

---

# **Appunti di Analisi I**

Analisi Matematica (prof. Mongodi) - CdL Informatica  
Unimib - 23/24

Federico Zotti

11 Dec 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Insiemi</b>	<b>6</b>
1.1	Notazione . . . . .	6
1.2	Prodotto cartesiano . . . . .	6
1.3	Insieme delle parti . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Funzioni</b>	<b>7</b>
2.1	Funzioni Iniettive e Suriettive . . . . .	8
2.2	Immagine e controimmagine . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Numeri Reali</b>	<b>9</b>
3.1	Insiemi numerici . . . . .	9
3.2	Proprietà dei numeri reali . . . . .	9
3.2.1	Algebriche . . . . .	10
3.2.2	Di Ordinamento . . . . .	10
3.2.3	Assioma di Continuità . . . . .	10
3.3	Sottoinsiemi dei reali . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo</b>	<b>11</b>
4.1	Estremo superiore ed Estremo inferiore . . . . .	12
4.1.1	Caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$ . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Funzioni reali</b>	<b>13</b>
5.1	Grafici, Iniettività e Suriettività . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Funzioni elementari</b>	<b>15</b>
6.1	Potenze pari . . . . .	15
6.2	Potenze dispari . . . . .	15
6.3	Esponenziali . . . . .	16
6.4	Funzioni trigonometriche . . . . .	16
6.4.1	Seno . . . . .	16
6.4.2	Coseno . . . . .	17
6.4.3	Tangente . . . . .	17

<b>7</b>	<b>Trasformazione di grafici</b>	<b>17</b>
<b>8</b>	<b>Successioni</b>	<b>18</b>
8.1	Terminologia . . . . .	18
8.2	Successioni a valori reali . . . . .	18
8.3	Limite di una successione . . . . .	19
8.4	Teorema di unicità del limite . . . . .	20
8.5	Limitatezza delle successioni convergenti . . . . .	20
8.6	Teorema di permanenza del segno . . . . .	20
8.7	Retta reale estesa . . . . .	21
8.8	Teoremi algebrici . . . . .	21
8.9	Teoremi di confronto . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Tecniche di calcolo dei limiti</b>	<b>23</b>
9.1	Disuguaglianza di Bernoulli . . . . .	23
9.2	Dimostrazione teorema del confronto a 2 . . . . .	24
<b>10</b>	<b>Criterio del rapporto &amp; Criterio della radice</b>	<b>24</b>
10.1	Criterio del rapporto . . . . .	24
10.2	Criterio della radice . . . . .	25
10.3	Fattoriale . . . . .	25
10.4	Gerarchia degli infiniti . . . . .	26
10.5	Criterio del rapporto-radice . . . . .	26
10.6	Dimostrazione del criterio della radice . . . . .	28
<b>11</b>	<b>Principio di induzione</b>	<b>28</b>
11.1	Disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione) . . . . .	29
11.2	Coeff. binomiali . . . . .	30
<b>12</b>	<b>Successioni monotone</b>	<b>30</b>
<b>13</b>	<b>Successioni per ricorrenza</b>	<b>32</b>
<b>14</b>	<b>Serie numeriche</b>	<b>34</b>
14.1	Definizione SBAGLIATA . . . . .	34

14.2	Definizione CORRETTA . . . . .	35
14.3	Carattere di una serie (comportamento) . . . . .	35
14.4	Serie telescopiche . . . . .	35
14.5	Serie geometriche . . . . .	36
14.6	Strumenti per lo studio delle serie . . . . .	37
14.6.1	Teoremi algebrici . . . . .	37
14.6.2	Condizione necessaria . . . . .	38
14.6.3	Serie note . . . . .	38
14.6.4	Serie a termini di segno costante . . . . .	39
14.6.5	Assoluta convergenza per serie a termini di segno variabile . . . .	45
14.6.6	Criterio di Leibniz per serie a termini alterni . . . . .	45
<b>15</b>	<b>Limiti di Funzione</b>	<b>46</b>
15.1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . . . . .	46
15.2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . . . . .	47
15.3	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . . . . .	47
15.3.1	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ . . . . .	48
15.3.2	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ . . . . .	48
15.4	Note tecniche . . . . .	48
15.5	Caratterizzazione del limite per successioni . . . . .	49
<b>16</b>	<b>Tecniche di Calcolo dei Limiti</b>	<b>49</b>
16.1	Continuità . . . . .	50
16.1.1	Come trovare funzioni continue . . . . .	50
16.2	Limiti notevoli . . . . .	50
16.2.1	Patriarchi . . . . .	50
16.2.2	Prima generazione . . . . .	50
16.2.3	Seconda generazione . . . . .	51
16.3	Cambi di variabile . . . . .	51
<b>17</b>	<b>O-piccolo e Equivalenza asintotica</b>	<b>51</b>
17.1	Proprietà algebriche degli o-piccoli . . . . .	52
17.2	Transitività degli o-piccoli . . . . .	52

17.3 Limiti notevoli espressi in o-piccoli . . . . .	53
17.4 Equivalenza asintotica . . . . .	53
<b>18 Differenziabilità e Derivabilità</b>	<b>53</b>
18.1 Esempi di non derivabilità . . . . .	55
18.2 Derivate delle funzioni elementari . . . . .	55
<b>19 Regole di derivazione</b>	<b>56</b>
19.1 Derivata della composizione . . . . .	57
19.2 Derivata della funzione inversa . . . . .	57
19.3 Trucco dell'esponenziale . . . . .	58
19.4 Teorema di L'Hopital . . . . .	58
<b>20 L'Hopital e Taylor</b>	<b>59</b>
20.1 Esempi di applicazione del teo. di L'Hopital . . . . .	59
20.2 Formula di Taylor con centro in $x_0 = 0$ . . . . .	59
20.3 Sviluppi di Taylor . . . . .	60
20.4 Taylor con centro qualsiasi . . . . .	61
<b>21 Funzioni continue</b>	<b>62</b>
21.1 Tipi di discontinuità . . . . .	62
21.2 Discontinuità delle funzioni monotone . . . . .	63
<b>22 Studio locale di funzioni</b>	<b>64</b>
<b>23 Massimi e Minimi</b>	<b>66</b>
23.1 Teorema di Weierstrass . . . . .	66
23.2 Ricerca dei punti di Max/Min . . . . .	66
23.3 Teorema di Fermat . . . . .	66
23.4 Teorema di Rolle . . . . .	66
23.5 Teorema di Cauchy . . . . .	67
23.6 Teorema di Lagrange . . . . .	68
23.7 Teorema di monotonia 2 . . . . .	68
23.8 Teorema de L'Hopital . . . . .	69

<b>24 Studio globale di funzione</b>	<b>69</b>
24.1 Punti di non derivabilità . . . . .	70
<b>25 Asintoti</b>	<b>71</b>
25.1 Asintoti orizzontali . . . . .	71
25.2 Asintoti verticali . . . . .	71
25.3 Asintoti obliqui . . . . .	71
<b>26 Taylor con resto di Lagrange</b>	<b>72</b>
26.1 Utilità . . . . .	73
26.1.1 Approssimazioni . . . . .	73
26.1.2 Confrontare la funzione con il suo sviluppo di Taylor . . . . .	73
<b>27 Convessità</b>	<b>74</b>
27.1 Convessità geometrica . . . . .	74
27.2 Definizione analitica . . . . .	74
<b>28 Integrali definiti</b>	<b>76</b>
28.1 Integrale proprio . . . . .	76
28.2 Convenzioni . . . . .	76
28.3 Cos'è l'integrale . . . . .	76
<b>29 Proprietà dell'integrale e Funzioni integrabili</b>	<b>78</b>
29.1 Proprietà dell'integrale . . . . .	78
29.2 Criterio di integrabilità . . . . .	78
<b>30 Teoremi fondamentali del calcolo integrale</b>	<b>79</b>
30.1 Procedura di calcolo per gli integrali definiti . . . . .	79

# 1 Insiemi

## 1.1 Notazione

Per *elenco*: Prima operazione, poi insieme di partenza

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$B = \{ n^2 \mid n \text{ naturale} \}$$

Per *proprietà*: Prima insieme che scelgo, poi la proprietà che verifico

$$C = \{ n \text{ naturale} \mid n \text{ è un quadrato} \}$$

Altri simboli:

appartiene  $\rightarrow a \in A$

non appartiene  $\rightarrow a \notin A$

è sottoinsieme  $\rightarrow A \subseteq B$

è sottoinsieme stretto  $\rightarrow A \subset B$

insieme vuoto  $\rightarrow \emptyset$

unione  $\rightarrow A \cup B \mid \vee$

intersezione  $\rightarrow A \cap B \mid \wedge$

sottrazione  $\rightarrow A \setminus B$

cardinalità  $\rightarrow |A|$

## 1.2 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , il loro **prodotto cartesiano** è l'insieme delle coppie  $(a, b)$  con  $a \in A, b \in B$ .

Si indica con  $A \times B$ .

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

**Es:**

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$A \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$

### 1.3 Insieme delle parti

Dato  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$  è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $A$ .

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

**Es:**

$$A = \{ 1, 2 \}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, A, \{ 1 \}, \{ 2 \} \}$$

## 2 Funzioni

Come si descrive una funzione:

1. Un insieme di partenza ( $A$ ) (*dominio*);
2. Un insieme di arrivo ( $B$ ) (*codominio*);
3. Una serie di regole che ad ogni elemento di  $A$  associa un **unico** elemento di  $f(a) \in B$ .

$$f : A \rightarrow B$$

Il grafico di una funzione è:

$$g = \{ (a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A \}$$

$$= \{ (a, b) \in A \times B \mid b = f(a) \}$$



## 2.1 Funzioni Iniettive e Suriettive

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione.

- $f$  si dice **iniettiva** se manda elementi distinti di  $A$  in elementi distinti di  $B$ .

$$a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ovvero se

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- $f$  si dice **suriettiva** se ogni elemento di  $B$  è ottenuto da almeno un elemento di  $A$  tramite  $f$ .

$$\forall b \in B \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Una funzione si dice **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

**Teo:** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione  $g : B \rightarrow A$  t.c.:

$$g(f(a)) = a \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \forall b \in B$$

**Oss:**

$$f : A \rightarrow B$$

- è iniettiva se ogni elemento di  $B$  è ottenuto da al più un elemento di  $A$  tramite  $f$ ;
- è suriettiva se ogni elemento di  $B$  è ottenuto da almeno un elemento di  $A$  tramite  $f$ .

## 2.2 Immagine e controimmagine

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione.

- Se  $b = f(a)$  con  $a \in A, b \in B$ , si dice che  $b$  è *immagine di  $a$  tramite  $f$* ;
- Sia  $C \subseteq A$  un sottoinsieme, si dice *immagine di  $C$*  tramite  $f$  l'insieme degli elementi di  $B$  che sono immagine di elementi di  $C$ .  $f(C) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$
- Immagine di  $A$ :  $f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$
- Sia  $D \subseteq B$  un sottoinsieme, si dice *controimmagine di  $D$*  tramite  $f$  l'insieme di tutti gli elementi di  $A$  che hanno immagine contenuta in  $D$ .
- Controimmagine di  $D$ :  $f^{-1}(D) = \{ a \in A : f(a) \in D \}$  (definita anche se  $f$  non è invertibile).

## 3 Numeri Reali

### 3.1 Insiemi numerici

- **Naturali:**  $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- **Razionali:**  $\mathbb{Z} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \} \}$
- **Reali:**  $\mathbb{R}$
- **Irrazionali:**  $\mathbb{Q}$
- **Complessi:**  $\mathbb{C}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

### 3.2 Proprietà dei numeri reali

Sono di tre tipi:

- Algebriche;
- Di Ordinamento;
- Assioma di Continuità.

