

---

# **Appunti di Fondamenti**

Fondamenti dell'Informatica - CdL Informatica 23/24

Federico Zotti

2023-10-20

## Indice

<b>1</b>	<b>Matematica discreta</b>	<b>4</b>
1.1	Fasi della matematica discreta . . . . .	4
1.2	Logica . . . . .	4
1.2.1	Algebra astratta . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Insiemi e Operazioni</b>	<b>5</b>
2.1	Numeri . . . . .	5
2.1.1	Numeri naturali . . . . .	5
2.1.2	Numeri interi . . . . .	5
2.1.3	Numeri razionali . . . . .	6
2.1.4	Numeri reali . . . . .	7
2.1.5	Numeri complessi . . . . .	7
2.1.6	Numeri booleani . . . . .	8
2.2	Insiemi . . . . .	8
2.2.1	Notazione . . . . .	9
2.2.2	Operazioni . . . . .	11
2.2.3	Famiglie di insiemi . . . . .	13
2.2.4	Partizioni . . . . .	14
2.3	Relazioni . . . . .	14
2.3.1	Ordinamenti negli insiemi . . . . .	14
2.3.2	Relazioni . . . . .	16
2.3.3	Relazioni tra oggetti . . . . .	17
2.3.4	Rappresentazione tabulare . . . . .	17
2.3.5	Rappresentazione matriciale . . . . .	17
2.3.6	Elementi di una relazione . . . . .	17
2.3.7	Relazioni n-arie . . . . .	18
2.3.8	Operazioni su relazioni . . . . .	18
2.3.9	Proprietà delle relazioni . . . . .	18
2.3.10	Identità . . . . .	19
2.3.11	Proprietà delle relazioni binarie . . . . .	19

2.4	Funzioni . . . . .	19
2.4.1	Funzione iniettiva . . . . .	20
2.4.2	Funzione suriettiva . . . . .	20
2.4.3	Funzione biiettiva . . . . .	20
2.4.4	Corrispondenza biunivoca . . . . .	20
2.4.5	Formalizzazione . . . . .	21
2.4.6	Punto fisso . . . . .	22
2.4.7	Operazioni . . . . .	22
2.4.8	Immagine inversa . . . . .	22
2.4.9	Funzione inversa . . . . .	22
2.4.10	Composizione di Funzioni . . . . .	23
2.4.11	Funzione caratteristica . . . . .	23
2.4.12	Multinsiemi . . . . .	24
2.5	Cardinalità . . . . .	24
2.5.1	Cardinalità tramite funzioni . . . . .	24
2.5.2	Cardinalità finite . . . . .	25
2.5.3	Numerabili . . . . .	25
2.5.4	Il continuo . . . . .	26
2.5.5	Gerarchia transfinita . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Strutture relazionali, Grafi e Ordinamenti</b>	<b>27</b>
3.1	Rappresentazioni . . . . .	27
3.1.1	Relazioni in un insieme . . . . .	27
3.1.2	Riflessività ed operazioni . . . . .	28
3.1.3	Simmetria ed operazioni . . . . .	28
3.1.4	Transitività ed operazioni . . . . .	29
3.1.5	Matrici booleane . . . . .	29
3.1.6	Operazioni su matrici booleane . . . . .	30
3.1.7	Prodotto booleano . . . . .	30
3.2	Composizione di relazioni . . . . .	31
3.3	Relazioni di Equivalenza . . . . .	31
3.3.1	Partizioni e classi di equivalenza . . . . .	32

---

3.4	Grafi . . . . .	33
3.4.1	Gradi . . . . .	33
3.4.2	Cammino . . . . .	34
3.4.3	Semicammino . . . . .	34
3.4.4	Ciclo . . . . .	34
3.4.5	Distanza . . . . .	35
3.4.6	Trovare le distanze: Algoritmo . . . . .	35
3.4.7	Definizione formale di grafo . . . . .	35
3.4.8	Sottografo . . . . .	36
3.4.9	Grafo aciclico orientato (DAG) . . . . .	36
3.4.10	Grafi etichettati . . . . .	36
3.4.11	Matrice di adiacenza . . . . .	36
3.4.12	Grafo completo . . . . .	37
3.4.13	Connettività . . . . .	37
3.4.14	Isomorfismi tra grafi . . . . .	37
3.5	Alberi . . . . .	37
3.5.1	Proprietà . . . . .	38
3.5.2	Rappresentazione gerarchica . . . . .	38
3.5.3	Cammini in un albero . . . . .	38
3.5.4	Profondità . . . . .	38
3.5.5	Alberi binari . . . . .	39

## 1 Matematica discreta

**Discreto:** composto di elementi distinti, separati tra di loro.

Un sistema è:

- **Discreto** se è costituito da elementi isolati
- **Continuo** se non ci sono *vuoti* tra gli elementi

I sistemi informatici si basano su un sistema *binario*, perciò discreto.

Possiamo approssimare un sistema continuo dividendolo in piccole parti (*discretizzazione* o *digitalizzazione*).

### 1.1 Fasi della matematica discreta

- **Classificazione:** individuare le caratteristiche comuni di entità diverse (*teoria degli insiemi*)
- **Enumerazione:** assegnare ad ogni oggetto un numero naturale (*contare*)
- **Combinazione:** permutarne e combinarne gli elementi (*grafi*)

Queste fasi guidano un **algoritmo**.

### 1.2 Logica

In filosofia, la **logica** è lo studio del ragionamento, dell'argomentazione, e dei procedimenti **inferenziali** per distinguere quelli *validi* da quelli *non validi*.

La **logica matematica** vede questi procedimenti come calcoli formali, con una struttura algoritmica.

Infatti, è tutto basato sull'**algebra di Boole**.

#### 1.2.1 Algebra astratta

L'algebra astratta studia le **strutture algebriche**, ovvero insiemi muniti di operazioni.

## 2 Insiemi e Operazioni

### 2.1 Numeri

#### 2.1.1 Numeri naturali

I numeri **naturali** sono i primi che impariamo, e nascono dall'attività di contare.

Essi formano un **insieme**, chiamato *insieme dei numeri naturali* ( $\mathbb{N}$ ).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots\}$$

**Contare** non è altro che assegnare ad ogni oggetto un numero naturale (in ordine).

$\mathbb{N}$  ha un *limite inferiore* (0), ma non ha un *limite superiore*, quindi  $\mathbb{N}$  è infinito.

##### 2.1.1.1 Definizione semiformale

- I numeri naturali hanno l'elemento 0
- Ogni elemento  $n$  ha (**esattamente**) un successore  $s(n)$
- 0 non è un successore di nessun elemento
- Due elementi diversi hanno successori diversi

Questa definizione è la base del **processo di induzione**.

Una proprietà è vera in tutto  $\mathbb{N}$  se e solo se:

- È vera in 0
- Se è vera in  $n$  allora è vera in  $s(n)$

È possibile anche iniziare da un numero arbitrario.

