Appunti di Analisi I

Analisi Matematica (prof. Mongodi) - CdL Informatica Unimib - 23/24

Federico Zotti

27 Nov 2023

Indice

1 Insiemi

1.1 Notazione

Per *elenco*: Prima operazione, poi insieme di partenza

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$
$$B = \{ n^2 \mid n \text{ naturale} \}$$

Per *proprietà*: Prima insieme che scelgo, poi la proprietà che verifico

$$C = \{ n \text{ naturale} \mid n \text{ è un quadrato} \}$$

Altri simboli:

$$\text{appartiene} \rightarrow a \in A$$
$$\text{non appartiene} \rightarrow a \notin A$$
$$\text{è sottoinsieme} \rightarrow A \subseteq B$$
$$\text{è sottoinsieme stretto} \rightarrow A \subset B$$
$$\text{insieme vuoto} \rightarrow \emptyset$$
$$\text{unione} \rightarrow A \cup B \mid \vee$$
$$\text{intersezione} \rightarrow A \cap B \mid \wedge$$
$$\text{sottrazione} \rightarrow A \setminus B$$
$$\text{cardinalità} \rightarrow |A|$$

1.2 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, il loro **prodotto cartesiano** è l'insieme delle coppie (a, b) con $a \in A$, $b \in B$.

Si indica con $A \times B$.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Es:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ A \times A &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} \end{aligned}$$

1.3 Insieme delle parti

Dato A, $\mathscr{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Es:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\} \\ \mathscr{P}(A) &= \{\emptyset, A, \{0\}, \{1\}\} \end{aligned}$$

2 Funzioni

Come si descrive una funzione:

1. Un insieme di partenza (A) (*dominio*);
2. Un insieme di arrivo (B) (*codominio*);
3. Una serie di regole che ad ogni elemento di A associa un **unico** elemento di $f(a) \in B$.

$$f : A \to B$$

Il grafico di una funzione è:

$$\begin{aligned} g &= \{(a, f(a)) \in A \times B \,|\, a \in A\} \\ &= \{(a, b) \in A \times B \,|\, b = f(a)\} \end{aligned}$$

2.1 Funzioni Iniettive e Suriettive

Sia $f : A \to B$ una funzione.

- f si dice **iniettiva** se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B.

$$a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ovvero se

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- f si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f.

$$\forall b \in B \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Una funzione si dice **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Teo: Una funzione $f : A \to B$ è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione $g : B \to A$ t.c. :

$$g(f(a)) = a \,\forall a \in A$$
$$f(g(b)) = b \,\forall b \in B$$

Oss:

$$f : A \to B$$

- è iniettiva se ogni elemento di B è ottenuto da al più un elemento di A tramite f;
- è suriettiva se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f.

2.2 Immagine e controimmagine

Sia $f : A \to B$ una funzione.

- Se $b = f(a)$ con $a \in A, b \in B$, si dice che *b è immagine di a tramite f*;
- Sia $C \subseteq A$ un sottoinsieme, si dice *immagine di C* tramite f l'insieme degli elementi di B che sono imamgine di elementi di C. $f(c) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$
- Immagine di A: $f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$
- Sia $D \subseteq B$ un sottoinsieme, si dice **controimmagine di D** tramite f l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno immagine contenuta in D.
- Controimmagine di D: $f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$ (definita anche se f non è invertibile).

3 Numeri Reali

3.1 Insiemi numerici

- **Naturali:** $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- **Razionali:** $\mathbb{Z} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \} \}$
- **Reali:** $\mathbb{R}$
- **Irrazionali:** $\mathbb{Q}$
- **Complessi:** $\mathbb{C}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

3.2 Proprietà dei numeri reali

Sono di tre tipi:

- Algebriche;
- Di Ordinamento;
- Assioma di Continuità.

3.2.1 Algebriche

Sui numeri reali sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$, dette somma e prodotto, con le seguenti proprietà:

- Relative alla somma:
  - **Commutativa:** $a + b = b + a \; \forall \, a, b \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Associativa:** $(a + b) + c = a + (b + c) \; \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Elemento neutro somma:** $\exists \, 0 \in R$ t.c. $a + 0 = a \; \forall \, a \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Esistenza dell'inverso:** $\forall \, a \in \mathbb{R} \; \exists \, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a + b = 0$ *(z,q,r,c)*
- Relative al prodotto:
  - **Commutativa:** $a \cdot b = b \cdot a \; \forall \, a, b \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Associativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \; \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Elemento neutro prodotto:** $\exists 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = a \; \forall \, a \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Esistenza dell'inverso:** $\forall \, a \in \mathbb{R} \; \exists \, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$ *(q,r,c)*
- **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = ab + ac \; \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*

3.2.2 Di Ordinamento

Dati due numeri reali x e y, si ah sempre che $x \geq y$ oppure $x \leq y$. Tale ordinamento ha le proprietà:

- **Riflessiva:** $x \geq x \; \forall \, x \in \mathbb{R}$
- **Antisimmetrica:** se $x \geq y \wedge y \geq x$, allora $x = y$
- **Transitiva:** se $x \geq y \wedge y \geq z$, allora $x \geq z$
- se $x \geq y$, allora $x + z \geq y + z \; \forall \, z \in \mathbb{R}$
- se $x \geq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \; \forall \, z \in \mathbb{R}$ con $z \geq 0$

Queste valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{C}$.

3.2.3 Assioma di Continuità

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi diversi da $\emptyset$. Diciamo che A sta tutto a sinistra di B se $a \leq b \; \forall \, a \in A, \; \forall \, b \in B$.

L'assioma di continuità dice che se A sta tutto a sinistra di B allora esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ t.c. $c \geq a \, \forall \, a \in A; c \leq b \, \forall \, b \in B$.

> c non è obbligato ad essere unico; c può appartenere ad A, a B o anche a entrambi (in questo caso è unico elemento "separatore").

Es:

$$A = \{ x \in Q \; : \; x \geq 0 \wedge x^2 < 2 \}$$
$$B = \{ x \in Q \; : \; x \geq 0 \wedge x^2 > 2 \}$$
$$\text{se } a \in A, b \in B \rightarrow a > b$$
$$c^2 = 2$$

Questo è impossibile in Q, quindi l'assioma di continuità non vale in Q.
Conclusione: sui numeri reali, $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore tra A e B e si può dimostrare che è unico.

3.3 Sottoinsiemi dei reali

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo separato da estremi $a, b \in \mathbb{R}$ (con $a < b$).

- $]a, b[= (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b \}$
- $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b \}$

4 Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme *non vuoto*.

> $M \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di A se $M \geq a \, \forall \, a \in A$
> $m \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** di A se $m \leq a \, \forall \, a \in A$

Minoranti e maggioranti non sono obbligati ad esistere. Ad esempio $A = \mathbb{N}$ ha minoranti ma non ha maggioranti.

Se esiste un maggiorante invece, ne esistono infiniti. Se M è un maggiorante, anche $M + 1$ lo è. Lo stesso vale per i minoranti.

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ si dice **superiormente limitato** se ammette un maggiorante e **inferiormente limitato** se ammette un minorante. Si dice **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

Es:

- $A = (0, +\inf)$ è inferiormente limitato ma non superiormente
- $B = \{\frac{1-n}{2} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato, ma non inferiormente
- $C = (1, 7]$ è limitato

$M \in \mathbb{N}$ si dice **massimo** di A (e si scrive $M = \max A$) se $M \in A \wedge M \geq a \, \forall a \in A$

$m \in \mathbb{N}$ si dice **minimo** di A (e si scrive $m = \min A$) se $m \in A \wedge m \leq a \, \forall a \in A$

$\max$ e $\min$ non sono obbligati ad esistere, nemmeno per insiemi limitati.

Es:

- $A = (0, 1)$ non ha né $\max$, né $\min$

$\max$ e $\min$, se esistono, sono **unici**.

4.1 Estremo superiore ed Estremo inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

Si dice che $\sup A = +\inf$ se A non è superiormente limitato o $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se lo è e L è il minimo dei maggioranti.
Si dice che $\inf A = -\inf$ se A non è inferiormente limitato o $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se lo è e l è il massimo dei minoranti.

Es:

- $\sup \mathbb{N} = +\inf$
- $\inf \mathbb{N} = 0$
- $\sup (0, 1) = 1$

Teo: Se $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ è superiormente limitato, allora il minimo dei maggioranti esiste.

Dim: Sia $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \ \forall a \in A\}$ l'insieme dei maggioranti. Allora A sta tutto a sinistra di B. Per l'*assioma di continuità* c'è un elemento separatore $c \in \mathbb{R}$, ovvero $c \leq b \ \forall b \in B$ e $c \geq a \ \forall a \in A \implies c \in B$. Quindi $c = \min B$.

Esercizio per casa #todo-compito: Enunciare e dimostrare il teorema analogo per il massimo dei minoranti.