### 3.2.1 Algebriche

Sui numeri reali sono definite due operazioni  $+$  e  $\cdot$ , dette somma e prodotto, con le seguenti proprietà:

- Relative alla somma:
  - **Commutativa:**  $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (n, z, q, r, c)$
  - **Associativa:**  $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (n, z, q, r, c)$
  - **Elemento neutro somma:**  $\exists 0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (n, z, q, r, c)$
  - **Esistenza dell'inverso:**  $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a + b = 0 \quad (z, q, r, c)$
- Relative al prodotto:
  - **Commutativa:**  $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (n, z, q, r, c)$
  - **Associativa:**  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (n, z, q, r, c)$
  - **Elemento neutro prodotto:**  $\exists 1 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (n, z, q, r, c)$
  - **Esistenza dell'inverso:**  $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot b = 1 \quad (q, r, c)$
- **Distributiva:**  $a \cdot (b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (n, z, q, r, c)$

### 3.2.2 Di Ordinamento

Dati due numeri reali  $x$  e  $y$ , si ha sempre che  $x \geq y$  oppure  $x \leq y$ . Tale ordinamento ha le proprietà:

- **Riflessiva:**  $x \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Antisimmetrica:** se  $x \geq y \wedge y \geq x$ , allora  $x = y$
- **Transitiva:** se  $x \geq y \wedge y \geq z$ , allora  $x \geq z$
- se  $x \geq y$ , allora  $x + z \geq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$
- se  $x \geq y$ , allora  $x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{R} \text{ con } z \geq 0$

Queste valgono in  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , ma non in  $\mathbb{C}$ .

### 3.2.3 Assioma di Continuità

Dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  sottoinsiemi diversi da  $\emptyset$ . Diciamo che  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$  se  $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$ .

L'assioma di continuità dice che se  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$  allora esiste almeno un  $c \in \mathbb{R}$  t.c.  $c \geq a \forall a \in A; c \leq b \forall b \in B$ .

$c$  non è obbligato ad essere unico;  $c$  può appartenere ad  $A$ , a  $B$  o anche a entrambi (in questo caso è unico elemento "separatore").

**Es:**

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 > 2 \}$$

$$\text{se } a \in A, b \in B \rightarrow a < b$$

$$c^2 = 2$$

Questo è impossibile in  $\mathbb{Q}$ , quindi l'assioma di continuità non vale in  $\mathbb{Q}$ .

Conclusione: sui numeri reali,  $\sqrt{2}$  è l'elemento separatore tra  $A$  e  $B$  e si può dimostrare che è unico.

### 3.3 Sottoinsiemi dei reali

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  è l'intervallo separato da estremi  $a, b \in \mathbb{R}$  (con  $a < b$ ).

- $]a, b[ = (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b \}$
- $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b \}$

## 4 Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme *non vuoto*.

$M \in \mathbb{R}$  si dice **maggiorante** di  $A$  se  $M \geq a \forall a \in A$

$m \in \mathbb{R}$  si dice **minorante** di  $A$  se  $m \leq a \forall a \in A$

Minoranti e maggioranti non sono obbligati ad esistere. Ad esempio  $A = \mathbb{N}$  ha minoranti ma non ha maggioranti.

Se esiste un maggiorante invece, ne esistono infiniti. Se  $M$  è un maggiorante, anche  $M + 1$  lo è. Lo stesso vale per i minoranti.

$A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  si dice **superiormente limitato** se ammette un maggiorante e **inferiormente limitato** se ammette un minorante. Si dice **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

**Es:**

- $A = (0, +\infty)$  è inferiormente limitato ma non superiormente
- $B = \{ \frac{1-n}{2} : n \in \mathbb{N} \}$  è superiormente limitato, ma non inferiormente
- $C = (1, 7]$  è limitato

$M \in \mathbb{N}$  si dice **massimo** di  $A$  (e si scrive  $M = \max A$ ) se  $M \in A \wedge M \geq a \forall a \in A$   
 $m \in \mathbb{N}$  si dice **minimo** di  $A$  (e si scrive  $m = \min A$ ) se  $m \in A \wedge m \leq a \forall a \in A$

max e min non sono obbligati ad esistere, nemmeno per insiemi limitati.

**Es:**

- $A = (0, 1)$  non ha né max, né min

max e min, se esistono, sono **unici**.

#### 4.1 Estremo superiore ed Estremo inferiore

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ .

Si dice che  $\sup A = +\infty$  se  $A$  non è superiormente limitato o  $\sup A = L \in \mathbb{R}$  se lo è e  $L$  è il minimo dei maggioranti.

Si dice che  $\inf A = -\infty$  se  $A$  non è inferiormente limitato o  $\inf A = l \in \mathbb{R}$  se lo è e  $l$  è il massimo dei minoranti.

**Es:**

- $\sup \mathbb{N} = +\infty$
- $\inf \mathbb{N} = 0$
- $\sup (0, 1) = 1$

**Teo:** Se  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  è superiormente limitato, allora il minimo dei maggioranti esiste.

**Dim:** Sia  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \forall a \in A\}$  l'insieme dei maggioranti. Allora  $A$  sta tutto a sinistra di  $B$ . Per l'*assioma di continuità* c'è un elemento separatore  $c \in \mathbb{R}$ , ovvero  $c \leq b \forall b \in B$  e  $c \geq a \forall a \in A \implies c \in B$ . Quindi  $c = \min B$ .

**Esercizio per casa** #todo-compito: Enunciare e dimostrare il teorema analogo per il massimo dei minoranti.

#### 4.1.1 Caratterizzazione di inf e sup

- $\sup A = +\infty$  se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$  t.c.  $a \geq M$  (*ovvero se posso trovare elementi di  $A$  grandi quanto voglio*)
- $\inf A = -\infty$  se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$  t.c.  $a \leq M$
- $\sup A = L \in \mathbb{R}$  se
  - $a \leq L \forall a \in A$  ( *$L$  è un maggiorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$  t.c.  $a \geq L - \varepsilon$
- $\inf A = L \in \mathbb{R}$  se
  - $a \geq L \forall a \in A$  ( *$L$  è un minorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$  t.c.  $a \leq L + \varepsilon$

Se esiste  $M = \max A$  allora  $\sup A = M$ . Se esiste  $m = \min A$  allora  $\inf A = m$ .  $\sup A$  non è obbligato ad appartenere ad  $A$ , ma se vi appartiene è il **massimo**. Stessa cosa per  $\inf A$ .

## 5 Funzioni reali

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oppure  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Grafico di  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$  ( $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

Proprietà di simmetria:

- $f$  si dice **pari** se  $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$  (*simmetrica rispetto all'asse  $y$* )
- $f$  si dice **dispari** se  $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$  (*simmetrica rispetto all'origine*)

- $f$  si dice **periodica** se  $\exists T > 0$  t.c.  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  (*il grafico si ottiene traslando il pezzo  $[0, T]$  in  $[T, 2T]$ ,  $[T, 3T]$ , ...*)

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è dispari, allora  $f(0) = 0$ .

Se  $T$  è un periodo, anche  $2T, 3T, 4T, \dots$  lo sono. Il **minimo periodo** è il più piccolo  $T$  (se esiste) per cui vale  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Proprietà di **monotonia**:

- $f$  si dice **strettamente crescente** se  $x > y \implies f(x) > f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $f$  si dice **strettamente decrescente** se  $x > y \implies f(x) < f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $f$  si dice **debolmente crescente** se  $x > y \implies f(x) \geq f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $f$  si dice **debolmente decrescente** se  $x > y \implies f(x) \leq f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$

Se  $f$  è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente. Se  $f$  è strettamente decrescente allora è anche debolmente decrescente.

Se  $f$  è sia deb. crescente che deb. decrescente allora è **costante**.

## 5.1 Grafici, Iniettività e Suriattività

- Suriattiva  $\iff$  in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *almeno* una freccia (*tutto l'asse  $y$  è "coperto"*)
- Iniettiva  $\iff$  in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *al più* (0|1) una freccia (*l'asse  $y$  è "coperto" solo una volta*)
- Retta orizzontale:  $y = \lambda$
- Grafico di  $f$ :  $y = f(x)$
- Intersezioni:  $f(x) = \lambda$

$$f \text{ iniettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha al più una soluz. } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ suriettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha almeno una soluz. } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Se  $f$  è pari o periodica non è iniettiva. Se  $f$  è strettamente crescente o strettamente decrescente allora è iniettiva.

## 6 Funzioni elementari

### 6.1 Potenze pari

$$f(x) = x^{2k} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Con  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*non iniettiva o suriettiva*).
- Con  $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  (*iniettiva ma non suriettiva*)
- Con  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (*non iniettiva ma suriettiva*)
- Con  $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (*biunivoca*)

Quindi l'inverso è

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$g(x) = \sqrt{x^{2k}}$$

**Oss:**  $f(x) = x^{2k}$  è una funzione *pari*, strettamente crescente su  $[0, +\infty)$  e strettamente decrescente su  $[-\infty, 0)$ .

**Oss:** la funzione  $f(x) = |x|$  ha le stesse proprietà.

### 6.2 Potenze dispari

$$f(x) = x^{2k+1} \quad k \in \mathbb{N}$$

È una funzione dispari.

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*biunivoca*)

L'inverso è definito come

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sqrt{x^{2k+1}}$$

Vale lo stesso per  $f(x) = \frac{1}{x^k}$



[!warning] Confermare la funzione

| **Oss:**  $f(x) = x^{2k+1}$  è strettamente crescente su  $\mathbb{R}$ .

### 6.3 Esponenziali

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 1$$

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*iniettiva*)
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \log_a x$$

| **Ese:** fate lo stesso per  $f(x) = a^x$  con  $0 < a < 1$

| **Oss:** se  $a \in (0, 1)$  allora  $b = \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$ .

### 6.4 Funzioni trigonometriche

#### 6.4.1 Seno

$$f(x) = \sin x$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo minimo  $2\pi$  ed è dispari ( $\sin(-x) = -\sin x$ ).

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(x) = \arcsin x$$

**Oss:**  $\arcsin(\sin(\frac{3}{4}\pi)) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3}{4}\pi$

### 6.4.2 Coseno

$$f(x) = \cos x$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo minimo  $2\pi$  ed è pari ( $\cos x = \cos(-x)$ ).

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$g(x) = \arccos x$$

**Oss:**  $\arccos(\cos(\frac{3}{2}\pi)) \neq \frac{3}{2}\pi$

### 6.4.3 Tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo minimo  $\pi$  ed è dispari (*solo suriettiva*)
- $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  è dispari (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$g(x) = \arctan x$$

## 7 Trasformazione di grafici

Dato  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- *Simmetria* assiale rispetto all'asse  $x$ :  $y = -f(x)$

- **Simmetria** assiale rispetto all'asse  $y$ :  $y = f(-x)$
- **Traslazione** del vettore  $(0, c)$  (verso l'alto se  $c > 0$ ):  $y = f(x) + c$
- **Traslazione** del vettore  $(-c, 0)$  (verso sinistra se  $c > 0$ ):  $y = f(x + c)$
- **Compressione** verso l'asse  $x$  (dilatazione se  $c > 1$ ):  $y = f(x) \cdot c$
- **Dilatazione** verso l'asse  $y$  (compressione se  $c > 1$ ):  $y = f(x \cdot c)$
- **Ribaltamento** sull'asse  $x$ :  $y = |f(x)|$
- **Ribaltamento** sull'asse  $y$ :  $y = f(|x|)$

## 8 Successioni

### 8.1 Terminologia

Sia  $\mathcal{P}(n)$  una affermazione a proposito del numero  $n \in \mathbb{N}$ . Sarà vera o falsa a seconda del valore di  $n$ .

Diciamo che:

- $\mathcal{P}(n)$  è vera **frequentemente** se è vera per infiniti  $n \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{P}(n)$  è vera **definitivamente** se è vera “da un certo punto in poi”, cioè se  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $\mathcal{P}(n)$  è vera  $\forall n \geq n_0$

**Oss:** Definitivamente  $\implies$  Frequentemente.

**Es:**

1.  $n^2 \geq 1000$  è vera definitivamente
2.  $n^3$  è multiplo di 8 è vera frequentemente, ma non definitivamente
3.  $n + 1 \geq 3^n$  è falsa definitivamente

### 8.2 Successioni a valori reali

**Def rigida:** una successione a valori reali è una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Di solito, invece di scrivere  $a(n)$ , si scrive  $a_n$ .

**Oss:** così non è possibile considerare  $a_n = \frac{1}{n}$ .

**Def più elastica:** una successione a valori reali è una funzione  $a : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{N}$ , tale che  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  per cui  $\forall n \geq n_0, n \in A$  (tale che  $n \in A$  definitivamente).