#### 2.1.2 Numeri interi

I numeri **interi** (relativi) è l'insieme dei numeri naturali preceduti da un segno “+” o “−”.

Questo insieme si denota con il simbolo  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -(n+1), -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots \}$$

Ogni intero ha un successore, ma anche un **predecessore** (non c'è un *minimo*).

I numeri interi positivi (più 0) formano  $\mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

### 2.1.2.1 Valore assoluto

Il **valore assoluto** di un numero intero è il numero privo di segno.

$$|-n| = n$$

$$|n| = n$$

L'**opposto** di un numero si ottiene cambiandogli il segno.

### 2.1.3 Numeri razionali

Razionale in questo caso si riferisce a **ratio** ossia **proporzione**. Indicano dunque una proporzione risultante da una divisione.

Si esprimono come rapporto di due numeri interi (*frazioni*).

$$\frac{m}{n}$$

Si indicano con il simbolo  $\mathbb{Q}$ .

#### 2.1.3.1 Rappresentazioni e Relazioni

Ogni numero razionale può essere rappresentato da un numero decimale finito o periodico.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

### 2.1.3.2 Densità

I numeri razionali sono **densi**: fra due razionali c'è sempre un altro numero.

Sono comunque **discreti**.

### 2.1.4 Numeri reali

I **numeri irrazionali** ( $\mathbb{I}$ ) sono quelli che non si possono esprimere tramite frazioni: hanno un'espansione decimale infinita e non periodica.

L'insieme dei **numeri reali** ( $\mathbb{R}$ ) contiene tutti i numeri che ammettono una rappresentazione decimale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

#### 2.1.4.1 La Retta reale

L'insieme dei numeri reali spesso viene rappresentato su una **retta** (ordine implicito).

A ogni punto della retta è associato un numero reale e viceversa (*corrispondenza biunivoca*).

### 2.1.5 Numeri complessi

I **numeri complessi** ( $\mathbb{C}$ ) estendono i reali per eseguire operazioni che non sono ben definite altrimenti.

Nascono dalla necessità di estrarre radici a numeri negativi.

Definiscono l'**unità immaginaria**  $i = \sqrt{-1}$ . Un numero complesso è  $a + bi$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



### 2.1.6 Numeri booleani

L'insieme dei **numeri booleani** è

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

## 2.2 Insiemi

Gli **insiemi**, le loro proprietà e le loro **operazioni** sono alla base della matematica moderna e dell'informatica.

Un sistema è **discreto** se costituito da elementi isolati e **continuo** se non vi sono spazi vuoti. In matematica, discreto si basa sul concetto di **cardinalità** (il "numero" di elementi che contiene).

Un insieme è discreto se (e solo se) i suoi elementi si possono **numerare**.

Un insieme è un raggruppamento di oggetti distinti e ben definiti.

Gli oggetti che formano l'insieme sono i suoi **elementi**. In un insieme, tutti gli elementi sono **distinti** e l'ordine non è rilevante.

Gli elementi di un insieme possono essere anch'essi insiemi.

Un tempo si pensava che la **teoria degli insiemi** poteva dare una base solida alla matematica. Esistono paradossi però che dicono il contrario.

Per esempio il paradosso del barbiere

In un villaggio vi è un solo barbiere, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. *Chi rade il barbiere?*

o il paradosso eterologico

Una parola è **autologica** se descrive se stessa (*"polisillabica"*, *"corta"*, *"leggibile"*).

Una parola è **eterologica** se non è autologica (*"polillabica"*, *"lunga"*, *"illeggibile"*).

*"Eterologica"* è eterologica?

Il più famoso di essi è il paradosso degli insiemi (*Bertrand Russel*)

Considerate l'insieme  $N$  di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi.  $N$  appartiene a se stesso?

Per costruire questo tipo di paradossi è necessario usare un'**autoreferenza** e una **negazione**.

Questa idea torna in diversi contesti per dimostrare l'impossibilità o inesistenza di certe strutture.

### 2.2.1 Notazione

Gli insiemi generici saranno denotati da lettere latine maiuscole

$$A, B, C, \dots$$

e i loro elementi con lettere latine minuscole

$$a, b, c, \dots$$

L'insieme senza elementi si chiama **vuoto** e si denota con  $\emptyset$ .

L'**uguaglianza** fra oggetti (elementi, insiemi, entità, ecc.) si denota con “ $=$ ”. La **disuguaglianza** si denota con “ $\neq$ ”.

L'uguaglianza ha tre importanti proprietà:

- **Riflessività**:  $A = A$
- **Simmetria**:  $A = B \iff B = A$
- **Transitività**: se  $A = B$  e  $B = C$  allora  $A = C$

Un insieme può avere diverse rappresentazioni:

- **Diagramma Eulero-Venn**
- **Rappresentazione estensionale**: elenco di tutti gli elementi  $\{\{x, y, z\}\}$ 
  - $\{\text{rosso, giallo, arancio}\}$ : insieme con tre elementi

- $\{\text{rosso, giallo, rosso}\}$ : insieme con due elementi
- $\{\emptyset\}$ : insieme con un elemento
- $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ : insieme dei numeri naturali
- $\{\emptyset, 1, 2, \{3\}\}$
- **Rappresentazione intensionale**: consiste nel formulare una proprietà  $\mathcal{P}$  caratteristica che distingue precisamente gli elementi dell'insieme ( $S = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ )
  - $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}$ : insieme dei numeri interi positivi
  - $\{x \mid x \text{ è un colore dell'arcobaleno}\}$
  - $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 3, x \leq 100\} = \{4, 5, \dots, 99, 100\}$
  - $\{x \mid x \text{ è un numero primo}\}$

Per ogni elemento  $x$  esiste l'insieme **singoletto**  $\{x\}$ .

Proprietà complesse si possono costruire combinando proprietà più semplici mediante operazioni **vero-funzionali**.

Un **sottoinsieme** di  $A$  è un insieme formato unicamente per (alcuni) elementi di  $A$ . Un sottoinsieme  $B$  di  $A$  è **proprio** se è diverso da  $A$  e da  $\emptyset$ .

L'insieme vuoto ammette esattamente un sottoinsieme:  $\emptyset$  (*sottoinsieme non proprio*). Un singoletto  $\{a\}$  ammette due sottoinsiemi:  $\emptyset$  e  $\{a\}$  (*sottoinsiemi non propri*).

