Appunti di Analisi I

Analisi Matematica - Informatica - 23/24

Federico Zotti

2023-09-30

Indice

Insiemi

Notazione

Per *elenco*: Prima operazione, poi insieme di partenza

$$A = \{\,1, 2, 3, 4, 5\,\}$$
$$B = \{\,n^2 \,|\, n \text{ naturale}\,\}$$

Per *proprietà*: Prima insieme che scelgo, poi la proprietà che verifico

$$C = \{\,n \text{ naturale} \,|\, n \text{ è un quadrato}\,\}$$

Altri simboli:

$$\text{appartiene} \to a \in A$$
$$\text{non appartiene} \to a \notin A$$
$$\text{è sottoinsieme} \to A \subseteq B$$
$$\text{è sottoinsieme stretto} \to A \subset B$$
$$\text{insieme vuoto} \to \varnothing$$
$$\text{unione} \to A \cup B \,|\, \vee$$
$$\text{intersezione} \to A \cap B \,|\, \wedge$$
$$\text{sottrazione} \to A \setminus B$$
$$\text{cardinalità} \to |A|$$

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, il loro **prodotto cartesiano** è l'insieme delle coppie (a, b) con $a \in A$, $b \in B$.

Si indica con $A \times B$.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Esempio

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$
$$A \times A = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$$

Insieme delle parti

Dato A, $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Esempio

$$A = \{ 1, 2 \}$$
$$\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, A, \{ 0 \}, \{ 1 \} \}$$

Funzioni

Come si descrive una funzione:

1. Un insieme di partenza (A) (*dominio*);
2. Un insieme di arrivo (B) (*codominio*);
3. Una serie di regole che ad ogni elemento di A associa un **unico** elemento di $f(a) \in B$.

$$f : A \to B$$

Il grafico di una funzione è:

$$\begin{aligned} g &= \{\, (a, f(a)) \in A \times B \,|\, a \in A \,\} \\ &= \{\, (a, b) \in A \times B \,|\, b = f(a) \,\} \end{aligned}$$

Funzioni Iniettive e Suriettive

Sia $f : A \to B$ una funzione.

- f si dice **iniettiva** se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B.

$$a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ovvero se

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- f si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f.

$$\forall\, b \in B \,\exists\, a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Una funzione si dice **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Teorema: Una funzione $f : A \to B$ è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione $g : B \to A$ t.c. :

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= a \,\forall\, a \in A \\ f(g(b)) &= b \,\forall\, b \in B \end{aligned}$$

Osservazione:

$$f : A \to B$$

- è iniettiva se ogni elemento di B è ottenuto da al più un elemento di A tramite f;
- è suriettiva se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f.

Immagine e controimmagine

Sia $f : A \to B$ una funzione.

- Se $b = f(a)$ con $a \in A, b \in B$, si dice che b *è immagine di a tramite* f;
- Sia $C \subseteq A$ un sottoinsieme, si dice *immagine di C* tramite f l'insieme degli elementi di B che sono imamgine di elementi di C. $f(c) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$
- Immagine di A: $f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$
- Sia $D \subseteq B$ un sottoinsieme, si dice **controimmagine di** D tramite f l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno immagine contenuta in D.
- Controimmagine di D: $f^{-1}(D) = \{ a \in A : f(a) \in D \}$ (definita anche se f non è invertibile).

Numeri Reali

Insiemi numerici

- **Naturali:** $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- **Razionali:** $\mathbb{Z} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \} \}$
- **Reali:** $\mathbb{R}$
- **Irrazionali:** $\mathbb{Q}$
- **Complessi:** $\mathbb{C}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

Proprietà dei numeri reali

Sono di tre tipi:

- Algebriche;
- Di Ordinamento;
- Assioma di Continuità.

