Appunti di Fondamenti

Fondamenti dell'Informatica - CdL Informatica 23/24

Federico Zotti

2023-09-30

Indice

Indice

Matematica discreta

> **Discreto**: composto di elementi distinti, separati tra di loro.

Un sistema è: - **Discreto** se è costituito da elementi isolati - **Continuo** se non ci sono *vuoti* tra gli elementi

I sistemi informatici si basano su un sistema *binario*, perciò discreto.

Possiamo approssimare un sistema continuo dividendolo in piccole parti (*discretizzazione* o *digitalizzazione*).

Fasi della matematica discreta

- **Classificazione**: individuare le caratteristiche comuni di entità diverse (*teoria degli insiemi*)
- **Enumerazione**: assegnare ad ogni oggetto un numero naturale (*contare*)
- **Combinazione**: permutarne e combinarne gli elementi (*grafi*)

Queste fasi guidano un **algoritmo**.

Logica

In filosofia, la **logica** è lo studio del ragionamento, dell'argomentazione, e dei procedimenti **inferenziali** per distinguere quelli *validi* da quelli *non validi*.

La **logica matematica** vede questi procedimenti come calcoli formali, con una struttura algoritmica.

Infatti, è tutto basato sull'**algebra di Boole**.

Algebra astratta

L'algebra astratta studia le **strutture algebriche**, ovvero insiemi muniti di operazioni.

Insiemi e Operazioni

Numeri

Numeri naturali

I numeri **naturali** sono i primi che impariamo, e nascono dall'attività di contare.

Essi formano un **insieme**, chiamato *insieme dei numeri naturali* ($\mathbb{N}$).

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, \dots \}$$

Contare non è altro che assegnare ad ogni oggetto un numero naturale (in ordine).

$\mathbb{N}$ ha un *limite inferiore* (0), ma non ha un *limite superiore*, quindi $\mathbb{N}$ è infinito.

Definizione semiformale

- I numeri naturali hanno l'elemento 0
- Ogni elemento n ha (**esattamente**) un successore $s(n)$
- 0 non è un successore di nessun elemento
- Due elmenti diversi hanno successori diversi

Questa definizione è la base del **processo di induzione**.

Una proprietà è vera in tutto $\mathbb{N}$ se e solo se:

- È vera in 0
- Se è vera in n allora è vera in $s(n)$

È possibile anche iniziare da un numero arbitrario.

Numeri interi

I numeri **interi** (relativi) è l'insieme dei numeri naturali preceduti da un segno "$+$" o "$-$". Questo insieme si denota con il simbolo $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -(n+1), -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$$

Ogni intero ha un successore, ma anche un **predecessore** (non c'è un *minimo*).

I numeri interi positivi (più 0) formano $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

Valore assoluto Il **valore assoluto** di un numero intero è il numero privo di segno.

$$|-n| = n$$
$$|n| = n$$

L'**opposto** di un numero si ottiene cambiandogli il segno.

Numeri razionali

Razionale in questo caso si riferisce a **ratio** ossia **proporzione**. Indicano dunque una proporzione risultante da una divisione.

Si esprimono come rapporto di due numeri interi (*frazioni*).

$$\frac{m}{n}$$

Si indicano con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Rappresentazioni e Relazioni Ogni numero razionale può essere rappresentato da un numero decimale finito o periodico.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Densità I numeri razionali sono **densi**: fra due razionali c'è sempre un altro numero.

Sono comunque **discreti**.

Numeri reali

I **numeri irrazionali** ($\mathbb{I}$) sono quelli che non si possono esprimere tramite frazioni: hanno un'espansione decimale infinita e non periodica.

L'insieme dei **numeri reali** ($\mathbb{R}$) contiene tutti i numeri che ammettono una rappresentazione decimale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

La Retta reale L'insieme dei numeri reali spesso viene rappresentato su una **retta** (ordine implicito).

A ogni punto della retta è associato un numero reale e viceversa (*corrispondenza biunivoca*).

Numeri complessi

I **numeri complessi** ($\mathbb{C}$) estendono i reali per eseguire operazioni che non sono ben definite altrimenti.

Nascono dalla necessità di estrarre radici a numeri negativi.

Definiscono l'**unità immaginaria** $i = \sqrt{-1}$. Un numero complesso è $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Numeri booleani

L'insieme dei **numeri booleani** è

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Insiemi

Gli **insiemi**, le loro proprietà e le loro **operazioni** sono alla base della matematica moderna e dell'informatica.

Un sistema è **discreto** se costituito da elementi isolati e **continuo** se non vi sono spazi vuoti. In matematica, discreto si basa sul concetto di **cardinalità** (il "numero" di elementi che contiene).