Se  $A$  e  $B$  hanno gli stessi elementi, sono mutuamente sottoinsiemi

$$A = B \text{ se } A \subseteq B, B \subseteq A$$

L'inclusione soddisfa le proprietà:

- **Riflessività**:  $A \subseteq A$
- **Antisimmetria**:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B$
- **Transitività**:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \iff A \subseteq C$

L'insieme potenza (o insieme delle parti) di un insieme  $S$ , scritto  $\mathcal{P}(S)$  è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di  $S$ .

$$\mathcal{P}(S) = \{x \mid x \subseteq S\}$$

Esempi:

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\mathcal{P}(\{x, y\}) = ?$

Se  $S$  ha  $n$  elementi ( $n \geq 0$ ) allora  $\mathcal{P}(S)$  ha  $2^n$  elementi.

## 2.2.2 Operazioni

### 2.2.2.1 Unione

L'**unione** di due insiemi  $A$  e  $B$  si denota

$$A \cup B$$

ed è definita come

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Le proprietà dell'unione sono:

- **Idempotenza:**  $A \cup A = A$
- **Commutatività:**  $A \cup B = B \cup A$
- **Associatività:**  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Esistenza del neutro:**  $A \cup \emptyset = A$
- **Assorbimento:**  $A \cup B = B$  se  $A \subseteq B$
- **Monotonicità:**  $A \subseteq A \cup B$  e  $B \subseteq B \cup A$

### 2.2.2.2 Intersezione

L'**intersezione** di due insiemi  $A$  e  $B$  si denota

$$A \cap B$$

ed è definita come

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Le proprietà dell'intersezione sono:

- **Idempotenza:**  $A \cap A = A$
- **Commutatività:**  $A \cap B = B \cap A$
- **Associatività:**  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Annichilazione:**  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- **Assorbimento:**  $A \cap B = B$  se  $A \subseteq B$
- **Monotonicità:**  $A \cap B \subseteq A$  e  $A \cap B \subseteq B$

L'unione e l'intersezione distribuiscono una sull'altra

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### 2.2.2.3 Sottrazione

La **sottrazione** tra due insiemi  $A$  e  $B$  è definita come

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Le proprietà della sottrazione sono:

- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B$
- $A \setminus B \neq B \setminus A$

### 2.2.2.4 Differenza simmetrica

La differenza simmetrica tra  $A$  e  $B$  è

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Proprietà:

- $A \Delta A = \emptyset$
- $A \Delta \emptyset = A$
- $A \Delta B = B \Delta A$

### 2.2.2.5 Complementazione

Dato un insieme di riferimento  $U$  (chiamato **Universo**), il **complemento** assoluto di  $A$  è definito come:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\} = U \setminus A$$

Le proprietà della complementazione sono:

- $\overline{U} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = U$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$  (*terzo escluso*)
- $A \cup \overline{A} = U$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (*legge di De Morgan*)
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$  (*legge di De Morgan*)
- $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$

### 2.2.3 Famiglie di insiemi

Un insieme i cui elementi sono tutti insiemi viene chiamato **famiglia di insiemi** ( $\mathcal{F}$ ).

Le operazioni su una famiglia di insiemi sono:

$$\cup \mathcal{F} = \{x \mid x \in A \text{ per almeno un insieme } A \in \mathcal{F}\}$$

$$\cap \mathcal{F} = \{x \mid x \in A \forall A \in \mathcal{F}\}$$

Dunque

$$\cup \mathcal{P}(A) = A \quad \forall A$$

### 2.2.4 Partizioni

Una partizione di un insieme  $A \neq \emptyset$  è una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $A$  tale che:

- $\forall c \in \mathcal{F}, c \neq \emptyset$  (*non trivialità*)
- $\cup \mathcal{F} = A$  (*copertura*)
- se  $c \in \mathcal{F}, D \in \mathcal{F}$  e  $c \neq D$ , allora  $c \cap D = \emptyset$  (*disgiunzione*)

## 2.3 Relazioni

### 2.3.1 Ordinamenti negli insiemi

Ricordate che gli insiemi **non** sono ordinati

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

A volte è utile poter ordinare i loro elementi in modo chiaro.

#### 2.3.1.1 Coppia ordinata

Una **coppia ordinata** è una collezione di due elementi, dove si può distinguere il **primo** e il **secondo** elemento

$$\langle x, y \rangle$$

Il primo elemento è  $x$  e il secondo è  $y$ . Notare che esiste la coppia ordinata  $\langle x, x \rangle$ .

### 2.3.1.1.1 Formulazione Insiemistica

La coppia ordinata  $\langle x, y \rangle$  non è altro che l'insieme

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Sia  $\mathcal{F} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ .  $x$  è il **primo elemento**  $\iff x \in {}_n\mathcal{F}$  (*appartiene a tutti gli insiemi*).  $y$  è il **secondo elemento**  $\iff y \in {}_u\mathcal{F} \setminus {}_n\mathcal{F}$  (*non appartiene a tutti gli insiemi*) oppure  $\{y\} = {}_u\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F} = \{\{y\}\}$ ).

Notare che  $\langle x, x \rangle = \{\{x\}, \{x, x\}\}$ .

### 2.3.1.1.2 Definizione giusta

Vogliamo vedere che questa definizione **caratterizza** le coppie ordinate. Cioè, che

$$\langle a, b \rangle = \langle x, y \rangle \iff \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Le coppie ordinate sono **ben definite**.

### 2.3.1.1.3 Generalizzazione

Possiamo generalizzare le coppie ordinate a **tuple ordinate** di lunghezza  $n \geq 2$  ( $n$ -tuple ordinate) definendo

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$$

### 2.3.1.2 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , definiamo il prodotto cartesiano come

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B\}$$

$A \times B$  è l'insieme di tutte le coppie ordinate dove:



- il primo elemento appartiene ad  $A$
- il secondo elemento appartiene a  $B$

Notare che:

- $A \times B \neq B \times A$
- $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$

$A \times A$  è a volte denotato con  $A^2$ .

### 2.3.1.3 Sequenze

$S^n$  è l'insieme di tutte le  $n$ -tuple di elementi di  $S$  definito tramite prodotti cartesiani di  $S$ .

Una **sequenza finita** di elementi di  $S$  è un elemento di  $S^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ .

In altre parole, una sequenza è una tupla ordinata

$$\langle s_1, \dots, s_n \rangle$$

dove  $n \in \mathbb{N}$  e ogni  $s_i \in S$ .

### 2.3.1.4 Segmento

Data una sequenza finita  $\sigma = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ , una sequenza  $\sigma' = \langle s_k, s_{k+1}, \dots, s_\ell \rangle$  dove  $1 \leq k \leq \ell \leq n$  è chiamata un **segmento** di  $\sigma$ .

Il segmento è **iniziale** sse  $k = 1$ .

### 2.3.2 Relazioni

Una **relazione** tra gli elementi di due insiemi  $A$  e  $B$  non è altro che un sottoinsieme di  $A \times B$ .

Una relazione rappresenta un **collegamento** tra gli elementi di  $A$  e quelli di  $B$ .

