# Appunti di Fondamenti

Fondamenti dell’Informatica - CdL Informatica 23/24

Federico Zotti

2023-10-20

# Indice

## Matematica discreta

> **Discreto**: composto di elementi distinti, separati tra di loro.

Un sistema è:

- **Discreto** se è costituito da elementi isolati
- **Continuo** se non ci sono *vuoti* tra gli elementi

I sistemi informatici si basano su un sistema *binario*, perciò discreto.

Possiamo approssimare un sistema continuo dividendolo in piccole parti (*discretizzazione* o *digitalizzazione*).

### Fasi della matematica discreta

- **Classificazione**: individuare le caratteristiche comuni di entità diverse (*teoria degli insiemi*)
- **Enumerazione**: assegnare ad ogni oggetto un numero naturale (*contare*)
- **Combinazione**: permutarne e combinarne gli elementi (*grafi*)

Queste fasi guidano un **algoritmo**.

### Logica

In filosofia, la **logica** è lo studio del ragionamento, dell'argomentazione, e dei procedimenti **inferenziali** per distinguere quelli *validi* da quelli *non validi*.

La **logica matematica** vede questi procedimenti come calcoli formali, con una struttura algoritmica.

Infatti, è tutto basato sull'**algebra di Boole**.

#### Algebra astratta

L'algebra astratta studia le **strutture algebriche**, ovvero insiemi muniti di operazioni.

# Insiemi e Operazioni

## Numeri

### Numeri naturali

I numeri **naturali** sono i primi che impariamo, e nascono dall'attività di contare.

Essi formano un **insieme**, chiamato *insieme dei numeri naturali* ($\mathbb{N}$).

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots \}$$

**Contare** non è altro che assegnare ad ogni oggetto un numero naturale (in ordine).

$\mathbb{N}$ ha un *limite inferiore* ($0$), ma non ha un *limite superiore*, quindi $\mathbb{N}$ è infinito.

#### Definizione semiformale

- I numeri naturali hanno l'elemento $0$
- Ogni elemento $n$ ha (**esattamente**) un successore $s(n)$
- $0$ non è un successore di nessun elemento
- Due elmenti diversi hanno successori diversi

Questa definizione è la base del **processo di induzione**.

Una proprietà è vera in tutto $\mathbb{N}$ se e solo se:

- È vera in $0$
- Se è vera in $n$ allora è vera in $s(n)$

È possibile anche iniziare da un numero arbitrario.

### Numeri interi

I numeri **interi** (relativi) è l'insieme dei numeri naturali preceduti da un segno "$+$" o "$-$". Questo insieme si denota con il simbolo $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\, \dots, -(n+1), -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots \,\}$$

Ogni intero ha un successore, ma anche un **predecessore** (non c'è un *minimo*).

I numeri interi positivi (più $0$) formano $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{\, 0 \,\}$$

**Valore assoluto** Il **valore assoluto** di un numero intero è il numero privo di segno.

$$|-n| = n$$
$$|n| = n$$

L'**opposto** di un numero si ottiene cambiandogli il segno.

### Numeri razionali

Razionale in questo caso si riferisce a **ratio** ossia **proporzione**. Indicano dunque una proporzione risultante da una divisione.

Si esprimono come rapporto di due numeri interi (*frazioni*).

$$\frac{m}{n}$$

Si indicano con il simbolo $\mathbb{Q}$.

**Rappresentazioni e Relazioni** Ogni numero razionale può essere rappresentato da un numero decimale finito o periodico.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

**Densità** I numeri razionali sono **densi**: fra due razionali c'è sempre un altro numero.

Sono comunque **discreti**.

#### Numeri reali

I **numeri irrazionali** ($\mathbb{I}$) sono quelli che non si possono esprimere tramite frazioni: hanno un'espansione decimale infinita e non periodica.

L'insieme dei **numeri reali** ($\mathbb{R}$) contiene tutti i numeri che ammettono una rappresentazione decimale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

**La Retta reale** L'insieme dei numeri reali spesso viene rappresentato su una **retta** (ordine implicito).

A ogni punto della retta è associato un numero reale e viceversa (*corrispondenza biunivoca*).

#### Numeri complessi

I **numeri complessi** ($\mathbb{C}$) estendono i reali per eseguire operazioni che non sono ben definite altrimenti.

Nascono dalla necessità di estrarre radici a numeri negativi.

Definiscono l'**unità immaginaria** $i = \sqrt{-1}$. Un numero complesso è $a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

#### Numeri booleani

L'insieme dei **numeri booleani** è

$$\mathbb{B} = \{ 0, 1 \}$$

### Insiemi

Gli **insiemi**, le loro proprietà e le loro **operazioni** sono alla base della matematica moderna e dell'informatica.

Un sistema è **discreto** se costituito da elementi isolati e **continuo** se non vi sono spazi vuoti. In matematica, discreto si basa sul concetto di **cardinalità** (il "numero" di elementi che contiene).

Un insieme è discreto se (e solo se) i suoi elementi si possono **numerare**.

> Un insieme è un raggruppamento di oggetti distinti e ben definiti.

Gli oggetti che formano l'insieme sono i suoi **elementi**. In un insieme, tutti gli elementi sono **distinti** e l'ordine non è rilevante.

> Gli elementi di un insieme possono essere anch'essi insiemi.

Un tempo si pensava che la **teoria degli insiemi** poteva dare una base solida alla matematica. Esistono paradossi però che dicono il contrario.

Per esempio il paradosso del barbiere

> In un vilaggio vi è un solo barbiere, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. *Chi rade il barbiere?*

o il paradosso eterologico

> Una parola è **autologica** se descrive se stessa (*"polisillabica"*, *"corta"*, *"leggibile"*).
> Una parola è **eterologica** se non è autologica (*"polillabica"*, *"lunga"*, *"illeggibile"*).
> "*Eterologica*" è eterologica?

Il più famoso di essi è il paradosso degli insiemi (*Bertrand Russel*)

> Considerate l'insieme $N$ di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi. $N$ appartiene a se stesso?