Un insieme è discreto se (e solo se) i suoi elementi si possono **numerare**.

> Un insieme è un raggruppamento di oggetti distinti e ben definiti.

Gli oggetti che formano l'insieme sono i suoi **elementi**. In un insieme, tutti gli elementi sono **distinti** e l'ordine non è rilevante.

> Gli elementi di un insieme possono essere anch'essi insiemi.

Un tempo si pensava che la **teoria degli insiemi** poteva dare una base solida alla matematica. Esistono paradossi però che dicono il contrario.

Per esempio il paradosso del barbiere

> In un vilaggio vi è un solo barbiere, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. *Chi rade il barbiere?*

o il paradosso eterologico

> Una parola è **autologica** se descrive se stessa (*"polisillabica"*, *"corta"*, *"leggibile"*). Una parola è **eterologica** se non è autologica (*"polillabica"*, *"lunga"*, *"illeggibile"*). "*Eterologica*" è eterologica?

Il più famoso di essi è il paradosso degli insiemi (*Bertrand Russel*)

> Considerate l'insieme N di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi.
> N appartiene a se stesso?

Per costruire questo tipo di paradossi è necessario usare un'**autoreferenza** e una **negazione**.

Questa idea torna in diversi contesti per dimostrare l'impossibilità o inesistenza di certe strutture.

Notazione

Gli insemi generici saranno denotati da lettere latine maiuscole

$$A, B, C, \ldots$$

e i loro elementi con lettere latine minuscole

$$a, b, c, \ldots$$

L'insieme senza elementi si chiama **vuoto** e si denota con $\varnothing$.

L'**uguaglianza** fra oggetti (elementi, insemi, entità, ecc.) si denota con "$=$". La **disuguaglianza** si denota con "$\neq$".

L'uguaglianza ha tre importanti proprietà:

- **Riflessività**: $A = A$
- **Simmetria**: $A = B \iff B = A$
- **Transitività**: se $A = B$ e $B = C$ allora $A = C$

Un insieme può avere diverse rappresentazioni:

- **Diagramma Eulero-Venn**
- **Rappresentazione estensionale**: elenco di tutti gli elementi ($\{ x, y, z \}$)
  - $\{$ rosso, giallo, arancio $\}$: insieme con tre elementi
  - $\{$ rosso, giallo, rosso $\}$: insieme con due elementi
  - $\{ \varnothing \}$: insieme con un elemento
  - $\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$: insieme dei numeri naturali
  - $\{ \varnothing, 1, 2, \{ 3 \} \}$
- **Rappresentazione intensionale**: consiste nel formulare una proprietà $\mathcal{P}$ caratteristica che distingue precisamente gli elementi dell'insieme ($S = \{ x \mid \mathcal{P}(x) \}$)
  - $\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0 \}$: insieme dei numeri interi positivi
  - $\{ x \mid x$ è un colore dell'arcobaleno $\}$
  - $\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 3, x \leq 100 \} = \{ 4, 5, \dots, 99, 100 \}$
  - $\{ x \mid x$ è un numero primo $\}$

Per ogni elemento x esiste l'insieme **singoletto** $\{ x \}$.

Proprietà complesse si possono costruire combinando proprietà più semplici mediante operazioni **vero-funzionali**.

Un **sottoinsieme** di A è un insieme formato unicamente per (alcuni) elementi di A. Un sottoinsieme B di A è **proprio** se è diverso da A e da $\varnothing$.

L'insieme vuoto ammette esattamente un sottoinsieme: $\varnothing$ (*sottoinsieme non proprio*). Un singoletto $\{ a \}$ ammette due sottoinsiemi: $\varnothing$ e $\{ a \}$ (*sottoinsiemi non propri*).

Se A e B hanno gli stessi elementi, sono mutuamente sottoinsiemi

$$A = B \text{ se } A \subseteq B, B \subseteq A$$

L'inclusione soddisfa le proprietà:

- **Riflessività**: $A \subseteq A$

- **Antisimmetria**: $A \subseteq B \land B \subseteq A \iff A = B$
- **Transitività**: $A \subseteq B \land B \subseteq C \iff A \subseteq C$

L'insieme potenza (o insieme delle parti) di un insieme S, scritto $\mathscr{P}(S)$ è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di S.

$$\mathscr{P}(S) = \{\, x \mid x \subseteq S \,\}$$

Esempi:

- $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\, \varnothing \,\}$
- $\mathscr{P}(\{\, \varnothing \,\}) = \{\, \varnothing, \{\, \varnothing \,\} \,\}$
- $\mathscr{P}(\{\, x, y \,\}) = ?$

Se S ha n elementi ($n \geq 0$) allora $\mathscr{P}(S)$ ha 2^n elementi.