### 2.3.3 Relazioni tra oggetti

Se la coppia ordinata  $\langle x, y \rangle$  appartiene a una relazione  $R \subseteq A \times B$ , si dice che  $x \in A$  ha come **corrispondente**  $y \in B$  nella relazione  $R$  oppure che  $x$  è *in relazione con*  $y$ .

### 2.3.4 Rappresentazione tabulare

Ogni relazione si può rappresentare graficamente tramite una tabella.

### 2.3.5 Rappresentazione matriciale

$R$  si può anche rappresentare tramite una **matrice booleana**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogni riga rappresenta un elemento dell'insieme  $A$  e ogni colonna rappresenta un elemento di  $B$ .

### 2.3.6 Elementi di una relazione

Sia  $R \subseteq A \times B$  una relazione

- Il **dominio** di  $R$  ( $\text{dom}(R)$ ) è l'insieme di tutti gli oggetti  $x \in A$  tali che  $\langle x, y \rangle \in R$  per qualche  $y \in B$ .

$$\text{dom}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B, \langle x, y \rangle \in R\}.$$

- Il **codominio** è l'insieme di tutti gli oggetti  $y \in B$  tali che  $\langle x, y \rangle \in R$  per qualche  $x \in A$ .

$$\text{codom}(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A, \langle x, y \rangle \in R\}.$$

- Il **campo** o **estensione** di  $R$  è  $\text{dom}(R) \cup \text{codom}(R)$ .

### 2.3.7 Relazioni n-arie

Il concetto di relazione può estendersi a tuple ordinate con **più di due** elementi.

Se gli elementi delle tuple appartengono allo stesso insieme  $A$ , allora una relazione  $n$ -aria è un sottoinsieme di  $A^n$ .

Esempi:

- $\{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$  è una relazione binaria su  $A$
- $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$  è la relazione d'ordine naturale su  $\mathbb{N}$
- $\{\langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = z^2\}$  è un'area geometrica

### 2.3.8 Operazioni su relazioni

Siano  $R, S \subseteq A \times B$  due relazioni

- $R \cup S$  ha tutte le coppie che appartengono a  $R$  o a  $S$
- $R \cap S$  ha tutte le coppie che appartengono ad entrambi  $R$  e  $S$
- $\bar{R} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R\} \subseteq A \times B$  è il **complemento** di  $R$
- $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\} \subseteq A \times B$  è la **relazione inversa** di  $R$

### 2.3.9 Proprietà delle relazioni

Siano  $R, S \subseteq A \times B$  due relazioni

- Se  $R \subseteq S$  allora  $\bar{S} \subseteq \bar{R}$
- $\overline{(R \cap S)} = \bar{R} \cup \bar{S}$
- $\overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S}$
- se  $R \subseteq S$  allora  $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

#### 2.3.9.1 Esempi

Siano  $A = \{a, b\}$ ,  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$ ,  $S = \{\langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle\}$  ( $R \subseteq A^2$ ;  $S \subseteq A^2$ ).

1.  $R \cap S = \{\langle a, b \rangle\}$
2.  $\overline{R \cup S} = \{\langle b, b \rangle\}$
3.  $R^{-1} = R$
4.  $S^{-1} \neq S$

### 2.3.10 Identità

Dato un insieme  $A$ , la relazione

$$I_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$$

dove ogni elemento è in relazione con se stesso è chiamata l'**identità** su  $A$ .

### 2.3.11 Proprietà delle relazioni binarie

Una relazione  $R \subseteq A^2$  è

- **Riflessiva** se  $\langle x, x \rangle \in R \forall x \in A$  ( $I_A \subseteq R$ )
- **Simmetrica** se  $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \in R$  ( $R = R^{-1}$ )
- **Antisimmetrica** se  $\langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in R \implies x = y$  ( $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ )
- **Antisimmetrica (def alternativa)** se  $x \neq y \wedge \langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \notin R$  ( $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ )
- **Transitiva** se  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R \implies \langle x, z \rangle \in R$

## 2.4 Funzioni

Una classe di relazioni binarie di particolare importanza sono le **funzioni** (o **applicazioni**).

Una funzione è una relazione  $R \subseteq A \times B$  tale che ad ogni  $a \in A$  corrisponde **al più** un elemento  $b \in B$ .

**Formalmente:** se  $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in R$  allora  $b = c$ .

**Notazione:**  $f : A \rightarrow B$

Se per ogni  $a \in A$  esiste **esattamente un**  $b \in B$  tale che  $\langle a, b \rangle \in R$ , allora  $f$  è una **funzione totale**.

**Riformulazione:** una relazione  $f \subseteq A \times B$  è una funzione se per ogni  $x \in \text{dom}(f)$  esiste un unico  $y \in B$  tale che  $\langle x, y \rangle \in f$ .  $f(x)$  denota tale elemento  $y$ .

Se  $x \in \text{dom}(f)$ , allora si dice che  $f$  è **definita** in  $x$ . Se  $A = \text{dom}(f)$  allora  $f$  è una funzione **totale**.

#### 2.4.1 Funzione iniettiva

Una funzione  $f$  è **iniettiva** se porta elementi distinti del dominio in elementi distinti del codominio (immagine).

$f : A \rightarrow B$  è iniettiva sse per ogni  $x, y \in A, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ .

#### 2.4.2 Funzione suriettiva

Una funzione  $f$  è **suriettiva** quando ogni elemento di  $B$  è immagine di almeno un elemento di  $A$  ossia, quando  $B = \text{codom}(f)$ .

$f : A \rightarrow B$  è suriettiva sse per ogni  $y \in B$  esiste un  $x \in A$  tale che  $f(x) = y$ .

#### 2.4.3 Funzione biiettiva

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  è **biiettiva** sse è iniettiva e suriettiva.

**Attenzione:**  $f$  può non essere totale.

- Ad ogni  $x \in \text{dom}(f)$  corrisponde esattamente un  $y \in B$
- Ad ogni  $y \in B$  corrisponde esattamente un  $x \in \text{dom}(f)$

#### 2.4.4 Corrispondenza biunivoca

Una **corrispondenza biunivoca** tra  $A$  e  $B$  è una relazione binaria  $R \subseteq A \times B$  tale che ad ogni elemento di  $A$  corrisponde uno ed un solo elemento di  $B$  e viceversa, ad ogni elemento di  $B$  corrisponde uno ed un solo elemento di  $A$ .

Tale  $R$  deve essere una funzione *totale*, *iniettiva* e *suriettiva*.

