

---

# Appunti di Geometria e Algebra Lineare

Algebra lineare e Geometria (prof. Borghesi) - CdL  
Informatica Unimib - 23/24

Federico Zotti

13 maggio 2024



## Indice

<b>1</b>	<b>Insiemi</b>	<b>3</b>
1.1	Sottoinsieme . . . . .	3
1.2	Unione disgiunta . . . . .	3
1.3	Complemento . . . . .	3
1.4	Prodotto cartesiano . . . . .	3
1.4.1	Prodotto cartesiano di tre insiemi . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Funzioni</b>	<b>4</b>
2.1	Notazione . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Campi</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>6</b>
4.1	Sottospazi vettoriali . . . . .	9
4.2	Vettori linearmente dipendenti . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Basi</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Matrici</b>	<b>15</b>
6.1	Operazione di trasposizione . . . . .	16
6.2	Prodotto di matrici . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Sistemi di equazioni lineari</b>	<b>17</b>
7.1	Rango di matrici . . . . .	19
7.2	Risolvere un sistema di equazioni lineari . . . . .	20
7.2.1	Esempio . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Il determinante</b>	<b>22</b>
8.1	Formula di Laplace . . . . .	23
8.2	Trasformazioni elementari con determinante . . . . .	24
8.3	Proprietà supplementari del determinante . . . . .	25
8.4	Relazioni tra determinante e sistemi di eq. lineari . . . . .	25

<b>9</b>	<b>Matrici invertibili</b>	<b>25</b>
9.1	Matrici inverse e trasformazioni elementari . . . . .	26
9.2	Relazioni fra invertibilità, determinante e rango . . . . .	27
<b>10</b>	<b>Applicazioni lineari (omomorfismi)</b>	<b>28</b>
10.1	Espressione di omomorfismi . . . . .	30
10.1.1	In coordinate . . . . .	30
10.1.2	Parametrica . . . . .	31
10.1.3	Vantaggi e svantaggi . . . . .	32
10.1.4	Esempi . . . . .	33
10.2	Matrice associata ad un omomorfismo . . . . .	34
10.2.1	Primo punto . . . . .	34
10.2.2	Secondo punto . . . . .	35
10.3	Formula per il cambiamento di basi . . . . .	36
10.4	Teorema della composizione di omomorfismi . . . . .	37

## 1 Insiemi

Tutto uguale a fondamenti.

### 1.1 Sottoinsieme

- $\subset$  indica un sottoinsieme (quello che precedentemente era definito come  $\subseteq$ )
- $\subsetneq$  indica un sottoinsieme proprio (quello che precedentemente era definito come  $\subset$ )

### 1.2 Unione disgiunta

$$A = \{ a, b, c \}$$

$$B = \{ x, b, z \}$$

$$A \amalg B = \{ a, b_A, c, x, b_B, z \}$$

Gli elementi doppi vengono considerati due volte.

### 1.3 Complemento

$$B \setminus A = \{ x \in B : x \notin A \}$$

### 1.4 Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$$

$$B \times A = \{ (x, y) : x \in B, y \in A \}$$

> Notare che le coppie vengono denotate da parentesi tonde, e non angolate.

| **Oss:** supponendo  $x_0 \neq y_0$ , si noti che  $(x_0, y_0) \neq (y_0, x_0)$ .

### 1.4.1 Prodotto cartesiano di tre insiemi

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 4, 5, 6 \}$$

$$C = \{ 8, 9 \}$$

$$A \times B = \{ (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), \dots \}$$

$$(A \times B) \times C = \{ ((1, 4), 8), ((1, 4), 9), ((1, 5), 8), ((1, 5), 9), \dots \}$$

$$A \times (B \times C) = \{ (1, (4, 8)), (1, (4, 9)), (1, (5, 8)), (1, (5, 9)), \dots \}$$

$$A \times B \times C = \{ (1, 4, 8), (1, 4, 9), (1, 5, 8), (1, 5, 9), \dots \}$$

## 2 Funzioni

Una funzione è una corrispondenza tra un elemento di un insieme ad un elemento di un altro insieme.

Notare che le funzioni non vengono considerate insiemi, a differenza di fondamenti.

Due funzioni  $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$  sono uguali ( $f = g$ ) sse

1.  $A = C, B = D$
2.  $f(x) = g(x), \forall x \in A$

$f(x)$  viene chiamata immagine di  $x$  tramite  $f$  e  $g(x)$  immagine di  $x$  tramite  $g$ .

### 2.1 Notazione

$$f : A \rightarrow B$$

- $A$  è il **dominio** di  $f$
- $B$  è il **codominio** di  $f$
- Sia  $S \subset A$ , allora  $f(S)$  è l'**immagine di  $S$  tramite  $f$**

$$f(S) = \{ b \in B : \exists a \in S \text{ con } f(a) = b \}$$

Ovvero  $f(S)$  è l'insieme che contiene tutte le immagini degli elementi di  $S$  tramite  $f$ . Se si restringe il dominio di  $f$  da  $A$  ad  $S$ , si crea una nuova funzione  $f|_S$ .

**Attenzione:**  $\subset$  è solo un'inclusione insiemistica. (Più avanti verranno introdotti gli spazi vettoriali).

L'immagine di  $f = f(A)$ . Non bisogna confondere l'immagine di una funzione con il suo codominio, perché il codominio potrebbe essere più grande della sua immagine.

- Sia  $R \subset B$ , allora  $f^{-1}(R)$  è la **controimmagine di  $R$  tramite  $f$**

$$f^{-1}(R) = \{ a \in A : f(a) \in R \}$$

- $f$  è **iniettiva** se  $a_1 \neq a_2 \in A$ , allora  $f(a_1) \neq f(a_2)$
- $f$  è **suriettiva** se  $\forall b \in B, \exists a_b \in A : f(a_b) = b$  ( $Imm(f) := f(A)$  deve essere uguale a  $B$ )

**Oss:** affinché  $f : A \rightarrow B$  sia una funzione deve avvenire:

1.  $\forall x \in A, \exists f(x) \in B$
  2.  $f(x)$  è un solo elemento di  $B$
- $f$  è **biiettiva** (o **biunivoca**) se è sia iniettiva che suriettiva
  - Siano  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow D$  due funzioni,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  (**composizione**)

### 3 Campi

**Def:** un **campo** è un insieme dotato di due operazioni  $(+, \cdot)$ . Deve avere tre proprietà:

1.  $(K, +)$  è un gruppo abeliano
  - $+: K \times K \rightarrow K$  (l'operazione non esce dal gruppo)
  - $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K$  (proprietà associativa)
  - $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in K$  (esistenza del neutro)
  - $\forall a \in K \quad \exists -a \in K$  t.c.  $-a + a = a + (-a) = 0$  (esistenza dell'opposto)
  - $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$  (proprietà commutativa)

2.  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  è un gruppo abeliano

- $\cdot : K \times K \rightarrow K$  (l'operazione non esce dal gruppo)
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$  (proprietà associativa)
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$  (esistenza del neutro)
- $\forall a \in K \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in K \setminus \{0\}$  t.c.  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$  (esistenza dell'opposto)
- $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K$  (proprietà commutativa)

3. Il prodotto è distributivo rispetto alla somma:  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$

## 4 Spazi vettoriali

Siano  $V$  un **insieme** e  $K$  un **campo** (per es.  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ).

