Appunti di Algoritmi e Strutture Dati

Algoritmi e Strutture Dati (prof. Pirola) - CdL Informatica
Unimib - 23/24

Federico Zotti

19 Mar 2024

Indice

1 Introduzione

Un'**algoritmo** è una sequenza di istruzioni **elementari** (devono essere comprese e eseguite dall'esecutore) che permettono di risolvere un problema computazionale (ovvero per ogni possibile input produce l'output corretto).

Per definire un **problema** è necessario specificare:

- Il tipo del parametro in input
- Il tipo del risultato in output
- Il legame tra input e output

Un'**istanza** di un problema si ottiene specificando uno dei possibili valori in input specifico per il problema.

1.1 Algoritmo: Definizione dell'ordinamento di un vettore

Sort:

- Input: `Array Int` (`Dim` n) $\rightarrow A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
- Output: `Array Int` (`Dim` n) $\rightarrow A' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$

A' è una permutazione di A, tale che $a'_1 \leq a'_{i+1} \quad \forall i \,.\, 1 \leq i \leq n-1$.

1.2 Scelta di un algoritmo

L'algoritmo migliore è quello che utilizza il minor numero di risorse.

Le risorse sono:

- Il tempo di esecuzione
- Lo spazio (memoria) utilizzato

1.2.1 Tempo di esecuzione

Per calcolare il tempo utilizziamo una funzione $T(n)$. n rappresenta la quantità di dati in input.

- $T_p(n)$ rappresenta il caso peggiore
- $T_n(n)$ rappresenta il caso "medio" (non è la media dei due)
- $T_m(n)$ rappresenta il caso migliore

1.2.1.1 Esempio

- Algoritmo 1: $T(n) = 100000 \cdot n$
- Algoritmo 2: $T(n) = 10 \cdot n^3$
- Algoritmo 3: $T(n) = 1 \cdot 2^n$

In questo caso il migliore dipende dal grado di n, dunque l'algoritmo 1 risulta quello più veloce. Per numeri di n molto piccoli invece è meglio calcolare caso per caso il tempo. Nel caso ci siano più n, si considera quello con il grado maggiore.

$$T(n) = 7n^3 + 2n + 10000 \sim n^3$$

1.3 Algoritmo: Ricerca sequenziale

- V: vettore di interi
- k: intero da cercare nel vettore
- p: posizione nel vettore

```
Ricerca_Seq(V, k)
    p = 1
    while (V[p] != k) and (p <= V.length)
        p = p + 1
    if p > V.length
        return -1
    else
        return p
```

Analisi del tempo di esecuzione:

- Caso peggiore: $k \neq V[\,] \Rightarrow T(n) = 3 + 2 \cdot n + 1 \sim n$
- Caso migliore: $k = V[1] \Rightarrow T(n) = 4 \sim c$
- Caso medio: $k = V[\frac{n}{2}] \Rightarrow 3 + 2\frac{n}{2}(\pm 1) \sim n$

Se V è ordinato ci si può fermare appena trova un numero più grande di k.


```
Ricerca_Seq(V, k)
    p = 1
    while (V[p] < k) and (p <= V.length)
        p = p + 1
    if (V[p] != k) or (p > V.length)
        return -1
    else
        return p
```

Analisi del tempo di esecuzione:

- Caso migliore: $V[p] \geq k \Rightarrow 4 \sim c$
- Caso peggiore: $k > V[p] \Rightarrow 3 + 2n \sim n$
- Caso medio: $k = V\left[\frac{n}{2}\right] \Rightarrow 3 + 2\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Per avere un'ottimizzazione significativa si può sfruttare il fatto che il vettore è ordinato per implementare una semplice ricerca binaria (spezzare il vettore e guardare solo una metà).

```
Ricerca_Dic(V, k)
    sx = 1
    dx = V.length
    p = (dx + sx) div 2
    while (V[p] != k) and (sx < dx)
        if k > V[p]
            sx = p + 1
        else
            dx = p - 1
        p = (dx + sx) div 2

    if V[p] = k
        return p
    else
        return -1
```

Analisi del tempo di esecuzione:

- Caso migliore: $V\left[\frac{n}{2}\right] = k \Rightarrow t_m(n) = 6 \sim c$
- Caso peggiore: $k \notin V \Rightarrow T_p(n) = 5 + 4 \cdot (\log_2 n) + 1 \sim \log_2 n$
- Caso medio: $T(n) = \frac{T_p(n)}{2} \sim \log_2 n$

2 Problema computazionale

Un problema computazionale è una relazione tra input e output.

$$P \subseteq I \times O$$

2.1 Esempio: Ricerca in un vettore

Input:

- Un vettore V di n elementi
- Un valore k

Output:

- Un intero i, t.c. $i = -1$ se $k \notin V$ altrimenti $V[i] = k$

Ci sono tanti algoritmi per risolvere questo problema. Un esempio è la **ricerca sequenziale**.