### 2.4.5 Formalizzazione

$$f \subseteq A \times B$$

$$\text{dom}(f) = \{x \in A \mid \exists y \in B. \langle x, y \rangle \in f\}$$

$$\text{codom}(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A. \langle x, y \rangle \in f\}$$

**Funzione** (parziale)

$$\forall a \in A. \forall x, y \in B. (\langle a, x \rangle \in f \wedge \langle a, y \rangle \in f) \implies x = y$$

**Funzione totale**

$$\forall a \in A. \exists! x \in B. \langle a, x \rangle \in f$$

**Funzione iniettiva**

$$\forall a \in A. \forall x, y \in B. (\langle a, x \rangle \in f \wedge \langle a, y \rangle \in f) \implies x = y \wedge$$

$$\forall a, b \in A. \forall x \in B. (\langle a, x \rangle \in f \wedge \langle b, x \rangle \in f) \implies a = b$$

**Funzione suriettiva**

$$\forall a \in A. \forall x, y \in B. (\langle a, x \rangle \in f \wedge \langle a, y \rangle \in f) \implies x = y \wedge$$

$$\forall x \in B. \exists a \in A. \langle a, x \rangle \in f$$

**Funzione biiettiva**

$$\forall a \in A. \forall x, y \in B. (\langle a, x \rangle \in f \wedge \langle a, y \rangle \in f) \implies x = y \wedge$$

$$\forall a, b \in A. \forall x \in B. (\langle a, x \rangle \in f \wedge \langle b, x \rangle \in f) \implies a = b \wedge$$

$$\forall x \in B. \exists a \in A. \langle a, x \rangle \in f$$

### 2.4.6 Punto fisso

Sia  $A$  un insieme e  $f : A \rightarrow A$  una funzione.

Un **punto fisso** di  $f$  è un elemento di  $A$  che coincide con la sua immagine

$$x = f(x)$$

### 2.4.7 Operazioni

Sia  $A$  un insieme.

Un' **operazione** ( $n$ -aria) su  $A$  è una funzione  $A^n \rightarrow A$ .

L'operazione è totale sse la funzione è totale.

### 2.4.8 Immagine inversa

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione e  $y \in B$  l'**immagine inversa** di  $f$  in  $y$  è

$$f^{-1} : B \rightarrow \mathcal{P}(A)$$
$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

**Nota:**  $f$  è iniettiva sse per ogni  $y \in B$ ,  $f^{-1}(y)$  ha al più un elemento.

### 2.4.9 Funzione inversa

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  è **invertibile** se esiste una funzione  $g : B \rightarrow A$  tale che per ogni  $x \in A$  e ogni  $y \in B$

$$g(f(x)) = x$$
$$f(g(y)) = y$$

In questo caso,  $g$  è l'**inverso** di  $f$  e si rappresenta come  $f^{-1}$ .

Una funzione  $f$  è invertibile sse è iniettiva.  $f^{-1}$  è totale sse  $f$  è suriettiva.

### 2.4.10 Composizione di Funzioni

La **composizione** di due funzioni si riferisce all'applicazione di una funzione al risultato di un'altra.

Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  due funzioni. La funzione composta  $g \circ f : A \rightarrow C$  è definita per ogni  $x \in A$  da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$(g \circ f)(x)$  è definita sse  $f(x)$  e  $g(f(x))$  sono definite.

Se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  sono due funzioni, allora la composizione  $g \circ f$  è solo definibile se  $\text{codom}(f) \subseteq C$ .

Le proprietà della composizione:

- **Associativa:**  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Se  $f$  e  $g$  sono entrambe iniettive, allora  $f \circ g$  è **iniettiva**
- Se  $f$  e  $g$  sono entrambe suriettive, allora  $f \circ g$  è **suriettiva**
- Se  $f$  e  $g$  sono entrambe invertibili, allora  $f \circ g$  è **invertibile** ( $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ )

### 2.4.11 Funzione caratteristica

I sottoinsiemi di un insieme  $A$  si possono anche rappresentare tramite una funzione detta **caratteristica**.

La funzione caratteristica di un insieme  $S \subseteq A$  è la funzione  $f_S : A \rightarrow \{0, 1\}$  dove

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x \notin S \\ 1 & x \in S \end{cases}$$

Per ogni  $x \in A$

- $f_{S \cap T}(x) = f_S(x) \cdot f_T(x)$
- $f_{S \cup T}(x) = f_S(x) + f_T(x) - f_S(x) \cdot f_T(x)$
- $f_{S \Delta T}(x) = f_S(x) + f_T(x) - 2 \cdot f_S(x) \cdot f_T(x)$



### 2.4.12 Multinsiemi

Un **multinsieme** è una variante di un insieme dove gli elementi si possono ripetere

$$\{a, a, b, c, c, c\} \neq \{a, b, c\}$$

Formalmente un multinsieme è una funzione da un insieme a  $\mathbb{N}$

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}$$

che esprime quante volte si ripete ogni elemento nel multinsieme ( $A = \{a, b, c, d\}$ )

$$\{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle d, 0 \rangle\}$$

## 2.5 Cardinalità

I **numeri cardinali** si utilizzano per misurare gli insiemi (indicare la loro *grandezza*). Se un insieme è **finito**, la sua cardinalità è un numero naturale (il numero di elementi). Con i numeri cardinali, possiamo anche misurare e classificare insiemi **infiniti**.

### 2.5.1 Cardinalità tramite funzioni

Georg Cantor utilizzò le proprietà delle funzioni per paragonare la cardinalità degli insiemi.

Sia  $f$  una funzione  $f : A \rightarrow B$

- Se  $f$  è *suriettiva* allora  $B$  non è “più grande” di  $A$
- Se  $f$  è *totale* e *iniettiva* allora  $A$  non è “più grande” di  $B$

Due insiemi sono **equipotenti** (hanno la stessa cardinalità) sse esiste una funzione **biunivoca** fra di loro.

$$A \sim B$$

### 2.5.2 Cardinalità finite

Se  $A$  ha  $n$  elementi, allora  $A \sim \{1, \dots, n\}$ . In questo caso si dice che  $A$  è **finito** e ha **cardinalità** (o potenza)  $n$ .

Utilizziamo la notazione

$$|A| = n$$

I numeri naturali si utilizzano come cardinali finiti.

Se  $|A| = n$  allora  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ .

### 2.5.3 Numerabili

Basati su questa definizione, chiamiamo **numerabili** tutti gli insiemi che hanno la cardinalità di  $\mathbb{N}$ . I suoi elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i naturali.

$$A \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$$

La cardinalità di  $\mathbb{N}$  è chiamata  $\aleph_0$ .

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$\aleph_0$  è il più piccolo dei numeri cardinali **transfiniti** (i cardinali per misurare insiemi infiniti). Ovviamente  $\aleph_0$  non è un numero naturale.

I seguenti insiemi sono numerabili:

- L'insieme dei numeri pari
- L'insieme dei numeri primi
- L'insieme dei numeri interi  $\mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{se } x \text{ pari} \\ \lceil \frac{x}{2} \rceil & \text{se } x \text{ dispari} \end{cases}$$

- Il prodotto cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- I numeri razionali  $\mathbb{Q} (\subset \mathbb{N} \times \mathbb{N})$

#### 2.5.4 Il continuo

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Denotiamo per convenzione  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$ . Allora  $|\mathbb{R}| \geq 2^{\aleph_0}$ .