4.1.1 Caratterizzazione di inf e sup

- $\sup A = +\inf$ se $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$ (*ovvero se posso trovare elementi di A grandi quanto voglio*)
- $\inf A = -\inf$ se $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A$ t.c. $a \leq M$
- $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se
  - $a \leq L \ \forall a \in A$ (*L è un maggiorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$
- $\inf A = L \in \mathbb{R}$ se
  - $a \geq l \ \forall a \in A$ (*l è un minorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a \leq l + \varepsilon$

Se esiste $M = \max A$ allora $\sup A = M$. Se esiste $m = \min A$ allora $\inf A = m$. $\sup A$ non è obbligato ad appartenere ad A, ma se vi appartiene è il **massimo**. Stessa cosa per $\inf A$.

5 Funzioni reali

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppure $f : A \to \mathbb{R}$.

Grafico di $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Proprietà di simmetria:

- f si dice **pari** se $f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'asse y*)

- f si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'origine*)
- f si dice **periodica** se $\exists\, T > 0$ t.c. $f(x+T) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*il grafico si ottiene traslando il pezzo* $[0, T]$ *in* $[T, 2T]$, $[T, 3T]$, $\dots$)

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari, allora $f(0) = 0$.

Se T è un periodo, anche $2T, 3T, 4T, \dots$ lo sono. Il **minimo periodo** è il più piccolo T (se esiste) per cui vale $f(x+T) = f(x)\ \forall\, T \in \mathbb{R}$.

Proprietà di **monotonia**:

- f si dice **strettamente crescente** se $x > y \implies f(x) > f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **strettamente decrescente** se $x > y \implies f(x) < f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente crescente** se $x > y \implies f(x) \geq f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente decrescente** se $x > y \implies f(x) \leq f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Se f è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente. Se f è strettamente decrescente allora è anche debolmente decrescente.

Se f è sia deb. crescente che deb. decrescente allora è **costante**.

5.1 Grafici, Iniettività e Suriettività

- Suriettiva $\iff$ in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *almeno* una freccia (*tutto l'asse* y *è "coperto"*)
- Iniettiva $\iff$ in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *al più* $(0|1)$ una freccia (*l'asse* y *è "coperto" solo una volta*)
- Retta orizzontale: $y = \lambda$
- Grafico di f: $y = f(x)$
- Intersezioni: $f(x) = \lambda$

$$f \text{ iniettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha al più una soluz. } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$f \text{ suriettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha almeno una soluz. } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Se f è pari o periodica non è iniettiva. Se f è strettamente crescente o strettamente decrescente allora è iniettiva.

6 Funzioni elementari

6.1 Potenze pari

$$f(x) = x^{2k} \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Con $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*non iniettiva o suriettiva*).
- Con $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ (*iniettiva ma non suriettiva*)
- Con $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*non iniettiva ma suriettiva*)
- Con $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*biunivoca*)

Quindi l'inverso è

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$g(x) = \sqrt[2k]{x}$$

Oss: $f(x) = x^{2k}$ è una funzione *pari*, strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente su $[-\infty, 0)$.

Oss: la funzione $f(x) = |x|$ ha le stesse proprietà.

6.2 Potenze dispari

$$f(x) = x^{2k+1} \qquad k \in \mathbb{N}$$

È una funzione dispari.

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*biunivoca*)

L'inverso è definito come

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sqrt[2k+1]{x}$$

Vale lo stesso per $f(x) = \frac{1}{x^k}$

> [!warning] Confermare la funzione

Oss: $f(x) = x^{2k+1}$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

6.3 Esponenziali

$$f(x) = a^x \qquad \text{con } a > 1$$

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*iniettiva*)
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$\begin{aligned} g \,:\, \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \\ g(x) &= \log_a x \end{aligned}$$

Ese: fate lo stesso per $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

Oss: se $a \in (0, 1)$ allora $b = \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$.

6.4 Funzioni trigonometriche

6.4.1 Seno

$$f(x) = \sin x$$

$f \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo 2π ed è dispari ($\sin(-x) = -\sin x$).

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$\begin{aligned} g \,:\, [-1, 1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ g(x) &= \arcsin x \end{aligned}$$

Oss: $\arcsin(\sin(\frac{3}{4}\pi)) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3}{4}\pi$

6.4.2 Coseno

$$f(x) = \cos x$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo 2π ed è pari ($\cos x = \cos(-x)$).

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $[0, \pi] \to [-1, 1]$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$g(x) = \arccos x$$

Oss: $\arccos(\cos(\frac{3}{2}\pi)) \neq \frac{3}{2}\pi$

6.4.3 Tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo π ed è dispari (*solo suriettiva*)
- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è dispari (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$g(x) = \arctan x$$

7 Trasformazione di grafici

Dato $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *Simmetria* assiale rispetto all'asse x: $y = -f(x)$
- *Simmetria* assiale rispetto all'asse y: $y = f(-x)$

- *Traslazione* del vettore $(0, c)$ (verso l'alto se $c > 0$): $y = f(x) + c$
- *Traslazione* del vettore $(-c, 0)$ (verso sinistra se $c > 0$): $y = f(x + c)$
- *Compressione* verso l'asse x (dilatazione se $c > 1$): $y = f(x) \cdot c$
- *Dilatazione* verso l'asse y (compressione se $c > 1$): $y = f(x \cdot c)$
- *Ribaltamento* sull'asse x: $y = |f(x)|$
- *Ribaltamento* sull'asse y: $y = f(|x|)$

8 Successioni

8.1 Terminologia

Sia $\mathscr{P}(n)$ una affermazione a proposito del numero $n \in \mathbb{N}$. Sarà vera o falsa a seconda del valore di n.

Diciamo che:

- $\mathscr{P}(n)$ è vera *frequentemente* se è vera per infiniti $n \in \mathbb{N}$
- $\mathscr{P}(n)$ è vera *definitivamente* se è vera "da un certo punto in poi", cioè se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall\, n \geq n_0$

Oss: Definitivamente $\implies$ Frequentemente.

Es:

1. $n^2 \geq 1000$ è vera definitivamente
2. n^3 è multiplo di 8 è vera frequentemente, ma non definitivamente
3. $n + 1 \geq 3^n$ è falsa definitivamente

8.2 Succesioni a valori reali

Def rigida: una successione a valori reali è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Di solito, invece di scrivere $a(n)$, si scrive a_n.

Oss: così non è possibile considerare $a_n = \frac{1}{n}$.

Def più elastica: una successione a valori reali è una funzione $a : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{N}$, tale che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ per cui $\forall\, n \geq n_0, n \in A$ (tale che $n \in A$ definitivamente).

8.3 Limite di una successione

Sia a_n una successione. Abbiamo 4 possibili comportamenti:

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ ($a_n \to \ell$; $\ell \in \mathbb{R}$)
2. $\lim a_n = +\infty$ ($a_n \to +\infty$)
3. $\lim a_n = -\infty$ ($a_n \to -\infty$)
4. $\lim a_n$ non esiste (a_n è indeterminata)

Def:

- Una successione è di tipo *4.* se non è di nessun degli altri tipi
- Una successione è di tipo *2.* se $\forall\, M \in \mathbb{R}, a_n \geq M$ definitivamente ($\forall\, M \in \mathbb{R}, \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq M \ \forall\, n \geq n_0$)
- Una successione è di tipo *3.* se $\forall\, m \in \mathbb{R}, a_n \leq m$ definitivamente ($\forall\, m \in \mathbb{R}, \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq m \ \forall\, n \geq n_0$)
- Una successione è di tipo *1.* se
  - $\forall\, \varepsilon > 0, a_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ definitivamente $\vee$
  - $\forall\, \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente $\vee$
  - $\forall\, \varepsilon > 0, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ definitivamente

Varianti di *1.*:

- $a_n \to \ell^+$ tende a ℓ da destra se $\forall\, \varepsilon > 0, \ell < a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente
- $a_n \to \ell^-$ tende a ℓ da sinistra se $\forall\, \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n < \varepsilon$ definitivamente

8.4 Teorema di unicità del limite

Una successione ricade sempre in uno e uno solo dei quattro tipi di comportamento. Se poi ricade nel tipo *1.* ($\ell \in \mathbb{R}$), il valore ℓ è unico.

Dim: se a_n è di tipo *1.* cioè $a_n \to \ell$, allora definitivamente $\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$. $l - 1 \leq a_n$ implica che non può essere di tipo *3.*. $a_n \leq \ell + 1$ implica che non può essere di tipo *2.*. Inoltre se è di tipo *2.*, definitivamente si avrà $a_n \geq 1$. Se è di tipo *3.*, definitivamente si avrà $a_n \leq -1$. Queste condizioni non possono accadere insieme.
Infine, se $a_n \to \ell_1$, $a_n \to \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$, allora fisso $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$. Quindi a_n si ritrova in due intervalli contemporaneamente: $\ell_1 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_1 + \varepsilon$ e $\ell_2 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_2 + \varepsilon$. Se $\ell_1 < \ell_2$ allora $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$. Dunque $a_n \leq \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente. Questo è assurdo!