Attenzione a non confondere i due insiemi. Anche se sono lo stesso o uno è sottoinsieme dell'altro, rimangono due insiemi distinti.

Gli elementi di  $V$  si chiamano **vettori**, mentre gli elementi di  $K$  si chiamano **scalari**.

**Def:**  $V$  è uno **spazio vettoriale su un campo  $K$**  se esistono due operazioni su  $V$ :

1.  $“+” : V \times V \rightarrow V \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Con proprietà:

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$  (associatività)
- $\exists \vec{0} \in V : \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$  (esistenza dell'elemento neutro)
- $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$  (esistenza degli opposti)
- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  (commutatività)

Ciò vuol dire che  $(V, +)$  è un gruppo abeliano.

2.  $“\cdot” : K \times V \rightarrow V \quad (\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$  (prodotto per scalare)

**Attenzione:** l'operazione  $\vec{v} \cdot \alpha$  non è definita.

Con proprietà:

- $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V \vec{v} + \lambda_2 \cdot_V \vec{v} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$  (*distributività*)
- $\lambda \cdot_V (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \cdot_V \vec{v}_1 + \lambda \cdot_V \vec{v}_2 \quad \forall \lambda \in K, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
- $(\lambda_1 \cdot_K \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 \cdot_V \vec{v}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$
- $1_K \cdot_V \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

**Oss:**  $V$  (come ogni altro spazio vettoriale) non ha un suo prodotto interno, cioè non esiste un vettore " $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ ".

Queste proprietà ne implicano altre (corollari). Si può dimostrare che, se  $V$  è uno spazio vettoriale su  $K$ , allora:

- $0 \cdot_V \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V$
- $\lambda \cdot_V \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot_V \vec{v} = -\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$  (in questo caso  $-1 \in K$  è l'elemento opposto dell'identità moltiplicativa del campo  $K$ )

**Es 1:**

$$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{R}$$

Dotiamo  $\mathbb{R}^n$  di una struttura di spazio vettoriale su  $K$ .

La **somma** è definita come:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left( (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \right) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$  (*vettore nullo, elemento neutro additivo*)
- $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $-\vec{v} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

La **moltiplicazione per scalare** è definita come:



$$\cdot : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left( \alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \mapsto (\alpha \cdot x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

### Es 2:

$$V = \mathbb{R}_{[x]} = \{ \text{polinomi in } x \text{ a coeff reali} \}$$

$$= \{ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_h x^h : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \}$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^h \lambda_i x^i : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \right\}$$

- Dati  $p(x), q(x)$  polinomi in  $x$ :

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \sum_{i=0}^h \alpha_i x^i + \sum_{j=0}^l \beta_j x^j \\ &= \sum_{u=0}^{\max(l,h)} (\alpha_u + \beta_u) \cdot x^u \end{aligned}$$

- $0(x) = 0 \in \mathbb{R}$  (*polinomio nullo, di grado 0*)
- $-p(x) = \sum_{i=0}^h -\alpha_i \cdot x^i$
- $\lambda \cdot p(x) = \sum_{i=0}^h \lambda \cdot \alpha_i \cdot x^i$

### Es 3:

Sia  $V = \{ \text{funzioni} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \}$ . Dotiamo  $V$  di una struttura di spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

La somma è definita come

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto "f + g" : I \rightarrow \mathbb{R}$$

In questo caso  $f + g$  è definito come

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

Il prodotto viene definito come

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, f : I \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto "f \cdot g" : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

## 4.1 Sottospazi vettoriali

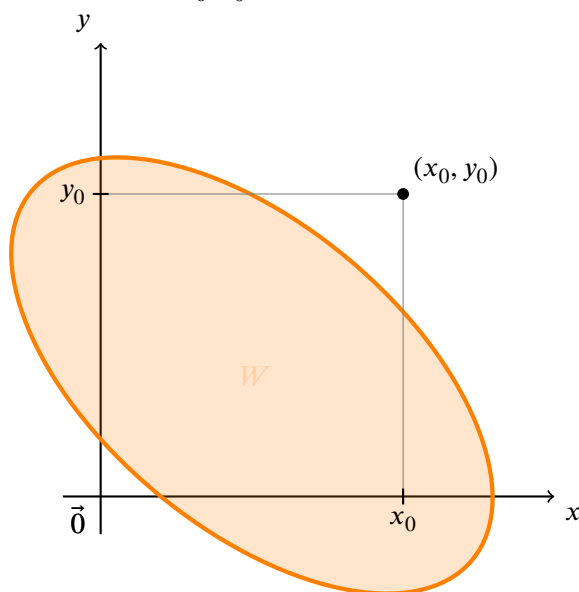
**Def:** sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ , e  $W \subset V$ . Diremo che  $W$  è un **sottospazio vettoriale di  $V$**  se:

1.  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W \quad \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$
2.  $\lambda \cdot \vec{w} \in W \quad \forall \lambda \in K, \vec{w} \in W$

In tal caso denoteremo la relazione tra  $W$  e  $V$  come  $W < V$ .

