
Appunti di Geometria e Algebra Lineare

Algebra lineare e Geometria (prof. Borghesi) - CdL
Informatica Unimib - 23/24

Federico Zotti

16 Apr 2024



Indice

1	Insiemi	3
1.1	Sottoinsieme	3
1.2	Unione disgiunta	3
1.3	Complemento	3
1.4	Prodotto cartesiano	3
1.4.1	Prodotto cartesiano di tre insiemi	4
2	Funzioni	4
2.1	Notazione	4
3	Campi	5
4	Spazi vettoriali	6
4.1	Sottospazi vettoriali	9
4.2	Vettori linearmente dipendenti	11
5	Basi	13
6	Matrici	15
6.1	Operazione di trasposizione	16
6.2	Prodotto di matrici	17
7	Sistemi di equazioni lineari	17
7.1	Rango di matrici	19
7.2	Risolvere un sistema di equazioni lineari	20
7.2.1	Esempio	21
8	Il determinante	22
8.1	Formula di Laplace	23
8.2	Trasformazioni elementari con determinante	24
8.3	Proprietà supplementari del determinante	25
8.4	Relazioni tra determinante e sistemi di eq. lineari	25

9	Matrici invertibili	25
9.1	Matrici inverse e trasformazioni elementari	26
9.2	Relazioni fra invertibilità, determinante e rango	27

1 Insiemi

Tutto uguale a fondamenti.

1.1 Sottoinsieme

- \subset indica un sottoinsieme (quello che precedentemente era definito come \subseteq)
- \subsetneq indica un sottoinsieme proprio (quello che precedentemente era definito come \subset)

1.2 Unione disgiunta

$$A = \{ a, b, c \}$$

$$B = \{ x, b, z \}$$

$$A \amalg B = \{ a, b_A, c, x, b_B, z \}$$

Gli elementi doppi vengono considerati due volte.

1.3 Complemento

$$B \setminus A = \{ x \in B : x \notin A \}$$

1.4 Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$$

$$B \times A = \{ (x, y) : x \in B, y \in A \}$$

> Notare che le coppie vengono denotate da parentesi tonde, e non angolate.

| **Oss:** supponendo $x_0 \neq y_0$, si noti che $(x_0, y_0) \neq (y_0, x_0)$.

1.4.1 Prodotto cartesiano di tre insiemi

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 4, 5, 6 \}$$

$$C = \{ 8, 9 \}$$

$$A \times B = \{ (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), \dots \}$$

$$(A \times B) \times C = \{ ((1, 4), 8), ((1, 4), 9), ((1, 5), 8), ((1, 5), 9), \dots \}$$

$$A \times (B \times C) = \{ (1, (4, 8)), (1, (4, 9)), (1, (5, 8)), (1, (5, 9)), \dots \}$$

$$A \times B \times C = \{ (1, 4, 8), (1, 4, 9), (1, 5, 8), (1, 5, 9), \dots \}$$

2 Funzioni

Una funzione è una corrispondenza tra un elemento di un insieme ad un elemento di un altro insieme.

Notare che le funzioni non vengono considerate insiemi, a differenza di fondamenti.

Due funzioni $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$ sono uguali ($f = g$) sse

1. $A = C, B = D$
2. $f(x) = g(x), \forall x \in A$

$f(x)$ viene chiamata immagine di x tramite f e $g(x)$ immagine di x tramite g .

2.1 Notazione

$$f : A \rightarrow B$$

- A è il **dominio** di f
- B è il **codominio** di f
- Sia $S \subset A$, allora $f(S)$ è l'**immagine di S tramite f**

$$f(S) = \{ b \in B : \exists a \in S \text{ con } f(a) = b \}$$

Ovvero $f(S)$ è l'insieme che contiene tutte le immagini degli elementi di S tramite f . Se si restringe il dominio di f da A ad S , si crea una nuova funzione $f|_S$.

Attenzione: \subset è solo un'inclusione insiemistica. (Più avanti verranno introdotti gli spazi vettoriali).

L'immagine di $f = f(A)$. Non bisogna confondere l'immagine di una funzione con il suo codominio, perché il codominio potrebbe essere più grande della sua immagine.