8.5 Limitatezza delle successioni convergenti

- Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora $\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ è limitato
- Se $a_n \to +\infty$ allora $\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ è inferiormente limitato
- Se $a_n \to -\infty$ allora $\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ è superiormente limitato

> *Dimostrazione nelle slide.* #view-slide

8.6 Teorema di permanenza del segno

- Se $a_n \to \ell \in (0, +\infty)$ o se $a_n \to +\infty$ allora $a_n > 0$ definitivamente
- Se $a_n \geq 0$ definitivamente e se $a_n \to \ell$ allora $\ell \geq 0$ oppure $\ell = +\infty$

> *Dimostrazione nelle slide* #view-slide

Oss: vale lo stesso risultato con i negativi.

- Se $a_n \to \ell \in (-\infty, 0)$ o se $a_n \to -\infty$ allora $a_n < 0$ definitivamente
- Se $a_n \leq 0$ definitivamente e se $a_n \to \ell$ allora $\ell \leq 0$ oppure $\ell = -\infty$

8.7 Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- Posso scrivere $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per unificare i tipi *1.*, *2.*, *3.*
- Le operazioni di $\mathbb{R}$ si estendono a $\overline{\mathbb{R}}$ *quasi bene*:

$$\begin{aligned}
+x \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\
-x \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty \\
x + (\pm\infty) &= \pm\infty \\
(+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty \\
\frac{x}{+\infty} &= 0
\end{aligned}$$

- Ci sono 2 eccezioni:
    1. Le 7 forme indeterminate:

$$\begin{aligned}
&(+\infty) + (-\infty) \\
&0 \cdot (\pm\infty) \\
&\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \\
&\frac{0}{0} \\
&0^0 \\
&1^{\pm\infty} \\
&(\pm\infty)^0
\end{aligned}$$

2. Le divisioni per 0

8.8 Teoremi algebrici

Siano a_n, b_n successioni, $a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$$a_n + b_n \to l_1 + l_2$$
$$a_n - b_n \to l_1 - l_2$$
$$a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$$
$${a_n}^{b_n} \to {l_1}^{l_2}$$

Con le dovute eccezioni di ∞.

8.9 Teoremi di confronto

Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

1. Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, allora $a \leq b$
2. Se $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$
3. Se $b_n \to -\infty$, allora $a_n \to -\infty$

Se a_n, b_n, c_n sono tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$ (lo stesso $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) allora $b_n \to \ell$. (*teorema del carabiniere*).

Es: $\lim_{n\to+\infty} n + \cos n$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \cos n \geq -1 \implies n + \cos n \geq n - 1$$

Per il teorema del confronto a 2, visto che $\lim_{n\to+\infty} n - 1 = [+\infty - 1] = +\infty$, ho che $\lim_{n\to+\infty} n + \cos n = +\infty$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \sin n \leq \frac{1}{n}$$

E poiché $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, per il teorema del confronto a 3 $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

9 Tecniche di calcolo dei limiti

Fatto ***N.1***

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty \qquad \forall\, a > 0$$

Fatto ***N.2***

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = 0^+ \qquad \forall\, a < 0$$

Oss: $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^a = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-a}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+$

> Ricordare negli esercizi di scrivere *teoremi algebrici dove vengono usati*.

9.1 Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geq -1 \quad \text{si ha} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Fatto ***N.3***

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \qquad \forall\, a > 1$$

Dim: $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) \to [1 + \infty(a-1)] = +\infty \Rightarrow a^n \to +\infty$ per il confronto a 2.

Fatto ***N.4***

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \qquad \forall\, 0 < a < 1$$

Dim: $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ e $b^n \to +\infty$ quindi $a^n = \frac{1}{b^n} \to 0^+$.

Fatto *N.5*

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \forall\, a > 1$$

Dim: $a^{\frac{1}{n}} \geq 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

> Finire la dim dalle slide #todo-uni .

9.2 Dimostrazione teorema del confronto a 2

Sappiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente

1. Se $a_n \to a$, $b_n \to b$, vogliamo dimostrare che $a \leq b$

   Per assurdo, se $b < a$, posso scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \frac{a-b}{2} \Rightarrow b + \varepsilon < a - \varepsilon$.

   Allora definitivamente $a_n \geq a - \varepsilon$ e $b_n \leq b + \varepsilon$, quindi $b_n \leq b + \varepsilon < a - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente.

   Ciò significa che $b_n < a_n$, il che è assurdo.

2. Se $a_n \to +\infty$, $\forall\, M \in \mathbb{R}$, ho $a_n \geq M$ definitivamente $\Rightarrow$ ho $b_n \geq a_n \geq M$ definitivamente $\forall\, M \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n \to +\infty$.

3. Uguale a 2..

10 Criterio del rapporto & Criterio della radice

10.1 Criterio del rapporto

Sia a_n una successione definitivamente positiva (> 0). Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se $\ell < 1$, $a_n \to 0$

2. se $\ell > 1$, $a_n \to +\infty$
3. se $\ell = 1$, ??

10.2 Criterio della radice

Sia a_n una successione definitivamente ≥ 0. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se $\ell < 1$, $a_n \to 0$
2. se $\ell > 1$, $a_n \to +\infty$
3. se $\ell = 1$, ??

Es: $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ con i teo. algebrici ottengo $[\frac{+\infty}{+\infty}]$, quindi

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{2}$$

per il criterio del rapporto $a_n \to 0$.

Fatto *N.6* (*Esponenziale batte potenza*)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \qquad \forall\, b > 1,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$$

10.3 Fattoriale

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

Fatto *N.7* (*Il fattoriale batte l'esponenziale*)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \qquad \forall b > 0$$

Fatto *N.7 n^n batte il fattoriale.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

10.4 Gerarchia degli infiniti

1. n^n
2. $n!$
3. b^n
4. n^a
5. n

> **Attenzione:** nella gerarchia degli infiniti, dovete rispettare religiosamente le espressioni date. $n!$ batte 2^n, ma non so cosa fa con $2^{(n^2)}$.

10.5 Criterio del rapporto-radice

Supponiamo $a_n > 0$ definitivamente e che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad \text{(stesso } \ell\text{)}$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = ?$

Applico il criterio rapporto-radice con $a_n = n$, che è definitivamente > 0. Ho che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = ?$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{a}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (n^{\frac{1}{n}})^a = 1$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^7 - n^2 + 1} = ?$

Ha senso perché $n^7 - n^2 + 1 \to +\infty \implies$ è definitivamente positiva per il teorema di permanenza del segno.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^7} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^7}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Fatto *N.8*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1 \qquad \forall \text{ polinomio}$$

Fatto *N.9*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = ?$

Metodo 1: $\forall b > 1$ ho che $n! > b^n$ (per il teo di permanenza del segno: $\frac{b^n}{n!} \to 0 \implies$ definitivamente $\frac{b^n}{n!} < 1 \implies b^n < n!$ definitivamente) $\implies \sqrt[n]{n!} > b$ definitivamente $\forall\, b > 1 n \implies \sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

Metodo 2:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = ?$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

Oss: per n molto grandi, $n!$ assomiglia a $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Es: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = ?$
Applico il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n!}} = \frac{(2^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \dots$$

10.6 Dimostrazione del criterio della radice

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell > 1$, allora la media sarà un numero tra 1 e ℓ

$$1 < \frac{ell + 1}{2} < \ell \implies \text{definitivamente } \sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell + 1}{2} \implies a_n \geq \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n$$

e poiché $\frac{\ell+1}{2} > 1$, $\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \to +\infty$. Quindi per il confronto a 2, ho che $a_n \to +\infty$.

Se invece $0 \leq \ell < 1$, allora $0 \leq \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$, inoltre $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \implies 0 \leq a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ definitivamente e $0 < \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \to 0$, dunque, per il teo del confronto a 3, $a_n \to 0$.

11 Principio di induzione

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathscr{P}(n) = \text{affermazione a prop. di } n \text{ che può essere vera o falsa}$$

Es: $n^2 = n + 6$ (*definitivamente vera*)

- $n = 0$: falsa
- $n = 1$: falsa
- $n = 2$: falsa
- $n = 3$: vera!
- $n = 4$: falsa
- $n = 5$: falsa

Es: se l'insieme A ha n elementi, allora $\mathscr{P}(A)$ ha 2^n elementi (*definitivamente vera*).

Principio di induzione: supponiamo di sapere che

1. $\mathscr{P}(0)$ è vera (*passo base*)
2. $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)\ \forall\, n \geq 0$ (*passo induttivo*)

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Es: dimostrare che $0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dimostrazione per induzione:

1. $n = 0 :\ 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \longrightarrow$ vero
2. Ipotesi(passo n) $:\ 0+1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Voglio dire che $0+1+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. $0 + 1 + \cdots + (n+1) = 0 + 1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ese: da fare a casa #todo-compito

1. $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

11.1 Disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione)

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geq -1 \text{ si ha } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostrazione per induzione su n

1. *Passo base:*

$$\begin{aligned} n = 0 \quad & (1+x)^0 \geq 1 & \forall\, x > -1 \\ n = 1 \quad & (1+x)^1 \geq 1 + x & \forall\, x \geq -1 \end{aligned}$$

2. *Passo induttivo:*

$$\text{Ipotesi(passo } n\text{)}: \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

$$\text{Tesi(passo } n+1\text{)}: \quad (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + nx + x + nx^2 =$$

$$= 1 + (n+1)^x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \longrightarrow \text{Vero!} \Rightarrow$$

$$\text{La disug è dimostrata } \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, x \geq -1$$

11.2 Coeff. binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ è l'elemento in posizione k nella riga n del **triangolo di Tartaglia** (*si conta da* 0).