**Oss:** se  $W < V$ , allora  $W$  è lui stesso uno spazio vettoriale.

**Es 1:**  $V = \mathbb{R}^2 \ni (x_0, y_0)$

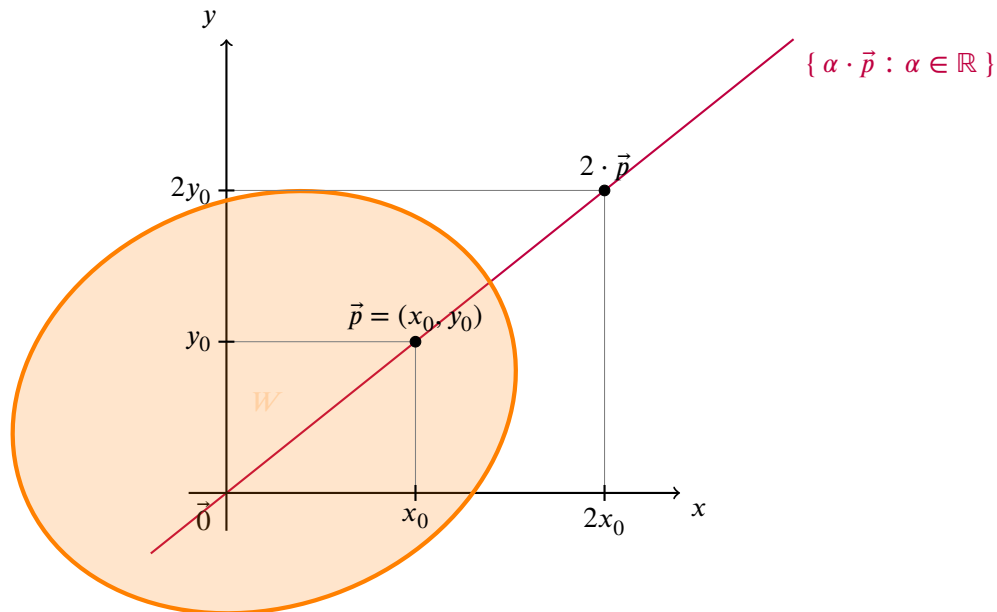


Sia  $\lambda = 0$ . Per la proprietà 2.,  $\lambda \cdot \vec{w} \in W$ , ma in questo caso  $0 \cdot \vec{w} = \vec{0} \notin W$ .

Dunque  $W$  non può essere un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Ciò non vuol dire che non si possa mettere una struttura di uno spazio vettoriale su  $W$ , ma essa non sarà quella ereditata da  $V$ .

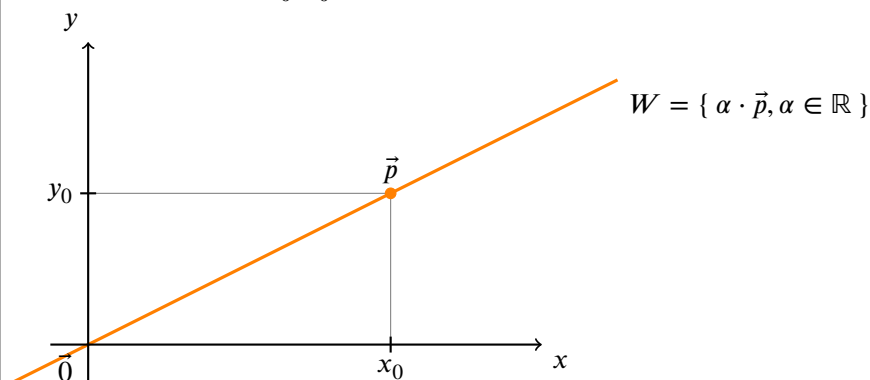
**Es 2:**  $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



Per la proprietà  $\lambda \cdot \vec{p} \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Sia  $\lambda = 2$ ,  $\lambda \cdot \vec{p}$  diventa  $2 \cdot \vec{p} = (2x_0, 2y_0)$ . Si può notare che  $2 \cdot \vec{p} \notin W$ .

Dunque  $W$  non è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

**Es 3:**  $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



$W$  è un sottospazio vettoriale di  $V = \mathbb{R}^2$  perché vengono soddisfatte le due condizioni:

1.  $\alpha_1 \cdot \vec{p} + \alpha_2 \cdot \vec{p} \stackrel{?}{\in} W$ . Questo si può riscrivere raccogliendo come  $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \vec{p} \in W$  ed è dimostrato perché la somma di scalari è uno scalare
2. Verificata banalmente

**Oss:** in alternativa alle due proprietà del sottospazio vettoriale (dalla definizione), possiamo controllare che  $W \subset V$ , con  $V$  sp. vett. su campo  $K$ , sia un sottospazio vett. verificando che  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$  si abbia  $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in W$ .

Quali sono tutti i sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ ?

- $\{\vec{0}\}$
- $\{\alpha \cdot \vec{p}, \alpha \in \mathbb{R}\}$  (*rette passanti per l'origine*)
- $\mathbb{R}^2$

**Oss:** ogni sp. vett.  $V$  ammette almeno due sottosp. vett. cioè  $\{\vec{0}\}$  e  $V$  stesso.

**Domanda cruciale:** dato  $S \subset V$  (sottoinsieme di uno spazio vettoriale), esiste il “più piccolo sottospazio vettoriale di  $V$  che contiene  $S$ ”? La risposta è sì.

**Def:**  $\langle S \rangle \subset V$  denoterà il più piccolo sottospazio di  $V$  che contiene  $S$ . Esso si chiama **sottospazio vettoriale generato da  $S$** .

Si dimostra che

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Quindi  $\langle S \rangle$  è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  con i coefficienti  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e tutti i vettori in  $S$ .

**Oss:**  $S \subset \langle S \rangle$

## 4.2 Vettori linearmente dipendenti

**Def:** sia  $S \subset V$  spazio vettoriale.

I vettori di  $S$  sono detti **linearmente dipendenti** se  $\exists \vec{w} \in S$  e vettori  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_h \in S$  con  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  tali che  $\vec{w} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \vec{z}_i$ .

$S$  sono **linearmente indipendenti** se non sono dipendenti.

Se  $W \subset V$ , allora  $\langle W \rangle = W$ .

**Lemma:**  $S \subset V$  sp. vett.. Allora  $S$  è un insieme di vettori **linearmente indipendenti** se e solo se

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0} \implies \mathbb{R} \ni \lambda_i = 0, \forall i$$

Ciò deve valere  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $\{\vec{z}_i\} \subset S$  ( $\{\vec{z}_i\} \neq \{\vec{0}\}$ ).

**Dim:**

$$A \implies B$$

$$\neg A \iff \neg B$$

$S \subset V$  è un insieme di vettori lin. indep.. Vogliamo dimostrare che, se  $\{\vec{z}_i\} \subset S$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0}$ , allora  $\lambda_i = 0, \forall i$ .

Supponiamo che  $\exists \lambda_h \neq 0 : \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0}$ .

$$\lambda_h \vec{z}_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_j \vec{z}_j$$

$$\lambda_h^{-1} \lambda_h \vec{z}_h = \lambda_h^{-1} \cdot \sum_{j \neq h} \lambda_j \vec{z}_j$$

$$\vec{z}_h = \sum_{j \neq h} (-\lambda_h^{-1} \lambda_j) \cdot \vec{z}_j$$

Questo implica che  $S$  è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

$$B \implies A$$

$$\neg B \iff \neg A$$

Supponiamo che  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$ , dimostriamo che  $S$  è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Supponiamo che  $S$  sia un insieme di vettori lin. dip.  $\implies \exists \vec{z}_c \in S$  e  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m \in S$  tali che  $\vec{z}_c = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{z}_j$ ,  $\vec{z}_j \neq \vec{z}_c \forall j$ .

$$\vec{0} = -\vec{z}_c + \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{z}_j$$

Tale combinazione lineare mi nega  $B$ .