### 8.3 Limite di una successione

Sia  $a_n$  una successione. Abbiamo 4 possibili comportamenti:

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$  ( $a_n \rightarrow \ell$ ;  $\ell \in \mathbb{R}$ )
2.  $\lim a_n = +\infty$  ( $a_n \rightarrow +\infty$ )
3.  $\lim a_n = -\infty$  ( $a_n \rightarrow -\infty$ )
4.  $\lim a_n$  non esiste ( $a_n$  è indeterminata)

#### Def:

- Una successione è di tipo **4.** se non è di nessun degli altri tipi
- Una successione è di tipo **2.** se  $\forall M \in \mathbb{R}, a_n \geq M$  definitivamente ( $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_n \geq M \forall n \geq n_0$ )
- Una successione è di tipo **3.** se  $\forall m \in \mathbb{R}, a_n \leq m$  definitivamente ( $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_n \leq m \forall n \geq n_0$ )
- Una successione è di tipo **1.** se
  - $\forall \varepsilon > 0, a_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$  definitivamente  $\vee$
  - $\forall \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$  definitivamente  $\vee$
  - $\forall \varepsilon > 0, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$  definitivamente

Varianti di **1.**:

- $a_n \rightarrow \ell^+$  tende a  $\ell$  da destra se  $\forall \varepsilon > 0, \ell < a_n \leq \ell + \varepsilon$  definitivamente
- $a_n \rightarrow \ell^-$  tende a  $\ell$  da sinistra se  $\forall \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n < \ell$  definitivamente

## 8.4 Teorema di unicità del limite

Una successione ricade sempre in uno e uno solo dei quattro tipi di comportamento.  
Se poi ricade nel tipo 1. ( $\ell \in \mathbb{R}$ ), il valore  $\ell$  è unico.

**Dim:** se  $a_n$  è di tipo 1. cioè  $a_n \rightarrow \ell$ , allora definitivamente  $\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$ .  $\ell - 1 \leq a_n$  implica che non può essere di tipo 3..  $a_n \leq \ell + 1$  implica che non può essere di tipo 2.. Inoltre se è di tipo 2., definitivamente si avrà  $a_n \geq 1$ . Se è di tipo 3., definitivamente si avrà  $a_n \leq -1$ . Queste condizioni non possono accadere insieme.

Infine, se  $a_n \rightarrow \ell_1, a_n \rightarrow \ell_2$  con  $\ell_1 \neq \ell_2$ , allora fisso  $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$ . Quindi  $a_n$  si ritrova in due intervalli contemporaneamente:  $\ell_1 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_1 + \varepsilon$  e  $\ell_2 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_2 + \varepsilon$ . Se  $\ell_1 < \ell_2$  allora  $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$ . Dunque  $a_n \leq \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon \leq a_n$  definitivamente. Questo è assurdo!

## 8.5 Limitatezza delle successioni convergenti

- Se  $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  allora  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è limitato
- Se  $a_n \rightarrow +\infty$  allora  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è inferiormente limitato
- Se  $a_n \rightarrow -\infty$  allora  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è superiormente limitato

*Dimostrazione nelle slide.* #view-slide

## 8.6 Teorema di permanenza del segno

- Se  $a_n \rightarrow \ell \in (0, +\infty)$  o se  $a_n \rightarrow +\infty$  allora  $a_n > 0$  definitivamente
- Se  $a_n \geq 0$  definitivamente e se  $a_n \rightarrow \ell$  allora  $\ell \geq 0$  oppure  $\ell = +\infty$

*Dimostrazione nelle slide* #view-slide

**Oss:** vale lo stesso risultato con i negativi.

- Se  $a_n \rightarrow \ell \in (-\infty, 0)$  o se  $a_n \rightarrow -\infty$  allora  $a_n < 0$  definitivamente
- Se  $a_n \leq 0$  definitivamente e se  $a_n \rightarrow \ell$  allora  $\ell \leq 0$  oppure  $\ell = -\infty$

## 8.7 Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- Posso scrivere  $a_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  per unificare i tipi 1., 2., 3.
- Le operazioni di  $\mathbb{R}$  si estendono a  $\overline{\mathbb{R}}$  *quasi bene*:

$$+x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$-x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{x}{+\infty} = 0$$

- Ci sono 2 eccezioni:

1. Le 7 forme indeterminate:

$$(+\infty) + (-\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$0^0$$

$$1^{\pm\infty}$$

$$(\pm\infty)^0$$

2. Le divisioni per 0

## 8.8 Teoremi algebrici

Siano  $a_n, b_n$  successioni,  $a_n \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}, b_n \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ , allora:

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2}$$

Con le dovute eccezioni di  $\infty$ .

## 8.9 Teoremi di confronto

Se  $a_n \leq b_n$  definitivamente, allora:

1. Se  $a_n \rightarrow a$  e  $b_n \rightarrow b$ , allora  $a \leq b$
2. Se  $a_n \rightarrow +\infty$ , allora  $b_n \rightarrow +\infty$
3. Se  $b_n \rightarrow -\infty$ , allora  $a_n \rightarrow -\infty$

Se  $a_n, b_n, c_n$  sono tali che  $a_n \leq b_n \leq c_n$  definitivamente e  $a_n \rightarrow \ell, c_n \rightarrow \ell$  (lo stesso  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ) allora  $b_n \rightarrow \ell$ . (*teorema del carabiniere*).

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \cos n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos n \geq -1 \implies n + \cos n \geq n - 1$$

Per il teorema del confronto a 2, visto che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = [+\infty - 1] = +\infty$ , ho che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \cos n = +\infty$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \sin n \leq \frac{1}{n}$$

E poiché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , per il teorema del confronto a 3  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ .

## 9 Tecniche di calcolo dei limiti

### Fatto N.1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty \quad \forall a > 0$$

### Fatto N.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0^+ \quad \forall a < 0$$

**Oss:**  $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{-a}} = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0^+$

Ricordare negli esercizi di scrivere *teoremi algebrici dove vengono usati*.

### 9.1 Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1 \quad \text{si ha} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

### Fatto N.3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \quad \forall a > 1$$

**Dim:**  $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) \rightarrow [1 + \infty(a-1)] = +\infty \Rightarrow a^n \rightarrow +\infty$  per il confronto a 2.

### Fatto N.4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad \forall 0 < a < 1$$

**Dim:**  $a = \frac{1}{b}$  con  $b > 1$  e  $b^n \rightarrow +\infty$  quindi  $a^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0^+$ .



**Fatto N.5**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 1$$

**Dim:**  $a^{\frac{1}{n}} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Finire la dim dalle slide #todo-uni .

**9.2 Dimostrazione teorema del confronto a 2**

Sappiamo che  $a_n \leq b_n$  definitivamente

1. Se  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ , vogliamo dimostrare che  $a \leq b$

Per assurdo, se  $b < a$ , posso scegliere  $\varepsilon > 0$  tale che  $\varepsilon < \frac{a-b}{2} \Rightarrow b + \varepsilon < a - \varepsilon$ .

Allora definitivamente  $a_n \geq a - \varepsilon$  e  $b_n \leq b + \varepsilon$ , quindi  $b_n \leq b + \varepsilon < a - \varepsilon \leq a_n$  definitivamente.

Ciò significa che  $b_n < a_n$ , il che è assurdo.

2. Se  $a_n \rightarrow +\infty, \forall M \in \mathbb{R}$ , ho  $a_n \geq M$  definitivamente  $\Rightarrow$  ho  $b_n \geq a_n \geq M$  definitivamente  $\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$ .

3. Uguale a 2..

**10 Criterio del rapporto & Criterio della radice****10.1 Criterio del rapporto**

Sia  $a_n$  una successione definitivamente positiva ( $> 0$ ). Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se  $\ell < 1, a_n \rightarrow 0$

2. se  $\ell > 1, a_n \rightarrow +\infty$
3. se  $\ell = 1, ??$

## 10.2 Criterio della radice

Sia  $a_n$  una successione definitivamente  $\geq 0$ . Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se  $\ell < 1, a_n \rightarrow 0$
2. se  $\ell > 1, a_n \rightarrow +\infty$
3. se  $\ell = 1, ??$

**Es:**  $a_n = \frac{n^3}{2^n}$  con i teo. algebrici ottengo  $[\frac{+\infty}{+\infty}]$ , quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{2}$$

per il criterio del rapporto  $a_n \rightarrow 0$ .

**Fatto N.6** (*Esponenziale batte potenza*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \forall b > 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

## 10.3 Fattoriale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

**Fatto N.7** (*Il fattoriale batte l'esponenziale*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \quad \forall b > 0$$

**\*\*Fatto \*N.7\*\***  $n^n$  batte il fattoriale.\*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

## 10.4 Gerarchia degli infiniti

1.  $n^n$
2.  $n!$
3.  $b^n$
4.  $n^a$
5.  $n$

**Attenzione:** nella gerarchia degli infiniti, dovete rispettare religiosamente le espressioni date.  $n!$  batte  $2^n$ , ma non so cosa fa con  $2^{(n^2)}$ .

## 10.5 Criterio del rapporto-radice

Supponiamo  $a_n > 0$  definitivamente e che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad (\text{stesso } \ell)$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = ?$

Applico il criterio rapporto-radice con  $a_n = n$ , che è definitivamente  $> 0$ . Ho che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = ?$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{a}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{1}{n}})^a = 1$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 - n^2 + 1} = ?$

Ha senso perché  $n^7 - n^2 + 1 \rightarrow +\infty \Rightarrow$  è definitivamente positiva per il teorema di permanenza del segno.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^7}} = 1 \cdot 1 = 1$$

#### Fatto N.8

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1 \quad \forall \text{ polinomio}$$

#### Fatto N.9

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = ?$

Metodo 1:  $\forall b > 1$  ho che  $n! > b^n$  (per il teo di permanenza del segno:  $\frac{b^n}{n!} \rightarrow 0 \Rightarrow$  definitivamente  $\frac{b^n}{n!} < 1 \Rightarrow b^n < n!$  definitivamente)  $\Rightarrow \sqrt[n]{n!} > b$  definitivamente  $\forall b > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$ .

Metodo 2:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$$

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = ?$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

**Oss:** per  $n$  molto grandi,  $n!$  assomiglia a  $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

**Es:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = ?$

Applico il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n!}} = \frac{(2^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \dots$$

## 10.6 Dimostrazione del criterio della radice

Supponiamo che  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell > 1$ , allora la media sarà un numero tra 1 e  $\ell$

$$1 < \frac{\ell + 1}{2} < \ell \implies \text{definitivamente } \sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell + 1}{2} \implies a_n \geq \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n$$

e poiché  $\frac{\ell+1}{2} > 1$ ,  $\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \rightarrow +\infty$ . Quindi per il confronto a 2, ho che  $a_n \rightarrow +\infty$ .

Se invece  $0 \leq \ell < 1$ , allora  $0 \leq \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies$  definitivamente  $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$ , inoltre  $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \implies 0 \leq a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$  definitivamente e  $0 < \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ , dunque, per il teo del confronto a 3,  $a_n \rightarrow 0$ .

## 11 Principio di induzione

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathcal{P}(n)$  = affermazione a prop. di  $n$  che può essere vera o falsa

**Es:**  $n^2 = n + 6$  (*definitivamente vera*)

- $n = 0$ : falsa
- $n = 1$ : falsa
- $n = 2$ : falsa
- $n = 3$ : vera!
- $n = 4$ : falsa
- $n = 5$ : falsa

| **Es:** se l'insieme  $A$  ha  $n$  elementi, allora  $\mathcal{P}(A)$  ha  $2^n$  elementi (*definitivamente vera*).

**Principio di induzione:** supponiamo di sapere che

1.  $\mathcal{P}(0)$  è vera (*passo base*)
2.  $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1) \forall n \geq 0$  (*passo induttivo*)

allora  $\mathcal{P}(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Es:** dimostrare che  $0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Dimostrazione per induzione:

1.  $n = 0 : 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \longrightarrow \text{vero}$
2. Ipotesi (passo  $n$ ) :  $0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Voglio dire che  $0 + 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .  
 $0 + 1 + \dots + (n+1) = 0 + 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

**Ese:** da fare a casa #todo-compito

1.  $0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2.  $0^3 + 1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

### 11.1 Disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1 \text{ si ha } (1+x)^n \geq 1+nx$$

**Dimostrazione per induzione su  $n$**

1. *Passo base:*

$$n = 0 \quad (1+x)^0 \geq 1 \quad \forall x > -1$$

$$n = 1 \quad (1+x)^1 \geq 1+x \quad \forall x \geq -1$$

2. *Passo induttivo:*

Ipotesi(passo  $n$ ):  $(1+x)^n \geq 1+nx$

Tesi(passo  $n+1$ ):  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1+nx+x+nx^2 = \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \longrightarrow \text{Vero!} \Rightarrow\end{aligned}$$

La disug è dimostrata  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1$

## 11.2 Coeff. binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$  è l'elemento in posizione  $k$  nella riga  $n$  del **triangolo di Tartaglia** (si conta da 0).