Sviluppo del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j$$

12 Successioni monotone

Sia a_n una successione. Diciamo che a_n è

1. **strettamente crescente** se $a_{n+1} > a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
2. **strettamente decrescente** se $a_{n+1} < a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
3. **debolmente crescente** se $a_{n+1} \geq a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
4. **debolmente decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Oss: similmente si definiscono i corrispondenti concetti per successioni definitivamente monotone.

Teo delle successioni monotone: sia a_n una successione *debolmente crescente*, allora a_n ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Più precisamente $a_n \to \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Lo stesso vale per le successioni debolmente decrescenti ($a_n \to \inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$).

Dim (*caso crescente*):

Primo caso: $\sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\} = +\infty \implies \forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq M$. Ma se la succ. è debolmente crescente $\implies \forall\, n \geq n_0\,,\ a_n \geq a_{n_0} \geq M \implies a_n \to \infty$.

Secondo caso: $\sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\} = \ell \in \mathbb{R} \implies$

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \leq \ell$ (*ℓ è un maggiorante*)
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq a_{n_0}$ (*ℓ è il minimo tra i maggioranti*)

Ma a_n è debolmente crescente $\implies \forall\, n \geq n_0$ ho che $\ell - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq \ell \implies a_n \to \ell^-$

Caso decrescente: #todo-compito

Oss:

1. Se a_n è debolmente crescente e superiormente limitata, allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$
2. Se a_n è definitivamente debolmente crescente (o decrescente) allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{\, +\infty\,\}$ (o $\mathbb{R} \cup \{\, -\infty\,\}$), ma non posso dire che $\ell = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$

Es: Sia $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Allora

1. $2 \leq a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
2. $a_n \leq 3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
3. $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Per il teo sulle successioni monotone, $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e $2 \leq \ell \leq 3$.

Dim:

1. Per Bernoulli: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{\, 0\,\}$
2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \cdot 1^{n-j} \cdot \frac{1}{n^j} \longrightarrow$ *guardare le slide*
3. $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow a_n$ è decrescente $\longrightarrow$ *guardare le slide*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

Es:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

13 Successioni per ricorrenza

Una successione per ricorrenza si presenta così:

- Un punto di partenza: $a_0 = 2$
- Una regola per calcolare il valore di un elemento dati i precedenti: $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{1}{n+2}$

Possono essere dimostrate per induzione.

Es *1*:

$$\begin{cases} a_0 = 1 & (I) \\ a_n = n \cdot a_{n-1} & (II) \end{cases}$$

Se voglio calcolare $a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot a_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.

In questo caso si ha $a_n = n!$.

Es *2*:

$$\begin{cases} a_0 = 3 & (I) \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 & (II) \end{cases}$$

Calcolando un po' di valori trovo *guess:* $a_n = 2^{n+1} + 1$. Si può dimostrare per induzione:

- **P.B.:** $n = 0$ per (I), $a_0 = 3 = 2^{0+1} + 1$ (*Ok!*)
- **P.I.:** se $a_n = 2^{n+1} + 1$ allora $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{(n+1)+1} + 1$ (*Ok!*)

> **Attenzione:** Poter trovare una formula esplicita per le successioni per ricorrenza è *rarissimo*!

Terminologia: una successione per ricorrenza che dipende dai k termini precedenti si dice di **ordine** k. Una successione per ricorrenza senza una dipendenza esplicita da n si dice **autonoma**.

> Tratteremo quasi esclusivamente successioni per ricorrenza di ordine 1, autonome.

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Es 3:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = a_{n-1}^2 - 1 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = f(a_{n-1})$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

Intersezioni con la bisettrice $y = x$: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Guess: la successione è crescente e tende a $+\infty$.

Strategia:

1. $a_n \geq 2 \quad \forall\, n \geq 0$
2. $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n$
3. $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
4. $\ell = +\infty$

Dim *3.*: segue dal punto *2.* per il teo sulle successioni monotone.

Dim *4.*: Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora posso passare al limite la relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n^2 - 1 \\ \implies \ell &= \ell^2 - 1 \\ \implies \ell &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ oppure } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Ma $a_n \geq 2\ \forall\, n$ (per *1.*) $\implies \ell \geq 2$ (permanenza del segno) $\implies$ nessuno dei valori trovati è accettabile $\implies \ell = +\infty$.

Dim *1.*: $a_n \geq 2\ \forall\, n$. Per induzione:

- **P.B.:** $a_n = 2 \geq 2$ (*Ok!*)
- **P.I.:** se $a_n \geq 2$, allora $a_{n+1} = a_n^2 - 1 \geq 4 - 1 = 3 \geq 2$ (*Ok!*)

Dim *2.*: $a_n \leq a_{n+1}\ \forall\, n$. Per induzione:

- **P.B.:** $a_1 = a_0^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \geq a_0$ (*Ok!*)
- **P.I.:** se $a_n \leq a_{n+1}$, allora $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$ perché $f(x) = X^2 - 1$ è crescente su $[0, +\infty)$.

Quindi $a_n \to +\infty$.

14 Serie numeriche

14.1 Definizione SBAGLIATA

Data una successione a_n, indico con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la somma di tutti i termini della successione (che sono infiniti).

> **Questo non ha senso**

14.2 Definizione CORRETTA

Def: data una successione a_n, dato $k \in \mathbb{N}$, la **somma parziale** k-esima di a_n è

$$S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Def: una **serie numerica** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ($\sum a_n$) è il limite della successione S_k, per $k \to \infty$. Cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

14.3 Carattere di una serie (comportamento)

Essendo un limite, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha 4 possibili comportamenti:

1. **Converge** a $\ell \in \mathbb{R}$ se $S_k \to \ell$
2. **Diverge** a $+\infty$ se $S_k \to +\infty$
3. **Diverge** a $-\infty$ se $S_k \to -\infty$
4. È **indeterminata** se S_k non ha limite

14.4 Serie telescopiche

Es:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

- $S_2 = a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $S_3 = a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$

- $S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$
- $S_k = 1 - \frac{1}{k}$ (*dimostrato per induzione*)

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = 1 \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} \text{ converge a } 1$$

14.5 Serie geometriche

La serie geometrica di ragione $a \in \mathbb{R}$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Lemma: $a^0 + a^1 + \dots + a^k = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$ se $a \neq 1$

Dim:

$$\begin{aligned} (a^0 + a^1 + \dots + a^k) \cdot a &= a^1 + a^2 + \dots + a^{k+1} \quad + \\ (a^0 + a^1 + \dots + a^k)(-1) &= -a^0 - a^1 - \dots - a^k \quad = \\ (a^0 + a^1 + \dots + a^k)(a-1) &= -a^0 + a^{k+1} \end{aligned}$$

Poiché $a \neq 1$, posso dividere ed ottengo il teo.

Oss: se $a = 1$, $a^0 + \dots + a^k = k + 1$.

Dunque si ha

$$S_k = \begin{cases} k+1 & \text{se } a = 1 \\ \frac{a^{k+1}-1}{a-1} & \text{se } a \neq 1 \end{cases}$$

$\lim_{k \to +\infty} S_k = ?$

1. Se $-1 < a < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-a}$
2. Se $a = 1$ vedere esempio 2.
3. Se $a > 1$ diverge a $+\infty$
4. Se $a < -1$ non ha limite

5. Se $a = -1$ vedere esempio stupido 4

> *Dimostrazioni nelle slide* #view-slide

14.6 Strumenti per lo studio delle serie

Il problema è determinare il carattere di una serie senza poter ricavare un'espressione esplicita per le somme parziali. Per farlo abbiamo:

- Teoremi algebrici
- Condizione necessaria alla convergenza
- Serie "note"
- Criteri di convergenza
  - Serie a termini di segno costante ($a_n \leq 0$ def. o $a_n \leq 0$ def.)
    - Radice
    - Rapporto
    - Confronto
    - Confronto asintotico
    - *Condensazione di Cauchy*
  - Serie a termini di segno alterno
    - Leibniz
  - Serie a termini di segno qualunque
    - Assoluta convergenza

14.6.1 Teoremi algebrici

1. Sia a_n una successione e sia $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Allora (*come operazione in* $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ (come operazione in } \overline{\mathbb{R}})$$

2. Se a_n, b_n sono successioni, allora (*con tutte le attenzioni delle operazioni nella retta reale estesa*)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

3. **Attenzione!**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

14.6.2 Condizione necessaria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge } \implies a_n \to 0$$

Dim: $a_n = S_n - S_{n-1}$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \ell - \ell = 0$.
Dunque se a_n non tende a 0, la serie non può convergere (può divergere o essere indeterminata). Se $a_n \to 0$, *potrebbe* convergere.

14.6.3 Serie note

1. Serie geometriche
2. Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

3. Parenti dell'armonica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

14.6.4 Serie a termini di segno costante

Lemma: sia a_n una successione def. ≥ 0. Allora la successione $S_k = (a_0 + \dots + a_k)$ delle somme parziali è def. debolmente crescente.