> Aggiungere algo. #todo-uni

2.2 Esempio: Ricerca in un vettore ordinato

Input:

- Un vettore **ordinato** V di n elementi
- Un valore k

Output:

- Un intero i, t.c. $i = -1$ se $k \notin V$ altrimenti $V[i] = k$

Questo problema è diverso dal precedente, perché i dati in input sono diversi. Essendo che l'algoritmo della ricerca sequenziale è corretto per tutti i vettori in input, è corretto anche per i vettori ordinati. Esistono però algoritmi specifici per questo problema. Per esempio la **ricerca binaria** (o dicotomica).

> Inserire algo. #todo-uni

3 Trovare il miglior algoritmo

Generalmente il **tempo di esecuzione** e lo **spazio utilizzato** da un algoritmo sono legati alla grandezza dell'input. Dunque è possibile esprimere questi due dati come funzioni di n.

$$T(n)$$

$$S(n)$$

> In questo corso ci si concentrerà di più su $T(n)$.

Il tempo di esecuzione non può essere espresso in secondi, perché questi dipendono dalla velocità dell'elaboratore (da quanto tempo viene impiegato ad eseguire ogni singola istruzione). Dunque il tempo viene espresso in quante istruzioni devono essere eseguite.

Non sempre però il tempo dipende soltanto da n. Per esempio $300 + 200$ risulta molto più semplice di $345 + 783$, nonostante abbiano lo stesso numero di cifre. Dunque $T(n)$ oscilla tra il caso migliore $T_{migl}(n)$ e il caso peggiore $T_{pegg}(n)$.

3.1 Esempio

Riprendendo gli algoritmi di ricerca si possono definire i tempi di esecuzione.

- **Ricerca sequenziale:**
  - $T_{migl}(n) = a_1$
  - $T_{pegg}(n) = a_2 + b_2 n$
- **Ricerca binaria:**
  - $T_{migl}(n) = a_3$
  - $T_{pegg}(n) = a_4 + b_4 \log_2 n$

4 Notazioni asintotiche

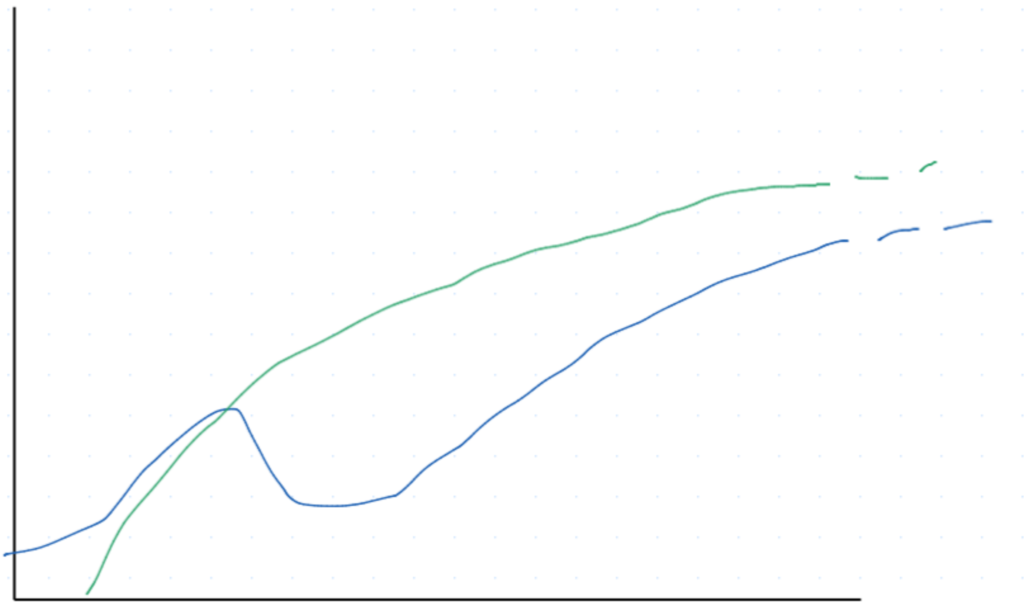
4.1 Limite asintotico superiore

Assunzioni:

- Le funzioni $T(n)$, $S(n)$ sono definite nei numeri naturali, ma i grafici vengono definiti nei reali per semplicità

- Le funzioni sono definitivamente positive

> Aggiungere grafico con una funzione casuale e una funzione def maggiore. #todo-uni



- Blu: $T_{pegg}(n) = f(n)$
- Verde: $O(g(n))$

$$O(g(n)) = \left\{ f(n) \mid \exists\, n_0 > 0, c > 0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \forall\, n > n_0 \right\}$$

Ovvero $O(g(n))$ è l'insieme delle funzione superiormente limitate da $g(n)$ per una costante c $(g(n) \cdot c)$.

> **Esempio:**
>
> - $f(n) = 3n^2$
> - $3n^2 \in O(n^3)$? ovvero
> - $\exists\, n_0, c > 0 : 0 \leq 3n^2 \leq c \cdot n^3 \forall n > n_0$?
>
> $n \geq \frac{3}{c}$? Questo è verificato per esempio con $c = 3, n_0 = 1$.
> È possibile però che esista una funzione $g(n)$ "minore": $3n^2 = O(n^2)$?
> $c \geq 3$? Questo è verificato per esempio con $c = 4, n_0 = 1$.
> Dunque $3n^2 = O(n^2)$.

Si può provare con una funzione ancora più "bassa", ma facendo i calcoli la condizione non viene soddisfatta.

Esempio:

- $f(n) = 5n^3 + n^2$
- $f(n) \in O(n^3)$? ovvero
- $\exists\, n_0, c > 0 : 0 \le 5n^3 + n^2 \le c \cdot n^3 \forall n > n_0$?

$6n^3 \le cn^3$? Questo è verificato per esempio con $c = 7, n_0 = 1$.
Si può provare con una funzione ancora più "bassa", ma facendo i calcoli la condizione non viene soddisfatta.

4.2 Limite asintotico inferiore

> Aggiungere grafico con funzione $T(n)$ e una funzione def inferiore.

$$\Omega(g(n)) = \{\, f(n) \mid \exists\, n_0 > 0, c > 0 \text{ t.c. } 0 \le c \cdot g(n) \le f(n) \,\forall\, n > n_0 \,\}$$

Es:

- $f(n) = 3n^2$
- $g(n) = n$
- $3n^2 \in \Omega(n)$?

$$\exists\, c > 0, n_0 > 0 \quad 0 \le cn \le 3n^2 \quad \forall\, n > n_0$$
$$3n^2 \ge cn$$
$$n \ge \frac{c}{3}$$
$$c = 3 \quad n_0 = 1$$

Dunque è verificato.
Si può dire che $3n^2 = \Omega(n)$ *(impropriamente)*.
Proseguendo, $3n^2 = \Omega(n^2)$?

$$\exists\, c > 0, n_0 > 0 \quad 0 \le cn^2 \le 3n^2 \quad \forall\, n > n_0$$
$$3n^2 \ge cn^2$$
$$3 \ge c$$
$$c = 3 \quad n_0 = 1$$

Dunque è verificato.

Continuando, $3n^2 = \Omega(n^3)$?

$$\exists\, c > 0, n_0 > 0 \quad 0 \le cn^3 \le 3n^2 \quad \forall\, n > n_0$$
$$3n^2 \ge cn^3$$
$$3 \ge cn$$
$$n \le \frac{3}{c}$$

Questo non è verificato definitivamente. $3n^2 \notin \Omega(n^3)$. Lo stesso vale per tutti gli $\Omega(n^\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 2$.

4.3 Limite asintotico stretto

Devo trovare due costanti c_1, c_2 tale che la funzione $T(n)$ è compresa definitivamente tra $c_1 g(n)$ e $c_2 g(n)$.