- Sia $R \subset B$, allora $f^{-1}(R)$ è la **controimmagine di R tramite f**

$$f^{-1}(R) = \{ a \in A : f(a) \in R \}$$

- f è **iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in A$, allora $f(a_1) \neq f(a_2)$
- f è **suriettiva** se $\forall b \in B, \exists a_b \in A : f(a_b) = b$ ($Imm(f) := f(A)$ deve essere uguale a B)

Oss: affinché $f : A \rightarrow B$ sia una funzione deve avvenire:

1. $\forall x \in A, \exists f(x) \in B$
 2. $f(x)$ è un solo elemento di B
- f è **biiettiva** (o **biunivoca**) se è sia iniettiva che suriettiva
 - Siano $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow D$ due funzioni, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (**composizione**)

3 Campi

Def: un **campo** è un insieme dotato di due operazioni $(+, \cdot)$. Deve avere tre proprietà:

1. $(K, +)$ è un gruppo abeliano
 - $+: K \times K \rightarrow K$ (l'operazione non esce dal gruppo)
 - $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K$ (proprietà associativa)
 - $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in K$ (esistenza del neutro)
 - $\forall a \in K \quad \exists -a \in K$ t.c. $-a + a = a + (-a) = 0$ (esistenza dell'opposto)
 - $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$ (proprietà commutativa)

2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

- $\cdot : K \times K \rightarrow K$ (l'operazione non esce dal gruppo)
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$ (proprietà associativa)
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$ (esistenza del neutro)
- $\forall a \in K \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in K \setminus \{0\}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (esistenza dell'opposto)
- $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K$ (proprietà commutativa)

3. Il prodotto è distributivo rispetto alla somma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$

4 Spazi vettoriali

Siano V un **insieme** e K un **campo** (per es. \mathbb{Q}, \mathbb{R}).

Attenzione a non confondere i due insiemi. Anche se sono lo stesso o uno è sottoinsieme dell'altro, rimangono due insiemi distinti.

Gli elementi di V si chiamano **vettori**, mentre gli elementi di K si chiamano **scalari**.

Def: V è uno **spazio vettoriale su un campo K** se esistono due operazioni su V :

1. $“+” : V \times V \rightarrow V \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Con proprietà:

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$ (associatività)
- $\exists \vec{0} \in V : \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$ (esistenza dell'elemento neutro)
- $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$ (esistenza degli opposti)
- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ (commutatività)

Ciò vuol dire che $(V, +)$ è un gruppo abeliano.

2. $“\cdot” : K \times V \rightarrow V \quad (\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$ (prodotto per scalare)

Attenzione: l'operazione $\vec{v} \cdot \alpha$ non è definita.

Con proprietà:

- $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V \vec{v} + \lambda_2 \cdot_V \vec{v} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$ (*distributività*)
- $\lambda \cdot_V (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \cdot_V \vec{v}_1 + \lambda \cdot_V \vec{v}_2 \quad \forall \lambda \in K, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
- $(\lambda_1 \cdot_K \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 \cdot_V \vec{v}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$
- $1_K \cdot_V \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

Oss: V (come ogni altro spazio vettoriale) non ha un suo prodotto interno, cioè non esiste un vettore " $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ ".

Queste proprietà ne implicano altre (corollari). Si può dimostrare che, se V è uno spazio vettoriale su K , allora:

- $0 \cdot_V \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V$
- $\lambda \cdot_V \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot_V \vec{v} = -\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$ (in questo caso $-1 \in K$ è l'elemento opposto dell'identità moltiplicativa del campo K)

Es 1:

$$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{R}$$

Dotiamo \mathbb{R}^n di una struttura di spazio vettoriale su K .

La **somma** è definita come:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \right) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ (*vettore nullo, elemento neutro additivo*)
- $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $-\vec{v} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

La **moltiplicazione per scalare** è definita come:

$$\cdot : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left(\alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \mapsto (\alpha \cdot x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Es 2:

$$V = \mathbb{R}_{[x]} = \{ \text{polinomi in } x \text{ a coeff reali} \}$$

$$= \{ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_h x^h : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \}$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^h \lambda_i x^i : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \right\}$$

- Dati $p(x), q(x)$ polinomi in x :

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \sum_{i=0}^h \alpha_i x^i + \sum_{j=0}^l \beta_j x^j \\ &= \sum_{u=0}^{\max(l,h)} (\alpha_u + \beta_u) \cdot x^u \end{aligned}$$

- $0(x) = 0 \in \mathbb{R}$ (*polinomio nullo, di grado 0*)
- $-p(x) = \sum_{i=0}^h -\alpha_i \cdot x^i$
- $\lambda \cdot p(x) = \sum_{i=0}^h \lambda \cdot \alpha_i \cdot x^i$

Es 3:

Sia $V = \{ \text{funzioni} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \}$. Dotiamo V di una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} .

