# Appunti di Geometria e Algebra Lineare

Algebra lineare e Geometria (prof. Borghesi) - CdL Informatica Unimib - 23/24

Federico Zotti

14 Mar 2024

# Indice



# 1 Insiemi

> Tutto uguale a fondamenti.

## 1.1 Sottoinsieme

> - $\subset$ indica un sottoinsieme (quello che precedentemente era definito come $\subseteq$)
> - $\subsetneq$ indica un sottoinsieme proprio (quello che precedentemente era definito come $\subset$)

## 1.2 Unione disgiunta

$$A = \{ a, b, c \}$$

$$B = \{ x, b, z \}$$

$$A \coprod B = \{ a, b_A, c, x, b_B, z \}$$

Gli elementi doppi vengono considerati due volte.

## 1.3 Complemento

$$B \setminus A = \{ x \in B : x \notin A \}$$

## 1.4 Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$$

$$B \times A = \{ (x, y) : x \in B, y \in A \}$$

> Notare che le coppie vengono denotate da parentesi tonde, e non angolate.

| **Oss:** supponendo $x_0 \neq y_0$, si noti che $(x_0, y_0) \neq (y_0, x_0)$.

### 1.4.1 Prodotto cartesiano di tre insiemi

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$
$$B = \{ 4, 5, 6 \}$$
$$C = \{ 8, 9 \}$$

$$A \times B = \{ (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), \dots \}$$
$$(A \times B) \times C = \{ \big((1,4),8\big), \big((1,4),9\big), \big((1,5),8\big), \big((1,5),9\big), \dots \}$$
$$A \times (B \times C) = \{ \big(1,(4,8)\big), \big(1,(4,9)\big), \big(1,(5,8)\big), \big(1,(5,9)\big), \dots \}$$
$$A \times B \times C = \{ \big(1,4,8\big), \big(1,4,9\big), \big(1,5,8\big), \big(1,5,9\big), \dots \}$$

# 2 Funzioni

Una funzione è una corrispondenza tra un elemento di un insieme ad un elemento di un altro insieme.

> Notare che le funzioni non vengono considerate insiemi, a differenza di fondamenti.

Due funzioni $f : A \to B, g : C \to D$ sono uguali ($f = g$) sse

1. $A = C, B = D$
2. $f(x) = g(x), \forall x \in A$

$f(x)$ viene chiamata immagine di $x$ tramite $f$ e $g(x)$ immagine di $x$ tramite $g$.

## 2.1 Notazione

$$f : A \to B$$

- $A$ è il **dominio** di $f$
- $B$ è il **codominio** di $f$
- Sia $S \subset A$, allora $f(S)$ è l'**immagine di $S$ tramite $f$**

$$f(S) = \{ b \in B : \exists\, a \in S \text{ con } f(a) = b \}$$

Ovvero $f(S)$ è l'insieme che contiene tutte le immagini degli elementi di $S$ tramite $f$. Se si restringe il dominio di $f$ da $A$ ad $S$, si crea una nuova funzione $f|_S$.

> **Attenzione:** $\subset$ è solo un'inclusione insiemistica. (Più avanti verranno introdotti gli spazi vettoriali).

L'immagine di $f = f(A)$. Non bisogna confondere l'immagine di una funzione con il suo codominio, perché il codominio potrebbe essere più grande della sua immagine.

- Sia $R \subset B$, allora $f^{-1}(R)$ è la **controimmagine di $R$ tramite $f$**

$$f^{-1}(R) = \{ a \in A : f(a) \in R \}$$

- $f$ è **iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in A$, allora $f(a_1) \neq f(a_2)$
- $f$ è **suriettiva** se $\forall b \in B, \exists a_b \in A : f(a_b) = b$ ($Imm(f) := f(A)$ deve essere uguale a $B$)

> **Oss:** affinché $f : A \to B$ sia una funzione deve avvenire:
>
> 1. $\forall x \in A, \exists f(x) \in B$
> 2. $f(x)$ è un solo elemento di $B$

- $f$ è **biiettiva** (o **biunivoca**) se è sia iniettiva che suriettiva
- Siano $f : A \to B, g : B \to D$ due funzioni, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (**composizione**)