## 5 Basi

Sia  $W < V$ . Per comunicare uno spazio vettoriale ci sono due modi:

1. Siccome  $W \subset V$ ,  $W = \{ \dots \}$
2. Sfrutto il fatto che  $W < V$  e quindi  $\exists S \subset V : \langle S \rangle = W$

Per il punto 2. bisogna “ottimizzare”  $S$ . Ovvero trovare il più piccolo  $S$  che genera  $W$ . La minimalità è equivalente a  $W \neq \langle S - \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in S$ .

**Def:** sia  $V$  uno spazio vettoriale. Un insieme ordinato  $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$  di vettori di  $V$  si dice **base di  $V$**  se ogni vettore  $\vec{v}$  di  $V$  si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i$$

con  $\vec{v}_i \in B$ .

Gli scalari  $a$  vengono chiamate **coordinate**.

**Teo:** le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \subset V$  è una **base** di  $V$
2.  $S$  è un **sistema di generatori** per  $V$  (cioè  $\langle S \rangle = V$ ) e i vettori di  $S$  sono linearmente indipendenti
3.  $\langle S \rangle = V$  e  $\forall \vec{v} \in V, \exists! \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v}, \quad \{ \vec{v}_i \} \subset S$
4.  $S$  è un insieme minimale di generatori di  $V$
5.  $S$  è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti di  $V$

**Corollario:** ogni spazio vettoriale che ammette un sistema finito di generatori ammette una base.

**Es 1:**  $V = \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$ .

**Base canonica:**

$$\{ (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) \}$$

n volte

Verifichiamo che è una base usando il punto 3. del teorema.

Sia  $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , verifichiamo che  $\vec{v} \in \langle S \rangle$ , cioè che  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ .

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \\ &= \sum_{i=1}^n (0, \dots, 0, \overset{i}{\lambda_i}, 0, \dots, 0) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

L'eguaglianza è verificata se  $\lambda_i = x_i, \forall i$ .

In conclusione  $\{ \vec{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \}$  sono generatori per  $\mathbb{R}^n$ , ma anche una base.

**Es 2:**  $V = \mathbb{R}[x] \ni \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad n \in \mathbb{N}$ .

$\sum_{i=0}^n a_i x^i$  è combinazione lineare di  $\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$  con coefficienti  $\{ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \}$ .

Un insieme di generatori di  $\mathbb{R}[x]$  è  $\{ 1, x, x^2, \dots \} = \{ x^i, i \in \mathbb{N} \}$ , che è anche una base.

**Teorema di estensione ad una base:**  $V$  spazio vettoriale.

Siano  $I = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h \}$  vettori linearmente indipendenti  $\subset V$  e  $G = \{ \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \}$  generatori di  $V$ .

Allora  $\exists G' \subset G : I \cup G'$  è una base di  $V$ .

**Teo:** con le notazione del teo precedente

$$\#(I) \leq \#(G)$$

**Corollario:** supponiamo che  $V$  ammetta un sistema di generatori finito. Allora ogni base di  $V$  ha lo stesso numero di elementi.

**Def:** sia  $V$  sp. vett. che ammette un sistema di generatori finito. La **dimensione** di  $V$  è il numero di vettori di una sua base qualunque (*hanno tutte lo stesso numero di elementi*).

**Corollario:**  $\dim(V) = n \implies n$  vettori linearmente indipendenti di  $V$  sono anche generatori. Questo implica anche che  $n$  generatori di  $V$  sono linearmente indipendenti.

**Esercizio:**

$$S = \{ (1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 2, 0) \} \subset \mathbb{R}^3$$

Ottenere una base da  $S$ .

**Notazione:**  $V$  sp. vett. e  $W, Z \subset V$ .

- $W \cap Z \subset V$
- $W \cup Z \subset V$  (*solo sottoinsieme*)
- $\langle W \cup Z \rangle = W + Z$  (*abuso di simbologia, si usa solo a denotare l'unione*)

**Teorema di Grassmann:** sia  $V$  sp. vett. di dim. finita. Allora, conta la notazione precedente:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

## 6 Matrici

Per rappresentare i coefficienti di un sistema di equazioni lineari è possibile utilizzare una matrice.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -y + z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Def:** una matrice  $k \times n$  (*righe per colonne*) è un elemento di  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$  oppure  $\mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k$  (che equivale a  $\mathbb{R}^{k \cdot n}$ ).

In entrambi i casi le matrici sono elementi di uno spazio vettoriale. Tali spazi vettoriali sono gli insiemi di matrici  $k \times n$ ,  $k$  fissato e  $n$  fissato.

L'addizione tra matrici è definita come



$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{A=(a_{ij})} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}}_{B=(b_{ij})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \end{pmatrix}}_{A+B=(a_{ij}+b_{ij})}$$

La moltiplicazione tra scalare e matrice come

$$\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$$

Sia  $M(k, n) = \{ \text{matrici reali } k \times n \}$  sp. vett.. La sua base canonica è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e la sua dimensione è  $k \cdot n$ .

## 6.1 Operazione di trasposizione

**Def:** l'**operazione di trasposizione** è una funzione  $M(k, n) \rightarrow M(n, k)$  che associa una matrice con la sua “specchiata” rispetto alla diagonale:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_A \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{A', T(A)}$$

**Abuso di notazione:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1, 3, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (0, 5, 2)$$

## 6.2 Prodotto di matrici

In questo caso non vale l'abuso di notazione sopra definito.

$A \cdot B$  è definita quando  $A$  è  $k \times n$  e  $B$  è  $n \times h$ . In tal caso  $A \cdot B$  è  $k \times h$ .

**Def:**  $A \cdot B = (c_{ij})$  (con  $A = (a_{cd})$  e  $B = (b_{xy})$ ) dove  $c_{ij} = \sum_{u=1}^n a_{iu} \cdot b_{uj}$ .

#todo-uni Fare il disegnino dell'operazione...

Il prodotto di matrici non è commutativo, anche se è definito.

**Oss:** consideriamo  $M(n, n)$ .  $M(n, n)(+, \cdot)$  non è un campo (il  $\cdot$  non è commutativo), non è un corpo (perché non esistono gli inversi di tutte le matrici  $\neq \vec{0}$ ).

Identità moltiplicativa è la seguente matrice

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Def:**  $B \in M(n, n)$  è invertibile se e solo se  $\exists C \in M(n, n) : C \cdot B = B \cdot C = Id_n$ .