La somma è definita come

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto "f + g" : I \rightarrow \mathbb{R}$$

In questo caso $f + g$ è definito come

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

Il prodotto viene definito come

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, f : I \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto "f \cdot g" : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

4.1 Sottospazi vettoriali

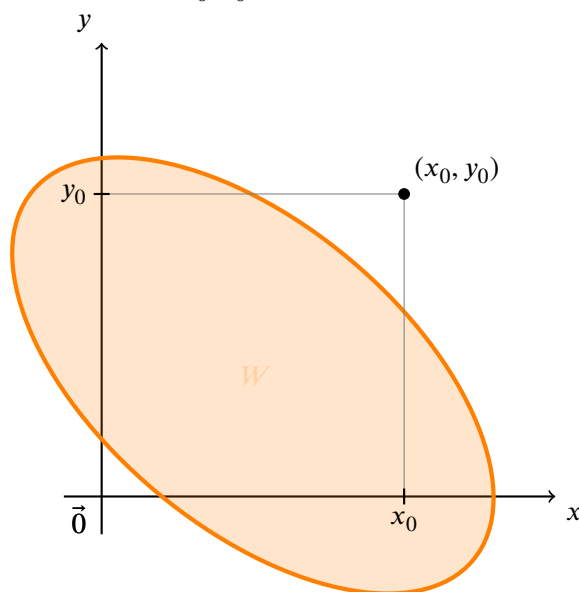
Def: sia V uno spazio vettoriale su K , e $W \subset V$. Diremo che W è un **sottospazio vettoriale di V** se:

1. $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W \quad \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$
2. $\lambda \cdot \vec{w} \in W \quad \forall \lambda \in K, \vec{w} \in W$

In tal caso denoteremo la relazione tra W e V come $W < V$.

Oss: se $W < V$, allora W è lui stesso uno spazio vettoriale.

Es 1: $V = \mathbb{R}^2 \ni (x_0, y_0)$

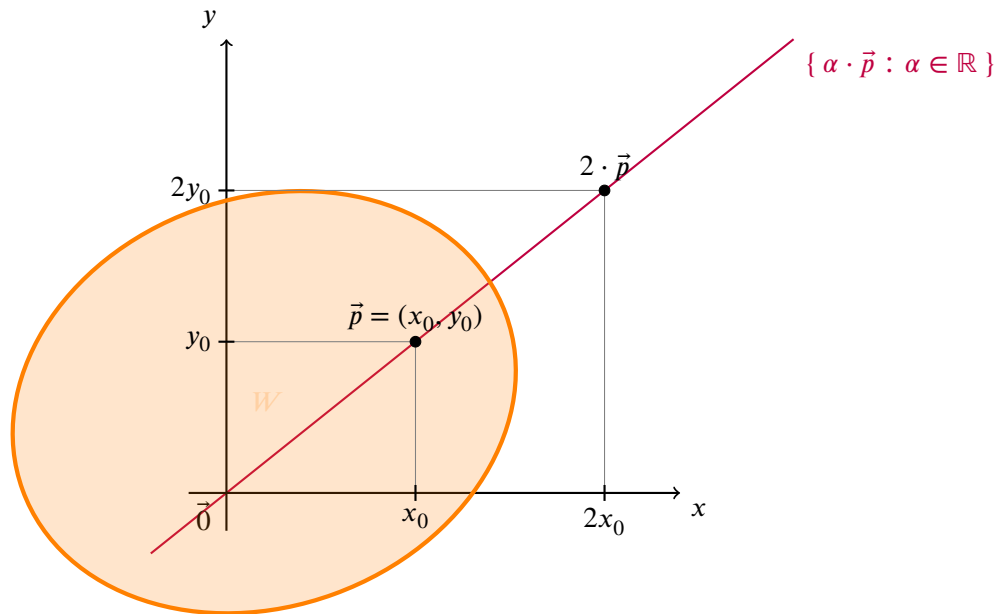


Sia $\lambda = 0$. Per la proprietà 2., $\lambda \cdot \vec{w} \in W$, ma in questo caso $0 \cdot \vec{w} = \vec{0} \notin W$.

Dunque W non può essere un sottospazio vettoriale di V .

Ciò non vuol dire che non si possa mettere una struttura di uno spazio vettoriale su W , ma essa non sarà quella ereditata da V .