**Sviluppo del binomio:**

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j$$

## 12 Successioni monotone

Sia  $a_n$  una successione. Diciamo che  $a_n$  è

1. **strettamente crescente** se  $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$
2. **strettamente decrescente** se  $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$
3. **debolmente crescente** se  $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
4. **debolmente decrescente** se  $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$

**Oss:** similmente si definiscono i corrispondenti concetti per successioni definitivamente monotone.

**Teo delle successioni monotone:** sia  $a_n$  una successione *debolmente crescente*, allora  $a_n$  ha limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Più precisamente  $a_n \rightarrow \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Lo stesso vale

per le successioni debolmente decrescenti ( $a_n \rightarrow \inf \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ).

**Dim (caso crescente):**

**Primo caso:**  $\sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} = +\infty \implies \forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_{n_0} \geq M$ . Ma se la succ. è debolmente crescente  $\implies \forall n \geq n_0, a_n \geq a_{n_0} \geq M \implies a_n \rightarrow \infty$ .

**Secondo caso:**  $\sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} = \ell \in \mathbb{R} \implies$

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell$  ( $\ell$  è un maggiorante)
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \ell - \varepsilon \leq a_{n_0}$  ( $\ell$  è il minimo tra i maggioranti)

Ma  $a_n$  è debolmente crescente  $\implies \forall n \geq n_0$  ho che  $\ell - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq \ell \implies a_n \rightarrow \ell^-$

**Caso decrescente:** #todo-compito

**Oss:**

1. Se  $a_n$  è debolmente crescente e superiormente limitata, allora  $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$
2. Se  $a_n$  è definitivamente debolmente crescente (o decrescente) allora  $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$  (o  $\mathbb{R} \cup \{ -\infty \}$ ), ma non posso dire che  $\ell = \sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

**Es:** Sia  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Allora

1.  $2 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2.  $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3.  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Per il teo sulle successioni monotone,  $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  e  $2 \leq \ell \leq 3$ .



**Dim:**

1. Per Bernoulli:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
2.  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot \frac{1}{n^j} \rightarrow \text{guardare le slide}$
3.  $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow a_n \text{ è decrescente} \rightarrow \text{guardare le slide}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Es:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

**Es:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

### 13 Successioni per ricorrenza

Una successione per ricorrenza si presenta così:

- Un punto di partenza:  $a_0 = 2$
- Una regola per calcolare il valore di un elemento dati i precedenti:  $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{1}{n+2}$

Possono essere dimostrate per induzione.

**Es 1:**

$$\begin{cases} a_0 = 1 & (I) \\ a_n = n \cdot a_{n-1} & (II) \end{cases}$$

Se voglio calcolare  $a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot a_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$ .

In questo caso si ha  $a_n = n!$ .

**Es 2:**

$$\begin{cases} a_0 = 3 & (I) \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 & (II) \end{cases}$$

Calcolando un po' di valori trovo *guess*:  $a_n = 2^{n+1} + 1$ . Si può dimostrare per induzione:

- **P.B.:**  $n = 0$  per (I),  $a_0 = 3 = 2^{0+1} + 1$  (*Ok!*)
- **P.I.:** se  $a_n = 2^{n+1} + 1$  allora  $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{(n+1)+1} + 1$  (*Ok!*)

**Attenzione:** Poter trovare una formula esplicita per le successioni per ricorrenza è *rarissimo!*

**Terminologia:** una successione per ricorrenza che dipende dai  $k$  termini precedenti si dice di **ordine**  $k$ . Una successione per ricorrenza senza una dipendenza esplicita da  $n$  si dice **autonoma**.

Tratteremo quasi esclusivamente successioni per ricorrenza di ordine 1, autonome.

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

**Es 3:**

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = a_{n-1}^2 - 1 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = f(a_{n-1})$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

Intersezioni con la bisettrice  $y = x$ :  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

**Guess:** la successione è crescente e tende a  $+\infty$ .

**Strategia:**

1.  $a_n \geq 2 \quad \forall n \geq 0$
2.  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$
3.  $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
4.  $\ell = +\infty$

**Dim 3.:** segue dal punto 2. per il teo sulle successioni monotone.

**Dim 4.:** Se  $\ell \in \mathbb{R}$ , allora posso passare al limite la relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 - 1 \\ \Rightarrow \ell &= \ell^2 - 1 \\ \Rightarrow \ell &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ oppure } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Ma  $a_n \geq 2 \quad \forall n$  (per 1.)  $\Rightarrow \ell \geq 2$  (permanenza del segno)  $\Rightarrow$  nessuno dei valori trovati è accettabile  $\Rightarrow \ell = +\infty$ .

**Dim 1.:**  $a_n \geq 2 \quad \forall n$ . Per induzione:

- **P.B.:**  $a_n = 2 \geq 2$  (Ok!)
- **P.I.:** se  $a_n \geq 2$ , allora  $a_{n+1} = a_n^2 - 1 \geq 4 - 1 = 3 \geq 2$  (Ok!)

**Dim 2.:**  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$ . Per induzione:

- **P.B.:**  $a_1 = a_0^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \geq a_0$  (Ok!)
- **P.I.:** se  $a_n \leq a_{n+1}$ , allora  $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$  perché  $f(x) = x^2 - 1$  è crescente su  $[0, +\infty)$ .

Quindi  $a_n \rightarrow +\infty$ .

## 14 Serie numeriche

### 14.1 Definizione SBAGLIATA

Data una successione  $a_n$ , indico con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la somma di tutti i termini della successione (che sono infiniti).

**Questo non ha senso**

## 14.2 Definizione CORRETTA

**Def:** data una successione  $a_n$ , dato  $k \in \mathbb{N}$ , la **somma parziale**  $k$ -esima di  $a_n$  è

$$S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

**Def:** una **serie numerica**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ( $\sum a_n$ ) è il limite della successione  $S_k$ , per  $k \rightarrow \infty$ .  
Cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)$$

## 14.3 Carattere di una serie (comportamento)

Essendo un limite,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ha 4 possibili comportamenti:

1. **Converge** a  $\ell \in \mathbb{R}$  se  $S_k \rightarrow \ell$
2. **Diverge** a  $+\infty$  se  $S_k \rightarrow +\infty$
3. **Diverge** a  $-\infty$  se  $S_k \rightarrow -\infty$
4. È **indeterminata** se  $S_k$  non ha limite

## 14.4 Serie telescopiche

**Es:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\bullet S_2 = a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- $S_3 = a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$
- $S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$
- $S_k = 1 - \frac{1}{k}$  (*dimostrato per induzione*)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = 1 \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} \text{ converge a } 1$$

## 14.5 Serie geometriche

La serie geometrica di ragione  $a \in \mathbb{R}$  è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

**Lemma:**  $a^0 + a^1 + \dots + a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$  se  $a \neq 1$

**Dim:**

$$\begin{aligned} (a^0 + a^1 + \dots + a^k) \cdot a &= a^1 + a^2 + \dots + a^{k+1} + \\ (a^0 + a^1 + \dots + a^k)(-1) &= -a^0 - a^1 - \dots - a^k = \\ (a^0 + a^1 + \dots + a^k)(a - 1) &= -a^0 + a^{k+1} \end{aligned}$$

Poiché  $a \neq 1$ , posso dividere ed ottengo il teo.

**Oss:** se  $a = 1$ ,  $a^0 + \dots + a^k = k + 1$ .

Dunque si ha

$$S_k = \begin{cases} k + 1 & \text{se } a = 1 \\ \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} & \text{se } a \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = ?$$

1. Se  $-1 < a < 1$  la serie converge a  $\frac{1}{1-a}$
2. Se  $a = 1$  vedere esempio 2.
3. Se  $a > 1$  diverge a  $+\infty$

4. Se  $a < -1$  non ha limite
5. Se  $a = -1$  vedere esempio stupido 4

*Dimostrazioni nelle slide* #view-slide

## 14.6 Strumenti per lo studio delle serie

Il problema è determinare il carattere di una serie senza poter ricavare un'espressione esplicita per le somme parziali. Per farlo abbiamo:

- Teoremi algebrici
- Condizione necessaria alla convergenza
- Serie “note”
- Criteri di convergenza
  - Serie a termini di segno costante ( $a_n \leq 0$  def. o  $a_n \geq 0$  def.)
    - ★ Radice
    - ★ Rapporto
    - ★ Confronto
    - ★ Confronto asintotico
    - ★ *Condensazione di Cauchy*
  - Serie a termini di segno alterno
    - ★ Leibniz
  - Serie a termini di segno qualunque
    - ★ Assoluta convergenza

### 14.6.1 Teoremi algebrici

1. Sia  $a_n$  una successione e sia  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ . Allora (*come operazione in  $\overline{\mathbb{R}}$* )

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ (come operazione in } \overline{\mathbb{R}})$$

2. Se  $a_n, b_n$  sono successioni, allora (*con tutte le attenzioni delle operazioni nella retta reale estesa*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

3. **Attenzione!**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

#### 14.6.2 Condizione necessaria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \implies a_n \rightarrow 0$$

**Dim:**  $a_n = S_n - S_{n-1}$ . Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge, allora  $S_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ . Quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \ell - \ell = 0$ .

Dunque se  $a_n$  non tende a 0, la serie non può convergere (può divergere o essere indeterminata). Se  $a_n \rightarrow 0$ , *potrebbe* convergere.

#### 14.6.3 Serie note

1. Serie geometriche
2. Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

3. Parenti dell'armonica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

#### 14.6.4 Serie a termini di segno costante

**Lemma:** sia  $a_n$  una successione def.  $\geq 0$ . Allora la successione  $S_k = (a_0 + \dots + a_k)$  delle somme parziali è def. debolmente crescente.

**Dim:**

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0, a_n \geq 0 \implies$$

$$\forall n \geq n_0, S_n = a_n + S_{n-1} \geq S_{n-1}$$

**Teo:** Se  $a_n$  è una succ. def.  $\geq 0$ , allora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ha due comportamenti possibili: converge o diverge a  $+\infty$ .

**Dim:** teo sulle successioni monotone applicato a  $S_k$ .

**Oss:** vale lo stesso risultato se  $a_n \leq 0$  def. In quel caso  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge oppure diverge a  $-\infty$ .

##### 14.6.4.1 Criterio della radice

Sia  $a_n \geq 0$  def. Supponiamo che  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Allora:

1. Se  $\ell > 1$  la serie diverge a  $+\infty$
2. Se  $\ell < 1$  la serie converge
3. Se  $\ell = 1$  ???

**Dim:** #view-slide

Se  $a_n \geq 0$  def. e  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , allora

1.  $\ell < 1 \iff \sum a_n$  converge
2.  $\ell > 1 \iff \sum a_n$  diverge a  $+\infty$

**Dim 2.:** se  $\ell > 1$ , per il criterio della radice per successioni,  $a_n \rightarrow +\infty$ . Quindi non è rispettata la condizione necessaria per la convergenza. Poiché la serie è a termini def.  $\geq 0$ , può solo convergere o divergere a  $+\infty$ . Dunque  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty$ .

**Dim 1.:**



$$\begin{aligned}
\ell < 1 &\implies \varepsilon = \frac{1-\ell}{2} \implies \ell + \varepsilon < 1 \text{ e } \varepsilon > 0 \\
\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 &\quad \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon < 1 \\
&\implies \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq (\ell + \varepsilon)^n < 1 \\
&\implies \forall k \geq n_0 \quad S_k = \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

Ho dimostrato che  $\exists M \in \mathbb{R}$  t.c.  $S_k \leq M$  def.. Ma poiché  $a_n \geq 0$  def.,  $S_k$  è una successione crescente  $\implies$  per il teo sulle successioni monotone,  $S_k \rightarrow L \in \mathbb{R} \implies \sum a_n$  converge.