Operazioni

Unione L'**unione** di due insiemi A e B si denota

$$A \cup B$$

ed è definita come

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \lor x \in B \,\}$$

Le proprietà dell'unione sono:

- **Idempotenza**: $A \cup A = A$
- **Commutatività**: $A \cup B = B \cup A$
- **Associatività**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Esistenza del neutro**: $A \cup \varnothing = A$
- **Assorbimento**: $A \cup B = B$ se $A \subseteq B$
- **Monotonicità**: $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq B \cup A$

Intersezione L'**intersezione** di due insiemi A e B si denota

$$A \cap B$$

ed è definita come

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \land x \in B \,\}$$

Le proprietà dell'intersezione sono:

- **Idempotenza**: $A \cap A = A$
- **Commutatività**: $A \cap B = B \cap A$
- **Associatività**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Annichilazione**: $A \cap \varnothing = \varnothing$
- **Assorbimento**: $A \cap B = B$ se $A \subseteq B$
- **Monotonicità**: $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$

L'unione e l'intersezione distribuiscono una sull'altra

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Sottrazione La **sottrazione** tra due insiemi A e B è definita come

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \land x \notin B \,\}$$

Le proprietà della sottrazione sono:

- $A \setminus A = \varnothing$
- $A \setminus \varnothing = A$
- $\varnothing \setminus A = \varnothing$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B$

- $A \setminus B \neq B \setminus A$

Differenza simmetrica La differenza simmetrica tra A e B è

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Proprietà:

- $A \triangle A = \varnothing$
- $A \triangle \varnothing = A$
- $A \triangle B = B \triangle A$

Complementazione Dato un insieme di riferimento U (chiamato **Universo**), il **complemento** assoluto di A è definito come:

$$\overline{A} = \{\, x \,|\, x \in U, x \notin A \,\} = U \setminus A$$

Le proprietà della complementazione sono:

- $\overline{U} = \varnothing$
- $\overline{\varnothing} = U$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (*terzo escluso*)
- $A \cup \overline{A} = U$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*legge di De Morgan*)
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*legge di De Morgan*)
- $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$

Famiglie di insiemi

Un insieme i cui elementi sono tutti insiemi viene chiamato **famiglia di insiemi** ($\mathcal{F}$).

Le operazioni su una famiglia di insiemi sono:

$$\cup\mathcal{F} = \{\, x \mid x \in A \text{ per almeno un insieme } A \in \mathcal{F} \,\}$$
$$\cap\mathcal{F} = \{\, x \mid x \in A \;\forall\, A \in \mathcal{F} \,\}$$

Dunque

$$\cup\mathcal{P}(A) = A \;\forall\, A$$

Partizioni

Una partizione di un insieme $A \neq \varnothing$ è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di A tale che:

- $\forall\, c \in \mathcal{F}, c \neq \varnothing$ (*non trivialità*)
- $\cup\mathcal{F} = A$ (*copertura*)
- se $c \in \mathcal{F}$, $D \in \mathcal{F}$ e $C \neq D$, allora $C \cap D = \varnothing$ (*disgiunzione*)

Relazioni

Ordinamenti negli insiemi

Ricordate che gli insiemi **non** sono ordinati

$$\{\, x, y \,\} = \{\, y, x \,\}$$

A volte è utile poter ordinare i loro elementi in modo chiaro.

Coppia ordinata Una **coppia ordinata** è una collezione di due elementi, dove si può distringuere il **primo** e il **secondo** elemento

$$\langle x, y \rangle$$

Il primo elemento è x e il secondo è y. Notare che esiste la coppia ordinata $\langle x, x \rangle$.

Formulazione Insiemistica La coppia ordinata $\langle x, y \rangle$ non è altro che l'insieme

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Sia $\mathcal{F} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. x è il **primo elemento** $\iff$ $x \in \cap\mathcal{F}$ (*appartiene a tutti gli insiemi*). y è il **secondo elemento** $\iff$ $y \in \cup\mathcal{F} \setminus \cap\mathcal{F}$ (*non appartiene a tutti gli insiemi*) oppure $\{y\} = \cup\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \{\{y\}\}$).

Notare che $\langle x, x \rangle = \{\{x\}, \{x, x\}\}$.

Definizione giusta Vogliamo vedere che questa definizione **caratterizza** le coppie ordinate. Cioè, che

$$\langle a, b \rangle = \langle x, y \rangle \iff \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Le coppie ordinate sono **ben definite**.