## 7 Sistemi di equazioni lineari

Un'equazione lineare è una serie di simboli

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b \quad b, a_i \in \mathbb{R}$$

Un sistema di equazioni è

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n = b_k \end{cases}$$

con  $b$  e  $a$  fissati e  $x$  variabili.

Ad un sistema di equazioni si possono associare due matrici:

- **Matrice completa:**

$$A|\vec{b} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & a_{kn} & b_n \end{array} \right)$$

- **Matrice incompleta:**  $A$  stessa

Riscriviamo  $A$  in “forma matriciale”:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{dove } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

**Oss:** supponiamo che  $A$  sia una matrice invertibile. Questo implica che  $A$  sia quadrata.

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri per  $A^{-1}$  otteniamo  $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \iff Id_m \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ .

Concludiamo che  $A^{-1} \cdot \vec{b}$  è l'unica soluzione del sistema.

**Proposizione:** sia  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  un sistema di equazioni lineari. Se  $A$  è invertibile esso ammette come unica soluzione  $A^{-1} \cdot \vec{b}$ .

### **Teorema di Rouché-Capelli:**

1. Il sistema  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  ammette almeno una soluzione se e solo se  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\vec{b})$ .
2. Supponiamo che il sistema ammetta soluzioni, allora l'insieme  $V$  di tutte le solu-

zioni è

$$V = \vec{c} + W = \{ \vec{c} + \vec{w} : \vec{w} \in W \}$$

dove  $\vec{c}$  è una soluzione qualsiasi di  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  e  $W$  è il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , con  $n$  il numero di incognite di  $A$  (*colonne*), dato dalle soluzioni del sistema  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ .

Inoltre  $\dim(W) = n - \text{rango}(A) = n - \text{rango}(A|\vec{b})$ .

## 7.1 Rango di matrici

**Def:** sia  $A$  una matrice in  $M(n, k)$ .

Il **rango di  $A$**  è indifferentemente:

- La dimensione di  $\langle$  vettori riga di  $A \rangle$
- Il **massimo** numero di righe linearmente indipendenti di  $A$
- La dimensione di  $\langle$  vettori colonna di  $A \rangle$
- Il **massimo** numero di colonne linearmente indipendenti di  $A$

Inoltre

$$\text{Rg}(A) \leq \min \{ n, k \}$$

Il rango di una matrice è un modo per misurare la “quantità di informazioni” contenute nella matrice.

**Def:** una matrice  $A \in M(n, k)$  è detta **a scala** se il numero di zeri a sinistra nell' $n$ -esima riga  $\vec{r}_i$  è strettamente maggiore del numero di zeri a sinistra della riga  $\vec{r}_{i-1}$ ,  $\forall i \geq 2$ .

Se il numero di zeri è già al massimo (*una riga solo di zeri*), allora “strettamente” non vale più.

Secondo un teorema è possibile portare ogni matrice in forma a scala tramite un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe, cioè:

1. Scambio di posizione di due righe ( $\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{r}_j$ )

2. Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo ( $\vec{r}_i \rightarrow \lambda \vec{r}_i$ )
3. Rimpiazzamento di una riga con la somma tra quella stessa riga e un'altra riga moltiplicata per un qualsiasi scalare ( $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \lambda \vec{r}_j$ )

**Oss:** se una matrice è a scala, il suo rango coincide al numero di righe non (identicamente) nulle.

**Oss:** siccome si opera sulle righe, i rapporti di linearità tra le colonne vengono mantenuti. Più precisamente, siano  $\{\vec{a}_i\}$  le colonne di  $A$  e  $T(A)$  una trasformazione elementare di  $A$  sulle righe (con  $(T(A))_i$  l' $i$ -esima colonna di  $T(A)$ ), allora:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i (T(A))_i = \vec{0}$$

**Proposizione:** sia  $T$  una trasformazione elementare sulle righe. Allora,  $T(A) = T(Id_n \cdot) \cdot A$ , dove  $n$  è il numero di righe di  $A$ .

Lo stesso vale per le colonne:  $S(A) = A \cdot S(Id_k)$ .

## 7.2 Risolvere un sistema di equazioni lineari

Supponiamo di:

1. Stabilire se  $A\vec{x} = \vec{b}$  ammette soluzioni
2. Eventualmente determinarle

### Passaggio A:

Tramite il teorema di Rouché-Capelli possiamo fare valutazioni su  $Rg(A)$  e  $Rg(A|\vec{b})$ . Agiamo con trasformazioni elementari sulle righe su  $A|\vec{b}$ . Si noti che, se  $T$  è una trasf. el. sulle righe,

$$T(B_1|B_2|\dots|B_h) = (T(B_1)|T(B_2)|\dots|T(B_h))$$

In particolare,  $T(A|\vec{b}) = (T(A)|T(\vec{b}))$ .

### Passaggio B:

**Teo:** le soluzioni di  $A\vec{x} = \vec{b}$  sono le stesse di  $T(A) \cdot \vec{x} = T(\vec{b})$ , se  $T$  è un'operazione el. sulle righe.

### 7.2.1 Esempio

#### Esempio:

$$\begin{cases} x - z + w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ x - y + w = -1 \end{cases} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Con le colonne della matrice che corrispondono ai coeff. di  $x, y, z, w$ .

Dunque dopo aver trasformato la matrice a scala determiniamo che

$$Rg(A) = Rg(A|\vec{b}) = 3$$

Secondo R-C esistono soluzioni e se  $V$  è l'insieme delle soluzioni,

$$V = \vec{c} + W$$

e  $\dim(W) = n - Rg(A) = 4 - 3 = 1$ .

Creiamo il sistema associato alla matrice a scala:

$$\begin{cases} x - z + w = 1 & \longrightarrow x = -1 - z \\ y + z - w = 0 & \longrightarrow y = 2 + z \\ 2z - w = -2 & \longrightarrow w = 2 + 2z \end{cases}$$

Le soluzioni diventano

$$\begin{aligned} \implies V &= \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -1 - z, y = 2 + x, w = 2 + 2z \} \\ &= \{ (-1 - z, 2 + x, z, 2 + 2z) \in \mathbb{R}^4 : z \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Come vediamo quindi che  $V = \vec{c} + W$ , dove  $\vec{c}$  è una soluzione del sistema e  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$ ?

Separiamo la parte **omogenea** da quella **non omogenea** (che ha costanti):

$$V = \{ (-1, 2, 0, 2) + (-z, z, z, 2z) \in \mathbb{R}^4 : z \in \mathbb{R} \}$$

Si noti che

$$\underbrace{\{ (-z, z, z, 2z) : z \in \mathbb{R} \}}_{\langle (-1, 1, 1, 2) \rangle} \subset \mathbb{R}^4$$

Chiamiamo  $\langle (-1, 1, 1, 2) \rangle = W$  e  $(-1, 2, 0, 2) = \vec{c}$ . Quindi  $V = \vec{c} + W$ .