> Disegnare grafico #todo-uni : funzione casuale $T(n)$ con due “rette”/“curve” che stanno def. sopra e def. sotto $T(n)$.

$$\Theta(g(n)) = \{\, f(n) \mid \exists\, n_0, c_1, c_2 > 0 : 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \quad \forall\, n > n_0 \,\}$$

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$$

Es 1: continuando gli esempi precedenti, sappiamo che

$$3n^2 = \Omega(n^2) \wedge 3n^2 = O(n^2) \implies 3n^2 = \Theta(n^2)$$

Es 2:

- $f(n) = 5n^3 + n^2$
- $g(n) = n^3$
- $5n^3 + n^2 = \Omega(n^3)$?

$$5n^3 + n^2 \geq 5n^3 = \Omega(n^3)$$
$$5n^3 + n^2 = O(n^3) \implies 5n^3 + n^2 = \Theta(n^3)$$

Es 3:

- $f(n) = 5n^3 - 10n^2 - 30n$
- $g(n) = n^3$
- $f(n) = \Omega(n^3)$?

$$\exists\, c, n_0 > 0 \quad 0 \leq cn^3 \leq 5n^3 - 10n^2 - 30n \quad \forall\, n > n_0$$
$$5n^3 - 10n^2 - 30n \geq cn^3$$
$$5n^3 - cn^3 \geq 10n^2 + 30n$$
$$(5-c)n^3 \geq 10n^2 + 30n$$

Sapendo che

- $10n^2 \leq 10n^2$
- $30n \leq 30n^2$

possiamo scrivere $10n^2 + 30n \leq 10n^2 + 30n^2$. Adesso dobbiamo stabilire se $(5-c)n^2 \geq 10n^2 + 30n^2$ (perché implica la disuguaglianza precedente).

$$(5-c)n^2 \geq 10n^2 + 30n^2$$
$$n \geq \frac{40}{5-c} \qquad \text{con } c < 5$$
$$c = 1 \quad n_0 = 9$$

Dunque è verificato.

Inoltre $f(n) = O(n^3) \implies f(n) = \Theta(n^3)$.

Dim: $\Omega()$ è uguale a n al grado massimo del polinomio?

- $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0 \quad a_k > 0$
- $g(n) = n^k$
- $f(n) = \Omega(n^k)$?

$$\exists\, c, n_0 > 0 \quad 0 \leq cn^k \leq f(n) \quad \forall\, n > n_0$$
$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0 \geq cn^k$$
$$(a_k - c)n^k \geq -a_{k-1} n^{k-1} - \ldots - a_0$$

$$-a_{k-1} n^{k-1} - \ldots - a_0 \leq |a_{k-1}| n^{k-1} + |a_{k-2}| n^{k-1} + \ldots + |a_0| n^{k-1}$$

$$(a_k - c)n^k \geq \sum_{i=0}^{k-1} |a_i| n^{k-1}$$
$$(a_k - c)n^k \geq n^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} |a_i|$$
$$(a_k - c)n \geq \sum_{i=0}^{k-1} |a_i|$$
$$n \geq \frac{\sum_{i=0}^{k-1} |a_i|}{a_k - c} \qquad \text{con } c < a_k$$

Dimostrato che un polinomio è un omega di n al grado massimo.

Dim: un'esponenziale è limitato inferiormente da un polinomio.

- $f(n) = 2^n$
- $2^n = O(2^n)$
- $2^n = \Omega(n^b) \quad \forall\, b > 0$?

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^b}{2^n} = 0$$
$$\implies \exists\, n_0 \quad \forall\, n > n_0 \quad \frac{n^b}{2^n} < 1$$
$$2^n > 1 n^b$$

Quindi tutti i polinomi limitano inferiormente un esponenziale. E sapendo che $2^n =$

$\Omega(2^n)$, si considera questo perché è “il più grande”. Ciò implica $2^n = \Theta(2^n)$.

Dim: lo stesso per i logaritmi.

- $f(n) = \log_2^a n$
- $\log_2^a n = O(n^b) \quad \forall\, b > 0\,?$

$$
\begin{gathered}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2^a n}{n^b} = 0 \\
\implies \exists\, n_0 \quad \forall\, n > n_0 \quad \frac{\log_2^a n}{n^b} < 1 \\
\log_2^a = O(n^b)
\end{gathered}
$$

Quindi tutti i polinomi limitano inferiormente un logaritmo. E sapendo che $\log_2^a = O(\log_2^a)$, si considera questo perché è “il più piccolo”. Ciò implica $\log_2^a = \Theta(\log_2^a)$.