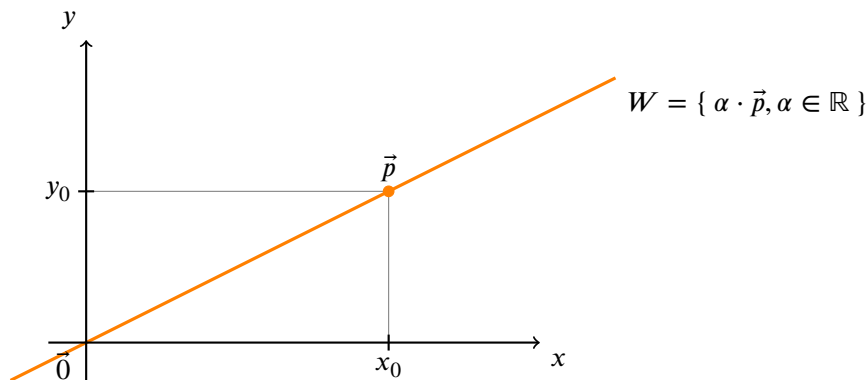
Es 2: $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



Per la proprietà $\lambda \cdot \vec{p} \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Sia $\lambda = 2$, $\lambda \cdot \vec{p}$ diventa $2 \cdot \vec{p} = (2x_0, 2y_0)$. Si può notare che $2 \cdot \vec{p} \notin W$.

Dunque W non è un sottospazio vettoriale di V .

Es 3: $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



W è un sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{R}^2$ perché vengono soddisfatte le due condizioni:

1. $\alpha_1 \cdot \vec{p} + \alpha_2 \cdot \vec{p} \stackrel{?}{\in} W$. Questo si può riscrivere raccogliendo come $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \vec{p} \in W$ ed è dimostrato perché la somma di scalari è uno scalare
2. Verificata banalmente

Oss: in alternativa alle due proprietà del sottospazio vettoriale (dalla definizione), possiamo controllare che $W \subset V$, con V sp. vett. su campo K , sia un sottospazio vett. verificando che $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ si abbia $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in W$.

Quali sono tutti i sottospazi di \mathbb{R}^2 ?

- $\{\vec{0}\}$
- $\{\alpha \cdot \vec{p}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ (*rette passanti per l'origine*)
- \mathbb{R}^2

Oss: ogni sp. vett. V ammette almeno due sottosp. vett. cioè $\{\vec{0}\}$ e V stesso.

Domanda cruciale: dato $S \subset V$ (sottoinsieme di uno spazio vettoriale), esiste il “più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene S ”? La risposta è sì.

Def: $\langle S \rangle \subset V$ denoterà il più piccolo sottospazio di V che contiene S . Esso si chiama **sottospazio vettoriale generato da S** .

Si dimostra che

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Quindi $\langle S \rangle$ è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ con i coefficienti $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tutti i vettori in S .

Oss: $S \subset \langle S \rangle$

4.2 Vettori linearmente dipendenti

Def: sia $S \subset V$ spazio vettoriale.

I vettori di S sono detti **linearmente dipendenti** se $\exists \vec{w} \in S$ e vettori $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_h \in S$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ tali che $\vec{w} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \vec{z}_i$.

S sono **linearmente indipendenti** se non sono dipendenti.

Se $W \subset V$, allora $\langle W \rangle = W$.

Lemma: $S \subset V$ sp. vett.. Allora S è un insieme di vettori **linearmente indipendenti** se e solo se

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0} \implies \mathbb{R} \ni \lambda_i = 0, \forall i$$

Ciò deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\{\vec{z}_i\} \subset S$ ($\{\vec{z}_i\} \neq \{\vec{0}\}$).

Dim:

$$A \implies B$$

$$\neg A \iff \neg B$$

$S \subset V$ è un insieme di vettori lin. indep.. Vogliamo dimostrare che, se $\{\vec{z}_i\} \subset S$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0}$, allora $\lambda_i = 0, \forall i$.

Supponiamo che $\exists \lambda_h \neq 0 : \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0}$.

$$\lambda_h \vec{z}_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_j \vec{z}_j$$

$$\lambda_h^{-1} \lambda_h \vec{z}_h = \lambda_h^{-1} \cdot \sum_{j \neq h} \lambda_j \vec{z}_j$$

$$\vec{z}_h = \sum_{j \neq h} (-\lambda_h^{-1} \lambda_j) \cdot \vec{z}_j$$

Questo implica che S è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

$$B \implies A$$

$$\neg B \iff \neg A$$

Supponiamo che $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$, dimostriamo che S è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Supponiamo che S sia un insieme di vettori lin. dip. $\implies \exists \vec{z}_c \in S$ e $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m \in S$ tali che $\vec{z}_c = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{z}_j$, $\vec{z}_j \neq \vec{z}_c \forall j$.

$$\vec{0} = -\vec{z}_c + \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{z}_j$$

Tale combinazione lineare mi nega B .