## 8 Il determinante

Come oggetto matematico è una funzione

$$\det_n : M_A(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$M(n, n)$  lo vediamo come una  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$  dove vivono le colonne di  $A$ .  $A$  viene considerato come una matrice composta da tanti vettori colonna

$$A = (\vec{c}_1 | \vec{c}_2 | \dots | \vec{c}_n)$$

Il determinante soddisfa 4 proprietà:

### 1. Proprietà di linearità rispetto alla somma

$$\det(\vec{c}_1, \dots, \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) = \det(\vec{c}_1, \dots, \vec{a}, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) + \det(\vec{c}_1, \dots, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

### 2. Proprietà di linearità rispetto alla moltiplicazione per scalare

$$\det(\vec{c}_1, \dots, \lambda \cdot \vec{c}_i, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) = \lambda \cdot \det(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_i, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

### 3. Proprietà di alternanza

$$\det(\vec{c}_1, \dots, \underbrace{\vec{c}, \vec{c}}_{\text{uguali}}, \dots, \vec{c}_n) = 0$$

#### 4. Proprietà della base canonica

$$\det(\underbrace{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n}_{\text{base canonica}}) = 1$$

**Teo:** esiste un'unica funzione che soddisfa le proprietà 1., 2., 3., 4..

**Oss:** la proprietà 3. è equivalente a

$$3. \iff \det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_i}, \overset{i+1}{\vec{c}_{i+1}}, \dots, \vec{c}_n) = -\det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_{i+1}}, \overset{i+1}{\vec{c}_i}, \dots, \vec{c}_n)$$

$$\iff \det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_i}, \dots, \overset{j}{\vec{c}_j}, \dots, \vec{c}_n) = -\det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_j}, \dots, \overset{j}{\vec{c}_i}, \dots, \vec{c}_n)$$

$$\iff \det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}}, \dots, \overset{j}{\vec{c}}, \dots, \vec{c}_n) = 0$$

**Esempio:**

$$\det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

### 8.1 Formula di Laplace

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice  $n \times n$ . Denotiamo con  $A_{ij}$  (complemento algebrico di  $a_{ij}$ ) la sottomatrice che otteniamo eliminando l' $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna da  $A$ .

**Teo:**

Sviluppo lungo l' $i$ -esima riga:

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$



Sviluppo lungo la  $j$ -esima colonna:

$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

**Esempio:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo la prima riga perché ha più zeri (come la seconda).

$$\begin{aligned} \det(A) &= \overbrace{(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(A_{11})}^{j=1} \\ &\quad + \overbrace{(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det(A_{12})}^{j=2} \\ &\quad + \overbrace{(-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \det(A_{13})}^{j=3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

**Corollario:**

$$\det(A) = \det(A^t)$$

dove  $A^t$  è la matrice trasposta di  $A$ .

## 8.2 Trasformazioni elementari con determinante

In che modo le trasformazioni elementari influenzano il determinante?

1. **Permutazione di due righe:**  $r_1 \leftrightarrow r_2 \implies \det(T(A)) = -\det(A)$  (*cambio di segno*)
2. **Moltiplicazione di una riga per  $\lambda \neq 0$ :**  $r_1 \rightarrow \lambda r_1 \implies \det(T(A)) = \lambda \cdot \det(A)$  (*determinante per lambda*)

3. **Somma di una riga con un multiplo di un'altra:**  $r_1 \rightarrow r_1 + \lambda r_2 \implies \det(T(A)) = \det(A)$  (*determinante non cambia*)

### 8.3 Proprietà supplementari del determinante

Sebbene  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ , in generale, il  $\det$  si comporta bene nei confronti del prodotto di matrici.

#### Teorema di Binet:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

**Corollario:** sia  $A$  invertibile, allora  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

In particolare  $\det(A) \neq 0$ .

### 8.4 Relazioni tra determinante e sistemi di eq. lineari

Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ .

#### Formula di Cramer:

1. Il sistema  $A\vec{x} = \vec{b}$  ammette un'unica soluzione  $\iff \det(A) \neq 0$
2. In tal caso, l'unica soluzione  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  è data da

$$c_i = \frac{\det(A_1 | A_2 | \dots | \overset{i}{\vec{b}} | A_{i+1} | \dots | A_n)}{\det(A)}$$

con  $A_j$  la  $j$ -esima colonna di  $A$ .

## 9 Matrici invertibili

Sia  $A$  una matrice quadrata.

$A$  è invertibile  $\iff \exists A^{-1} : A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id$ .

**Teo:**

1.  $A$  è invertibile  $\iff \det(A) \neq 0$
2. In tal caso,  $A^{-1} = (x_{ij})$  è data da

$$x_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$$

dove  $A_{ji}$  è la sottomatrice ottenuta da  $A$  togliendo la  $j$ -esima riga e la  $i$ -esima colonna (*complemento algebrico di  $a_{ji}$* ).

Concretamente, per calcolare  $A^{-1}$ :

1. Traspongo  $A \rightarrow A^t$
2. Calcolo la matrice dei complementi algebrici

$$\begin{pmatrix} \det((A^t)_{11}) & \det((A^t)_{12}) & \dots & \det((A^t)_{1n}) \\ \det((A^t)_{21}) & \det((A^t)_{22}) & \dots & \det((A^t)_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \det((A^t)_{n1}) & \det((A^t)_{n2}) & \dots & \det((A^t)_{nn}) \end{pmatrix}$$

3. Aggiusto i segni moltiplicando i coeff. per  $(-1)^{i+j}$
4. Divido tutta la matrice per  $\det(A)$

## 9.1 Matrici inverse e trasformazioni elementari

Un altro metodo per calcolare l'inversa è il seguente.

Ricordiamo che, se  $T$  è una trasf. el. sulle righe,  $T(A) = T(Id) \cdot A$ .

**Proposizione:** sia  $A$  quadrata.

$A$  è invertibile se e solo se esistono una serie di trasf. el.  $T_k(T_{k-1}(\dots(T_2(T_1(A))))) = Id$ .

Infatti poniamo  $C_i := T_i(Id)$ .

Allora,  $C_k \cdot C_{k-1} \cdot \dots \cdot C_2 \cdot C_1 \cdot A = Id$ . Quindi  $C_k \cdot C_{k-1} \cdot \dots \cdot C_1 = A^{-1}$ .

## 9.2 Relazioni fra invertibilità, determinante e rango

Sia  $A$  una matrice qualunque. Il rango di  $A$  è il massimo numero di righe lin. indep. di  $A$  e il massimo numero di colonne lin. indep. di  $A$ .