#### 14.6.4.2 Criterio del rapporto

Sia  $a_n > 0$  def. Supponiamo che  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Allora:

1. Se  $\ell > 1$  la serie diverge a  $+\infty$
2. Se  $\ell < 1$  la serie converge
3. Se  $\ell = 1$  ???

#### 14.6.4.3 Confronto per serie numeriche

Siano  $a_n, b_n$  successioni.

**Def:** se  $0 \leq a_n \leq b_n$  def., allora:

1.  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty \implies \sum b_n$  diverge a  $+\infty$
2.  $\sum b_n$  converge  $\implies \sum a_n$  converge

**Occhio:** ogni altra implicazione è **ILLEGALE!**

**Dim:**

A meno di cambiare le serie per un *numero finito* di termini, posso supporre che la disuguaglianza  $0 \leq a_n \leq b_n$  valga per  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$S_k^a = a_0 + \dots + a_k \quad S_k^b = b_0 + \dots + b_k$$

allora  $0 \leq S_k^a \leq S_k^b \forall k \in \mathbb{N}$ .

1. Se  $S_k^a \rightarrow +\infty$ , per il confronto tra successioni,  $S_k^b \rightarrow +\infty$ . Ovvero, se  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty$ , allora  $\sum b_n$  diverge a  $+\infty$ .
2. Se  $\sum b_n$  converge, allora  $S_k^b \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ , ma  $b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies S_k^b$  è deb. crescente verso  $\ell \implies S_k^b \leq \ell \forall k \in \mathbb{N} \implies S_k^a \leq S_k^b \leq \ell \forall k \in \mathbb{N} \implies S_k^a$  deb. crescente e limitata  $\implies$  convergente.

#### 14.6.4.4 Confronto asintotico per serie numeriche

Siano  $a_n, b_n$  successioni con  $a_n \geq 0, b_n > 0$  def..

**Def:** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty) \quad [\ell \neq 0, \ell \neq +\infty]$$

allora  $\sum a_n, \sum b_n$  hanno lo *stesso comportamento*.

##### 14.6.4.4.1 Casi limite del confronto asintotico

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , allora  $0 \leq a_n \leq b_n$  def.  $\implies$  applico il confronto
  1.  $\sum a_n$  diverge a  $+\infty \implies \sum b_n$  diverge a  $+\infty$
  2.  $\sum b_n$  converge  $\implies \sum a_n$  converge
- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ , allora  $0 \leq b_n \leq a_n$  def.  $\implies$  applico il confronto
  1.  $\sum b_n$  diverge a  $+\infty \implies \sum a_n$  diverge a  $+\infty$
  2.  $\sum a_n$  converge  $\implies \sum b_n$  converge

##### 14.6.4.5 Esempi

**Es:**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$

$$a_n = \frac{1}{3^n+1} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

**Condizione necessaria:**  $\lim a_n = 0$

**Radice:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^{n+1}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{3^n}}} \\
 &= \frac{1}{3} \implies \sum a_n \text{ converge perchè } \ell < 1
 \end{aligned}$$

**Rapporto:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n+1} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3^{n+1}}} \\
 &= \frac{1}{3} \implies \sum a_n \text{ converge perchè } \ell < 1
 \end{aligned}$$

**Confronto:**  $0 \leq a_n = \frac{1}{3^{n+1}} \leq \frac{1}{3^n}$

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{1}{3^n} &\text{ è geometrica di ragione } \frac{1}{3} \implies \text{converge} \\
 \implies \sum \frac{1}{3^{n+1}} &\text{ converge per il confronto}
 \end{aligned}$$

**Confronto asintotico:**  $a_n = \frac{1}{3^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{3^n}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = 1 \in (0, +\infty) \\
 \implies \sum a_n, \sum b_n &\text{ hanno lo stesso comp. per il confr. asint.} \\
 \implies \sum b_n &\text{ converge perchè geom di rag. } \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**Es:**  $\sum \frac{3}{n^2+1}$

$$a_n = \frac{3}{n^2+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad a_n \rightarrow 0$$

**Occhio:** *radice* e *rapporto* sono inconcludenti ( $\ell = 1$ )!

**Confronto:**  $b_n = \frac{3}{n^2} \geq \frac{3}{n^2+1} = a_n$

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{3}{n^2} &= 3 \sum \frac{1}{n^2} \text{ è convergente (arm. gener.)} \\
 \implies \text{per il confr. anche } \sum a_n &\text{ converge}
 \end{aligned}$$

**Confronto asintotico:**  $b_n = \frac{3}{n^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} \\
&= 3 \in (0, +\infty) \\
&\Rightarrow \sum b_n \text{ e } \sum a_n \text{ hanno stesso carattere} \\
&\Rightarrow \sum a_n \text{ conv. perchè } \sum b_n \text{ conv.}
\end{aligned}$$

**Es:**  $\sum \frac{n^2-7}{n+1}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2}{n+1} > 0 \text{ definitivamente} \\
a_n \rightarrow +\infty &\Rightarrow \sum a_n \text{ diverge a } +\infty
\end{aligned}$$

**Es:**  $\sum \frac{n^3-8}{3^n}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^3-8}{3^n} > 0 \text{ definitivamente} \\
a_n \rightarrow +\infty &= 0
\end{aligned}$$

Confronto e confronto asintotico sono complicati da usare.

**Crit. del rapporto:**

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^3-8}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3-8}{n^3-8} \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3-8}{n^3-8} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{1-\frac{8}{(n+1)^3}}{1-\frac{8}{n^3}} \\
&= \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}
\end{aligned}$$

**Es:**  $\sum \frac{\cos^2(n)}{n^2}$

**Occhio:** radice e rapporto non funzionano. Confronto asintotico con  $\frac{1}{n^2}$  non funziona ( $\nexists \lim \cos^2(n)$ ).

$$a_n = \frac{\cos^2(n)}{n^2} \geq 0 \text{ def.}$$

$a_n \rightarrow 0$  per il teo del confr. a 3 :

$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

So che  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge (armonica generalizzata di esponente  $> 1$ ). Dunque per il confronto tra serie a termini positivi,  $\sum a_n$  converge.

**Es:**  $\sum \frac{\cos^2(n)}{n}$

**Boh!** (per quello che ne sappiamo noi).

**Es:**  $\sum \frac{n^2 - n + 2}{\sqrt{n} \cdot n^3 - n + 7}$

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{\sqrt{n} \cdot n^3 - n + 7} > 0 \text{ def.}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n^2} + \frac{7}{\sqrt{n} \cdot n^3}} \rightarrow 0$$

Posso applicare il **confronto asintotico** con  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n}$  e ho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n^2} + \frac{7}{\sqrt{n} \cdot n^3}}$$

$$= 1 \in (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \sum a_n, \sum b_n \text{ hanno lo stesso carattere}$$

$$\Rightarrow \text{converge}$$

**Es:**  $\sum \frac{2^n}{n!}$

$$a_n = \frac{2^n}{n!} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Crit. del rapporto:**

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} \\ &= 0 < 1 \\ \Rightarrow \sum a_n &\text{ converge}\end{aligned}$$

**Es per casa:** determinare per quali  $a > 0$  la seguente serie converge

$$\sum \frac{n^a + 2}{n\sqrt{n} + 2n - \sqrt[3]{n} + 8}$$

Per altri esempi consultare le slide #view-slide

#### 14.6.5 Assoluta convergenza per serie a termini di segno variabile

**Teo:** se  $\sum |a_n|$  converge, allora  $\sum a_n$  converge.

Se voglio studiare  $\sum a_n$  con termini a segno variabile, provo a studiare  $\sum |a_n|$  che è a termini  $\geq 0$ : 1.  $\sum |a_n|$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge (*per il crit. di conv. assoluta*) 2.  $\sum |a_n|$  diverge a  $+\infty \Rightarrow$  **Il criterio fallisce!**

**Terminologia:** se  $\sum |a_n|$  converge, si dice che  $\sum a_n$  converge *assolutamente*.

**Es:**  $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$

Provo a studiare  $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ .

$$\forall n \quad 0 \leq \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Poiché  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge,  $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$  converge per il criterio di assoluta convergenza.

#### 14.6.6 Criterio di Leibniz per serie a termini alterni

Sia  $a_n$  una successione dalla forma  $a_n = (-1)^n \alpha_n$  tale che

1.  $\alpha_n \geq 0$  definitivamente
2.  $\alpha_n$  decrescente definitivamente

$$3. \alpha_n \rightarrow 0$$

allora  $\sum a_n = \sum (-1)^n \alpha_n$  converge.

**Occhio:** se manca anche solo una delle 3 ipotesi il criterio fallisce!

**Es:**  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \implies \alpha_n = \frac{1}{n}$$

1.  $\alpha_n > 0 \forall n \geq 1$
2.  $\alpha_n$  è decrescente:  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \forall n$
3.  $\alpha_n \rightarrow 0$

Posso dunque applicare Leibniz  $\implies \sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge

**Oss:**  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  non converge *assolutamente* cioè  $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$  diverge.

Copiare anche altro esempio #todo-uni

## 15 Limiti di Funzione

$A \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$  (*A è di solito un'unione di intervalli*). Voglio definire  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ( $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ).

Per le successioni, facevamo i limiti solo per  $n \rightarrow +\infty$ , ora abbiamo 3 casi da distinguere:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

### 15.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

1.  $\ell \in \mathbb{R}$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \geq k$ 
  1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \geq k$
  2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^-$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell \forall x \geq k$
2.  $+\infty$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) \geq M \forall x \geq k$
3.  $-\infty$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  se  $\forall m \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) \leq m \forall x \geq k$
4. **N.E.**: Si dice che  $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  se non è nessuno degli altri casi

## 15.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

1.  $\ell \in \mathbb{R}$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \leq k$ 
  1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^+$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \leq k$
  2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^-$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell \forall x \leq k$
2.  $+\infty$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) \geq M \forall x \leq k$
3.  $-\infty$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  se  $\forall m \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) \leq m \forall x \leq k$
4. **N.E.**: Si dice che  $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  se non è nessuno degli altri casi

## 15.3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ :

1.  $\ell \in \mathbb{R}$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.  $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$  se  $0 < |x - x_0| < \delta$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ )
  1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.  $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon$  se  $0 < |x - x_0| < \delta$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ )
  2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.  $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell$  se  $0 < |x - x_0| < \delta$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ )
2.  $+\infty$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) \geq M$  se  $0 < |x - x_0| < \delta$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ )



3.  $-\infty$ : Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  se  $\forall m \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) \leq m$  se  $0 < |x - x_0| < \delta$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ )
4. **N.E.:** Si dice che  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  se non è nessuno degli altri casi

### 15.3.1 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  vuol dire  $x$  tende a  $x_0$  da destra. Ciò significa che la condizione è se  $x_0 < x \leq x_0 + \delta$  ( $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$ ).

### 15.3.2 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  vuol dire  $x$  tende a  $x_0$  da sinistra. Ciò significa che la condizione è se  $x_0 - \delta \leq x < x_0$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$ ).

**Occhio:** al limite non frega nulla del valore di  $f(x_0)$

## 15.4 Note tecniche

Quando possiamo calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ( $x \in \overline{\mathbb{R}}$ )? Quando  $x_0$  è **punto di accumulazione** del dominio di  $f$ .

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  è unione di intervalli e semirette *localmente finita*, cioè vicino a un qualunque punto di  $\mathbb{R}$  trovo un numero finito di intervalli che compongono  $A$ .

### Contresempio:

$$f(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{\pi}\right) \cup \left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}\right) \cup \dots \cup \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \cup \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$$

$x_0$  è un **punto interno ad  $A$**  se sta dentro ad uno degli intervalli che compongono  $A$  (*gli esterni non vanno bene*).

$x_0$  è un **punto di accumulazione di  $A$**  se è un punto interno o è un estremo di un intervallo o semiretta che compone  $A$ .