Cantor dimostro che  $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$  (in realtà che  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ). Dunque  $\mathbb{R}$  non è numerabile.

##### 2.5.4.1 Teorema di Cantor

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

Dobbiamo dimostrare che *non esiste* una funzione biunivoca  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

Supponiamo che esiste una tale funzione  $f$ . Definiamo

$$Z = \{z \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\} \subseteq \mathbb{N}$$

Siccome  $f$  è biunivoca (quindi suriettiva), esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $f(k) = Z$ .

**Domanda:**  $k \in Z$ ?

Se  $k \in Z$ , allora per definizione  $k \notin f(k) = Z$ . Se  $k \notin Z$ , allora  $k \notin f(k)$  e quindi per definizione  $k \in Z$ .

**Conclusione:** la funzione  $f$  non può esistere.

### 2.5.5 Gerarchia transfinita

Cantor definì la gerarchia dei numeri transfiniti

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

L'**ipotesi del continuo** dice che  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ . Non ci sono insiemi di cardinalità intermedia fra  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ .

## 3 Strutture relazionali, Grafi e Ordinamenti

### 3.1 Rappresentazioni

Le relazioni possono essere rappresentate da diverse forme:

- **Rappresentazione per elencazione:** descrivere l'insieme di coppie ordinate ( $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\}$ )
- **Rappresentazione sagittale:** collegare con delle frecce gli elementi che verificano la relazione
- **Rappresentazione tramite diagramma cartesiano:** se  $S$  e  $T$  sono sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ , rappresentare le coppie come coordinate sul piano cartesiano
- **Rappresentazione tramite tabella:** una matrice booleana con per colonne gli elementi dell'insieme di arrivo e per righe l'insieme di partenza.

#### 3.1.1 Relazioni in un insieme

Una relazione  $R \subseteq S \times S$  è detta **relazione in  $S$** . In una relazione in  $S$ , la rappresentazione sagittale collassa in un **grafo**. Usiamo lo stesso insieme per l'origine e la destinazione di ogni freccia. Formalmente un grafo è costituito da **nodi** collegati fra loro da frecce (o **spigoli**). Se  $\langle x, y \rangle \in R$ , disegniamo uno spigolo da  $x$  a  $y$ .

Le proprietà di una relazione sono (*again*):

- **Riflessiva** se:  $\langle x, x \rangle \in R \ \forall x \in S$  (*ogni nodo ha un cappio*)

- **Irriflessiva** se:  $\langle x, x \rangle \notin R \ \forall x \in S$  (*nessun nodo ha un cappio*)
- **Simmetrica** se:  $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \in R$  (*ogni spigolo ha il suo inverso*)
- **Asimmetrica** se:  $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \notin R$  (*nessuno spigolo ha il suo inverso e nessun nodo ha un cappio*)
- **Antisimmetrica** se:  $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \implies x = y$  (*nessuno spigolo ha il suo inverso (escluso il cappio)*)
- **Transitiva** se:  $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \implies \langle x, z \rangle \in R$

Una relazione  $R \subseteq S \times S$  in  $S$  è

- **Connessa** se ogni due elementi sono collegati.  $\forall x, y \in S$  se  $x \neq y$  allora  $\langle x, y \rangle \in R$  oppure  $\langle y, x \rangle \in R$
- **Relazione di equivalenza** se è riflessiva, transitiva e simmetrica

La relazione vuota  $\emptyset \subseteq S \times S$  è irreflessiva, simmetrica, asimmetrica, antisimmetrica e transitiva. L'identità  $I_S$  è riflessiva, simmetrica e transitiva (è una relazione di equivalenza).

### 3.1.2 Riflessività ed operazioni

Siano  $R$  ed  $R'$  due relazioni su  $S$

1. Se  $R$  è riflessiva,  $R^{-1}$  è riflessiva (*stesso per irreflessibilità*)
2.  $R$  è riflessiva sse  $\bar{R}$  è irreflessiva
3. Se  $R$  ed  $R'$  sono riflessive, allora anche  $R \cup R'$  e  $R \cap R'$  sono riflessive (*stesso per irreflessibilità*)

### 3.1.3 Simmetria ed operazioni

Siano  $R$  ed  $R'$  due relazioni su  $S$

1.  $R$  è simmetrica sse  $R = R^{-1}$
2. Se  $R$  è simmetrica, allora  $R^{-1}$  e  $\bar{R}$  sono simmetriche
3.  $R$  è antisimmetrica sse  $R \cap R^{-1} \subseteq I_S$
4.  $R$  è asimmetrica sse  $R \cap R^{-1} = \emptyset$
5. Se  $R$  ed  $R'$  sono simmetriche, allora anche  $R \cup R'$  e  $R \cap R'$  sono simmetriche

### 3.1.4 Transitività ed operazioni

Se  $R$  ed  $R'$  sono transitive allora  $R \cap R'$  è transitiva.  $R \cup R'$  non è necessariamente transitiva.

### 3.1.5 Matrici booleane

Una matrice booleana è una matrice a valori  $\{0, 1\}$ . La matrice booleana associata a  $R \subseteq S \times T$  si denota  $M_R$ . Se  $|S| = n$  e  $|T| = m$ ,  $M_R$  ha  $n$  righe e  $m$  colonne.

La riga  $i$  corrisponde all'elemento  $s_i \in S$ , la colonna  $j$  corrisponde all'elemento  $t_j \in T$  ed è tale che

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle s_i, t_j \rangle \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 3.1.5.1 Proprietà di una matrice booleana

Se  $R$  è una relazione su  $S$ ,  $M_R$  ha le stesse proprietà della visualizzazione tabulare.

- $R$  è **riflessiva** sse  $M_R$  ha tutti 1 sulla diagonale principale
- $R$  è **irriflessiva** sse  $M_R$  ha tutti 0 sulla diagonale principale
- $R$  è **simmetrica** sse  $M_R$  è simmetrica
- $R$  è **asimmetrica** sse per ogni  $i, j$ , se  $m_{ij} = 1$ , allora  $m_{ji} = 0$
- $R$  è **antisimmetrica** sse per ogni  $i \neq j$ , se  $m_{ij} = 1$ , allora  $m_{ji} = 0$
- $M_{R^{-1}}$  è la trasposta di  $M_R$
- $\overline{M_R}$  si ottiene scambiando 0 e 1 in  $M_R$

$$R = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.1.6 Operazioni su matrici booleane

Se  $M$  e  $N$  sono due matrici booleane di dimensioni  $n \times m$ ,  $M \sqcup N$  (il **join** di  $M$  e  $N$ ) è la matrice booleana  $L$  di dimensioni  $n \times m$  i cui elementi sono

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij} = 1 \vee n_{ij} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$M \sqcap N$  (il **meet** di  $M$  e  $N$ ) è la matrice booleana  $L$  di dimensione  $n \times m$  i cui elementi sono

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & m_{ij} = 1 \wedge n_{ij} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\sqcup$  e  $\sqcap$  sono commutative, associative e distributive fra di loro.