## 3 Campi

> **Def:** un **campo** è un insieme dotato di due operazioni $(+, \cdot)$. Deve avere tre proprietà:
>
> 1. $(K, +)$ è un gruppo abeliano
>    - $+ : K \times K \to K$ *(l'operazione non esce dal gruppo)*
>    - $a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \forall a, b, c \in K$ *(proprietà associativa)*
>    - $a + 0 = 0 + a = a \qquad \forall a \in K$ *(esistenza del neutro)*
>    - $\forall a \in K \quad \exists -a \in K$ t.c. $-a + a = a + (-a) = 0$ *(esistenza dell'opposto)*
>    - $a + b = b + a \qquad \forall a, b \in K$ *(proprietà commutativa)*

2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

   - $\cdot : K \times K \to K$ *(l'operazione non esce dal gruppo)*
   - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad \forall\, a, b, c \in K$ *(proprietà associativa)*
   - $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \forall\, a \in K$ *(esistenza del neutro)*
   - $\forall\, a \in K \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in K \setminus \{0\}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *(esistenza dell'opposto)*
   - $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall\, a, b \in K$ *(proprietà commutativa)*

3. Il prodotto è distributivo rispetto alla somma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall\, a, b, c \in K$

## 4 Spazi vettoriali

Siano $V$ un **insieme** e $K$ un **campo** (per es. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

> Attenzione a non confondere i due insiemi. Anche se sono lo stesso o uno è sottoinsieme dell'altro, rimangono due insiemi distinti.

> Gli elementi di $V$ si chiamano **vettori**, mentre gli elementi di $K$ si chiamano **scalari**.

**Def:** $V$ è uno **spazio vettoriale su un campo** $K$ se esistono due operazioni su $V$:

**1.** "+" $: V \times V \to V \qquad (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Con proprietà:

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$ *(associatività)*
- $\exists \vec{0} \in V : \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$ *(esistenza dell'elemento neutro)*
- $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$ *(esistenza degli opposti)*
- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ *(commutatività)*

> Ciò vuol dire che $(V, +)$ è un gruppo abeliano.

**2.** "$\cdot$" $: K \times V \to V \qquad (\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$ *(prodotto per scalare)*

**Attenzione:** l'operazione $\vec{v} \cdot \alpha$ non è definita.

Con proprietà:

- $(\lambda_1 \underset{K}{+} \lambda_2) \underset{V}{\cdot} \vec{v} = \lambda_1 \underset{V}{\cdot} \vec{v} \underset{V}{+} \lambda_2 \underset{V}{\cdot} \vec{v} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$ *(distributività)*
- $\lambda \underset{V}{\cdot} (\vec{v}_1 \underset{V}{+} \vec{v}_2) = \lambda \underset{V}{\cdot} \vec{v}_1 \underset{V}{+} \lambda \underset{V}{\cdot} \vec{v}_2 \quad \forall \lambda \in K, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
- $(\lambda_1 \underset{K}{\cdot} \lambda_2) \underset{V}{\cdot} \vec{v} = \lambda_1 \underset{V}{\cdot} (\lambda_2 \underset{V}{\cdot} \vec{v}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$
- $1_K \underset{V}{\cdot} \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

**Oss:** $V$ (come ogni altro spazio vettoriale) non ha un suo prodotto interno, cioè non esiste un vettore "$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$".

Queste proprietà ne implicano altre (corollari). Si può dimostrare che, se $V$ è uno spazio vettoriale su $K$, allora:

- $0 \underset{V}{\cdot} \vec{v} = \vec{0} \qquad \forall \vec{v} \in V$
- $\lambda \underset{V}{\cdot} \vec{0} = \vec{0} \qquad \forall \lambda \in K$
- $-1 \underset{V}{\cdot} \vec{v} = -\vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in V$ (in questo caso $-1 \in K$ è l'elemento opposto dell'identità moltiplicativa del campo $K$)

**Es 1:**

$$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{n}{\ldots} \times \mathbb{R}$$
$$K = \mathbb{R}$$

Dotiamo $\mathbb{R}^n$ di una struttura di spazio vettoriale su $K$.

La **somma** è definita come:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\Big((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

- $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ *(vettore nullo, elemento neutro additivo)*
- $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $-\vec{v} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

La **moltiplicazione per scalare** è definita come:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \left(\alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n)\right) &\mapsto (\alpha \cdot x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

**Es 2:**

$$\begin{aligned} V = \mathbb{R}_{[x]} &= \{ \text{ polinomi in } x \text{ a coeff reali } \} \\ &= \{ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_h x^h : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{h} \lambda_i x^i : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

- Dati $p(x), q(x)$ polinomi in $x$:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \sum_{i=0}^{h} \alpha_i x^i + \sum_{j=0}^{l} \beta_j x^j \\ &= \sum_{u=0}^{\max(l,h)} (\alpha_u + \beta_u) \cdot x^u \end{aligned}$$