Algebriche

Sui numeri reali sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$, dette somma e prodotto, con le seguenti proprietà:

- Relative alla somma:
  - **Commutativa:** $a + b = b + a \, \forall \, a, b \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Asociativa:** $(a + b) + c = a + (b + c) \, \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Elemento neutro somma:** $\exists \, 0 \in R$ t.c. $a + 0 = a \, \forall \, a \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Esistenza dell'inverso:** $\forall \, a \in \mathbb{R} \, \exists \, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a + b = 0$ *(z,q,r,c)*
- Relative al prodotto:
  - **Commutativa:** $a \cdot b = b \cdot a \, \forall \, a, b \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Associativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \, \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Elemento neutro prodotto:** $\exists 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = a \, \forall \, a \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Esistenza dell'inverso:** $\forall \, a \in \mathbb{R} \, \exists \, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$ *(q,r,c)*
- **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = ab + ac \, \forall \, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*

Di Ordinamento

Dati due numeri reali x e y, si ah sempre che $x \geq y$ oppure $x \leq y$. Tale ordinamento ha le proprietà:

- **Riflessiva:** $x \geq x \, \forall \, x \in \mathbb{R}$
- **Antisimmetrica:** se $x \geq y \land y \geq x$, allora $x = y$
- **Transitiva:** se $x \geq y \land y \geq z$, allora $x \geq z$
- se $x \geq y$, allora $x + z \geq y + z \, \forall \, z \in \mathbb{R}$
- se $x \geq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \, \forall \, z \in \mathbb{R}$ con $z \geq 0$

Queste valgono in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{C}$.

Assioma di Continuità

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi diversi da $\varnothing$. Diciamo che A sta tutto a sinistra di B se $a \leq b \,\forall\, a \in A, \,\forall\, b \in B$.

L'assioma di continuità dice che se A sta tutto a sinstra di B allora esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ t.c. $c \geq a \,\forall\, a \in A; c \leq b \,\forall\, b \in B$.

> c non è obbligato ad essere unico; c può appartenere ad A, a B o anche a entrambi (in questo caso è unico elemento "separatore").

Esempio

$$A = \{\, x \in Q : x \geq 0 \wedge x^2 < 2 \,\}$$

$$B = \{\, x \in Q : x \geq 0 \wedge x^2 > 2 \,\}$$

$$\text{se } a \in A, b \in B \to a > b$$

$$c^2 = 2$$

Questo è impossibile in Q, quindi l'assioma di continuità non vale in Q.

Conclusione: sui numeri reali, $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore tra A e B e si può dimostrare che è unico.

Sottoinsiemi dei reali

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo separato da estremi $a, b \in \mathbb{R}$ (con $a < b$).

- $]a, b[= (a, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b \,\}$
- $[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b \,\}$

Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme *non vuoto*.

> $M \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di A se $M \geq a \,\forall\, a \in A$

> $m \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** di A se $m \leq a \, \forall \, a \in A$

Minoranti e maggioranti non sono obbligati ad esistere. Ad esempio $A = \mathbb{N}$ ha minoranti ma non ha maggioranti.

Se esiste un maggiorante invece, ne esistono infiniti. Se M è un maggiorante, anche $M + 1$ lo è. Lo stesso vale per i minoranti.

> $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ si dice **superiormente limitato** se ammette un maggiorante e **inferiormente limitato** se ammette un minorante. Si dice **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

Esempi:

- $A = (0, +\inf)$ è inferiormente limitato ma non superiormente
- $B = \{ \frac{1-n}{2} : n \in \mathbb{N} \}$ è superiormente limitato, ma non inferiormente
- $C = (1, 7]$ è limitato

> $M \in \mathbb{N}$ si dice **massimo** di A (e si scrive $M = \max A$) se $M \in A \land M \geq a \, \forall \, a \in A$

> $m \in \mathbb{N}$ si dice **minimo** di A (e si scrive $m = \min A$) se $m \in A \land m \leq a \, \forall \, a \in A$

$\max$ e $\min$ non sono obbligati ad esistere, nemmeno per insiemi limitati.