### 3.1.7 Prodotto booleano

Siano  $M$  e  $N$  matrici booleane di dimensioni  $n \times m$  e  $m \times p$  rispettivamente. Il loro **prodotto booleano** è la matrice  $L = M \odot N$  di dimensioni  $n \times p$  dove

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists k, 1 \leq k \leq m \text{ t.c. } m_{ik} = 1 \wedge n_{kj} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa operazione è associativa ma non commutativa.

YT Link con spiegazione<sup>1</sup>.

### 3.2 Composizione di relazioni

Dati  $R_1 \subseteq S \times T$ ,  $R_2 \subseteq T \times Q$ :

$$R_2 \circ R_1 = \{ \langle x, y \rangle \in S \times Q \mid \exists z \in T. \langle x, z \rangle \in R_1, \langle z, y \rangle \in R_2 \}$$

$R_2 \circ R_1$  è la **composizione** di  $R_1$  e  $R_2$ .

La composizione si può calcolare tramite il prodotto di matrici booleane.

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$$

### 3.3 Relazioni di Equivalenza

Una **relazione di equivalenza** ci aiuta a creare blocchi di elementi che hanno *qualcosa* in comune. Sono relazioni che si comportano “come l’uguaglianza” tra oggetti. Dal punto di vista di una proprietà data, **non** esistono differenze tra due elementi in una relazione di equivalenza.

**Def:** una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è detta **relazione di equivalenza**.

**Esempio:**

- Appartenere alla stessa classe
- Essere nati nello stesso anno
- Essere parallele nell’insieme delle rette
- ...

Se  $f : A \rightarrow B$  è una funzione totale, allora la relazione

$$R := \{ \langle x, y \rangle \in A \times A \mid f(x) = f(y) \}$$

---

<sup>1</sup><https://youtu.be/BjTeDlpj-ts?si=snvhdZvQByBGinl>



è una relazione di equivalenza.

La rappresentazione sagittale di una relazione di equivalenza consiste di diversi grafi totalmente collegati.

### 3.3.1 Partizioni e classi di equivalenza

Dividendo  $S$  in gruppi i cui elementi sono “uguali”, possiamo studiare insiemi grandi osservando soltanto pochi elementi. Questi gruppi sono chiamati **classi di equivalenza**.

Sia  $S$  un insieme. Una partizione di  $S$  è una famiglia di insiemi  $\mathcal{P} = \{T_1, \dots, T_n\}$ ,  $T_i \subseteq S$ ,  $1 \leq i \leq n$  tali che:

- $T_i \neq \emptyset$  per ogni  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$
- $T_i \cap T_j = \emptyset$  per ogni  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$
- $\cup \mathcal{P} = S$

Se  $R$  è una **relazione di equivalenza** su  $S$  allora  $T \neq \emptyset \subseteq S$  è una classe di equivalenza se per ogni  $x \in S$ :

$$x \in T \iff \{y \in S \mid \langle x, y \rangle \in R\} = T$$

Cioè,  $x$  è in relazione con tutti e soltanto quegli elementi di  $T$ .

Sia  $S$  un insieme e  $R$  una relazione di equivalenza su  $S$ . Ogni elemento  $x \in S$  definisce una classe di equivalenza

$$[x]_R = \{y \in S \mid \langle x, y \rangle \in R\}$$

La famiglia di insiemi  $\{[x]_R \mid x \in S\}$  (gli elementi sono le classi di equivalenza di  $S$ ) è chiamato l'**insieme quoziente** di  $S$  rispetto a  $R$  (indicato con  $S/R$ ). L'insieme quoziente è una partizione di  $S$ .

**Esempio:** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . La relazione  $\simeq_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definita come

$$x \simeq_n y \iff x \equiv y \pmod{n} \leftrightarrow (\text{ossia } (x \pmod{n}) = (y \pmod{n}))$$

è una relazione di equivalenza.

Per  $n = 4$ ,  $\simeq_4$  definisce 4 classi di equivalenza.

$$[x] = \{x + 4k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$[0] = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 5, 9, 13, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$[3] = \{3, 7, 11, 15, \dots\}$$

L'insieme quoziente  $\mathbb{N} / \simeq_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$  è spesso indicato con  $\mathbb{N}_4$ .

### 3.4 Grafi

Un grafo è definito da

- Un insieme di **nodi** (chiamati anche *vertici*)
- Collegamenti tra vertici che possono essere:
  - Orientati (**archi**)
  - Non orientati (**spigoli**)
- (eventualmente) Dati associati ai nodi e collegamenti (**etichette**)

I grafi possono rappresentare **relazioni binarie**.

#### 3.4.1 Gradi

Un arco che va da  $v$  a  $w$  è **uscente** da  $v$  ed entrante in  $w$ . Il numero di archi uscenti dal nodo  $v$  è il **grado di uscita** di  $v$ . Il numero di archi entranti in  $v$  è il **grado in ingresso** di  $v$ .

Un nodo è chiamato:

- **Sorgente** se non ha archi entranti (*grado di entrata 0*)

- **Pozzo** se non ha archi uscenti (*grado di uscita 0*)
- **Isolato** se non ha archi né uscenti né entranti

I nodi  $v$  e  $w$  sono **adiacenti** se c'è un arco tra  $v$  e  $w$  (in qualunque direzione). Questo arco è **incidente** su  $v$  e  $w$ . Il grado di  $v$  è il numero di nodi adiacenti a  $v$ .

### 3.4.2 Cammino

Un **cammino** è una sequenza **finita** di nodi

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

tali che per ogni  $i$ ,  $1 \leq i < n$ , esiste un arco uscente da  $v_i$  ed entrante in  $v_{i+1}$ . Questo cammino va da  $v$  a  $w$  se  $v_1 = v$  e  $v_n = w$ .

### 3.4.3 Semicammino

Un **semicammino** è una sequenza finita di nodi

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

tali che per ogni  $i$ ,  $1 \leq i < n$ , esiste un arco che collega  $v_i$  e  $v_{i+1}$  in **direzione arbitraria**.

La **lunghezza** di un (semi)cammino è il numero di archi che lo compongono ( $n - 1$ ).

Un (semi)cammino è **semplice** se tutti i nodi nella sequenza sono diversi (anche se  $v_1 = v_n$ ).

Un grafo è **connesso** se esiste sempre un semicammino tra due nodi qualsiasi.

### 3.4.4 Ciclo

Un **ciclo** intorno al nodo  $v$  è un cammino tra  $v$  e  $v$ . Un **semiciclo** intorno al nodo  $v$  è un semicammino tra  $v$  e  $v$ . Un **cappio** intorno a  $v$  è un ciclo di lunghezza 1.