4.4 Scala degli asintoti

- 1
- $\log n$
- $n^b \quad \forall\, 0 < b < 1$
- n
- $n \cdot \log n$
- $n^{1+\varepsilon} \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1$
- n^2
- $n^2 \cdot \log n$
- $n^{2+\varepsilon} \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1$
- n^3
- $n^3 \cdot \log n$
- $n^{2+\varepsilon} \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1$
- $\ldots$
- $a^n \quad \forall\, a > 1$ *(ogni a è una classe a se)*
- $n!$
- n^n

4.5 Esempi

> **Es 1:** ricerca in un vettore ordinato.
>
> | **Algoritmo** | **Tempo caso migliore** | **Tempo caso peggiore** |
> |---|---|---|
> | Ricerca sequenziale | $a_1 = \Omega(1)$ | $a_2 + b_2 n = O(n)$ |
> | Ricerca dicotomica | $a_3 = \Omega(1)$ | $a_4 + b_4 \log n = O(\log n)$ |

5 Stimare il tempo di un algoritmo

5.1 Problema: Trova minimo

> **Attenzione:** gli indici degli array partono da 1 e non da 0.

- **Input:** un vettore V di n interi
- **Output:** una posizione i t.c. $V[i] \leq V[j] \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$

```
Trova_Minimo(V)
    posMin = 1
    for i = 2 to V.length
        if V[i] < V[posMin]
            posMin = i
    return posMin
```

- **Caso migliore:** $1 + n + (n-1) + 0 + 1 = 2n + 1 = \Omega(n)$
- **Caso peggiore:** $1 + n + (n-1) + (n-1) + 1 = 3n = O(n)$

Dunque il tempo di calcolo di questo algoritmo è $\Theta(n)$.

5.2 Dimostrare che l'algoritmo è corretto

Riscriviamo l'algoritmo con un `while`.

```
Trova_Minimo(V)
    posMin = 1
    i = 2
    while i <= V.length
        if V[i] < V[posMin]
            posMin = i
        i = i + 1
    return posMin
```


- **Invariante di ciclo** *(condizione che deve essere sempre vera)*: `posMin` è la posizione che contiene il valore più piccolo di $V[1 \dots i-1]$.
- **Inizializzazione** *(prima del while)*: `posMin` è la posizione del minimo di $V[1 \dots 1]$? Sì
- **Conservazione** *(ciò che è vero alla prima istr. del ciclo deve essere vero anche alla fine)*: l'invariante di ciclo è vera alla fine se è vera anche all'inizio
- **Terminazione** *(la conseguenza dell'inizializzazione e della conservazione)*: $i = V.\text{length}+1$. `posMin` è la posizione del minimo di $V[1 \dots V.\text{length}] = V$

5.3 Problema: Ordinamento di vettori

- **Input:** A un vettore di n interi
- **Output:** un vettore di n interi che contiene gli stessi valori di V ma ordinati in modo crescente

5.3.1 Esempio

Supponiamo di avere un vettore

$$A = (5, 2, 4, 6, 1, 3)$$

Per ordinarlo si possono seguire questi passi:

1. Trovo il minimo e la sua posizione
2. Scambio il minimo con il primo elemento

$$A = (1, 2, 4, 6, 5, 3)$$

3. Ora continuo considerando la restante parte del vettore $(2, 4, 6, 5, 3)$ trovando il minimo e la sua posizione *(il secondo elemento più piccolo)*
4. Scambio questo elemento con il secondo elemento di A
5. Continuo così finché non esaurisco il vettore

$$A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

5.3.2 Implementazione

```
Selection_Sort(A)
    for i = 1 to A.length
        // Trova l'elemento minimo
        posmin = i
        for j = i + 1 to A.length
            if A[j] < A[posmin]
                posmin = j

        scambia A[posmin] con A[i]
```

Per semplificare i calcoli il primo `for` va da 1 a `A.length` al posto che `A.length - 1`, e non entriamo nel secondo `for` quando `i = A.length`. Inoltre consideriamo i parametri come Java, quindi i vettori vengono passati per riferimento e dunque l'algoritmo non necessita di una `return`.

5.3.3 Analisi dei tempi di calcolo

> `for a to b`: $T(n) = b - a + 1 + 1$

Selection Sort	$T_{migl}(n)$	$T_{pegg}(n)$
`for i = 1 to A.length`	$n + 1$	$n + 1$
`posmin = i`	n	n
`for j = i + 1 to A.length`	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
`if A[j] < A[posmin]`	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
`posmin = j`	0	$\Theta(n^2)$
`scambia A[posmin] con A[i]`	n	n

- **Caso migliore:** $T_{migl}(n) = \Omega(n^2)$
- **Caso peggiore:** $T_{migl}(n) = O(n^2)$

Dunque l'algoritmo è $\Theta(n^2)$.

6 Stuff