Per costruire questo tipo di paradossi è necessario usare un'**autoreferenza** e una **negazione**.

Questa idea torna in diversi contesti per dimostrare l'impossibilità o inesistenza di certe strutture.

### Notazione

Gli insemi generici saranno denotati da lettere latine maiuscole

$$A, B, C, \dots$$

e i loro elementi con lettere latine minuscole

$$a, b, c, \dots$$

L'insieme senza elementi si chiama **vuoto** e si denota con $\varnothing$.

L'**uguaglianza** fra oggetti (elementi, insemi, entità, ecc.) si denota con "$=$". La **disuguaglianza** si denota con "$\neq$".

L'uguaglianza ha tre importanti proprietà:

- **Riflessività**: $A = A$
- **Simmetria**: $A = B \iff B = A$
- **Transitività**: se $A = B$ e $B = C$ allora $A = C$

Un insieme può avere diverse rappresentazioni:

- **Diagramma Eulero-Venn**
- **Rappresentazione estensionale**: elenco di tutti gli elementi ($\{ x, y, z \}$)
  - $\{ \text{rosso}, \text{giallo}, \text{arancio} \}$: insieme con tre elementi
  - $\{ \text{rosso}, \text{giallo}, \text{rosso} \}$: insieme con due elementi
  - $\{ \varnothing \}$: insieme con un elemento
  - $\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$: insieme dei numeri naturali

    - $\{ \varnothing, 1, 2, \{ 3 \} \}$

- **Rappresentazione intensionale**: consiste nel formulare una proprietà $\mathcal{P}$ caratteristica che distingue precisamente gli elementi dell'insieme ($S = \{ x \mid \mathcal{P}(x) \}$)
    - $\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0 \}$: insieme dei numeri interi positivi
    - $\{ x \mid x$ è un colore dell'arcobaleno $\}$
    - $\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 3, x \leq 100 \} = \{ 4, 5, \ldots, 99, 100 \}$
    - $\{ x \mid x$ è un numero primo $\}$

Per ogni elemento $x$ esiste l'insieme **singoletto** $\{ x \}$.

Proprietà complesse si possono costruire combinando proprietà più semplici mediante operazioni **vero-funzionali**.

Un **sottoinsieme** di $A$ è un insieme formato unicamente per (alcuni) elementi di $A$. Un sottoinsieme $B$ di $A$ è **proprio** se è diverso da $A$ e da $\varnothing$.

L'insieme vuoto ammette esattamente un sottoinsieme: $\varnothing$ (*sottoinsieme non proprio*). Un singoletto $\{ a \}$ ammette due sottoinsiemi: $\varnothing$ e $\{ a \}$ (*sottoinsiemi non propri*).

Se $A$ e $B$ hanno gli stessi elementi, sono mutuamente sottoinsiemi

$$A = B \text{ se } A \subseteq B, B \subseteq A$$

L'inclusione soddisfa le proprietà:

- **Riflessività**: $A \subseteq A$
- **Antisimmetria**: $A \subseteq B \land B \subseteq A \iff A = B$
- **Transitività**: $A \subseteq B \land B \subseteq C \iff A \subseteq C$

L'insieme potenza (o insieme delle parti) di un insieme $S$, scritto $\mathscr{P}(S)$ è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di $S$.

$$\mathscr{P}(S) = \{ x \mid x \subseteq S \}$$

Esempi:

- $\mathscr{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$
- $\mathscr{P}(\{ \varnothing \}) = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$
- $\mathscr{P}(\{ x, y \}) = ?$

Se $S$ ha $n$ elementi ($n \geq 0$) allora $\mathscr{P}(S)$ ha $2^n$ elementi.

#### Operazioni

**Unione** L'**unione** di due insiemi $A$ e $B$ si denota

$$A \cup B$$

ed è definita come

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

Le proprietà dell'unione sono:

- **Idempotenza**: $A \cup A = A$
- **Commutatività**: $A \cup B = B \cup A$
- **Associatività**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Esistenza del neutro**: $A \cup \varnothing = A$
- **Assorbimento**: $A \cup B = B$ se $A \subseteq B$
- **Monotonicità**: $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq B \cup A$

**Intersezione** L'**intersezione** di due insiemi $A$ e $B$ si denota

$$A \cap B$$

ed è definita come

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

Le proprietà dell'intersezione sono:

- **Idempotenza**: $A \cap A = A$
- **Commutatività**: $A \cap B = B \cap A$
- **Associatività**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Annichilazione**: $A \cap \varnothing = \varnothing$
- **Assorbimento**: $A \cap B = B$ se $A \subseteq B$
- **Monotonicità**: $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$

L'unione e l'intersezione distribuiscono una sull'altra

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Sottrazione** La **sottrazione** tra due insiemi $A$ e $B$ è definita come

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \land x \notin B \,\}$$

Le proprietà della sottrazione sono:

- $A \setminus A = \varnothing$
- $A \setminus \varnothing = A$
- $\varnothing \setminus A = \varnothing$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B$
- $A \setminus B \neq B \setminus A$

**Differenza simmetrica** La differenza simmetrica tra $A$ e $B$ è

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Proprietà:

- $A \triangle A = \varnothing$

- $A \triangle \varnothing = A$
- $A \triangle B = B \triangle A$

**Complementazione** Dato un insieme di riferimento $U$ (chiamato **Universo**), il **complemento** assoluto di $A$ è definito come:

$$\overline{A} = \{\, x \mid x \in U, x \notin A \,\} = U \setminus A$$

Le proprietà della complementazione sono:

- $\overline{U} = \varnothing$
- $\overline{\varnothing} = U$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (*terzo escluso*)
- $A \cup \overline{A} = U$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*legge di De Morgan*)
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*legge di De Morgan*)
- $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$

**Famiglie di insiemi**

Un insieme i cui elementi sono tutti insiemi viene chiamato **famiglia di insiemi** ($\mathcal{F}$).