**Es:**  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \ln x.$

Posso calcolare:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \forall x_0 > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

## 15.5 Caratterizzazione del limite per successioni

**Teo:** sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  un punto di acc. di  $A$ . Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall a_n$  successione con:  $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq x_0$  def. ,  $a_n \rightarrow x_0$  si ha  $f(a_n) \rightarrow \ell$

**Conseguenza:** tutti i risultati generali sulle successioni valgono anche per i limiti di funzione:

1. Unicità del limite
2. Teoremi algebrici (e forme indeterminate)
3. Teoremi di confronto a 2 e a 3

**Oss:**  $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$  si ottengono usando successioni  $a_n$  tale che  $a_n \rightarrow x_0^+$  o  $a_n \rightarrow x_0^-$ .

## 16 Tecniche di Calcolo dei Limiti

1. Continuità
2. Teoremi algebrici
3. Teoremi di confronto a 2 e a 3
4. Cambi di variabile
5. Limiti notevoli
6. Criterio funzioni - successioni
7. Confronto tra ordini di infiniti (gerarchia degli infiniti)

## 16.1 Continuità

**Def:**  $x_0 \in A$  punto di accumulazione,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua** in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua su  $A$  se è continua in  $x_0$  per ogni  $x_0 \in A$ .

**Oss:** se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ,  $f$  si dice continua in  $x_0$  da destra. Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ,  $f$  si dice continua in  $x_0$  da sinistra.

### 16.1.1 Come trovare funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi, radici, trig., trig. inverse) e quelle ottenute da loro tramite operazioni algebriche e composizione sono continue dove non hanno *problemi burocratici* di definizione (denominatore = 0, radice < 0, ...).

## 16.2 Limiti notevoli

I limiti notevoli sono limiti che si dimostrano una volta per tutte *e poi si ricordano per la vita!*

### 16.2.1 Patriarchi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

### 16.2.2 Prima generazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

### 16.2.3 Seconda generazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

### 16.3 Cambi di variabile

**Es:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

Pongo  $x^2 = y$ . Se  $x \rightarrow 0$ , allora  $y \rightarrow 0$  ( $\tan x$  è continua in  $x = 0$ ).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

| **Es:** copiare #todo-uni

## 17 O-piccolo e Equivalenza asintotica

Siano  $f(x), g(x)$  funzioni,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  in cui posso calcolare i loro limiti.

**Def:** si dice che  $f(x)$  è **o-piccolo** di  $g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  e si scrive  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  se esiste una funzione  $\omega(x)$  tale che

- $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$

Cioè  $f(x) = g(x) \cdot [\text{roba che tende a 0 in } x_0]$ .

**Def quasi equivalente:** se posso dividere per  $g(x)$  vicino a  $x_0$  (cioè se  $\exists \delta > 0$  t.c.  $g(x) \neq 0 \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ ), allora  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Questo permette di esprimere le gerarchie degli infiniti.

**Es:**  $x^2 = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$

**Verifica:**  $x^2 = x \cdot x$  ( $x = o(x) \rightarrow 0$ )

**Terminologia:**  $f(x)$  si dice **infinitesima** per  $x \rightarrow x_0$  se il suo limite è 0.

**Oss:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff f(x) = o(1) \quad x \rightarrow x_0$

### 17.1 Proprietà algebriche degli o-piccoli

Se  $f_1 = o(g), f_2 = o(g)$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora

1.  $f_1 \pm f_2 = o(g)$
2.  $a \cdot f_1 = o(g) \quad a \in \mathbb{R}$
3.  $f_1 \cdot f_2 = o(g^2)$
4.  $\frac{f_1}{f_2}$  *non funziona!*
1.  $o(f_1) \pm o(f_2) = o(f_1 + f_2)$
2.  $o(a \cdot f_1) = o(f_1)$
3.  $o(f_1) \cdot o(f_2) = o(f_1 \cdot f_2)$
4.  $f_1 \cdot o(f_2) = o(f_1 \cdot f_2)$
5.  $o(f_1 + o(f_1)) = o(f_1)$

### 17.2 Transitività degli o-piccoli

$$f = o(g), g = o(h) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \implies f = o(h) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

### 17.3 Limiti notevoli espressi in o-piccoli

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\tan x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

### 17.4 Equivalenza asintotica

**Def:** si dice che  $f(x)$  e  $g(x)$  sono **asintoticamente equivalenti per  $x \rightarrow x_0$**  e si scrive  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  se esiste

- $f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 1$

**Definizione quasi equivalente:**  $f \sim g$  per  $x \rightarrow x_0$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

| **Es:**  $\sin x \sim x$  per  $x \rightarrow x_0$

| **Es:**  $\cos x \sim 1$  per  $x \rightarrow x_0$   
 $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$  per  $x \rightarrow x_0$

## 18 Differenziabilità e Derivabilità

**Domanda generale:** data una funzione  $f(x)$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  in cui ha senso fare il limite di  $f(x)$ , quando posso trovare  $a \in \mathbb{R}$ , tale che

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o((x - x_0))$$

?

**Es:**

$$f(x) = \sin x \quad x_0 = 0 \implies a = 1$$

$$f(x) = \ln x \quad x_0 = 1 \implies a = 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} \quad x_0 = 0 \implies a = \frac{1}{3}$$

Sto cercando la retta che *approssima meglio* il grafico di  $f(x)$  vicino a  $x_0$  (**Migliore approssimazione lineare**).

**Def:**  $f(x)$  è **differenziabile** in  $x_0 \in \mathbb{R}$  se esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

In tal caso, la retta  $y = f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$  si dice **retta tangente** al grafico di  $f(x)$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .

Come calcolare  $a$ ?

**Oss:**  $f(x)$  è differenziabile in  $x_0 \iff \exists a \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + o(h)$  con  $h \rightarrow 0 \iff \exists a \in \mathbb{R}$  t.c.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$ .

**Def:**  $f(x)$  è **derivabile** in  $x_0$  se il limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  esiste finito (cioè  $\in \mathbb{R}$ ).

**Teo:**  $f_0$  è differenziabile in  $x_0 \iff f$  è derivabile in  $x_0$ .

**Terminologia:**

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  si dice **rapporto incrementale**
- il limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ , quando esiste finito, si denota con  $f'(x_0)$  oppure  $\frac{df}{dx}(x_0)$  oppure  $f^{(1)}(x_0)$
- $f'(x)$  è la **derivata** di  $f(x)$  in  $x_0$  e la funzione  $f'(x)$  è la **derivata** di  $f(x)$

La retta tangente al grafico nel punto  $(x_0, f(x_0))$  è  $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

**Oss:**  $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

### 18.1 Esempi di non derivabilità

**1.**  $f(x) = |x|$  non è derivabile in  $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \text{ N.E.}$$

**2.**  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  non è derivabile in  $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

**Teo:**  $f$  derivabile in  $x_0 \implies f$  continua in  $x_0$

**Dim:**  $f$  derivabile in  $x_0 \implies \exists a \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$   
per  $x \rightarrow x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \implies f$  continua in  $x_0$ .

### 18.2 Derivate delle funzioni elementari

**1.**

$$f(x) \text{ costante}$$

$$f'(x) = 0$$

**2.**

$$f(x) = x^\alpha$$

$$f'(x) = x^{\alpha-1} \cdot \alpha$$

**3.**

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$



4.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

5.

$$f(x) = \cos$$

$$f'(x) = -\sin x$$

6.

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

## 19 Regole di derivazione

Siano  $f(x), g(x)$  due funzioni derivabili in  $x_0$ :

- $S(x) = f(x) \pm g(x) \implies S'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $P(x) = f(x) \cdot g(x) \implies P'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- Se  $g(x) \neq 0$  per  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $R(x) = \frac{1}{g(x)} \implies R'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- Se  $g(x) \neq 0$  per  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies Q'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

| **Dim:** sulle slide #view-slide

| **Es:**  $f(x) = \tan x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\implies f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

| **Oss (caso particolare):**  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$

### 19.1 Derivata della composizione

Siano  $f(x), g(x)$  funzioni per cui abbia senso scrivere la composizione  $C(x) = f(g(x))$ .

Inoltre chiediamo che

- $g(x)$  sia derivabile in  $x_0$
- $f(x)$  si derivabile in  $g(x_0)$

$$C'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Aggiungere esempio  $f(x) = 2^x$

### 19.2 Derivata della funzione inversa

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono inverse l'una dell'altra e se  $f$  è derivabile in  $g(x_0)$ , allora

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x \\ \implies f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) &= 1 \\ \implies g'(x_0) &= \frac{1}{f'(g(x_0))} \end{aligned}$$

Ovvero

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**Es:**  $f(x) = e^x, g(x) = \ln x$

$$f'(x) = e^x \implies (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

**Es:**

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

**Es:**

$$(\arcsin x)' = \sqrt{1 - x^2}$$

**Es:**

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

### 19.3 Trucco dell'esponenziale

$$\begin{aligned} [f(x)]^{g(x)} &= e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \\ \Rightarrow ([f(x)]^{g(x)})' &= e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot \dots \end{aligned}$$

**Es:**  $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$

### 19.4 Teorema di L'Hopital

Siano  $f(x), g(x)$  funzioni derivabili vicino a  $x_0$ . Suppongo che

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  sia forma indet.  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$
2.  $g'(x)$  non si annulli vicino a  $x_0$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$  (lo stesso del punto 3.).

**Oss:** se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  non esiste, allora **FAIL**.

## 20 L'Hopital e Taylor

### 20.1 Esempi di applicazione del teo. di L'Hopital

**Es 1.:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0^-$$

**Es 2.:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Es 3.:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

### 20.2 Formula di Taylor con centro in $x_0 = 0$

Sia  $f(x)$  una funzione e sia  $n \in \mathbb{N}$ . Sotto opportune ipotesi, esiste un polinomio  $P_n(x)$  di grado  $\leq n$  tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Inoltre

$$P_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

è il polinomio di Taylor di  $f(x)$  di grado  $n$  centrato in 0.

**Notazione:** data  $f(x)$ , se  $f'(x)$  esiste per ogni  $x$  in un intervallo contenente  $x_0$ , posso calcolare la derivata di  $f'(x)$  in  $x_0$  e così via.

**Opportune ipotesi:**  $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$  devono esistere in un intervallo contenente 0 ed inoltre deve esistere  $f^{(n)}(0)$ .

**Resto:** la differenza  $f(x) - P_n(x)$  si dice resto. La formula  $f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad x \rightarrow 0$  si dice *formula di Taylor con resto di Peano*.

## 20.3 Sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

**Es:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \ln(1+x^2)}$$

Visto che il denominatore è asintotico a  $x^3 + o(x^3)$ , utilizzo Taylor fino al terzo grado per il numeratore

$$\sin x - x \cos x \sim \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3}$$

**Es:** Taylor per  $\tan x$  in  $x = 0$

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)} \\ &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \cdot \frac{1}{1 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \right)} \end{aligned}$$

Riscriviamo il denominatore come  $1 - t$

Finire con le slide #view-slide #todo-uni

Mi sono perso...

**Dimostrazione formula di Taylor:**

Troppo roba, guardati le slide #view-slide

## 20.4 Taylor con centro qualsiasi

Sia  $f(x)$  una funzione derivabile abbastanza volte in un intervallo contenente  $x_0$ . Allora esiste un polinomio  $P_n(x)$  di grado  $\leq n$  tale che

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

dove

$$P_n(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

## 21 Funzioni continue

**Def:**  $A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in A, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f(x)$  è continua in  $x_0$  se

1.  $x_0$  è un punto *isolato* (un punto che non ha vicino nessun altro punto) di  $A$  (ovvero se  $\exists \varepsilon > 0$  t.c.  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \{x_0\}$ ).
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**Metateorema:** le funzioni elementari, le loro somme, differenze, prodotti, quozienti e composizioni sono continue dove definite.

Somme, prodotti, quozienti e composizioni di funzioni continue sono continue dove definite.

### 21.1 Tipi di discontinuità

$f$  non continua in  $x_0$ .

**1.:**  $x_0$  è una discontinuità **eliminabile** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0) \quad \ell \in \mathbb{R}$$

È possibile eliminarla con

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

**2.:**  $x_0$  è una discontinuità di **salto** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \quad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$$

**3.:**  $x_0$  è una discontinuità di **2ª specie** negli altri casi.

**Def:**  $f : A \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , si dice che  $f$  è prolungabile con continuità in  $x_0$  e il suo prolungamento è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

## 21.2 Discontinuità delle funzioni monotone

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  monotona crescente,  $x_0 \in \overline{A}$  pt. di accumulazione di  $A$ . Allora

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in A, x > x_0 \}$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in A, x < x_0 \}$

**Corollario:**  $-\infty < \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) < +\infty \implies$  tutte le discontinuità di una funz. monotona sono a salto.