- $0(x) = 0 \in \mathbb{R}$ *(polinomio nullo, di grado 0)*
- $-p(x) = \sum_{i=0}^{h} -\alpha_i \cdot x^i$
- $\lambda \cdot p(x) = \sum_{i=0}^{h} \lambda \cdot \alpha_i \cdot x^i$

**Es 3:**

Sia $V = \{ \text{ funzioni } : I = [a, b] \to \mathbb{R} \}$. Dotiamo $V$ di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

La somma è definita come

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ \left(f : I \to \mathbb{R}, g : I \to \mathbb{R}\right) &\mapsto \text{“}f + g\text{”} : I \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

In questo caso $f + g$ è definito come

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

Il prodotto viene definito come

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$
$$\left(\lambda, f : I \to \mathbb{R}\right) \mapsto \text{“} f \cdot g \text{”} : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

### 4.1 Sottospazi vettoriali

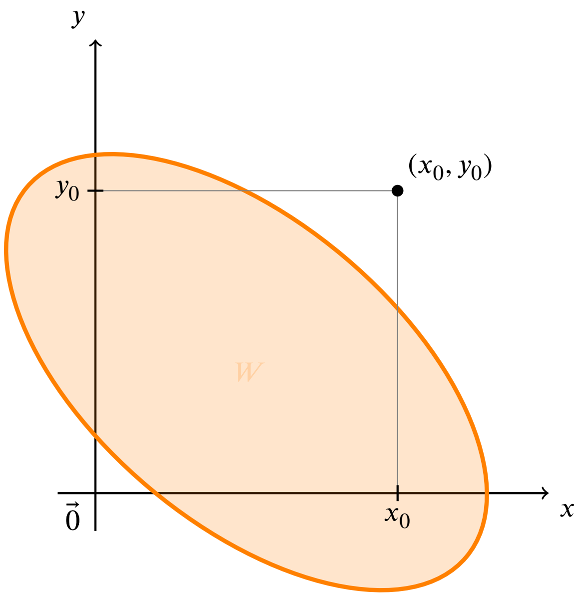
**Def:** sia $V$ uno spazio vettoriale su $K$, e $W \subset V$. Diremo che $W$ è un **sottospazio vettoriale di $V$** se:

1. $\vec{w}_1 \underset{V}{+} \vec{w}_2 \in W \qquad \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$
2. $\lambda \underset{V}{\cdot} \vec{w} \in W \qquad \forall \lambda \in K, \vec{w} \in W$

In tal caso denoteremo la relazione tra $W$ e $V$ come $W < V$.

**Oss:** se $W < V$, allora $W$ è lui stesso uno spazio vettoriale.

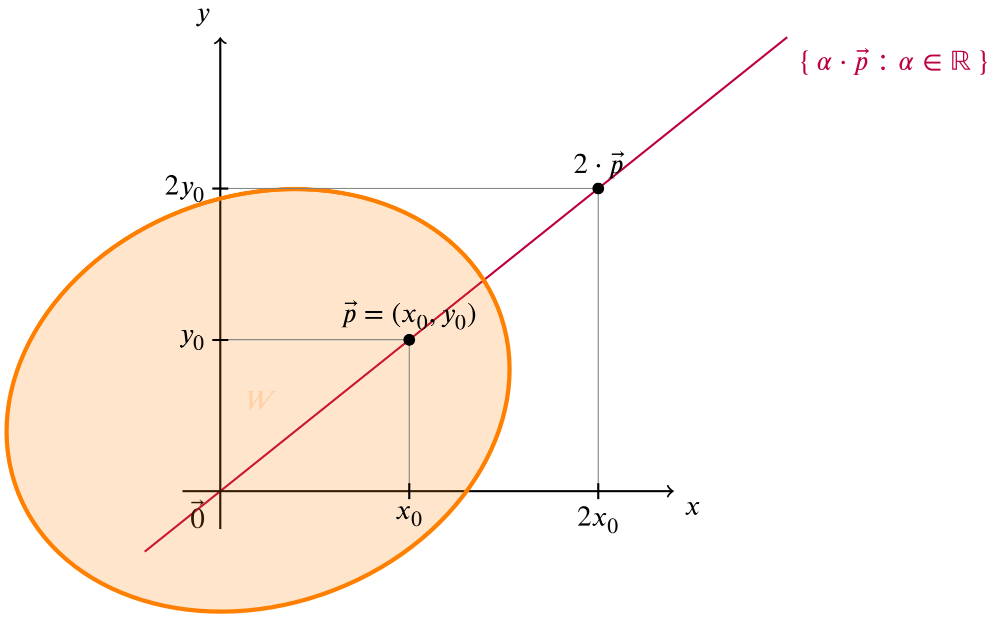
**Es 1:** $V = \mathbb{R}^2 \ni (x_0, y_0)$