Le operazioni su una famiglia di insiemi sono:

$$\cup\mathcal{F} = \{\, x \mid x \in A \text{ per almeno un insieme } A \in \mathcal{F} \,\}$$
$$\cap\mathcal{F} = \{\, x \mid x \in A \; \forall \, A \in \mathcal{F} \,\}$$

Dunque

$$\cup\mathcal{P}(A) = A \; \forall \, A$$

#### Partizioni

Una partizione di un insieme $A \neq \varnothing$ è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $A$ tale che:

- $\forall\, c \in \mathcal{F}, c \neq \varnothing$ (*non trivialità*)
- $\cup\mathcal{F} = A$ (*copertura*)
- se $c \in \mathcal{F}$, $D \in \mathcal{F}$ e $C \neq D$, allora $C \cap D = \varnothing$ (*disgiunzione*)

## Relazioni

### Ordinamenti negli insiemi

Ricordate che gli insiemi **non** sono ordinati

$$\{\, x, y \,\} = \{\, y, x \,\}$$

A volte è utile poter ordinare i loro elementi in modo chiaro.

**Coppia ordinata** Una **coppia ordinata** è una collezione di due elementi, dove si può distringuere il **primo** e il **secondo** elemento

$$\langle x, y \rangle$$

Il primo elemento è $x$ e il secondo è $y$. Notare che esiste la coppia ordinata $\langle x, x \rangle$.

**Formulazione Insiemistica** La coppia ordinata $\langle x, y \rangle$ non è altro che l'insieme

$$\{\, \{\, x \,\}, \{\, x, y \,\} \,\}$$

Sia $\mathcal{F} = \{\, \{\, x \,\}, \{\, x, y \,\} \,\}$. $x$ è il **primo elemento** $\iff x \in \cap\mathcal{F}$ (*appartiene a tutti gli insiemi*). $y$ è il **secondo elemento** $\iff y \in \cup\mathcal{F} \setminus \cap\mathcal{F}$ (*non appartiene a tutti gli insiemi*) oppure $\{\, y \,\} = \cup\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \{\{y\}\}$).

Notare che $\langle x, x \rangle = \{\{x\}, \{x, x\}\}$.

**Definizione giusta** Vogliamo vedere che questa definizione **caratterizza** le coppie ordinate. Cioè, che

$$\langle a, b\rangle = \langle x, y\rangle \iff \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Le coppie ordinate sono **ben definite**.

**Generalizzazione** Possiamo generalizzare le coppie ordinate a **tuple ordinate** di lunghezza $n \geq 2$ ($n$-tuple ordinate) definendo

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$$

**Prodotto cartesiano** Dati due insiemi $A$ e $B$, definiamo il prodotto cartesiano come

$$A \times B = \{\, \langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in B \,\}$$

$A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate dove:

- il primo elemento appartiene ad $A$
- il secondo elemento appartiene a $B$

Notare che:

- $A \times B \neq B \times A$
- $A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A$

$A \times A$ è a volte denotato con $A^2$.

**Sequenze** $S^n$ è l'insieme di tutte le $n$-tuple di elementi di $S$ definito tramite prodotti cartesiani di $S$. Una **sequenza finita** di elementi di $S$ è un elemento di $S^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

In altre parole, una sequenza è una tupla ordinata

$$\langle s_1, \dots s_n \rangle$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e ogni $s_i \in S$.

**Segmento** Data una sequenza finita $\sigma = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$, una sequenza $\sigma' = \langle s_k, s_{k+1}, \dots, s_\ell \rangle$ dove $1 \leq k \leq \ell \leq n$ è chiamata un **segmento** di $\sigma$.

Il segmento è **iniziale** sse $k = 1$.

#### Relazioni

Una **relazione** tra gli elementi di due insiemi $A$ e $B$ non è altro che un sottoinsieme di $A \times B$.

Una relazione rappresenta un **collegamento** tra gli elementi di $A$ e quelli di $B$.

#### Relazioni tra oggetti

Se la coppia ordinata $\langle x, y \rangle$ appartiene a una relazione $R \subseteq A \times B$, si dice che $x \in A$ ha come **corrispondente** $y \in B$ nella relazione $R$ oppure che $x$ è *in relazione con* $y$.

#### Rappresentazione tabulare

Ogni relazione si può rappresentare graficamente tramite una tabella.

#### Rappresentazione matriciale

$R$ si può anche rappresentare tramite una **matrice booleana**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogni riga rappresenta un elemento dell'insieme $A$ e ogni colonna rappresenta un elemento di $B$.

#### Elementi di una relazione

Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione

- Il **dominio** di $R$ (dom$(R)$) è l'insieme di tutti gli oggetti $x \in A$ tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche $y \in B$.

  dom$(R) = \{\, x \in A \mid \exists\, y \in B, \langle x, y \rangle \in R \,\}$.

- Il **codominio** è l'insieme di tutti gli oggetti $y \in B$ tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche $x \in A$.

  codom$(R) = \{\, y \in B \mid \exists\, x \in A, \langle x, y \rangle \in R \,\}$.

- Il **campo** o **estensione** di $R$ è dom$(R) \cup$ codom$(R)$.

#### Relazioni n-arie

Il concetto di relazione può estendersi a tuple ordinate con **più di due** elementi.

Se gli elementi delle tuple appartengono allo stesso insieme $A$, allora una relazione $n$-aria è un sottoinsieme di $A^n$.

Esempi:

- $\{\, \langle x, x \rangle \mid x \in A \,\}$ è una relazione binaria su $A$
- $\{\, \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y \,\}$ è la relazione d'ordine naturale su $\mathbb{N}$
- $\{\, \langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = z^2 \,\}$ è un'area geometrica

#### Operazioni su relazioni

Siano $R, S \subseteq A \times B$ due relazioni

- $R \cup S$ ha tutte le coppie che appartengono a $R$ o a $S$
- $R \cap S$ ha tutte le coppie che appartengono ad entrambi $R$ e $S$

- $\overline{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R \} \subseteq A \times B$ è il **complemento** di $R$
- $R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \} \subseteq A \times B$ è la **relazione inversa** di $R$

#### Proprietà delle relazioni

Siano $R, S \subseteq A \times B$ due relazioni

- Se $R \subseteq S$ allora $\overline{S} \subseteq \overline{R}$
- $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$
- $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$
- se $R \subseteq S$ allora $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

**Esempi** Siano $A = \{ a, b \}, R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \}, S = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle \}$ ($R \subseteq A^2; S \subseteq A^2$).