### 3.4.5 Distanza

La **distanza** da  $v$  a  $w$  è la lunghezza del cammino *più corto* tra  $v$  e  $w$ .

- La distanza da  $v$  a  $v$  è sempre 0
- Se non c'è nessun cammino da  $v$  a  $w$  allora la distanza è infinita ( $\infty$ )

In un grafo ordinato, la distanza da  $v$  a  $w$  **non** è sempre uguale alla distanza da  $w$  a  $v$ .

### 3.4.6 Trovare le distanze: Algoritmo

Ricerca in **ampiezza** delle distanze da  $v$  ad ogni nodo.

#### Inizializzazione:

- Segnare  $v$  come **visitato** con distanza  $d(v) = 0$
- Segnare altri nodi come **non visitato**

#### Ciclo:

- Trovare un nodo  $w$  **visitato** con distanza *minima*  $d(w) = n$
- Segnare  $w$  come **esplorato**
- Per ogni nodo  $w'$  incidente da  $w$ : se  $w'$  è **non visitato**, segnare  $w'$  come **visitato** e  $d(w') = n + 1$

**Finalizzazione:** ad ogni nodo  $w$  **non visitato** assegnare  $d(w) = \infty$ .

### 3.4.7 Definizione formale di grafo

Un **grafo orientato** è una coppia  $G = (V, E)$  dove

- $V$  è un insieme di **nodi**
- $E \subseteq V \times V$  è una relazione binaria in  $V$  (**archi**)

Un **grafo non orientato** è un grafo orientato dove  $E$  è una relazione **simmetrica**. In questo caso gli archi sono rappresentati come **coppie non ordinate**  $(v, w)$  ( $(v, w) = (w, v)$ ). Graficamente togliamo le frecce (l'ordine) agli archi.

### 3.4.8 Sottografo

Il grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$  è un **sottografo** di  $G_2 = (V_2, E_2)$  sse  $V_1 \subseteq V_2$  e  $E_1 \subseteq E_2$ . Un sottografo si ottiene togliendo nodi e/o archi dal grafo.

Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Il sottografo **indotto** da  $V' \subseteq V$  è il grafo che ha soltanto archi adiacenti agli elementi di  $V'$ . Formalmente è il grafo  $G = (V', E')$  dove

$$E' = \{ \langle v, w \rangle \in E \mid v, w \in V' \}$$

### 3.4.9 Grafo aciclico orientato (DAG)

Un grafo orientato senza cicli si chiama **grafo aciclico orientato**.

In un DAG non esiste nessun cammino da un nodo a se stesso

### 3.4.10 Grafi etichettati

Un **grafo etichettato** è una tripla  $G = (V, E, \ell)$  dove

- $(V, E)$  è un grafo
- $\ell : E \rightarrow L$  è una funzione totale che associa ad ogni arco  $e \in E$  un' **etichetta** da un insieme  $L$

Diamo un'etichetta ad ogni arco del grafo.

Un grafo etichettato può rappresentare una **relazione ternaria** (e viceversa).

I nomi e le etichette sono spesso irrilevanti.

### 3.4.11 Matrice di adiacenza

La **matrice di adiacenza** di un grafo  $G = (V, E)$  è la matrice booleana della relazione  $E$ .

La matrice di adiacenza di grafi non orientati è **sempre simmetrica**.

### 3.4.12 Grafo completo

Un **grafo completo** collega ogni nodo con tutti gli altri nodi (ma non con se stesso).

La sua matrice di adiacenza ha 0 su tutta la diagonale ed 1 sulle altre posizioni.

### 3.4.13 Connettività

Ricordiamo che  $G = (V, E)$  è **connesso** se per ogni  $v, w \in V$  esiste un **semicammino** da  $v$  a  $w$ .  $G$  è **fortemente connesso** se per ogni due nodi  $v, w \in V$  esiste un **cammino** da  $v$  a  $w$ .

In un grafo fortemente connesso:

- Esiste sempre un ciclo che visita **ogni** nodo (non necessariamente semplice)
- Non ci sono né sorgenti né pozzi

### 3.4.14 Isomorfismi tra grafi

Due grafi  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  sono **isomorfi** se esiste una funzione biunivoca  $f : V_1 \rightarrow V_2$  tale che

$$\langle v, w \rangle \in E_1 \iff \langle f(v), f(w) \rangle \in E_2$$

L'isomorfismo  $f$  mantiene la struttura del grafo  $G_1$ , ma sostituisce i nomi dei vertici con quelli di  $G_2$ . Due grafi isomorfi sono in realtà lo **stesso grafo** con i nodi rinominati.

## 3.5 Alberi

Un **albero** è un DAG **connesso** tale che

- Esiste **esattamente un** nodo sorgente (**radice dell'albero**)
- Ogni nodo diverso dalla radice ha **un solo** arco entrante

I nodi pozzo di un'albero sono chiamati **foglie** o **nodì esterni**. Tutti gli altri nodi sono chiamati **interni**. Per analogia con gli **alberi genealogici**, le relazioni tra i nodi usano nomi come *padre*, *figlio*, *discendente*, ...

### 3.5.1 Proprietà

Il grado di **ingresso** di un nodo è:

- 1 se non è la radice
- 0 se è la radice

Il grado di **uscita** di un nodo non ha restrizioni.

Per ogni nodo  $v$  che non è la radice, esiste *esattamente un* cammino dalla radice a  $v$ .

Un albero non può essere mai vuoto (la radice esiste sempre).

Se un albero è finito, allora esiste *almeno* una foglia (che può essere anche la radice).

I nodi **intermedi** sono contemporaneamente padre e figlio.

### 3.5.2 Rappresentazione gerarchica

Gli alberi spesso rappresentano **strutture gerarchiche**. In questo caso, l'ordine è **implicito** (gli archi si disegnano **senza frecce**).

### 3.5.3 Cammini in un albero

In un albero c'è *esattamente un* **cammino** dalla radice a qualunque nodo  $v$  diverso dalla radice. Ogni nodo  $w$  in questo cammino è un **ascendente** di  $v$  (oppure *avo*) e  $v$  è un **discendente** di  $w$  (la radice è l'unico nodo senza discendenti). Se il cammino da  $w$  a  $v$  ha lunghezza 1, allora  $w$  è il *padre* di  $v$  e  $v$  è un figlio di  $w$ .

### 3.5.4 Profondità

La **profondità** di un nodo  $v$  è la lunghezza del cammino dalla radice a  $v$ .

L'**altezza** di un albero è la profondità massima dei suoi nodi.

### 3.5.5 Alberi binari

Un **albero binario** è un albero dove ogni nodo ha al massimo due figli. I figli di un nodo in un albero binario sono **ordinati** (*figlio sinistro* e *figlio destro*).