Sia $\lambda = 0$. Per la proprietà 2., $\lambda \underset{V}{\cdot} \vec{w} \in W$, ma in questo caso $0 \underset{V}{\cdot} \vec{w} = \vec{0} \notin W$.
Dunque $W$ non può essere un sottospazio vettoriale di $V$.
Ciò non vuol dire che non si possa mettere una struttura di uno spazio vettoriale su $W$, ma essa non sarà quella ereditata da $V$.

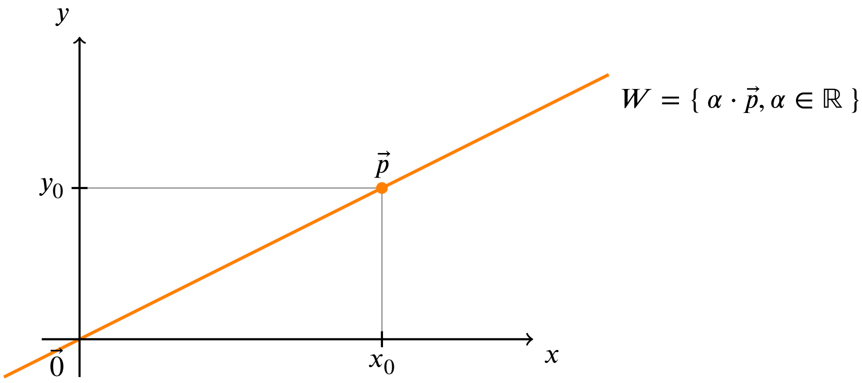
**Es 2:** $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$




Per la proprietà *2.* $\lambda \cdot \vec{p} \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Sia $\lambda = 2$, $\lambda \cdot \vec{p}$ diventa $2 \cdot \vec{p} = (2x_0, 2y_0)$. Si può notare che $2 \cdot \vec{p} \notin W$.

Dunque $W$ non è un sottospazio vettoriale di $V$.

**Es 3:** $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$




$W$ è un sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{R}^2$ perché vengono soddisfatte le due condizioni:

1. $\alpha_1 \cdot \vec{p} + \alpha_2 \cdot \vec{p} \overset{?}{\in} W$. Questo si può riscrivere raccogliendo come $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \vec{p} \in W$ ed è dimostrato perché la somma di scalari è uno scalare
2. Verificata banalmente

**Oss:** in alternativa alle due proprietà del sottospazio vettoriale (dalla definizione), possiamo controllare che $W \subset V$, con $V$ sp. vett. su campo $K$, sia un sottospazio vett. verificando che $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\forall\, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ si abbia $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in W$.

Quali sono tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^2$?

- $\{\, \vec{0} \,\}$
- $\{\, \alpha \cdot \vec{p}, \alpha \in \mathbb{R} \,\}$ *(rette passanti per l'origine)*
- $\mathbb{R}^2$

**Oss:** ogni sp. vett. $V$ ammette almeno due sottosp. vett. cioè $\{\, \vec{0} \,\}$ e $V$ stesso.

**Domanda cruciale:** dato $S \subset V$ (sottoinsieme di uno spazio vettoriale), esiste il "più piccolo sottospazio vettoriale di $V$ che contiene $S$"? La risposta è sì.

**Def:** $\langle S \rangle < V$ denoterà il più piccolo sottospazio di $V$ che contiene $S$. Esso si chiama **sottospazio vettoriale generato da $S$**.

Si dimostra che

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \,:\, \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Quindi $\langle S \rangle$ è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\{\, z_1, z_2, \ldots, z_n \,\}$ con i coefficienti $\{\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \,\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tutti i vettori in $S$.

**Oss:** $S \subset \langle S \rangle$

**Def:** sia $S < V$ spazio vettoriale.

I vettori di $S$ sono detti **linearmente dipendenti** se $\exists\, \vec{w} \in S$ e vettori $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_h \in S$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ tali che $\vec{w} = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i z_i$.

$S$ sono **linearmente indipendenti** se non sono dipendenti.