Inoltre il rango di  $A$  è anche il **massimo ordine dei “minori” non nulli di  $A$** .

**Digressione:** una sottomatrice di  $A$  è una matrice ottenuta eliminando righe e colonne da  $A$ .

**Def:** un minore di  $A$  è il determinante di una sottomatrice quadrata di  $A$ .

**Def:** l'ordine di un minore di  $A$  è l'ordine della sottomatrice il cui determinante è tale minore.

Nel caso che  $A$  sia quadrata inoltre:

**Teo:**  $\det(A) \neq 0 \iff A$  è invertibile  $\iff A$  ha rango massimo possibile uguale all'ordine di  $A$ .

## 10 Applicazioni lineari (omomorfismi)

Le funzioni insiemistiche non sono adatte per studiare spazi vettoriali. È necessario considerare un sottoinsieme di tali funzioni che rispettino certe proprietà.

**Def:** siano  $V$  e  $W$  spazi vett. e  $f : V \rightarrow W$  una funzione insiemistica.

Diremo che  $f$  è una **funzione (o applicazione) lineare** o **omomorfismo** se valgono le seguenti proprietà:

1.  $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \quad , \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
2.  $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v}) \quad , \forall \vec{v} \in V, \lambda \in K$

**Corollario:**  $f : V \rightarrow W$  lineare.

- $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
- $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$
- Se  $U < V$ , allora  $f(U) < W$
- Se  $H < W$ , allora  $f^{-1}(H) < V$
- Sia  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \subset U < V$  sistema di generatori per  $U$ . Allora  $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  sono un sistema di generatori per  $f(U) < W$ .
- $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(\vec{v}_i)$  ( $f$  è **completamente determinata dall'immagine di un sistema di generatori del dominio**)

**Oss:** se  $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_m\}$  è un sistema di generatori per  $H < W$ , non è detto che  $f^{-1}(H) < V$  sia generato da  $f^{-1}(S_H)$ .

**Es:**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le funzioni lineari sono tutte e sole quelle del tipo  $f(x) = \lambda \cdot x, \lambda \in \mathbb{R}$

Nel caso di  $\mathbb{R}$  la sua base è un qualsiasi vettore di dimensione 1 diverso dal vettore nullo ( $\vec{0}$ ).

**Es:**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Se definiamo un omomorfismo nel seguente modo:

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$$

$$(1, 0) \mapsto \vec{0}$$

$$(0, 1) \mapsto \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (1, 0) + \beta \cdot (0, 1) \mapsto \alpha \cdot f(1, 0) + \beta \cdot f(0, 1) = \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

questo viene chiamato **omomorfismo nullo**.

Se invece definiamo un'altra funzione lineare come:

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$$

$$(1, 0) \mapsto \overline{31}$$

$$(0, 1) \mapsto \overline{-\log 5}$$

$$\alpha \cdot (1, 0) + \beta \cdot (0, 1) \mapsto \alpha \cdot f(1, 0) + \beta \cdot f(0, 1)$$

Dunque

$$(-2, \sqrt{5}) \mapsto -2 \cdot 31 + \sqrt{5} \cdot (-\log 5)$$

**Es:**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

dove

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Definiamo un omomorfismo nel seguente modo:

$$(2, 1) \mapsto f(2, 1)$$

$$(0, 1) \mapsto f(0, 1)$$

$$\alpha \cdot (2, 1) + \beta \cdot (0, 1) \mapsto \alpha \cdot f(2, 1) + \beta \cdot f(0, 1)$$

**Oss:** in generale se  $A$  è una matrice  $n \times k$ , la funzione

$$f_A : \mathbb{R}^{k \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k) \mapsto A \cdot \vec{v} \quad (\text{vettore colonna di lunghezza } n)$$

è sempre lineare.

**Teorema (di Grassmann 2):** sia  $f : V \rightarrow W$  lineare. Allora

$$\dim(V) = \dim(f(V)) + \dim(N(f))$$

dove  $N(f)$  è il **nucleo di  $f$  (kernel)**, cioè  $f^{-1}(\vec{0}_W)$ .

**Corollario:** sia  $\dim(W) = \dim(V)$  finita,  $f : V \rightarrow W$  lineare. Allora

$$f \text{ è iniettiva} \iff f \text{ è suriettiva} \iff f \text{ è biiettiva}$$

Per dimostrarlo si usa

$$f \text{ è iniettiva} \iff N(f) = \{\vec{0}_V\}$$

## 10.1 Espressione di omomorfismi

### 10.1.1 In coordinate

Nel caso di **sottospazi vettoriali**:

$$V = \mathbb{R}^n \supset U$$

$$U = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

Nel caso di **omomorfismi** invece:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

con

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ (lineari)}$$

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j$$

### 10.1.2 Parametrica

Nel caso di **spazi vettoriali**:

$$V(\text{sp. vett. qualsiasi})$$

$$U = \langle \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \dots \} \rangle \quad (\text{base})$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^h \alpha_i \cdot \vec{v}_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \right\}$$

Nel caso di **omomorfismi** invece:



$$f : V \rightarrow W, \quad \dim(V) = n$$

$$\text{base di } V \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1 \rightarrow f(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ \vec{v}_n \rightarrow f(\vec{v}_n) \end{array} \right.$$

$f(\vec{v})$  è calcolata scrivendo  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{v}_i$  e poi  $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(\vec{v}_i)$ .

### 10.1.3 Vantaggi e svantaggi

- **Coordinate**

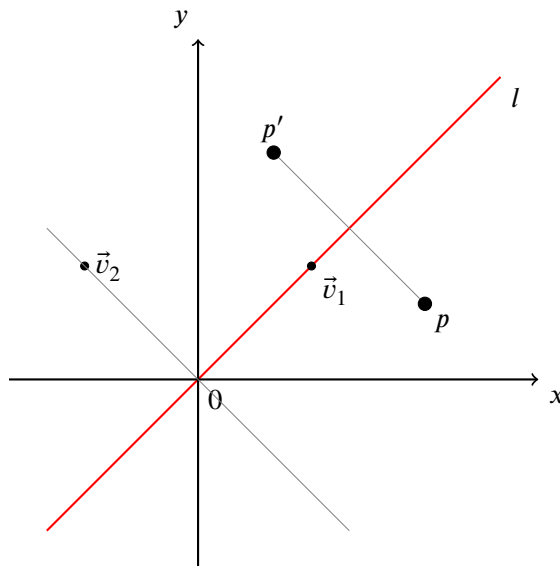
- Vantaggi: posso stabilire facilmente se tanti vettori appartengono a  $U$  e calcolare le immagini di tanti vettori
- Svantaggi: può essere usata solo in spazi vettoriali euclidei  $\mathbb{R}^n$  e è difficile trovare subito l'espressione in coordinate

- **Parametrica**

- Vantaggi: opposto degli svantaggi dell'espressione in coordinate
- Svantaggi: per stabilire se un vettore appartiene a  $U$  oppure calcolarne l'immagine, dobbiamo risolvere un sistema di equazioni lineari

### 10.1.4 Esempi

**Es:** simmetria assiale.  $s_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineare.



Determiniamo  $s_l$  in forma “parametrica”: scegliamo una base  $\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$  di cui possiamo calcolare facilmente le immagini  $s_l(\vec{v}_1)$  e  $s_l(\vec{v}_2)$ .

$$s_l(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$$

$$s_l(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$$

In questo caso l’asse di simmetria è definito come

$$l = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases} \wedge \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

**Es:** rotazione antioraria attorno all’origine per un angolo  $\alpha$ .

In questo caso come base opportuna possiamo scegliere la base canonica  $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ .

