e  $\ell$

$$1 < \frac{\ell + 1}{2} < \ell \implies \text{definitivamente } \sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell + 1}{2} \implies a_n \geq \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n$$

e poichè  $\frac{\ell+1}{2} > 1$ ,  $\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \rightarrow +\infty$ . Quindi per il confronto a 2, ho che  $a_n \rightarrow +\infty$ .

Se invece  $0 \leq \ell < 1$ , allora  $0 \leq \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies$  definitivamente  $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$ , inoltre  $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \implies 0 \leq a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$  definitivamente e  $0 < \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ , dunque, per il teo del confronto a 3,  $a_n \rightarrow 0$ .