5 Basi

Sia $W < V$. Per comunicare uno spazio vettoriale ci sono due modi:

1. Siccome $W \subset V$, $W = \{ \dots \}$
2. Sfrutto il fatto che $W < V$ e quindi $\exists S \subset V : \langle S \rangle = W$

Per il punto 2. bisogna “ottimizzare” S . Ovvero trovare il più piccolo S che genera W . La minimalità è equivalente a $W \neq \langle S - \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in S$.

Def: sia V uno spazio vettoriale. Un insieme ordinato $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ di vettori di V si dice **base di V** se ogni vettore \vec{v} di V si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i$$

con $\vec{v}_i \in B$.

Gli scalari a vengono chiamate **coordinate**.

Teo: le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \subset V$ è una **base** di V
2. S è un **sistema di generatori** per V (cioè $\langle S \rangle = V$) e i vettori di S sono linearmente indipendenti
3. $\langle S \rangle = V$ e $\forall \vec{v} \in V, \exists! \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v}, \quad \{ \vec{v}_i \} \subset S$
4. S è un insieme minimale di generatori di V
5. S è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti di V

Corollario: ogni spazio vettoriale che ammette un sistema finito di generatori ammette una base.

Es 1: $V = \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$.

Base canonica:

$$\{ (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) \}$$

n volte

Verifichiamo che è una base usando il punto 3. del teorema.

Sia $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, verifichiamo che $\vec{v} \in \langle S \rangle$, cioè che $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$.

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \\ &= \sum_{i=1}^n (0, \dots, 0, \overset{i}{\lambda_i}, 0, \dots, 0) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\end{aligned}$$

L'eguaglianza è verificata se $\lambda_i = x_i, \forall i$.

In conclusione $\{ \vec{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \}$ sono generatori per \mathbb{R}^n , ma anche una base.

Es 2: $V = \mathbb{R}[x] \ni \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{i=0}^n a_i x^i$ è combinazione lineare di $\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ con coefficienti $\{ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \}$.

Un insieme di generatori di $\mathbb{R}[x]$ è $\{ 1, x, x^2, \dots \} = \{ x^i, i \in \mathbb{N} \}$, che è anche una base.

Teorema di estensione ad una base: V spazio vettoriale.

Siano $I = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h \}$ vettori linearmente indipendenti $\subset V$ e $G = \{ \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \}$ generatori di V .

Allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ è una base di V .

Teo: con la notazione del teo precedente

$$\#(I) \leq \#(G)$$

Corollario: supponiamo che V ammetta un sistema di generatori finito. Allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi.

Def: sia V sp. vett. che ammette un sistema di generatori finito. La **dimensione** di V è il numero di vettori di una sua base qualunque (*hanno tutte lo stesso numero di elementi*).

Corollario: $\dim(V) = n \implies n$ vettori linearmente indipendenti di V sono anche generatori. Questo implica anche che n generatori di V sono linearmente indipendenti.

Esercizio:

$$S = \{ (1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 2, 0) \} \subset \mathbb{R}^3$$

Ottenere una base da S .

Notazione: V sp. vett. e $W, Z \subset V$.

- $W \cap Z \subset V$
- $W \cup Z \subset V$ (*solo sottoinsieme*)
- $\langle W \cup Z \rangle = W + Z$ (*abuso di simbologia, si usa solo a denotare l'unione*)

Teorema di Grassmann: sia V sp. vett. di dim. finita. Allora, conta la notazione precedente:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

6 Matrici

Per rappresentare i coefficienti di un sistema di equazioni lineari è possibile utilizzare una matrice.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -y + z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Def: una matrice $k \times n$ (*righe per colonne*) è un elemento di $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k$ (che equivale a $\mathbb{R}^{k \cdot n}$).

In entrambi i casi le matrici sono elementi di uno spazio vettoriale. Tali spazi vettoriali sono gli insiemi di matrici $k \times n$, k fissato e n fissato.

L'addizione tra matrici è definita come

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{A=(a_{ij})} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}}_{B=(b_{ij})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \end{pmatrix}}_{A+B=(a_{ij}+b_{ij})}$$

La moltiplicazione tra scalare e matrice come

$$\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$$

Sia $M(k, n) = \{ \text{matrici reali } k \times n \}$ sp. vett.. La sua base canonica è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e la sua dimensione è $k \cdot n$.

6.1 Operazione di trasposizione

Def: l'**operazione di trasposizione** è una funzione $M(k, n) \rightarrow M(n, k)$ che associa una matrice con la sua “specchiata” rispetto alla diagonale:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_A \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{A', T(A)}$$

Abuso di notazione:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1, 3, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (0, 5, 2)$$

6.2 Prodotto di matrici

In questo caso non vale l'abuso di notazione sopra definito.