**Def:**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $A$  (o su  $A$ ) se è continua per ogni  $x \in A$ .

$\mathcal{C}^0(A)$  è l'insieme delle funzioni  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continue su  $A$ .

**Teorema di permanenza del segno:** se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0 \in A$  e  $f(x_0) > 0$ , allora  $\exists \varepsilon > 0$  t.c.  $f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

**Teorema degli zeri:** sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Se  $f(a) \cdot f(b) < 0$  allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$ .

Se i limiti inf e sup hanno segno opposto, la funzione si annulla in almeno un punto.

**Teorema dei valori intermedi:** (corollario del teo. degli zeri)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Se  $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$  (oppure  $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ ) allora  $\exists c \in [a, b]$  tale che  $f(c) = \lambda$ .

**Corollario:**  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue tali che  $f(a) < g(a)$  e  $g(b) < f(b)$  allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = g(c)$



## 22 Studio locale di funzioni

L'obiettivo è capire come è fatta una funzione (cioè come è fatto il suo grafico) vicino ad un punto  $x_0$ .

$\mathcal{C}^k(A)$  sono funzioni  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili  $k$  volte in ogni punto di  $A$  e tali che la derivata  $k$ -esima sia continua.

**Primo teorema di monotonia:** sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x_0 \in A$ , con  $f'(x_0) > 0$ , allora  $\exists \delta > 0$  tale che

- $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
- $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

**Esempio:**

$$f(x) = \begin{cases} x + 1000 \cdot x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1.  $f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  continua
2.  $f$  è derivabile in  $x = 0$  ( $f'(0) = 1$ )
3.  $f$  è derivabile anche in  $x \neq 0$  (ma  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  N.E.) dunque  $f(x) \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  perchè la derivata non è continua
4.  $f'(0) = 1 > 0 \implies$  per il teo di monotonia 1.,  $\exists \delta > 0$  tale che
  - $f(x) > 0$  se  $0 < x < \delta$
  - $f(x) < 0$  se  $-\delta < x < 0$

$f(x)$  non è crescente in nessun intervallo contenente 0.

**Variante ovvia:** se  $f'(x_0) < 0$  allora  $\exists \delta > 0$  tale che

- $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
- $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Invece se  $f'(x_0) = 0$  abbiamo 5 possibilità:

1. **Minimo locale:**  $\exists \delta > 0$  t.c.  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$

2. **Massimo locale:**  $\exists \delta > 0$  t.c.  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leq f(x_0)$
3. **Flesso ascendente a tangente orizzontale:**  $\exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
4. **Flesso discendente a tangente orizzontale:**  $\exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
5. **Nessuna delle precedenti**

**Criterio delle derivate successive:** se  $f'(x_0) = 0$  cerco la prima derivata che non si annulla in  $x_0$ .

Se esiste  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$  tale che  $f(x)$  è derivabile  $k$  volte in  $x_0$  e  $f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$  ma  $f^{(k)}(x_0) \neq 0$  allora

1. Se  $k$  è *pari* e  $f^{(k)}(x_0) > 0 \implies$  **minimo locale**
2. Se  $k$  è *pari* e  $f^{(k)}(x_0) < 0 \implies$  **massimo locale**
3. Se  $k$  è *dispari* e  $f^{(k)}(x_0) > 0 \implies$  **flesso ascendente a tangente orizzontale**
4. Se  $k$  è *dispari* e  $f^{(k)}(x_0) < 0 \implies$  **flesso discendente a tangente orizzontale**

Il caso 5. può succedere solo se  $f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \geq 2$  oppure se  $f$  ammette di essere derivabile prima di trovare una derivata  $\neq 0$ .

La dimostrazione viene lasciata come esercizio al lettore.

Dunque  $f(x)$  si comporta come il primo termine non banale del proprio sviluppo di Taylor.

**Esempio:**  $\sin(x^{200}) = x^{200} + o(x^{200}) \implies x = 0$  è un minimo locale.

**Esempio:**  $e^{\tan(x^2)} = 1 + \tan(x^2) + o(\tan(x^2)) = 1 + x^2 + o(x^2) \implies x = 0$  è un minimo locale.

## 23 Massimi e Minimi

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

- Il **massimo** di  $f$  su  $A$  è  $M = \max_A f = \max \{ f(x) \mid x \in A \}$
- Il **minimo** di  $f$  su  $A$  è  $m = \min_A f = \min \{ f(x) \mid x \in A \}$
- Il **punto di massimo** è  $x \in A$  tale che  $f(x) = M$
- Il **punto di minimo** è  $x \in A$  tale che  $f(x) = m$

**Oss:** massimo e minimo di  $f$  su  $A$  se esistono sono unici, mentre i punti di massimo e di minimo possono essere quanti vogliono.

### 23.1 Teorema di Weierstrass

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **continua**, allora  $f$  ammette massimo e minimo su  $[a, b]$  (*non*  $(a, b)$ !).

### 23.2 Ricerca dei punti di Max/Min

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Per W. so che esistono max e min. I punti di massimo e minimo vanno cercati in 3 tipologie:

- **Stazionari interni:**  $x_0 \in (a, b)$  tali che  $f'(x_0) = 0$
- **Singolari interni:**  $x_0 \in (a, b)$  tali che  $f$  non è derivabile in  $x_0$
- **Bordo:**  $x_0 = a, x_0 = b$

### 23.3 Teorema di Fermat

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x_0$ ,  $x_0$  punto di massimo o minimo locale, allora  $f'(x_0) = 0$ .

### 23.4 Teorema di Rolle

**Teorema di Rolle:** sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

1.  $f(x)$  continua su  $[a, b]$
2.  $f(x)$  derivabile su  $(a, b)$

$$3. f(a) = f(b)$$

Allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ .

**Dim:**

1. Per 1., grazie al teo. di Weierstrass,  $f(x)$  ha un massimo e un minimo in  $[a, b]$ .  
Siano  $x_1$  pt. di massimo e  $x_2$  pt. di minimo.
2. Per 2., non ci sono pt. singolari  $\implies$  se uno dei due punti è interno ad  $(a, b)$ ,  
abbiamo trovato  $c$ .
3. Altrimenti,  $x_1, x_2$  sono estremi di  $[a, b]$ , ma allora per 3.,  $f(x_1) = f(x_2) \implies f$  è  
costante  $\implies \forall c \in (a, b), f'(c) = 0$ .

**Oss:**

1.  $c$  non è detto che sia unico
2.  $f$  deve essere derivabile su tutto  $(a, b)$

### 23.5 Teorema di Cauchy

**Teorema di Cauchy:** siano  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

1.  $f, g$  continue su  $[a, b]$
2.  $f, g$  derivabili su  $(a, b)$

allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che

$$(f(a) - f(b)) \cdot g'(c) = (g(a) - g(b)) \cdot f'(c)$$

Se inoltre

3.  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

allora

$$g(a) \neq g(b) \text{ e } \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Dim:** considero la funzione

$$\varphi(x) = (f(a) - f(b)) \cdot g(x) - (g(a) - g(b)) \cdot f(x)$$

allora

1.  $\varphi(x)$  è continua su  $[a, b]$
2.  $\varphi(x)$  è derivabile su  $(a, b)$
3.  $\varphi(a) = \varphi(b) \implies$  per Rolle  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $\varphi'(c) = 0 \implies \exists c \in (a, b)$  tale che  $(f(a) - f(b)) \cdot g'(c) - (g(a) - g(b)) \cdot f'(c) = 0$  ovvero  $(f(a) - f(b)) \cdot g'(c) = (g(a) - g(b)) \cdot f'(c)$

Se poi  $g'(a) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ , allora per Rolle  $g(a) \neq g(b) \implies$

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

## 23.6 Teorema di Lagrange

**Teorema di Lagrange:** sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

1.  $f(x)$  continua su  $[a, b]$
2.  $f(x)$  derivabile su  $(a, b)$

allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$

## 23.7 Teorema di monotonia 2

**Secondo teorema di monotonia:** sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua su  $[a, b]$ , derivabile su  $(a, b)$ . Allora

1.  $f$  debolmente crescente su  $[a, b] \implies f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$
2.  $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \implies f$  debolmente crescente su  $[a, b]$
3.  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \implies f$  strettamente crescente su  $[a, b]$

**Oss:**

1. Stessa cosa con deb./strett. decrescente e  $f'(x) < 0 / f'(x) \leq 0$
2.  $f$  può essere strettamente crescente, ma avere punti a derivata nulla

**23.8 Teorema de L'Hopital**

**Teorema de L'Hopital:** ha vari casi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a seconda che  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \pm\infty$ , o a seconda della forma indeterminata

$$\left[ \frac{0}{0} \right], \left[ \frac{+\infty}{+\infty} \right], \left[ \frac{+\infty}{-\infty} \right], \left[ \frac{-\infty}{+\infty} \right], \left[ \frac{-\infty}{-\infty} \right].$$

**24 Studio globale di funzione**

Tracciare un grafico approssimativo di una funzione  $f(x)$  ottenuta da funzioni elementari, per studiarne proprietà qualitative.

**Esempio:**  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

**1. Insieme di definizione e simmetrie**

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$  insieme di definizione e non ha particolare simmetrie.

**2. Continuità e limiti**

$f(x)$  è rapporto di funzioni continue, quindi è continua dove è definita.  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \text{ per gerarchia} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} &= 0^- \text{ per teo algebrici} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} &= +\infty \text{ per teo algebrici} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} &= -\infty \text{ per teo algebrici} \end{aligned}$$

**3. Segno e zeri**

Risolve se possibile  $f(x) = 0$ ,  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$ .

$$f(x) > 0 \quad \text{se } x > 0$$

$$f(x) = 0 \quad \text{mai}$$

$$f(x) < 0 \quad \text{se } x < 0$$

#### 4. Derivata e monotonia

$f(x)$  è rapporto di funzioni derivabili  $\implies$  è derivabile dove definita.

$$f'(x) = e^x \frac{(x-1)}{x^2}$$

Calcolando la positività della derivata trovo crescita, decrescenza e minimi/massimi locali.

$f(1) = e$  minimo locale.

#### Applicazioni:

- inf/sup/max/min di  $f([a, b])$  o di  $f^{-1}([a, b])$
- Trattare graficamente equazioni/disequazioni
- *Passare Analisi I*

#### Altre info utili nello studio di funzione:

- Asintoti
- Convessità/concavità/flessi
- max/min locali e globali

### 24.1 Punti di non derivabilità

Se  $f(x)$  è continua in  $x_0$ , ma non derivabile, possono succedere varie cose, tra cui

1.  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_1, \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_2$  e  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1 \neq m_2 \implies x_0$  è detto **punto angoloso**
2.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = +\infty$  (oppure  $-\infty$ )  $\implies x_0$  è detto **flesso a tangente verticale**
3.  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \pm\infty, \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mp\infty \implies x_0$  è detto **punto di cuspid**

## 25 Asintoti

### 25.1 Asintoti orizzontali

Una retta  $y = k$  è un **asintoto orizzontale** di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ .

È invece un asintoto orizzontale di  $f(x)$  per  $x \rightarrow -\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ .

**Oss:** ci possono essere al più 2 asintoti orizzontali, che si trovano calcolando i limiti di  $f(x)$  a  $\pm\infty$ .

### 25.2 Asintoti verticali

Una retta  $x = x_0$  è un **asintoto verticale** di  $f(x)$  se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$

**Oss:**  $f(x)$  può avere quanti asintoti verticali vuole, ma tutti nei punti di discontinuità oppure agli estremi *finiti* dell'insieme di definizione.

### 25.3 Asintoti obliqui

$y = mx + q$  è un **asintoto obliquo** di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - q) = 0$$

Stessa cosa per  $x \rightarrow -\infty$ .