1. $R \cap S = \{ \langle a, b \rangle \}$
2. $\overline{R \cup S} = \{ \langle b, b \rangle \}$
3. $R^{-1} = R$
4. $S^{-1} \neq S$

#### Identità

Dato un insieme $A$, la relazione

$$I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$$

dove ogni elemento è in relazione con se stesso è chiamata l'**identità** su $A$.

#### Proprietà delle relazioni binarie

Una relazione $R \subseteq A^2$ è

- **Riflessiva** se $\langle x, x\rangle \in R \, \forall \, x \in A$ ($I_A \subseteq R$)
- **Simmetrica** se $\langle x, y\rangle \in R \implies \langle y, x\rangle \in R$ ($R = R^{-1}$)
- **Antisimmetrica** se $\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle \in R \implies x = y$ ($R \cap R^{-1} \subseteq I_A$)
- **Antisimmetrica** (*def alternativa*) se $x \neq y \wedge \langle x, y\rangle \in R \implies \langle y, x\rangle \notin R$ ($R \cap R^{-1} \subseteq I_A$)
- **Transitiva** se $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R \implies \langle x, z\rangle \in R$

### Funzioni

Una classe di relazioni binarie di particolare importanza sono le **funzioni** (o **applicazioni**).

Una funzione è una relazione $R \subseteq A \times B$ tale che ad ogni $a \in A$ corrisponde **al più** un elemento $b \in B$.

**Formalmente:** se $\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in R$ allora $b = c$.

**Notazione:** $f : A \to B$

Se per ogni $a \in A$ esiste **esattamente un** $b \in B$ tale che $\langle a, b\rangle \in R$, allora $f$ è una **funzione totale**.

**Riformulazione:** una relazione $f \subseteq A \times B$ è una funzione se per ogni $x \in \text{dom}(f)$ esiste un unico $y \in B$ tale che $\langle x, y\rangle \in f$. $f(x)$ denota tale elemento $y$.

Se $x \in \text{dom}(f)$, allora si dice che $f$ è **definita** in $x$. Se $A = \text{dom}(f)$ allora $f$ è una funzione **totale**.

#### Funzione iniettiva

Una funzione $f$ è **iniettiva** se porta elementi distinti del dominio in elementi distinti del codominio (immagine).

> $f : A \to B$ è iniettiva sse per ogni $x, y \in A, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

#### Funzione suriettiva

Una funzione $f$ è **suriettiva** quando ogni elemento di $B$ è immagine di almeno un elemento di $A$ ossia, quando $B = \text{codom}(f)$.

> $f : A \to B$ è suriettiva sse per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

#### Funzione biiettiva

Una funzione $f : A \to B$ è **biettiva** sse è iniettiva e suriettiva.

**Attenzione:** $f$ può non essere totale.

- Ad ogni $x \in \text{dom}(f)$ corrisponde esattamente un $y \in B$
- Ad ogni $y \in B$ corrisponde esattamente un $x \in \text{dom}(f)$

#### Corrispondenza biunivoca

Una **corrispondenza biunivoca** tra $A$ e $B$ è una relazione binaria $R \subseteq A \times B$ tale che ad ogni elemento di $A$ corrisponde uno ed un solo elemento di $B$ e viceversa, ad ogni elemento di $B$ corrisponde uno ed un solo elemento di $A$.

Tale $R$ deve essere una funzione *totale*, *iniettiva* e *suriettiva*.

#### Formalizzazione

$f \subseteq A \times B$

$$\text{dom}(f) = \{\, x \in A \mid \exists\, y \in B. \langle x, y \rangle \in f \,\}$$
$$\text{codom}(f) = \{\, y \in A \mid \exists\, x \in B. \langle x, y \rangle \in f \,\}$$

**Funzione** (parziale)

$$\forall\, a \in A. \forall\, x, y \in B. (\langle a, x \rangle \in f \land \langle a, y \rangle \in f) \implies x = y$$

**Funzione totale**

$$\forall\, a \in A.\exists!\, x \in B.\langle a, x\rangle \in f$$

**Funzione iniettiva**

$$\forall\, a \in A.\forall\, x, y \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle a, y\rangle \in f) \implies x = y \land$$
$$\forall\, a, b \in A.\forall\, x \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle b, x\rangle \in f) \implies a = b$$

**Funzione suriettiva**

$$\forall\, a \in A.\forall\, x, y \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle a, y\rangle \in f) \implies x = y \land$$
$$\forall\, x \in B.\exists\, a \in A.\langle a, x\rangle \in f$$

**Funzione biiettiva**

$$\forall\, a \in A.\forall\, x, y \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle a, y\rangle \in f) \implies x = y \land$$
$$\forall\, a, b \in A.\forall\, x \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle b, x\rangle \in f) \implies a = b \land$$
$$\forall\, x \in B.\exists\, a \in A.\langle a, x\rangle \in f$$

**Punto fisso**

Sia $A$ un insieme e $f : A \to A$ una funzione.

Un **punto fisso** di $f$ è un elemento di $A$ che coincide con la sua immagine

$$x = f(x)$$

**Operazioni**

Sia $A$ un insieme.

Un'**operazione** ($n$-aria) su $A$ è una funzione $A^n \to A$.

L'operazione è totale sse la funzione è totale.

**Immagine inversa**

Sia $f : A \to B$ una funzione e $y \in B$ l'**immagine inversa** di $f$ in $y$ è

$$f^{-1} : B \to \mathcal{P}(A)$$
$$f^{-1}(y) = \{ \, x \in A \mid f(x) = y \, \}$$

**Nota:** $f$ è iniettiva sse per ogni $y \in B$, $f^{-1}(y)$ ha al più un elemento.

**Funzione inversa**

Una funzione $f : A \to B$ è **invertibile** se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$o

$$g(f(x)) = x$$
$$f(g(y)) = y$$

In questo caso, $g$ è l'**inverso** di $f$ e si rappresenta come $f^{-1}$.