$A \cdot B$ è definita quando A è $k \times n$ e B è $n \times h$. In tal caso $A \cdot B$ è $k \times h$.

Def: $A \cdot B = (c_{ij})$ (con $A = (a_{cd})$ e $B = (b_{xy})$) dove $c_{ij} = \sum_{u=1}^n a_{iu} \cdot b_{uj}$.

#todo-uni Fare il disegnino dell'operazione...

Il prodotto di matrici non è commutativo, anche se è definito.

Oss: consideriamo $M(n, n)$. $M(n, n)(+, \cdot)$ non è un campo (il \cdot non è commutativo), non è un corpo (perché non esistono gli inversi di tutte le matrici $\neq \vec{0}$).

Identità moltiplicativa è la seguente matrice

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Def: $B \in M(n, n)$ è invertibile se e solo se $\exists C \in M(n, n) : C \cdot B = B \cdot C = Id_n$.

7 Sistemi di equazioni lineari

Un'equazione lineare è una serie di simboli

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b \quad b, a_i \in \mathbb{R}$$

Un sistema di equazioni è

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n = b_k \end{cases}$$

con b e a fissati e x variabili.

Ad un sistema di equazioni si possono associare due matrici:

- **Matrice completa:**

$$A|\vec{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & a_{kn} & b_n \end{array} \right)$$

- **Matrice incompleta:** A stessa

Riscriviamo A in “forma matriciale”:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{dove } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Oss: supponiamo che A sia una matrice invertibile. Questo implica che A sia quadrata.

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri per A^{-1} otteniamo $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \iff Id_m \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Concludiamo che $A^{-1} \cdot \vec{b}$ è l'unica soluzione del sistema.

Proposizione: sia $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ un sistema di equazioni lineari. Se A è invertibile esso ammette come unica soluzione $A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Teorema di Rouché-Capelli:

1. Il sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\vec{b})$.
2. Supponiamo che il sistema ammetta soluzioni, allora l'insieme V di tutte le solu-

zioni è

$$V = \vec{c} + W = \{ \vec{c} + \vec{w} : \vec{w} \in W \}$$

dove \vec{c} è una soluzione qualsiasi di $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ e W è il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n , con n il numero di incognite di A (*colonne*), dato dalle soluzioni del sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Inoltre $\dim(W) = n - \text{rango}(A) = n - \text{rango}(A|\vec{b})$.

7.1 Rango di matrici

Def: sia A una matrice in $M(n, k)$.

Il **rango di A** è indifferentemente:

- La dimensione di \langle vettori riga di $A \rangle$
- Il **massimo** numero di righe linearmente indipendenti di A
- La dimensione di \langle vettori colonna di $A \rangle$
- Il **massimo** numero di colonne linearmente indipendenti di A

Inoltre

$$\text{Rg}(A) \leq \min \{ n, k \}$$

Il rango di una matrice è un modo per misurare la “quantità di informazioni” contenute nella matrice.

Def: una matrice $A \in M(n, k)$ è detta **a scala** se il numero di zeri a sinistra nell' n -esima riga \vec{r}_i è strettamente maggiore del numero di zeri a sinistra della riga \vec{r}_{i-1} , $\forall i \geq 2$.

Se il numero di zeri è già al massimo (*una riga solo di zeri*), allora “strettamente” non vale più.

Secondo un teorema è possibile portare ogni matrice in forma a scala tramite un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe, cioè:

1. Scambio di posizione di due righe ($\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{r}_j$)

2. Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo ($\vec{r}_i \rightarrow \lambda \vec{r}_i$)
3. Rimpiazzamento di una riga con la somma tra quella stessa riga e un'altra riga moltiplicata per un qualsiasi scalare ($\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \lambda \vec{r}_j$)

Oss: se una matrice è a scala, il suo rango coincide al numero di righe non (identicamente) nulle.

Oss: siccome si opera sulle righe, i rapporti di linearità tra le colonne vengono mantenuti. Più precisamente, siano $\{\vec{a}_i\}$ le colonne di A e $T(A)$ una trasformazione elementare di A sulle righe (con $(T(A))_i$ l' i -esima colonna di $T(A)$), allora:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i (T(A))_i = \vec{0}$$

Proposizione: sia T una trasformazione elementare sulle righe. Allora, $T(A) = T(Id_n \cdot) \cdot A$, dove n è il numero di righe di A .

Lo stesso vale per le colonne: $S(A) = A \cdot S(Id_k)$.