Dim:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\, n \geq n_0,\ a_n \geq 0 \implies$$
$$\forall\, n \geq n_0,\ S_n = a_n + S_n \geq S_{n-1}$$

Teo: Se a_n è una succ. def. ≥ 0, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha due comportamenti possibili: converge o diverge a $+\infty$.

Dim: teo sulle successioni monotone applicato a S_k.

Oss: vale lo stesso risultato se $a_n \leq 0$ def. In quel caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge oppure diverge a $-\infty$.

14.6.4.1 Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ def. Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $\ell > 1$ la serie diverge a $+\infty$
2. Se $\ell < 1$ la serie converge
3. Se $\ell = 1$???

Dim: #view-slide

Se $a_n \geq 0$ def. e $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora

1. $\ell < 1 \iff \sum a_n$ converge
2. $\ell > 1 \iff \sum a_n$ diverge a $+\infty$

Dim *2.*: se $\ell > 1$, per il criteri odella radice per successioni, $a_n \to +\infty$. Quindi non è rispettata la condizione necessaria per la convergenza. Poiché al serie è a termini def. ≥ 0, può solo convergere o divergere a $+\infty$. Dunque $\sum a_n$ diverge a $+\infty$.

Dim *1.*:

$$\ell < 1 \implies \varepsilon = \frac{1-\ell}{2} \implies \ell + \varepsilon < 1 \text{ e } \varepsilon > 0$$
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\, n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon < 1$$
$$\implies \forall\, n \geq n_0 \quad a_n \leq (\ell+\varepsilon)^n < 1$$
$$\implies \forall\, k \geq n_0 \quad S_k =$$
$$\dots$$

Ho dimostrato che $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $S_k \leq M$ def.. Ma poiché $a_n \geq 0$ def., S_k è una successione cresente $\implies$ per il teo sulle successioni monotone, $S_k \to L \in \mathbb{R} \implies \sum a_n$ converge.

14.6.4.2 Criterio del rapporto

Sia $a_n > 0$ def. Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $\ell > 1$ la serie diverge a $+\infty$
2. Se $\ell < 1$ la serie converge
3. Se $\ell = 1$???

14.6.4.3 Confronto per serie numeriche

Siano a_n, b_n successioni.

Def: se $0 \leq a_n \leq b_n$ def., allora:

1. $\sum a_n$ diverge a $+\infty \implies \sum b_n$ diverge a $+\infty$
2. $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge

Occhio: ogni altra implicazione è *ILLEGALE*!

Dim:

A meno di cambiare le serie per un *numero finito* di termini, posso supporre che la disuguaglianza $0 \leq a_n \leq b_n$ valga per $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$S_k^a = a_0 + \dots + a_k \qquad S_k^b = b_0 + \dots + b_k$$

allora $0 \leq S_k^a \leq S_k^b \;\forall\, k \in \mathbb{N}$.

1. Se $S_k^a \to +\infty$, per il confronto tra successioni, $S_k^b \to +\infty$. Ovvero, se $\sum a_n$ diverge a $+\infty$, allora $\sum b_n$ diverge a $+\infty$.
2. Se $\sum b_n$ converge, allora $S_k^b \to \ell \in \mathbb{R}$, ma $b_n \geq 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N} \implies S_k^b$ è deb. crescente verso $\ell \implies S_k^b \leq \ell \; \forall \, k \in \mathbb{N} \implies S_k^a \leq S_k^b \leq \ell \; \forall \, k \in \mathbb{N} \implies S_k^a$ deb. crescente e limitata $\implies$ convergente.

14.6.4.4 Confronto asintotico per serie numeriche

Siano a_n, b_n successioni con $a_n \geq 0, b_n > 0$ def..

Def: se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty) \qquad [\ell \neq 0, \ell \neq +\infty]$$

allora $\sum a_n, \sum b_n$ hanno lo *stesso comportamento*.

14.6.4.4.1 Casi limite del confronto asintotico

- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, allora $0 \leq a_n \leq b_n$ def. $\implies$ applico il confronto
  1. $\sum a_n$ diverge a $+\infty \implies \sum b_n$ diverge a $+\infty$
  2. $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge
- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, allora $0 \leq b_n \leq a_n$ def. $\implies$ applico il confronto
  1. $\sum b_n$ diverge a $+\infty \implies \sum a_n$ diverge a $+\infty$
  2. $\sum a_n$ converge $\implies \sum b_n$ converge

14.6.4.5 Esempi

Es: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$

$$a_n = \frac{1}{3^n + 1} > 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Condizione necessaria: $\lim a_n = 0$

Radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n+1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{3^n}}}$$
$$= \frac{1}{3} \implies \sum a_n \text{ converge perchè } \ell < 1$$

Rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n+1}+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3^n+1}}$$
$$= \frac{1}{3} \implies \sum a_n \text{ converge perchè } \ell < 1$$

Confronto: $0 \le a_n = \frac{1}{3^n+1} \le \frac{1}{3^n}$

$$\sum \frac{1}{3^n} \text{ è geometrica di ragione } \frac{1}{3} \implies \text{ converge}$$
$$\implies \sum \frac{1}{3^n+1} \text{ converge per il confronto}$$

Confronto asintotico: $a_n = \frac{1}{3^n+1}, \quad b_n = \frac{1}{3^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1 \in (0, +\infty)$$
$$\implies \sum a_n, \sum b_n \text{ hanno lo stesso comp. per il confr. asint.}$$
$$\implies \sum b_n \text{ converge perchè geom di rag. } \frac{1}{3}$$

Es: $\sum \frac{3}{n^2+1}$

$$a_n = \frac{3}{n^2+1} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \wedge \; a_n \to 0$$

Occhio: *radice* e *rapporto* sono inconcludenti ($\ell = 1$)!

Confronto: $b_n = \frac{3}{n^2} \ge \frac{3}{n^2+1} = a_n$

$$\sum \frac{3}{n^2} = 3 \sum \frac{1}{n^2} \text{ è convergente (arm. gener.)}$$
$$\implies \text{ per il confr. anche } \sum a_n \text{ converge}$$

Confronto asintotico: $b_n = \frac{3}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2}{n^2+1}$$
$$=3\in(0,+\infty)$$
$$\implies \sum b_n \text{ e } \sum a_n \text{ hanno stesso carattere}$$
$$\implies \sum a_n \text{ conv. perchè } \sum b_n \text{ conv.}$$

Es: $\sum \frac{n^2-7}{n+1}$

$$a_n=\frac{n^2}{n+1}>0 \text{ definitivamente}$$
$$a_n\to+\infty \implies \sum a_n \text{ diverge a } +\infty$$

Es: $\sum \frac{n^3-8}{3^n}$

$$a_n=\frac{n^3-8}{3^n}>0 \text{ definitivamente}$$
$$a_n\to+\infty=0$$

Confronto e confronto asintotico sono complicati da usare.

Crit. del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^3-8}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^3-8}{n^3-8}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^3-8}{n^3-8}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\frac{1-\frac{8}{(n+1)^3}}{1-\frac{8}{n^3}}$$
$$=\frac{1}{3}<1\implies\sum a_n \text{ converge}$$

Es: $\sum \frac{\cos^2(n)}{n^2}$

Occhio: radice e rapporto non funzionano. Confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$ non funziona ($\nexists \lim \cos^2(n)$).

$$a_n = \frac{\cos^2(n)}{n^2} \geq 0 \text{ def.}$$

$$a_n \to 0 \text{ per il teo del confr. a 3 }:$$

$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

So che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (armonica generalizzata di esponente > 1). Dunque per il confronto tra serie a termini positivi, $\sum a_n$ converge.

Es: $\sum \frac{\cos^2(n)}{n}$

Boh! (per quello che ne sappiamo noi).

Es: $\sum \frac{n^2-n+2}{\sqrt{n}\cdot n^3-n+7}$

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{\sqrt{n} \cdot n^3 - n + 7} > 0 \text{ def.}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n^2} + \frac{7}{\sqrt{n}\cdot n^3}} \to 0$$

Posso applicare il **confronto asintotico** con $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n}$ e ho

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n^2} + \frac{7}{\sqrt{n}\cdot n^3}} \\
&= 1 \in (0, +\infty) \\
&\implies \sum a_n, \sum b_n \text{ hanno lo stesso carattere} \\
&\implies \text{converge}
\end{aligned}$$

Es: $\sum \frac{2^n}{n!}$

$$a_n = \frac{2^n}{n!} > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Crit. del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1}$$
$$= 0 < 1$$
$$\implies \sum a_n \text{ converge}$$

Es per casa: determinare per quali $a > 0$ la seguente serie converge

$$\sum \frac{n^a + 2}{n\sqrt{n} + 2n - \sqrt[3]{n} + 8}$$

> Per altri esempi consultare le slide #view-slide

14.6.5 Assoluta convergena per serie a termini di segno variabile

Teo: se $\sum |a_n|$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

Se voglio studiare $\sum a_n$ con termini a segno variabile, provo a studiare $\sum |a_n|$ che è a termini ≥ 0: 1. $\sum |a_n|$ converge $\implies \sum a_n$ converge (*per il crit. di conv. assoluta*) 2. $\sum |a_n|$ diverge a $+\infty \implies$ **Il criterio fallisce!**

Terminologia: se $\sum |a_n|$ converge, si dice che $\sum a_n$ converge *assolutamente*.