Una funzione $f$ è invertibile sse è iniettiva. $f_{-1}$ è totale sse $f$ è suriettiva.

**Composizione di Funzioni**

La **composizione** di due funzioni si riferisce all'applicazione di una funzione al risultato di un'altra.

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. La funzione composta $g \circ f : A \to C$ è definita per ogni $x \in A$ da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$(g \circ f)(x)$ è definita sse $f(x)$ e $g(f(x))$ sono definite.

Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ sono due funzioni, allora la composizione $g \circ f$ è solo definibile se codom$(f) \subseteq C$.

Le proprietà della composizione:

- **Associativa:** $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Se $f$ e $g$ sono entrambe iniettive, allora $f \circ g$ è **iniettiva**
- Se $f$ e $g$ sono entrambe suriettive, allora $f \circ g$ è **suriettiva**
- Se $f$ e $g$ sono entrambe invertibili, allora $f \circ g$ è **invertibile** ($(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$)

#### Funzione caratteristica

I sottoinsiemi di un insieme $A$ si possono anche rappresentare tramite una funzione detta **caratteristica**.

La funzione caratteristica di un insieme $S \subseteq A$ è la funzione $f_S : A \to \{ 0, 1 \}$ dove

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x \notin S \\ 1 & x \in S \end{cases}$$

Per ogni $x \in A$

- $f_{S \cap T}(x) = f_S(x) \cdot f_T(x)$
- $f_{S \cup T}(x) = f_S(x) + f_T(x) - f_S(x) \cdot f_T(x)$
- $f_{S \triangle T}(x) = f_S(x) + f_T(x) - 2 \cdot f_S(x) \cdot f_T(x)$

#### Multinsiemi

Un **multinsieme** è una variante di un insieme dove gli elementi si possono ripetere

$$\{\!\!\{ a, a, b, c, c, c \}\!\!\} \neq \{\!\!\{ a, b, c \}\!\!\}$$

Formalmente un multinsieme è una funzione da un insieme a $\mathbb{N}$

$$f : A \to \mathbb{N}$$

che esprime quante volte si ripete ogni elemento nel multinsieme ($A = \{ a, b, c, d \}$)

$$\{ \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle d, 0\rangle \}$$

## Cardinalità

I **numeri cardinali** si utilizzano per misurare gli insiemi (indicare la loro *grandezza*). Se un insieme è **finito**, la sua cardinalità è un numero naturale (il numero di elementi). Con i numeri cardinali, possiamo anche misurare e classificare insiemi **infiniti**.

### Cardinalità tramite funzioni

Georg Cantor utilizzò le proprietà delle funzioni per paragonare la cardinalità degli insiemi.

Sia $f$ una funzione $f : A \to B$

- Se $f$ è *suriettiva* allora $B$ non è "più grande" di $A$
- Se $f$ è *totale* e *iniettiva* allora $A$ non è "più grande" di $B$

Due insiemi sono **equipotenti** (hanno la stessa cardinalità) sse esiste una funzione **biunivoca** fra di loro.

$$A \sim B$$

### Cardinalità finite

Se $A$ ha $n$ elementi, allora $A \sim \{ 1, \dots, n \}$. In questo caso si dice che $A$ è **finito** e ha **cardinalità** (o potenza) $n$.

Utilizziamo la notazione

$$|A| = n$$

I numeri naturali si utilizzano come cardinali finiti.

Se$|A| = n$ allora $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$.

### Numerabili

Basati su questa definizione, chiamiamo **numerabili** tutti gli insiemi che hanno la cardinalità di $\mathbb{N}$. I suoi elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i naturali.

$$A \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$$

La cardinalità di $\mathbb{N}$ è chiamata $\aleph_0$.

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$\aleph_0$ è il più piccolo dei numeri cardinali **transfiniti** (i cardinali per misurare insiemi infiniti). Ovviamente $\aleph_0$ non è un numero naturale.

I seguenti insiemi sono numerabili:

- L'insieme dei numeri pari
- L'insieme dei numeri primi
- L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{se } x \text{ pari} \\ \lceil \frac{x}{2} \rceil & \text{se } x \text{ dispari} \end{cases}$$

- Il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- I numeri razionali $\mathbb{Q}$ ($\subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

### Il continuo

$$[0, 1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

Denotiamo per convenzione $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$. Allora $|\mathbb{R}| \geq 2^{\aleph_0}$.

Cantor dimostro che $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (in realtà che $|A| < |\mathscr{P}(A)|$). Dunque $\mathbb{R}$ non è numerabile.

#### Teorema di Cantor

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

Dobbiamo dimostrare che *non esiste* una funzione biunivoca $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Supponiamo che esiste una tale funzione $f$. Definiamo

$$Z = \{ z \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n) \} \subseteq \mathbb{N}$$

Siccome $f$ è biunivoca (quindi suriettiva), esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $f(k) = Z$.

**Domanda:** $k \in Z$ ?

Se $k \in Z$, allora per definizione $k \notin f(k) = Z$. Se $k \notin Z$, allora $k \notin f(x)$ e quindi per definizione $k \in Z$.

**Conclusione:** la funzione $f$ non può esistere.

#### Gerarchia transfinita

Cantor definì la gerarchia dei numeri transfiniti

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

L'**ipotesi del continuo** dice che $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Non ci sono insiemi di cardinalità intermedia fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

## Strutture relazionali, Grafi e Ordinamenti

### Rappresentazioni

Le relazioni possono essere rappresentate da diverse forme:

- **Rappresentazione per elencazione:** descrivere l'insieme di coppie ordinate ($R = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,6 \rangle \}$)
- **Rappresentazione sagittale:** collegare con delle frecce gli elementi che verificano la relazione
- **Rappresentazione tramite diagramma cartesiano:** se $S$ e $T$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, rappresentare le coppie come coordinate sul piano cartesiano
- **Rappresentazione tramite tabella:** una matrice booleana con per colonne gli elementi dell'insieme di arrivo e per righe l'insieme di partenza.