7.2 Risolvere un sistema di equazioni lineari

Supponiamo di:

1. Stabilire se $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette soluzioni
2. Eventualmente determinarle

Passaggio A:

Tramite il teorema di Rouchè-Capelli possiamo fare valutazioni su $Rg(A)$ e $Rg(A|\vec{b})$. Agiamo con trasformazioni elementari sulle righe su $A|\vec{b}$. Si noti che, se T è una trasf. el. sulle righe,

$$T(B_1|B_2|\dots|B_h) = (T(B_1)|T(B_2)|\dots|T(B_h))$$

In particolare, $T(A|\vec{b}) = (T(A)|T(\vec{b}))$.

Passaggio B:

Teo: le soluzioni di $A\vec{x} = \vec{b}$ sono le stesse di $T(A) \cdot \vec{x} = T(\vec{b})$, se T è un'operazione el. sulle righe.

7.2.1 Esempio

Esempio:

$$\begin{cases} x - z + w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ x - y + w = -1 \end{cases} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Con le colonne della matrice che corrispondono ai coeff. di x, y, z, w .

Dunque dopo aver trasformato la matrice a scala determiniamo che

$$Rg(A) = Rg(A|\vec{b}) = 3$$

Secondo R-C esistono soluzioni e se V è l'insieme delle soluzioni,

$$V = \vec{c} + W$$

e $\dim(W) = n - Rg(A) = 4 - 3 = 1$.

Creiamo il sistema associato alla matrice a scala:

$$\begin{cases} x - z + w = 1 & \longrightarrow x = -1 - z \\ y + z - w = 0 & \longrightarrow y = 2 + z \\ 2z - w = -2 & \longrightarrow w = 2 + 2z \end{cases}$$

Le soluzioni diventano

$$\begin{aligned} \implies V &= \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -1 - z, y = 2 + x, w = 2 + 2z \} \\ &= \{ (-1 - z, 2 + x, z, 2 + 2z) \in \mathbb{R}^4 : z \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Come vediamo quindi che $V = \vec{c} + W$, dove \vec{c} è una soluzione del sistema e W è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 ?

Separiamo la parte **omogenea** da quella **non omogenea** (che ha costanti):

$$V = \{ (-1, 2, 0, 2) + (-z, z, z, 2z) \in \mathbb{R}^4 : z \in \mathbb{R} \}$$

Si noti che

$$\underbrace{\{ (-z, z, z, 2z) : z \in \mathbb{R} \}}_{\langle (-1, 1, 1, 2) \rangle} \subset \mathbb{R}^4$$

Chiamiamo $\langle (-1, 1, 1, 2) \rangle = W$ e $(-1, 2, 0, 2) = \vec{c}$. Quindi $V = \vec{c} + W$.

8 Il determinante

Come oggetto matematico è una funzione

$$\det_n : M_A(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$M(n, n)$ lo vediamo come una $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ dove vivono le colonne di A . A viene considerato come una matrice composta da tanti vettori colonna

$$A = (\vec{c}_1 | \vec{c}_2 | \dots | \vec{c}_n)$$

Il determinante soddisfa 4 proprietà:

1. Proprietà di linearità rispetto alla somma

$$\det(\vec{c}_1, \dots, \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) = \det(\vec{c}_1, \dots, \vec{a}, \dots, \vec{c}_n) + \det(\vec{c}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{c}_n) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

2. Proprietà di linearità rispetto alla moltiplicazione per scalare

$$\det(\vec{c}_1, \dots, \lambda \cdot \vec{c}_i, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) = \lambda \cdot \det(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_i, \vec{c}_{i+1}, \dots, \vec{c}_n) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Proprietà di alternanza

$$\det(\vec{c}_1, \dots, \underbrace{\vec{c}, \vec{c}}_{\text{uguali}}, \dots, \vec{c}_n) = 0$$

4. Proprietà della base canonica

$$\det(\underbrace{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n}_{\text{base canonica}}) = 1$$

Teo: esiste un'unica funzione che soddisfa le proprietà 1., 2., 3., 4..

Oss: la proprietà 3. è equivalente a

$$3. \iff \det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_i}, \overset{i+1}{\vec{c}_{i+1}}, \dots, \vec{c}_n) = -\det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_{i+1}}, \overset{i+1}{\vec{c}_i}, \dots, \vec{c}_n)$$

$$\iff \det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_i}, \dots, \overset{j}{\vec{c}_j}, \dots, \vec{c}_n) = -\det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}_j}, \dots, \overset{j}{\vec{c}_i}, \dots, \vec{c}_n)$$

$$\iff \det(\vec{c}_1, \dots, \overset{i}{\vec{c}}, \dots, \overset{j}{\vec{c}}, \dots, \vec{c}_n) = 0$$

Esempio:

$$\det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

8.1 Formula di Laplace

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$. Denotiamo con A_{ij} (complemento algebrico di a_{ij}) la sottomatrice che otteniamo eliminando l' i -esima riga e j -esima colonna da A .