Es: $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$
Provo a studiare $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$.

$$\forall\, n \qquad 0 \leq \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ converge per il criterio di assoluta convergenza.

14.6.6 Criterio di Leibniz per serie a termini alterni

Sia a_n una successioni dalla forma $a_n = (-1)^n \alpha_n$ tale che

1. $\alpha_n \geq 0$ definitivamente
2. α_n decrescente definitivamente

3. $\alpha_n \to 0$

allora $\sum a_n = \sum (-1)^n \alpha_n$ converge.

Occhio: se manca anche solo una delle 3 ipotesi il criterio fallisce!

Es: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \implies \alpha_n = \frac{1}{n}$$

1. $\alpha_n > 0 \; \forall n \geq 1$
2. α_n è decrescente: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \; \forall n$
3. $\alpha_n \to 0$

Posso dunque applicare Leibniz $\implies \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Oss: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ non converge *assolutamente* cioè $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ diverge.

> Copiare anche altro esempio #todo-uni

15 Limiti di Funzione

$A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ (*A è di solito un'unione di intervalli*). Voglio definire $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ($x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).

Per le successioni, facevamo i limiti solo per $n \to +\infty$, ora abbiamo 3 casi da distinguere:

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
2. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x)$

15.1 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per $\lim_{x \to +\infty} f(x)$:

1. $\ell \in \mathbb{R}$: Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon\ \forall\, x \geq k$
    1. $\lim_{x\to+\infty} f(x)o = \ell^+$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon\ \forall\, x \geq k$
    2. $\lim_{x\to+\infty} f(x)o = \ell^-$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell\ \forall\, x \geq k$
2. $+\infty$: Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M\ \forall\, x \geq k$
3. $-\infty$: Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall\, m \in \mathbb{R}\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq m\ \forall\, x \geq k$
4. **N.E.**: Si dice che $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ se non è nessuno degli altri casi

15.2 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

1. $\ell \in \mathbb{R}$: Si dice che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon\ \forall\, x \leq k$
    1. $\lim_{x\to-\infty} f(x)o = \ell^+$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon\ \forall\, x \leq k$
    2. $\lim_{x\to-\infty} f(x)o = \ell^-$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell\ \forall\, x \leq k$
2. $+\infty$: Si dice che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M\ \forall\, x \leq k$
3. $-\infty$: Si dice che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall\, m \in \mathbb{R}\ \exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq m\ \forall\, x \leq k$
4. **N.E.**: Si dice che $\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)$ se non è nessuno degli altri casi

15.3 $\lim_{x\to x_0} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per $\lim_{x\to x_0} f(x)$:

1. $\ell \in \mathbb{R}$: Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ $(\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{ x_0 \})$
    1. $\lim_{x\to x_0} f(x)o = \ell^+$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ $(\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{ x_0 \})$
    2. $\lim_{x\to x_0} f(x)o = \ell^-$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ $(\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{ x_0 \})$
2. $+\infty$: Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ $(\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{ x_0 \})$

3. $-\infty$: Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall m \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq m$ se $0 < |x - x_0| < \delta\,(\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\})$
4. **N.E.**: Si dice che $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$ se non è nessuno degli altri casi

15.3.1 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ vuol dire x tende a x_0 da destra. Ciò significa che la condizione è se $x_0 < x \leq x_0 + \delta\,(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta])$.

15.3.2 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ vuol dire x tende a x_0 da sinistra. Ciò significa che la condizione è se $x_0 - \delta \leq x < x_0$ $(\forall x \in [x_0 - \delta, x_0))$.

Occhio: al limite non frega nulla del valore di $f(x_0)$

15.4 Note tecniche

Quando possiamo calcolare il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ $(x \in \overline{\mathbb{R}})$? Quando x_0 è **punto di accumulazione** del dominio di f.

$f : A \to \mathbb{R}$, A è unione di intervalli e semirette *localmente finita*, cioè vicino a un qualunque punto di $\mathbb{R}$ trovo un numero finito di intervalli che compongono A.

Contresempio:

$$f(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$
$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{\pi}\right) \cup \left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \cup \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$$

x_0 è un **punto interno ad A** se sta dentro ad uno degli intervalli che compongono A (*gli esterni non vanno bene*).

x_0 è un **punto di accumulazione di A** se è un punto interno o è un estremo di un intervallo o semiretta che compone A.

Es: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \ln x.$

Posso calcolare:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \forall x_0 > 0$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

15.5 Caratterizzazione del limite per succesioni

Teo: sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di acc. di A. Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall\, a_n$ successione con: $a_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq x_0$ def. , $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) \to \ell$

Conseguenza: tutti i risultati generali sulle successioni valgono anche per i limiti di funzione:

1. Unicità del limite
2. Teoremi algebrici (e forme indeterminate)
3. Teoremi di confronto a 2 e a 3

Oss: $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ si ottengono usando successioni a_n tale che $a_n \to x_0^+$ o e $a_n \to x_0^-$.

16 Tecniche di Calcolo dei Limiti

1. Continuità
2. Teoremi algebrici
3. Teoremi di confronto a 2 e a 3
4. Cambi di variabile
5. Limiti notevoli
6. Criterio funzioni - successioni
7. Confronto tra ordini di infiniti (gerarchia degli infiniti)

16.1 Continuità

Def: $x_0 \in A$ punto di accumulazione, $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **continua** in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua su A se è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.

Oss: se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, f si dice continua in x_0 da destra. Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, f si dice continua in x_0 da sinistra.

16.1.1 Come trovare funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi, radici, trig., trig. inverse) e quelle ottenute da loro tramite operazioni algebriche e composizione sono continue dove non hanno *problemi burocratici* di definizione (denominatore $= 0$, radice < 0, ...).

16.2 Limiti notevoli

I limiti notevoli sono limiti che si dimostrano una volta per tutte *e poi si ricordano per la vita*!

16.2.1 Patriarchi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

16.2.2 Prima generazione

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

16.2.3 Seconda generazione

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

16.3 Cambi di variabile

Es:

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

Pongo $x^2 = y$. Se $x \to 0$, allora $y \to 0$ ($\tan x$ è continua in $x = 0$).

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Es: copiare #todo-uni

17 O-piccolo e Equivalenza asintotica

Siano $f(x), g(x)$ funzioni, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ in cui posso calcolare i loro limiti.

Def: si dice che $f(x)$ è **o-piccolo** di $g(x)$ per $x \to x_0$ e si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se esiste una funzione $\omega(x)$ tale che

- $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$
- $\lim x \to x_0 \omega(x) = 0$

Cioè $f(x) = g(x) \cdot$ [roba che tende a 0 in x_0].

Def quasi equivalente: se posso dividere per $g(x)$ vicino a x_0 (cioè se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $g(x) \neq 0\ \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{ x_0 \}$), allora $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Questo permette di esprimere le gerarchie degli infiniti.

Es: $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

Verifica: $x^2 = x \cdot x \, (x = \omega(x) \to 0)$

Terminologia: $f(x)$ si dice **infinitesima** per $x \to x_0$ se il suo limite è 0.

Oss: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff f(x) = o(1) \quad x \to x_0$

17.1 Proprietà algebriche degli o-piccoli

Se $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$ per $x \to x_0$, allora

1. $f_1 \pm f_2 = o(g)$
2. $a \cdot f_1 = o(g) \quad a \in \mathbb{R}$
3. $f_1 \cdot f_2 = o(g^2)$
4. $\frac{f_1}{f_2}$ *non funziona!*

1. $o(f_1) \pm o(f_2) = o(f_1 + f_2)$
2. $o(a \cdot f_1) = o(f_1)$
3. $o(f_1) \cdot o(f_2) = o(f_1 \cdot f_2)$
4. $f_1 \cdot o(f_2) = o(f_1 \cdot f_2)$

5. $o(f_1 + o(f_1)) = o(f_1)$

17.2 Transitività degli o-piccoli

$$f = o(g),\ g = o(h) \quad \text{per } x \to x_0 \implies f = o(h) \quad \text{per } x \to x_0$$

17.3 Limiti notevoli espressi in o-piccoli

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x) && \text{per } x \to 0 \\
\tan x &= x + o(x) && \text{per } x \to 0 \\
e^x &= 1 + x + o(x) && \text{per } x \to 0 \\
\ln(1+x) &= x + o(x) && \text{per } x \to 0 \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) && \text{per } x \to 0 \\
\cos x &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) && \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

17.4 Equivalenza asintotica

Def: si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$** e si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se esiste

- $f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1$

Definizione quasi equivalente: $f \sim g$ per $x \to x_0$ se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Es: $\sin x \sim x$ per $x \to x_0$

Es: $\cos x \sim 1$ per $x \to x_0$
$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ per $x \to x_0$

18 Differenziabilità e Derivabilità

Domanda generale: data una funzione $f(x)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ in cui ha senso fare il limite di $f(x)$, quando posso trovare $a \in \mathbb{R}$, tale che

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o((x - x_0))$$

?