#### Relazioni in un insieme

Una relazione $R \subseteq S \times S$ è detta **relazione in** $S$. In una relazione in $S$, la rappresentazione sagittale collassa in un **grafo**. Usiamo lo stesso insieme per l'origine e la destinazione di ogni freccia. Formalmente un grafo è costituito da **nodi** collegati fra loro da frecce (o **spigoli**). Se $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$, disegnamo uno spigolo da $x$ a $y$.

Le proprietà di una relazione sonon (*again*):

- **Riflessiva** se: $\langle x, x \rangle \in R \; \forall \, x \in S$ (*ogni nodo ha un cappio*)
- **Irriflessiva** se: $\langle x, x \rangle \notin R \; \forall \, x \in S$ (*nessun nodo ha un cappio*)
- **Simmetrica** se: $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \in R$ (*ogni spigolo ha il suo inverso*)
- **Asimmetrica** se: $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \notin R$ (*nessuno spigolo ha il suo inverso e nessun nodo ha un cappio*)
- **Antisimmetrica** se: $\langle x, y \rangle \in R \land \langle y, x \rangle \in R \implies x = y$ (*nessuno spigolo ha il suo inverso (escluso il cappio)*)
- **Transitiva** se: $\langle x, y \rangle \in R \land \langle y, z \rangle \in R \implies \langle x, z \rangle \in R$

Una relazione $R \subseteq S \times S$ in $S$ è

- **Connessa** se ogni due elementi sono collegati. $\forall \, x, y \in S$x se $x \neq y$ allora $\langle x, y \rangle \in R$ oppure $\langle y, x \rangle \in R$
- **Relazione di equivalenza** se è riflessiva, transitiva e simmetrica

La relazione vuota $\varnothing \subseteq S \times S$ è irriflessiva, simmetrica, asimmetrica, antisimmetrica e transitiva. L'identità $I_S$ è riflessiva, simmetrica e transitiva (è una relazione di equivalenza).

#### Riflessività ed operazioni

Siano $R$ ed $R'$ due relazioni su $S$

1. Se $R$ è riflessiva, $R^{-1}$ è riflessiva (*stesso per irriflessibilità*)
2. $R$ è riflessiva sse $\overline{R}$ è irriflessiva
3. Se $R$ ed $R'$ sono riflessive, allora anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono riflessive (*stesso per irriflessibilità*)

#### Simmetria ed operazioni

Siano $R$ ed $R'$ due relazioni su $S$

1. $R$ è simmetrica sse $R = R^{-1}$
2. Se $R$ è simmetrica, allora $R^{-1}$ e $\overline{R}$ sono simmetriche
3. $R$ è antisimmetrica sse $R \cap R^{-1} \subseteq I_S$
4. $R$ è asimmetrica sse $R \cap R^{-1} = \varnothing$
5. Se $R$ ed $R'$ sono simmetriche, allora anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono simmetriche

#### Transitività ed operazioni

Se $R$ ed $R'$ sono transitive allora $R \cap R'$ è transitiva. $R \cup R'$ non è necessariamente transitiva.

#### Matrici booleane

Una matrice booleana è una matrice a valori $\{0, 1\}$. La matrice booleana associata a $R \subseteq S \times T$ si denota $M_R$. Se $|S| = n$ e $|T| = m$, $M_R$ ha $n$ righe e $m$ colonne.

La riga $i$ corrisponde all'elemento $s_i \in S$, la colonna $j$ corrisponde all'elemento $t_j \in T$ ed è tale che

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle s_i, t_j \rangle \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Proprietà di una matrice booleana** Se $R$ è una relazione su $S$, $M_R$ ha le stesse proprietà della visualizzazione tabulare.

- $R$ è **riflessiva** sse $M_R$ ha tutti $1$ sulla diagonale principale
- $R$ è **irriflessiva** sse $M_R$ ha tutti $0$ sulla diagonale principale
- $R$ è **simmetrica** sse $M_R$ è simmetrica
- $R$ è **asimmetrica** sse per ogni $i, j$, se $m_{ij} = 1$, allora $m_{ji} = 0$
- $R$ è **antisimmetrica** sse per ogni $i \neq j$, se $m_{ij} = 1$, allora $m_{ji} = 0$
- $M_{R^{-1}}$ è la trasposta di $M_R$
- $M_{\overline{R}}$ si ottiene scambiando $0$ e $1$ in $M_R$

$$R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Operazioni su matrici booleane**

Se $M$ e $N$ sono due matrici booleane di dimensini $n \times m$, $M \sqcup N$ (il **join** di $M$ e $N$) è la matrice booleana $L$ di dimensine $n \times m$ i cui elementi sono

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij} = 1 \lor n_{ij} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$M \sqcap N$ (il **meet** di $M$ e $N$) è la matrice booleana $L$ di dimensione $n \times m$ i cui elementi sono

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij} = 1 \land n_{ij} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\sqcup$ e $\sqcap$ sono commutative, associative e distributive fra di loro.

#### Prodotto booleano

Siano $M$ e $N$ matrici booleane di dimensioni $n \times m$ e $m \times p$ rispettivamente. Il loro **prodotto booleano** è la matrice $L = M \odot N$ di dimensioni $n \times p$ dove

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists\, k, 1 \leq k \leq m \text{ t.c. } m_{ik} = 1 \land n_{kj} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa operazione è associativa ma non commutativa.

YT Link con spiegazione[1].

### Composizione di relazioni

Dati $R_1 \subseteq S \times T, R_2 \subseteq T \times Q$:

$$R_2 \circ R_1 = \{ \langle x, y \rangle \in S \times Q \mid \exists \in T. \langle x, z \rangle \in R_1, \langle z, y \rangle \in R_2 \}$$

$R_2 \circ R_1$ è la **composizione** di $R_1$ e $R_2$.