Infatti

$$r_\alpha(1, 0) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$r_\alpha(0, 1) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

Sia  $\vec{v} = (x, y)$  un vettore qualunque di  $\mathbb{R}^2$ . Voglio calcolare  $r_\alpha(x, y)$ :

$$(x, y) = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$$

$$\begin{aligned} r_\alpha(x, y) &= \lambda_1 \cdot r_\alpha(\vec{e}_1) + \lambda_2 \cdot r_\alpha(\vec{e}_2) \\ &= x \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) + y \cdot (-\sin \alpha, \cos \alpha) \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{aligned}$$

## 10.2 Matrice associata ad un omomorfismo

### 10.2.1 Primo punto

Sia  $f : V^n \rightarrow W^k$  lineare.

Siano  $(\vec{v}_j)_{j=1, \dots, n}$  e  $(\vec{w}_i)_{i=1, \dots, k}$  due basi ordinate di  $V^n$  e  $W^k$  rispettivamente.

$$\begin{aligned} f : V^n &\rightarrow W^k \\ \vec{v}_1 &\mapsto f(\vec{v}_1) = \sum_{i=1}^k a_{i1} \cdot \vec{w}_i \\ \vec{v}_2 &\mapsto f(\vec{v}_2) = \sum_{i=1}^k a_{i2} \cdot \vec{w}_i \\ &\dots \mapsto \dots \\ \vec{v}_n &\mapsto f(\vec{v}_n) = \sum_{i=1}^k a_{in} \cdot \vec{w}_i \end{aligned}$$

**Def:**  $A_f((\vec{v}_j)_{j=1, \dots, n}, (\vec{w}_i)_{i=1, \dots, k})$  è la **matrice associata ad  $f$  e alla scelta di basi ordinate  $(\vec{v}_j)$  e  $(\vec{w}_i)$**  e viene definita come

$$A_f((\vec{v}_j)_{j=1, \dots, n}, (\vec{w}_i)_{i=1, \dots, k}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Dove ogni colonna si riferisce ai coeff. di ogni riga delle sommatorie sopra.

### 10.2.2 Secondo punto

Dalla matrice  $A_f((\vec{v}_j), (\vec{w}_i))$  mi posso ricostruire la funzione. Infatti, sia  $\vec{v} \in V^n$  e supponiamo di avere  $A_f, (\vec{v}_j)_j$  e  $(\vec{w}_i)_i$ . Voglio determinare  $f(\vec{v})$  in funzione di questi dati.

$$\begin{aligned}
 f(\vec{v}) &= f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \vec{v}_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f(\vec{v}_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^k a_{ij} \cdot \vec{w}_i\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \alpha_j \cdot a_{ij} \cdot \vec{w}_i \\
 &= \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot \vec{w}_i
 \end{aligned}$$

dove

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot a_{ij} = i\text{-esimo coeff di } A_f \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

**Oss fondamentale:**  $V^n = \mathbb{R}^n, W^k = \mathbb{R}^k, (\vec{v}_j) = (\vec{e}_j), (\vec{w}_i) = (\vec{e}_i)$  basi canoniche,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineare.

Supponiamo di avere  $A_f$ . Sia  $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$\begin{aligned}
f(\vec{v}) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot \vec{e}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(\vec{e}_j) \\
&= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^k a_{ij} \cdot \vec{e}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot \vec{e}_i \quad \text{dove } \beta_i = A_f \cdot \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\vec{v}} \\
&= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \\
&= A_f \cdot \vec{v} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot x_j \end{pmatrix} \text{ è l'espressione in coordinate di } f
\end{aligned}$$

Guardare il video [9.7](#) (simmetria assiale in  $\mathbb{R}^2$ ) e [9.8](#) (rotazione antioraria in  $\mathbb{R}^2$ ) sul canale [Animated Math](#).

### 10.3 Formula per il cambiamento di basi

**Teo:**  $f : V^n \rightarrow W^k$  lineare.  $V^n$  avrà due basi:  $(\vec{v}_j)_j$  e  $(\vec{v}'_j)_j$ ; e  $W^k$  anche:  $(\vec{w}_i)_i$  e  $(\vec{w}'_i)_i$ .

Allora

$$A_f((\vec{v}'_j)_j, (\vec{w}'_i)_i) = Q^{-1} \cdot A_f((\vec{v}_j)_j, (\vec{w}_i)_i) \cdot P$$

dove  $P = (p_{hj})$  e  $Q = (q_{si})$  con  $\vec{v}'_j = \sum_{h=1}^n p_{hj} \cdot \vec{v}_h$  e  $\vec{w}'_i = \sum_{s=1}^k q_{si} \cdot \vec{w}_s$ .

## 10.4 Teorema della composizione di omomorfismi

**Teo:**  $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$  sono omomorfismi (dunque  $V \xrightarrow{g \circ f} U$ ).

Le basi ordinate sono  $(\vec{v}_s)_s, (\vec{w}_j)_j, (\vec{u}_i)_i$ .

$$A_{g \circ f}((\vec{v}_s)_s, (\vec{u}_i)_i) = A_{g \circ f}((\vec{w}_j)_j, (\vec{u}_i)_i) \cdot A_{g \circ f}((\vec{v}_s)_s, (\vec{w}_j)_j)$$

**Corollario:**  $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{f^{-1}} V$  omomorfismo.

Le basi ordinate sono  $(\vec{v}_s)_s, (\vec{w}_j)_j, (\vec{v}_i)_i$ .

Si ha che  $f^{-1} \circ f = id_V$ .

Dunque

$$A_{f^{-1}}((\vec{w}_j)_j, (\vec{v}_i)_i) = A_f^{-1}((\vec{v}_s)_s, (\vec{w}_j)_j)$$