Es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & x_0 &= 0 & \implies a &= 1 \\ f(x) &= \ln x & x_0 &= 1 & \implies a &= 1 \\ f(x) &= \sqrt[3]{1+x} & x_0 &= 0 & \implies a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sto cercando la retta che *approssima meglio* il grafico di $f(x)$ vicino a x_0 (**Migliore approssimazione lineare**).

Def: $f(x)$ è **differenziabile** in $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + o(h) \qquad \text{per } h \to 0$$

In tal caso, la retta $y = f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$ si dice **retta tangente** al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Come calcolare a?

Oss: $f(x)$ è diffenziabile in $x_0 \iff \exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + o(h)$ con $h \to 0 \iff \exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$.

Def: $f(x)$ è **derivabile** in x_0 se il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste finito (cioè $\in \mathbb{R}$).

Teo: fo è differenziabile in $x_0 \iff f$ è derivabile in x_0.

Terminologia:

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si dice **rapporto incrementale**
- il limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hf(x_0)}{h}$, quando esiste finito, si denota con $f'(x_0)$ oppure $\frac{df}{dx}(x_0)$ oppure $f^{(1)}(x_0)$
- $f'(x)$ è la **derivata** di $f(x)$ in x_0 e la funzione $f'(x)$ è la **derivata** di $f(x)$

La retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ è $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

Oss: $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

18.1 Esempi di non derivabilità

1. $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\text{ N.E.}$$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Teo: f derivabile in $x_0 \implies f$ continua in x_0

Dim: f derivabile in $x_0 \implies \exists\, a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0)o + a\cdot(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0 \implies \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \implies f$ continua in x_0.

18.2 Derivate delle funzioni elementari

1.

$$f(x)\text{ costante}$$
$$f'(x) = 0$$

2.

$$f(x) = x^{\alpha}$$
$$f'(x) = x^{\alpha-1} \cdot \alpha$$

3.

$$f(x) = e^{x}$$
$$f'(x) = e^{x}$$

4.

$$f(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x$$

5.

$$f(x) = \cos$$
$$f'(x) = -\sin x$$

6.

$$f(x) = \ln x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

19 Regole di derivazione

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili in x_0:

- $S(x) = f(x) \pm g(x) \implies S'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $P(x) = f(x) \cdot g(x) \implies P'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- Se $g(x) \neq 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $R(x) = \frac{1}{g(x)} \implies R'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

- Se $g(x) \neq 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies Q'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Dim: sulle slide #view-slide

Es: $f(x) = \tan x$

$$\begin{aligned} f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \implies f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Oss (caso particolare): $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$.

19.1 Derivata della composizione

Siano $f(x), g(x)$ funzioni per cui abbia senso scrivere la composizione $C(x) = f(g(x))$. Inoltre chiediamo che

- $g(x)$ sia derivabile in x_0
- $f(x)$ si derivabile in $g(x_0)$

$$C'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

> Aggiungere esempio $f(x) = 2^x$

19.2 Derivata della funzione inversa

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono inverse l'una dell'altra e se f è derivabile in $g(x_0)$, allora

$$\begin{aligned} & f(g(x)) = x \\ & \qquad \implies f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = 1 \\ & \qquad \implies g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \end{aligned}$$

Ovvero

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Es: $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$

$$f'(x) = e^x \implies (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Es:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Es:

$$(\arcsin x)' = \sqrt{1-x^2}$$

Es:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

19.3 Trucco dell'esponenziale

$$\begin{aligned} [f(x)]^{g(x)} &= e^{g(x)\cdot\ln f(x)} \\ \implies \left([f(x)]^{g(x)}\right)' &= e^{g(x)\cdot\ln f(x)} \\ &\dots \end{aligned}$$

Es: $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$

19.4 Teorema di L'Hopital

Siano $f(x), g(x)$ funzioni derivabili vicino a x_0. Suppongo che

1. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sia forma indet. $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
2. $g'(x)$ non si annulli vicino a x_0
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (lo stesso del punto *3.*).

Oss: se $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, allora *FAIL*.

20 L'Hopital e Taylor

20.1 Esempi di applicazione del teo. di L'Hopital

Es *1.*:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =_H \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0^-$$

Es *2.*:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \\ &=_H \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{o} x^2 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es *3.*:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =_H \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

20.2 Formula di Taylor con centro in $x_0 = 0$

Sia $f(x)$ una funzione e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi, esiste un polinomio $\mathrm{Pn}(x)$ di grado$\leq n$ tale che

$$f(x) = \mathrm{Pn}(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

Inoltre

$$\text{Pn}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

è il polinomio di Taylor di $f(x)$ di grano n centrato in 0.

Notazione: data $f(x)$, se $f'(x)$ esiste per ogni x in un intervallo contenente x_0, posso calcolare la derivata di $f'(x)$ in x_0 e così via.

Opportune ipotesi: $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ devono esistere in un intervallo contenente 0 ed inoltre deve esistere $f^{(n)}(0)$.

Resto: la differenza $f(x) - \text{Pn}(x)$ si dice resto. La formula $f(x) = \text{Pn}(x) + o(x^n) \quad x \to 0$ si dice *formula di Taylor con resto di Peano*.

20.3 Sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^2k)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^2k)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\dots)(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x\ln(1+x^2)}$$

Visto che il denominatore è asintotico a $x^3 + o(x^3)$, utilizzo Taylor fino al terzo grado per il numeratore

$$\sin x - x \cos x \sim \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3}$$

Es: Taylor per $\tan x$ in $x = 0$

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)}
\end{aligned}$$

Riscriviamo il denominatore come $1 - t$

> Finire con le slide #view-slide #todo-uni

> Mi sono perso…

Dimostrazione formula di Taylor:

> Troppa roba, guardati le slide #view-slide

20.4 Taylor con centro qualsiasi

Sia $f(x)$ una funzione derivabile abbastanza volte in un intervallo contenente x_0. Allora esiste un polinomio Pn(x) di grano $\leq n$ tale che

$$f(x) = \text{Pn}(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

dove

$$\text{Pn}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

21 Funzioni continue

Def: $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in A, f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ è continua in x_0 se

1. x_0 è un punto *isolato* (un punto che non ha vicino nessun altro punto) di A (ovvero se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \{ x_0 \}$).
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Metateorema: le funzioni elementari, le loro somme, differenze, prodotti, quozienti e composizioni sono continue dove definitie.
Somme, prodotti, quozienti e composizioni di funzioni continue sono continue dove definite.

21.1 Tipi di discontinuità

f non continua in x_0.

1.: x_0 è una discontinuità **eliminabile** se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0) \qquad \ell \in \mathbb{R}$$

È possibile eliminarla con

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

2.: x_0 è una discontinuità di **salto** se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1 \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2 \qquad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$$

3.: x_0 è una discontinuità di **2ª specie** negli altri casi.

Def: $f : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, si dice che f è prolungabile con continuità in x_0 e il suo prolungamento è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

21.2 Discontinuità delle funzioni monotone

$f : A \to \mathbb{R}$ monotona crescente, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pt. di accumulazione di A. Allora

1. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{ f(x) : x \in A, x > x_0 \}$
2. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{ f(x) : x \in A, x < x_0 \}$

Corollario: $-\infty < \lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x) < +\infty \implies$ tutte le discontinuità di una funz. monotona sono a salto.

Def: $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in A (o su A) se è continua per ogni $x \in A$.
$\mathscr{C}^0(A)$ è l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ continue su A.

Teorema di permanenza del segno: se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ e $f(x_0) > 0$, allora $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) > 0\ \forall\, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Teorema degli zeri: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

> Se i limiti inf e sup hanno segno opposto, la funzione si annulla in almeno un punto.

Teorema dei valori intermedi: (corollario del teo. degli zeri) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ (oppure $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$) allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \lambda$.
Corollario: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue tali che $f(a) < g(a)$ e $g(b) < f(b)$ allora

$\exists\, c \in (a, b)$ tale che $f(c) = g(c)$

22 Studio locale di funzioni

L'obiettivo è capire come è fatta una funzione (cioè come è fatto il suo grafico) vicino ad un punto x_0.

$\mathscr{C}^k(A)$ sono funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ derivabili k volte in ogni punto di A e tali che la derivata k-esima sia continua.

Primo teorema di monotonia: sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$, con $f'(x_0) > 0$, allora $\exists\, \delta > 0$ tale che

- $f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$
- $f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1000 \cdot x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1. $f(x) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ continua
2. f è derivabile in $x = 0$ ($f'(0) = 1$)
3. f è derivabile anche in $x \neq 0$ (ma $\lim_{x\to 0} f'(x)$ N.E.) dunque $f(x) \notin \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ perchè la derivata non è continua
4. $f'(0) = 1 > 0 \implies$ per il teo di monotonia *1.*, $\exists\, \delta > 0$ tale che
   - $f(x) > 0$ se $0 < x < \delta$
   - $f(x) < 0$ se $-\delta < x < 0$

$f(x)$ non è crescente in nessun intervallo contenente 0.