[1] https://youtu.be/BjTeDlpj-ts?si=snvhzdZvQByBGinl

La composizione si può calcolare tramite il prodotto di matrici booleane.

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$$

### Relazioni di Equivalenza

Una **relazione di equivalenza** ci aiuta a creare blocchi di elementi che hanno *qualcosa* in comune. Sono relazioni che si comportano "come l'uguaglianza" tra oggetti. Dal punto di vista di una proprietà data, **non** esistono differenze tra due elementi in una relazione di equivalenza.

**Def:** una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è detta **relazione di equivalenza**.

**Esempio:**

- Appartenenere alla stessa classe
- Essere nati nello stesso anno
- Essere parallele nell'insieme delle rette
- …

Se $f : A \to B$ è una funzione totale, allora la relazione

$$R := \{ \langle x, y \rangle \in A \times A \mid f(x) = f(y) \}$$

è una relazione di equivalenza.

La rappresenzazione sagittale di una relazione di equivalenza consiste di diversi grafi totalmente collegati.

#### Partizioni e classi di equivalenza

Dividendo $S$ in gruppi i cui elementi sono "uguali", possiamo studiare insiemi grandi osservando soltanto pochi elementi. Questi gruppi sono chiamati **classi di equivalenza**.

Sia $S$ un insieme. Una partizione di $S$ è una famiglia di insiemi $\mathcal{P} = \{ T_1, \dots, T_n \}, T_i \subseteq S, 1 \leq i \leq n$ tali che:

- $T_i \neq \varnothing$ per ogni $i$, $1 \leq i \leq n$
- $T_i \cap T_j \neq \varnothing$ per ogni $i, j$, $1 \leq i \leq j \leq n$
- $\cup\mathcal{P} = S$

Se $R$ è una **relazione di equivalenza** su $S$ allora $T \neq \varnothing \subseteq S$ è una classe di equivalenza se per ogni $x \in S$:

$$x \in T \iff \{\, y \in S \mid \langle x, y\rangle \in R \,\} = T$$

Cioè, $x$ è in relazione con tutti e soltanto quegli elementi di $T$.

Sia $S$ un insieme e $R$ una relazione di equivalenza su $S$. Ogni elemento $x \in S$ definisce una classe di equivalenza

$$[x]_R = \{\, y \in S \mid \langle x, y\rangle \in R \,\}$$

La famiglia di insiemi $\{\, [x]_R \mid x \in S \,\}$ (gli elementi sono le classi di equivalenza di $S$) è chiamato l'**insieme quoziente** di $S$ rispetto a $R$ (indicato con $S/R$). L'insieme quoziente è una partizione di $S$.

**Esempio:** Sia $n \in \mathbb{N}$. La relazione $\simeq_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita come

$$x \simeq_n y \iff x \equiv y \mod n \leftrightarrow (\text{ossia } (x \mod n) = (y \mod n))$$

è una relazione di equivalenza.

Per $n = 4$, $\simeq_4$ definisce $4$ classi di equivalenza.

$$\begin{aligned}
[x] &= \{\, x + 4k \mid k \in \mathbb{N} \,\} \\
[0] &= \{\, 0, 4, 8, 12, \dots \,\} \\
[1] &= \{\, 1, 5, 9, 13, \dots \,\} \\
[2] &= \{\, 2, 6, 10, 14, \dots \,\} \\
[3] &= \{\, 3, 7, 11, 15, \dots \,\}
\end{aligned}$$

L'insieme quoziente $\mathbb{N}/\simeq_4 = \{ [0], [1], [2], [3] \}$ è spesso indicato con $\mathbb{N}_4$.

## Grafi

Un grafo è definito da

- Un insieme di **nodi** (chiamati anche *vertici*)
- Collegamenti tra vertici che possono essere:
  - Orientati (**archi**)
  - Non orientati (**spigoli**)
- (eventualmente) Dati associati ai nodi e collegamenti (**etichette**)

I grafi possono rappresentare **relazioni binarie**.

### Gradi

Un arco che va da $v$ a $w$ è **uscente** da $v$ ed entrante in $w$. Il numero di archi uscenti dal nodo $v$ è il **grado di uscita** di $v$. Il numero di archi entranti in $v$ è il **grado in ingresso** di $v$.

Un nodo è chiamato:

- **Sorgente** se non ha archi entranti (*grado di entrata* $0$)
- **Pozzo** se non ha archi uscenti (*grado di uscita* $0$)
- **Isolato** se non ha archi né uscenti né entranti

I nodi $v$ e $w$ sono **adiacenti** se c'è un arco tra $v$ e $w$ (in qualunque direzione). Questo arco è **incidente** su $v$ e $w$. Il grado di $v$ è il numero di nodi adiacenti a $v$.

### Cammino

Un **cammino** è una sequenza **finita** di nodi

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$$

tali che per ogni $i$, $1 \le i < n$, esiste un arco uscente da $v_i$ ed entrante in $v_{i+1}$. Questo cammino va da $v$ a $w$ se $v_1 = v$ e $v_n = w$.

#### Semicammino

Un **semicammino** è una sequenza finita di nodi

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$$

tali che per ogni $i, 1 \le i < n$, esiste un arco che collega $v_i$ e $v_{i+1}$ in **direzione arbitraria**.

La **lunghezza** di un (semi)cammino è il numero di archi che lo compongono ($n - 1$).

Un (semi)cammino è **semplice** se tutti i nodi nella sequenza sono diversi (anche se $v_1 = v_n$).

Un grafo è **connesso** se esiste sempre un semicammino tra due nodi qualsiasi.

#### Ciclo

Un **ciclo** intorno al nodo $v$ è un cammino tra $v$ e $v$. Un **semiciclo** intorno al nodo $v$ è un semicammino tra $v$ e $v$. Un **cappio** intorno a $v$ è un ciclo di lunghezza $1$.

#### Distanza

La **distanza** da $v$ a $w$ è la lunghezza del cammino *più corto* tra $v$ e $w$.