Teo:

Sviluppo lungo l' i -esima riga:

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Sviluppo lungo la j -esima colonna:

$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo la prima riga perché ha più zeri (come la seconda).

$$\begin{aligned} \det(A) &= \overbrace{(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(A_{11})}^{j=1} \\ &\quad + \overbrace{(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det(A_{12})}^{j=2} \\ &\quad + \overbrace{(-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \det(A_{13})}^{j=3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Corollario:

$$\det(A) = \det(A')$$

dove A' è la matrice trasposta di A .

8.2 Trasformazioni elementari con determinante

In che modo le trasformazioni elementari influenzano il determinante?

1. **Permutazione di due righe:** $r_1 \leftrightarrow r_2 \implies \det(T(A)) = -\det(A)$ (cambio di segno)

2. **Moltiplicazione di una riga per $\lambda \neq 0$:** $r_1 \rightarrow \lambda r_1 \implies \det(T(A)) = \lambda \cdot \det(A)$
(determinante per lambda)
3. **Somma di una riga con un multiplo di un'altra:** $r_1 \rightarrow r_1 + \lambda r_2 \implies \det(T(A)) = \det(A)$ (determinante non cambia)

8.3 Proprietà supplementari del determinante

Sebbene $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, in generale, il det si comporta bene nei confronti del prodotto di matrici.

Teorema di Binet:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Corollario: sia A invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

In particolare $\det(A) \neq 0$.

8.4 Relazioni tra determinante e sistemi di eq. lineari

Sia A una matrice $n \times n$.

Formula di Cramer:

1. Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ammette un'unica soluzione $\iff \det(A) \neq 0$
2. In tal caso, l'unica soluzione (c_1, c_2, \dots, c_n) è data da

$$c_i = \frac{\det(A_1 | A_2 | \dots | \overset{i}{\vec{b}} | A_{i+1} | \dots | A_n)}{\det(A)}$$

con A_j la j -esima colonna di A .

9 Matrici invertibili

Sia A una matrice quadrata.

A è invertibile $\iff \exists A^{-1} : A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id$.

Teo:

1. A è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$
2. In tal caso, $A^{-1} = (x_{ij})$ è data da

$$x_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$$

dove A_{ji} è la sottomatrice ottenuta da A togliendo la j -esima riga e la i -esima colonna (*complemento algebrico di a_{ji}*).

Concretamente, per calcolare A^{-1} :

1. Traspongo $A \rightarrow A^t$
2. Calcolo la matrice dei complementi algebrici

$$\begin{pmatrix} \det((A^t)_{11}) & \det((A^t)_{12}) & \dots & \det((A^t)_{1n}) \\ \det((A^t)_{21}) & \det((A^t)_{22}) & \dots & \det((A^t)_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \det((A^t)_{n1}) & \det((A^t)_{n2}) & \dots & \det((A^t)_{nn}) \end{pmatrix}$$

3. Aggiusto i segni moltiplicando i coeff. per $(-1)^{i+j}$
4. Divido tutta la matrice per $\det(A)$

9.1 Matrici inverse e trasformazioni elementari

Un altro metodo per calcolare l'inversa è il seguente.

Ricordiamo che, se T è una trasf. el. sulle righe, $T(A) = T(Id) \cdot A$.

Proposizione: sia A quadrata.

A è invertibile se e solo se esistono una serie di trasf. el. $T_k(T_{k-1}(\dots(T_2(T_1(A))))) = Id$.

Infatti poniamo $C_i := T_i(Id)$.

Allora, $C_k \cdot C_{k-1} \cdot \dots \cdot C_2 \cdot C_1 \cdot A = Id$. Quindi $C_k \cdot C_{k-1} \cdot \dots \cdot C_1 = A^{-1}$.

9.2 Relazioni fra invertibilità, determinante e rango

Sia A una matrice qualunque. Il rango di A è il massimo numero di righe lin. indep. di A e il massimo numero di colonne lin. indep. di A .

Inoltre il rango di A è anche il **massimo ordine dei “minori” non nulli di A** .

Digressione: una sottomatrice di A è una matrice ottenuta eliminando righe e colonne da A .

Def: un minore di A è il determinante di una sottomatrice quadrata di A .

Def: l'ordine di un minore di A è l'ordine della sottomatrice il cui determinante è tale minore.

Nel caso che A sia quadrata inoltre:

Teo: $\det(A) \neq 0 \iff A$ è invertibile $\iff A$ ha rango massimo possibile uguale all'ordine di A .