Variante ovvia: se $f'(x_0) < 0$ allora $\exists\, \delta > 0$ tale che

- $f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$
- $f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Invece se $f'(x_0) = 0$ abbiamo 5 possibilità:

1. **Minimo locale:** $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$
2. **Massimo locale:** $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leq f(x_0)$
3. **Flesso ascendente a tangente orizzontale:** $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$
4. **Flesso discendente a tangente orizzontale:** $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$
5. **Nessuna delle precedenti**

Criterio delle derivate successive: se $f'(x_0) = 0$ cerco la prima derivata che non si annulla in x_0.
Se esiste $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ tale che $f(x)$ è derivabile k volte in x_0 e $f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ ma $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ allora

1. Se k è *pari* e $f^{(k)}(x_0) > 0 \implies$ **minimo locale**
2. Se k è *pari* e $f^{(k)}(x_0) < 0 \implies$ **massimo locale**
3. Se k è *dispari* e $f^{(k)}(x_0) > 0 \implies$ **flesso ascendente a tangente orizzontale**
4. Se k è *dispari* e $f^{(k)}(x_0) < 0 \implies$ **flesso discendente a tangente orizzontale**

Il caso *5.* può succedere solo se $f^{(k)}(x_0) = 0\ \forall\, k \geq 2$ oppure se f ammette di essere derivabile prima di trovare una derivata $\neq 0$.

> La dimostrazione viene lasciata come esercizio al lettore.

Dunque $f(x)$ si comporta come il primo termine non banale del proprio sviluppo di Taylor.

Esempio: $\sin(x^{200}) = x^{200} + o(x^{200}) \implies x = 0$ è un minimo locale.

Esempio: $e^{\tan(x^2)} = 1 + \tan(x^2) + o(\tan(x^2)) = 1 + x^2 + o(x^2) \implies x = 0$ è un minimo locale.

23 Massimi e Minimi

$$f : A \to \mathbb{R}$$

- Il **massimo** di f su A è $M = \max_A f = \max\{ f(x) \mid x \in A \}$
- Il **minimo** di f su A è $m = \min_A f = \min\{ f(x) \mid x \in A \}$
- Il **punto di massimo** è $x \in A$ tale che $f(x) = M$
- Il **punto di minimo** è $x \in A$ tale che $f(x) = m$

Oss: massimo e minimo di f su A se esistono sono unici, mentre i punti di massimo e di minimo possono essere quanti vogliono.

23.1 Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continua**, allora f ammette massimo e minimo su $[a, b]$ (*non (a, b)!*).

23.2 Ricerca dei punti di Max/Min

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Per W. so che esistono $\max$ e $\min$. I punti di massimo e minimo vanno cercati in 3 tipologie:

- **Stazionari interni:** $x_0 \in (a, b)$ tali che $f'(x_0) = 0$
- **Singolari interni:** $x_0 \in (a, b)$ tali che f non è derivabile in x_0
- **Bordo:** $x_0 = a, x_0 = b$

23.3 Teorema di Fermat

$f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0, x_0 punto di massimo o minimo locale, allora $f'(x_0) = 0$.

23.4 Teorema di Rolle

Teorema di Rolle: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

1. $f(x)$ continua su $[a, b]$
2. $f(x)$ derivabile su (a, b)

3. $f(a) = f(b)$

Allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dim:

1. Per *1.*, grazie al teo. di Weierstrass, $f(x)$ ha un massimo e un minimo in $[a, b]$. Siano x_1 pt. di massimo e x_2 pt. di minimo.
2. Per *2.*, non ci sono pt. singolari $\implies$ se uno dei due punti è interno ad (a, b), abbiamo trovato c.
3. Altrimenti, x_1, x_2 sono estremi di $[a, b]$, ma allora per *3.*, $f(x_1) = f(x_2) \implies f$ è costante $\implies \forall\, c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$.

Oss:

1. c non è detto che sia unico
2. f deve essere derivabile su tutto (a, b)

23.5 Teorema di Cauchy

Teorema di Cauchy: siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che

1. f, g continue su $[a, b]$
2. f, g derivabili su (a, b)

allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che

$$(f(a) - f(b)) \cdot g'(c) = (g(a) - g(b)) \cdot f'(c)$$

Se inoltre

3. $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a, b)$

allora

$$g(a) \neq g(b) \text{ e } \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dim: considero la funzione

$$\varphi(x) = (f(a) - f(b)) \cdot g(x) - (g(a) - g(b)) \cdot f(x)$$

allora

1. $\varphi(x)$ è continua su $[a, b]$
2. $\varphi(x)$ è derivabile su (a, b)
3. $\varphi(a) = \varphi(b) \implies$ per Rolle $\exists c \in (a, b)$ tale che $\varphi'(c) = 0 \implies \exists c \in (a, b)$ tale che $(f(a) - f(b)) \cdot g'(c) - (g(a) - g(b)) \cdot f'(c) = 0$ ovvero $(f(a) - f(b)) \cdot g'(c) = (g(a) - g(b)) \cdot f'(c)$

Se poi $g'(a) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$, allora per Rolle $g(a) \neq g(b) \implies$

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

23.6 Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

1. $f(x)$ continua su $[a, b]$
2. $f(x)$ derivabile su (a, b)

allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$

23.7 Teorema di monotonia 2

Secondo teorema di monotonia: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b). Allora

1. f debolmente crescente su $[a, b] \implies f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$
2. $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b) \implies f$ debolmente crescente su $[a, b]$
3. $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b) \implies f$ strettamente crescente su $[a, b]$

Oss:

1. Stessa cosa con deb./strett. decrescente e $f'(x) < 0/f'(x) \leq 0$
2. f può essere strettamente crescente, ma avere punti a derivata nulla

23.8 Teorema de L'Hopital

Teorema de L'Hopital: ha vari casi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a seconda che $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm\infty$, o a seconda della forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right], \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right], \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right], \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]$.

24 Studio globale di funzione

Tracciare un grafico approssimativo di una funzione $f(x)$ ottenuta da funzioni elementari, per studiarne proprietà qualitative.

Esempio: $f(x) = \frac{e^x}{x}$

1. **Insieme di definizione e simmetrie**

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ insieme di definizione e non ha particolare simmetrie.

2. **Continuità e limiti**

$f(x)$ è rapporto di funzioni continue, quindi è continua dove è definita. $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ per gerarchia}$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0^- \text{ per teo algebrici}$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ per teo algebrici}$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty \text{ per teo algebrici}$$

3. **Segno e zeri**

Risolvo se possibile $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.

$$f(x) > 0 \quad \text{se } x > 0$$
$$f(x) = 0 \quad \text{mai}$$
$$f(x) < 0 \quad \text{se } x < 0$$

4. **Derivata e monotonia**

$f(x)$ è rapporto di funzioni derivabili $\implies$ è derivabile dove definita.

$$f'(x) = e^x \frac{(x-1)}{x^2}$$

Calcolando la positività della derivata trovo crescenza, decrescenza e minimi/massimi locali.

$f(1) = e$ minimo locale.

Applicazioni:

- $\inf/\sup/\max/\min$ di $f([a,b])$ o di $f^{-1}([a,b])$
- Trattare graficamente equazioni/disequazioni
- *Passare Analisi I*

Altre info utili nello studio di funzione:

- Asintoti
- Convessità/concavità/flessi
- $\max/\min$ locali e globali

24.1 Punti di non derivabilità

Se $f(x)$ è continua in x_0, ma non derivabile, possono succedere varie cose, tra cui

1. $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_1$, $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_2$ e $m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1 \neq m_2 \implies$ x_0 è detto **punto angoloso**
2. $\lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = +\infty$ (*oppure* $-\infty$) $\implies$ x_0 è detto **flesso a tangente verticale**
3. $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \pm\infty$, $\lim_{h\to0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mp\infty \implies$ x_0 è detto **punto di cuspide**

25 Asintoti

25.1 Asintoti orizzontali

Una retta $y = k$ è un **asintoto orizzontale** di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$.

È invece un asintoto orizzontale di $f(x)$ per $x \to -\infty$ se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$.

> **Oss:** ci possono essere al più 2 asintoti orizzontali, che si trovano calcolando i limiti di $f(x)$ a $\pm\infty$.

25.2 Asintoti verticali

Una retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale** di $f(x)$ se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

> **Oss:** $f(x)$ può avere quanti asintoti verticali vuole, ma tutti nei punti di discontinuità oppure agli estremi *finiti* dell'insieme di definizione.

25.3 Asintoti obliqui

$y = mx + q$ è un **asintoto obliquo** di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0$$

Stessa cosa per $x \to -\infty$.

Per trovare m e q:

1. $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
2. $q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$

Oss:

- $m = 0$ è l'asintoto orizzontale
- Gli asintoti obliqui sono incompatibili con asintoti orizzontali
- È possibile che esista m ma non q, allora niente asintoto obliquo
- Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, posso applicare L'Hopital, dunque $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$ se questo esiste. Posso trovare i candidati m facendo il limite della derivata.
- $y = mx + q$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se e solo se $f(x) = mx + q + o(1)$ per $x \to +\infty$