- La distanza da $v$ a $v$ è sempre $0$
- Se non c'è nessun cammino da $v$ a $w$ allora la distanza è infinita ($\infty$)

In un grafo ordinato, la distanza da $v$ a $w$ **non** è sempre uguale alla distanza da $w$ a $v$.

#### Trovare le distanze: Algoritmo

Ricerca in **ampiezza** delle distanze da $v$ ad ogni nodo.

**Inizializzazione:**

- Segnare $v$ come **visitato** con distanza $d(v) = 0$
- Segnare altri nodi come **non visitato**

**Ciclo:**

- Trovare un nodo $w$ **visitato** con distanza *minima* $d(w) = n$
- Segnare $w$ come **esplorato**
- Per ogni nodo $w'$ incidente da $w$: se $w'$ è **non visitato**, segnare $w'$ come **visitato** e $d(w') = n + 1$

**Finalizzazione:** ad ogni nodo $w$ **non visitato** assegnare $d(w) = \infty$.

### Definizione formale di grafo

Un **grafo orientato** è una coppia $G = (V, E)$ dove

- $V$ è un insieme di **nodi**
- $E \subseteq V \times V$ è una relazione binaria in $V$ (**archi**)

Un **grafo non orientato** è un grafo orientato dove $E$ è una relazione **simmetrica**. In questo caso gli archi sono rappresentati come **coppien non ordinate** $(v, w)$ ($(v, w) = (w, v)$). Graficamente togliamo le frecce (l'ordine) agli archi.

### Sottografo

Il grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ è un **sottografo** di $G_2 = (V_2, E_2)$ sse $V_1 \subseteq V_2$ e $E_1 \subseteq E_2$. Un sottografo si ottiene togliendo nodi e/o archi dal grafo.

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Il sottografo **indotto** da $V' \subseteq V$ è il grafo che ha soltanto archi adiacenti agli elementi di $V'$. Formalmente è il grafo $G = (V', E')$ dove

$$E' = \{ \langle v, w \rangle \in E \mid v, w \in V' \}$$

### Grafo aciclico orientato (DAG)

Un grafo orientatosenza cicli si chiama **grafo aciclico orientato**.

In un DAG non esiste nessun cammino da un nodo a se stesso

#### Grafi etichettati

Un **grafo etichettato** è una tripla $G = (V, E, \ell)$ dove

- $(V, E)$ è un grafo
- $\ell : E \to L$ è una funzione totale che associa ad ogni arco $e \in E$ un'**etichetta** da un insieme $L$

Diamo un'etichetta ad ogni arco del grafo.

Un grafo etichettato può rappresentare una **relazione ternaria** (e viceversa).

I nomi e le etichette sono spesso irrilevanti.

#### Matrice di adiacenza

La **matrice di adiacenza** di un grafo $G = (V, E)$ è la matrice booleana della relazione $E$.

La matrice di adiacenza di grafi non orientati è **sempre simmetrica**.

#### Grafo completo

Un **grafo completo** collega ogni nodo con tutti gli altri nodi (ma non con se stesso).

La sua matrice di adiacenza ha $0$ su tutta la diagonale ed $1$ sulle altre posizioni.

#### Connettività

Ricordiamo che $G = (V, E)$ è **connesso** se per ogni $v, w \in V$ esiste un **semicammino** da $v$ a $w$. $G$ è **fortemente connesso** se per ogni due nodi $v, w \in V$ esiste un **cammino** da $v$ a $w$.

In un grafo fortemente connesso:

- Esiste sempre un ciclo che visita **ogni** nodo (non necessariamente semplice)
- Non ci sono né sorgenti né pozzi

### Isomorfismi tra grafi

Due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ sono **isomorfi** se esiste una funzione biunivoca $f : V_1 \to V_2$ tale che

$$\langle v, w \rangle \in E_1 \iff \langle f(v), f(w) \rangle \in E_2$$

L'isomorfismo $f$ mantiene la struttura del grafo $G_1$, ma sostituisce i nomi dei vertici con quelli di $G_2$. Due grafi isomorfi sono in realtà lo **stesso grafo** con i nodi rinominati.

## Alberi

Un'**albero** è un DAG *connesso* tale che

- Esiste *esattamente un* nodo sorgente (*radice dell'albero*)
- Ogni nodo diverso dalla radice ha **un solo** arco entrante

I nodi pozzo di un'albero sono chiamati **foglie** o **nodi esterni**. Tutti gli altri nodi sono chiamati **interni**. Per analogia con gli **alberi genealogici**, le relazioni tra i nodi usano nomi come *padre*, *figlio*, *discendente*, $\dots$

### Proprietà

Il grado di **ingresso** di un nodo è:

- $1$ se non è la radice
- $0$ se è la radice

Il grado di **uscita** di un nodo non ha restrizioni.

Per ogni nodo $v$ che non è la radice, esiste *esattamente un* cammino dalla radice a $v$.

Un albero non può essere mai vuoto (la radice esiste sempre).

Se un albero è finito, allora esiste *almeno* una foglia (che può essere anche la radice).

I nodi **intermedi** sono contemporaneamente padre e figlio.

### Rappresentazione gerarchica

Gli alberi spesso rappresentano **strutture gerarchiche**. In questo caso, l'ordine è **implicito** (gli archi si disegnano **senza frecce**).

### Cammini in un albero

In un albero c'è *esattamente un* **cammino** dalla radice a qualunque nodo $v$ diverso dalla radice. Ogni nodo $w$ in questo cammino è un **ascendente** di $v$ (oppure *avo*) e $v$ è un **discendente** di $w$ (la radice è l'unico nodo senza discendenti). Se il cammino da $w$ a $v$ ha lunghezza $1$, allora $w$ è il *padre* di $v$ e $v$ è un figlio di $w$.

### Profondità

La **profondità** di un nodo $v$ è la lunghezza del cammino dalla radice a $v$.

L'**altezza** di un albero è la profondità massima dei suoi nodi.

### Alberi binari

Un **albero binario** è un albero dove ogni nodo ha al massimo due figli. I figli di un nodo in un albero binario sono **ordinati** (*figlio sinistro* e *figlio destro*).