Per trovare  $m$  e  $q$ :

1.  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
2.  $q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx$



**Oss:**

- $m = 0$  è l'asintoto orizzontale
- Gli asintoti obliqui sono incompatibili con asintoti orizzontali
- È possibile che esista  $m$  ma non  $q$ , allora niente asintoto obliquo
- Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , posso applicare L'Hopital, dunque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  se questo esiste. Posso trovare i candidati  $m$  facendo il limite della derivata.
- $y = mx + q$  è asintoto obliquo di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  se e solo se  $f(x) = mx + q + o(1)$  per  $x \rightarrow +\infty$

**26 Taylor con resto di Lagrange**

Data  $f(x)$  definita vicino a 0, dato  $n \in \mathbb{N}$ , se  $f(x)$  è derivabile  $n + 1$  volte in un intervallo  $(a, b)$  contenente 0 (quindi con  $a < 0 < b$ ).

Allora  $\forall x \in (a, b) \exists c$  tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

con  $c$  tra 0 e  $x$  (cioè, se  $x > 0$ ,  $0 < c < x$ , se  $x < 0$ ,  $x < c < 0$ ).

Sembra un altro pezzo del pol. di Taylor ma non viene calcolato in  $x$  o in 0, ma in un punto in mezzo.

$P_n(x)$  è il solito polinomio di Taylor  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

**Oss:** con  $n = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(c)}{1!} \cdot x \implies f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

ovvero il teo. di Lagrange.

**Versione centrata in  $x_0$ :**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
 &+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}
 \end{aligned}$$

con  $c$  compreso tra  $x$  e  $x_0$  (cioè se  $x_0 < x$ ,  $x_0 < c < x$ , se  $x_0 > x$ ,  $x < c < x_0$ ).

**26.1 Utilità****26.1.1 Approssimazioni**

**Esempio:**  $\sin\left(\frac{1}{10}\right) = ?$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\sin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{f^{(7)}(x)}{7!} \cdot x^7$$

Se  $x = \frac{1}{10} \implies 0 < c < \frac{1}{10}$ , inoltre  $f^{(7)}(x) = -\cos(x)$ . Ma in particolare  $|f^{(7)}(x)| \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 \implies \sin\left(\frac{1}{10}\right) &= \frac{1}{10} - \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5}{120} + \frac{f^{(7)}(c)}{7!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 \\
 \left| \sin\left(\frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1000} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{100000}\right) \right| &\leq \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{10^7}
 \end{aligned}$$

Ciò vuol dire che il seno è approssimato con un errore al massimo alla 9ª cifra decimale.

**26.1.2 Confrontare la funzione con il suo sviluppo di Taylor**

**Esempio:**  $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Dim:** TRdL  $\implies e^x = 1 + x + \frac{f''(c)}{2} \cdot x^2 = 1 + x + \frac{e^c}{2} \cdot x^2$ . Sapendo che l'ultimo termine  $\frac{e^c}{2} \cdot x^2 \geq 0 \implies e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 27 Convessità

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$

1. intervallo  $([a, b], (a, b), [a, b), (a, b])$
2. semiretta  $([a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b))$
3.  $\mathbb{R}$

### 27.1 Convessità geometrica

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Si dice che  $f(x)$  è **convessa** in  $I$  se, comunque presi due punti del suo grafico sopra  $I$ , il segmento che li congiunge sta tutto sopra al grafico di  $f(x)$ .

Si dice **strettamente convessa** se gli unici punti in comune tra il grafico e il segmento sono gli estremi del segmento. (Se il grafico non contiene segmenti).

$f(x)$  si dice **concava** (rispettivamente **strettamente concava**) se valgono le stesse condizioni di prima, ma con il segmento *sotto* al grafico.

**Occhio:**  $f(x) = \frac{1}{x}$  è definita su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Non possiamo parlare di convessità su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ma solo su  $(-\infty, 0)$  e su  $(0, +\infty)$ .

### 27.2 Definizione analitica

$P, Q$  punti nel grafico di  $f(x)$

$$P = (x_1, f(x_1)) \quad Q = (x_2, f(x_2))$$

Dunque il segmento per  $P$  e  $Q$  è fatto dai punti

$$\left( \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \frac{f(x_1) + tf(x_2)}{1+t} \right)$$

Questo punto sta sopra al grafico di  $f(x)$  se e solo se

$$\frac{f(x_1) + tf(x_2)}{1+t} \geq f\left(\frac{x_1 + tx_2}{1+t}\right)$$

o utilizzando  $a, b$

$$a = \frac{1}{1+t}$$

$$b = \frac{t}{1+t}$$

diventa

$$af(x_1) + bf(x_2) \geq f(ax_1 + bx_2) \quad \forall 0 \leq a, b \leq 1, a + b = 1$$

Questa è la **disuguaglianza di Jensen**.

$f(x)$  convessa in  $I \iff$  la dis. di Jensen vale  $\forall x_1, x_2 \in I, \forall a, b \in [0, 1], a + b = 1$ .

**Es:**  $f(x) = x^2$  è convessa in  $\mathbb{R}$ .

$$ax_1^2 + bx_2^2 \geq (ax_1 + bx_2)^2 \quad \text{con } a, b \in [0, 1], a + b = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \text{ che è vera}$$

**Proposizione:**  $f(x)$  derivabile in  $I$ . Allora  $f(x)$  è convessa in  $I$  se e solo se  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in I$ .

**Oss:**  $f(x)$  concava  $\iff f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in I$

**Teorema di convessità:** sia  $f(x)$  derivabile due volte in  $I$ . Allora  $f(x)$  è convessa in  $I \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ .

1. Se  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$ , allora  $f(x)$  è strettamente convessa in  $I$
2. Se  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ , allora  $f(x)$  è convessa in  $I$
3. Se  $f(x)$  è convessa in  $I$ , allora  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

| **Oss:** lo stesso con concava e  $f''(x) \leq 0$

Il contrario di 1. non vale.

**Oss:**

- $f(x)$  convessa in  $I \iff f'(x)$  crescente in  $I$
- $f(x)$  concava in  $I \iff f'(x)$  decrescente in  $I$

**Def:**  $x_0$  si dice **punto di flesso** se  $f(x)$  è concava da un lato di  $x_0$  e convessa dall'altro.

## 28 Integrali definiti

**Notazione:** integrale tra  $a$  e  $b$  (*estremi di integrazione*) di  $f(x)$  (*funzione integranda*) in “ $dx$ ” (*oggetto misterioso*)

$$\int_a^b f(x) dx$$

### 28.1 Integrale proprio

Parliamo di integrale proprio se

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $f(x)$  è limitata su  $[a, b]$  (cioè  $\exists M$  t.c.  $|f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$ )

### 28.2 Convenzioni

1.  $\int_a^a f(x) dx = 0$  (*estremi coincidenti*)
2.  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  (*estremi scambiati*)

### 28.3 Cos'è l'integrale

$\int_a^b f(x) dx$  è un numero che rappresenta l'**area con segno** della parte di piano compresa tra l'asse delle  $x$  e il grafico di  $f(x)$  per  $x \in [a, b]$ .

**Definizione dell'integrale proprio (secondo Riemann):****1. Caso banale:**

$f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a, b]$  funzione costante su  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda \cdot (b - a)$$

**2. Caso facile:**

$f(x)$  costante a tratti (o semplice, o a gradini, o step function) cioè esistono numeri reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  tali che  $f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \dots, n$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot (x_j - x_{j-1})$$

**3. Caso generale:**

$f(x)$  limitata su  $[a, b]$ .

- L'integrale **superiore** di  $f(x)$  su  $[a, b]$  è

$$I^+(f; [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ step function e } \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

- L'integrale **inferiore** di  $f(x)$  su  $[a, b]$  è

$$I^-(f; [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \psi(x) \text{ step function e } \psi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

**Oss:**  $f(x)$  limitata  $\implies \exists$  una step function  $\varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$  e  $\exists$  una step func.  $\psi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies$  i due insiemi non sono vuoti  $\implies$  inf e sup sono numeri reali.

Inoltre:

$$I^-(f; [a, b]) \leq I^+(f; [a, b])$$

perchè ogni  $\psi(x)$  è  $\leq$  di ogni  $\varphi(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

**Def:** si dice  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann sull'intervallo  $[a, b]$  se  $I^+(f; [a, b]) = I^-(f; [a, b])$ .

In tal caso, si pone

$$\int_a^b f(x) dx = I^+(f; [a, b]) = I^-(f; [a, b])$$

## 29 Proprietà dell'integrale e Funzioni integrabili

**Teorema mistico:** si ha che  $I^+ = I^-$  (cioè  $f(x)$  integrabile secondo Riemann) in tutti i seguenti casi (ma non solo):

1.  $f(x)$  monotona (anche non continua)
2.  $f(x)$  continua su  $[a, b]$
3.  $f(x)$  continua a tratti

### 29.1 Proprietà dell'integrale

1.  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$  (**additività**)
2.  $\int_a^b (\lambda \cdot f(x)) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$  (**omogeneità**)
3.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \forall c \in [a, b]$
4.  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  ( $\implies$  se  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$  allora  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ )

**Occhio:**  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$  BOH!

3. + Posso estendere la proprietà 3. per  $c$  esterno ad  $[a, b]$ , ricordando che  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$  e ammesso che  $f(x)$  sia integrabile su tutti gli intervalli coinvolti.

### 29.2 Criterio di integrabilità

$f(x)$  limitata su  $[a, b]$  è integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$  se e solo se  $\forall \varepsilon > 0$  posso trovare due funzioni a gradini  $\varphi(x), \psi(x)$  su  $[a, b]$  tali che

$$\bullet \varphi(x) \geq f(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\bullet \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx \leq \varepsilon$$

**Oss:**  $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx = \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx$  per le proprietà 1. e 2.. Inoltre,  $\varphi(x) \geq \psi(x) \forall x \in [a, b] \implies \varphi(x) - \psi(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx \geq 0$  per la prop. 4..

## 30 Teoremi fondamentali del calcolo integrale

**Def:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, si dice che  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una **primitiva** di  $f(x)$  su  $[a, b]$  se  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

**Oss:** se esiste, una primitiva non è mai unica: se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , anche  $F(x) + 1$  lo è. (vero per ogni costante).

### 30.1 Procedura di calcolo per gli integrali definiti

**Secondo teorema fondamentale del calcolo:** sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $F(x)$  una sua primitiva su  $[a, b]$ . Allora, per ogni  $[c, d] \subseteq [a, b]$ , si ha

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

**Notazione:**  $F(d) - F(c) = \dots$

**Lemma fondamentale:** se  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$  sono due primitive di  $f(x)$  su  $[a, b]$ , allora  $F_1(x) - F_2(x)$  è costante su  $[a, b]$ .

Se  $F_1(x), F_2(x)$  sono primitive di  $f(x)$  su  $[a, b]$  allora

$$\left[ F_1(x) \right]_c^d = \left[ F_2(x) \right]_c^d \quad \forall [c, d] \subseteq [a, b]$$

#### 30.1.0.1 Funzione integrale

Per ogni  $x \in [a, b]$ , posso calcolare  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  (per il pt. 2. del teo mistico).



**Oss:** dato  $[c, d] \subseteq [a, b]$ , allora  $\int_c^d f(t) dt = \int_a^d f(t) dt - \int_a^c f(t) dt = \Phi(d) - \Phi(c) = \left[ \Phi(x) \right]_c^d \implies$  se dimostro che  $\Phi(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , ho finito.

**Oss:** per il teo di Weierstrass,  $f(x)$  ha max e min su  $[a, b]$  poichè è continua  $\implies$  è limitata.

**Teorema della media integrale:** sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $\exists c \in [a, b]$  tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

**Primo teorema fondamentale del calcolo integrale:** sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. La funzione integrale  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  è una primitiva di  $f(x)$  su  $[a, b]$ .

Per il primo teo del calcolo,  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  è una primitiva di  $f(x)$  e, per la def di  $\Phi(x)$  (parte 2),  $\int_c^d f(x) dx = \left[ \Phi(x) \right]_c^d$ , infine, per il corollario al lemma fondamentale, (parte 1), data una qualsiasi primitiva  $F(x)$  di  $f(x)$  su  $[a, b]$  si ha  $\left[ F(x) \right]_c^d = \left[ \Phi(x) \right]_c^d \implies$  data una qualsiasi primitiva  $F(x)$  di  $f(x)$  su  $[a, b]$ , si ha

$$\int_c^d f(x) dx = \left[ F(x) \right]_c^d \quad \forall [c, d] \in [a, b]$$