Esempio:

- $A = (0, 1)$ non ha nè $\max$, nè $\min$

$\max$ e $\min$, se esistono, sono **unici**.

Estremo superiore ed Estremo inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$.

> Si dice che $\sup A = +\inf$ se A non è superiormente limitato o $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se lo è e L è il minimo dei maggioranti.

Si dice che $\inf A = -\inf$ se A non è inferiormente limitato o $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se lo è e l è il massimo dei minoranti.

Esempi:

- $\sup \mathbb{N} = +\inf$
- $\inf \mathbb{N} = 0$
- $\sup(0,1) = 1$

Teo: Se $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ è superiormente limitato, allora il minimo dei maggioranti esiste.

Dimostrazione: Sia $B = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a \; \forall \, a \in A \,\}$ l'insieme dei maggioranti. Allora A sta tutto a sinistra di B. Per l'*assioma di continuità* c'è un elemento separatore $c \in \mathbb{R}$, ovvero $c \leq b \; \forall \, b \in B$ e $c \geq a \; \forall \, a \in A \implies c \in B$. Quindi $c = \min B$.

Esercizio per casa #todo/compito: Enunciare e dimostrare il teorema analogo per il massimo dei minoranti.

Caratterizzazione di inf e sup

- $\sup A = +\inf$ se $\forall \, M \in \mathbb{R} \; \exists \, a \in A$ t.c. $a \geq M$ (*ovvero se posso trovare elementi di A grandi quanto voglio*)
- $\inf A = -\inf$ se $\forall \, M \in \mathbb{R} \; \exists \, a \in A$ t.c. $a \leq M$
- $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se
  - $a \leq L \; \forall \, a \in A$ (L *è un maggiorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$
- $\inf A = L \in \mathbb{R}$ se
  - $a \geq l \; \forall \, a \in A$ (l *è un minorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, a \in A$ t.c. $a \leq l + \varepsilon$

Se esiste $M = \max A$ allora $\sup A = M$. Se esiste $m = \min A$ allora $\inf A = m$. $\sup A$ non è obbligato ad appartenere ad A, ma se vi appartiene è il **massimo**. Stessa cosa per $\inf A$.

Funzioni reali

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppure $f : A \to \mathbb{R}$.

Grafico di $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Proprietà di simmetria:

- f si dice **pari** se $f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'asse* y)
- f si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'origine*)
- f si dice **periodica** se $\exists\, T > 0$ t.c. $f(x+T) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*il grafico si ottiene traslando il pezzo* $[0, T]$ *in* $[T, 2T]$, $[T, 3T]$, $\dots$)

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari, allora $f(0) = 0$.

Se T è un periodo, anche $2T, 3T, 4T, \dots$ lo sono. Il **minimo periodo** è il più piccolo T (se esiste) per cui vale $f(x+T) = f(x)\ \forall\, T \in \mathbb{R}$.

Proprietà di **monotonia**:

- f si dice **monotona**:
  - f si dice **strettamente crescente** se $x > y \implies f(x) > f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
  - f si dice **strettamente decrescente** se $x > y \implies f(x) < f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente crescente** se $x > y \implies f(x) \geq f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente decrescente** se $x > y \implies f(x) \leq f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Se f è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente. Se f è strettamente decrescente allora è anche debolmente decrescente.

Se f è sia deb. crescente che deb. decrescente allora è **costante**.

Grafici, Iniettività e Suriettività

- Suriettiva $\iff$ in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *almeno* una freccia (*tutto l'asse* y *è "coperto"*)
- Iniettiva $\iff$ in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *al più* $(0|1)$ una freccia (*l'asse* y *è "coperto" solo una volta*)

- Retta orizzontale: $y = \lambda$
- Grafico di f: $y = f(x)$
- Intersezioni: $f(x) = \lambda$

$$f \text{ iniettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha al più una soluz. } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ suriettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha almeno una soluz. } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Se f è pari o periodica non è iniettiva. Se f è strettamente crescente o strettamente decrescente allora è iniettiva.