Generalizzazione Possiamo generalizzare le coppie ordinate a **tuple ordinate** di lunghezza $n \geq 2$ (n-tuple ordinate) definendo

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$$

[!warning] Correggere lo spacing #todo/uni

Prodotto cartesiano Dati due insiemi A e B, definiamo il prodotto cartesiano come

$$A \times B = \{\, \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \,\}$$

$A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate dove:

- il primo elemento appartiene ad A
- il secondo elemento appartiene a B

Notare che:

- $A \times B \neq B \times A$
- $A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A$

$A \times A$ è a volte denotato con A^2.

Sequenze S^n è l'insieme di tutte le n-tuple di elementi di S definito tramite prodotti cartesiani di S. Una **sequenza finita** di elementi di S è un elemento di S^n per qualche $n \in \mathbb{N}$.

In altre parole, una sequenza è una tupla ordinata

$$\langle s_1, \dots s_n \rangle$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e ogni $s_i \in S$.

Segmento Data una sequenza finita $\sigma = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$, una sequenza $\sigma' = \langle s_k, s_{k+1}, \dots, s_\ell \rangle$ dove $1 \leq k \leq \ell \leq n$ è chiamata un **segmento** di σ.

Il segmento è **iniziale** sse $k = 1$.

Relazioni

Una **relazione** tra gli elementi di due insiemi A e B non è altro che un sottoinsieme di $A \times B$.

Una relazione rappresenta un **collegamento** tra gli elementi di A e quelli di B.

Relazioni tra oggetti

Se la coppia ordinata $\langle x, y \rangle$ appartiene a una relazione $R \subseteq A \times B$, si dice che $x \in A$ ha come **corrispondente** $y \in B$ nella relazione R oppure che x è *in relazione con* y.

Rappresentazione tabulare

Ogni relazione si può rappresentare graficamente tramite una tabella.

Rappresentazione matriciale

R si può anche rappresentare tramite una **matrice booleana**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogni riga rappresenta un elemento dell'insieme A e ogni colonna rappresenta un elemento di B.

Elementi di una relazione

Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione

- Il **dominio** di R ($\mathrm{dom}(R)$) è l'insieme di tutti gli oggetti $x \in A$ tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche $y \in B$.

  $\mathrm{dom}(R) = \{\, x \in A \mid \exists\, y \in B, \langle x, y \rangle \in R \,\}$.

- Il **codominio** è l'insieme di tutti gli oggetti $y \in B$ tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche $x \in A$.

  $\mathrm{codom}(R) = \{\, y \in B \mid \exists\, x \in A, \langle x, y \rangle \in R \,\}$.

- Il **campo** o **estensione** di R è $\mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{codom}(R)$.

Relazioni n-arie

Il concetto di relazione può estendersi a tuple ordinate con **più di due** elementi.

Se gli elementi delle tuple appartengono allo stesso insieme A, allora una relazione n-aria è un sottoinsieme di A^n.

Esempi:

- $\{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$ è una relazione binaria su A
- $\{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y \}$ è la relazione d'ordine naturale su $\mathbb{N}$
- $\{ \langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = z^2 \}$ è un'area geometrica

Operazioni su relazioni

Siano $R, S \subseteq A \times B$ due relazioni

- $R \cup S$ ha tutte le coppie che appartengono a R o a S
- $R \cap S$ ha tutte le coppie che appartengono ad entrambi R e S
- $\overline{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R \} \subseteq A \times B$ è il **complemento** di R
- $R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \} \subseteq A \times B$ è la **relazione inversa** di R

Proprietà delle relazioni

Siano $R, S \subseteq A \times B$ due relazioni

- Se $R \subseteq S$ allora $\overline{S} \subseteq \overline{R}$
- $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$
- $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$
- se $R \subseteq S$ allora $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

Esempi Siano $A = \{ a, b \}, R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \}, S = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle \}$ ($R \subseteq A^2; S \subseteq A^2$).

1. $R \cap S = \{ \langle a, b \rangle \}$
2. $\overline{R \cup S} = \{ \langle b, b \rangle \}$
3. $R^{-1} = R$
4. $S^{-1} \neq S$

Identità

Dato un insieme A, la relazione

$$I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$$

dove ogni elemento è in relazione con se stesso è chiamata l'**identità** su A.

Proprietà delle relazioni binarie

Una relazione $R \subseteq A^2$ è

- **Riflessiva** se $\langle x, x \rangle \in R \; \forall \, x \in A$ ($I_A \subseteq R$)
- **Simmetrica** se $\langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \in R$ ($R = R^{-1}$)
- **Antisimmetrica** se $\langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in R \implies x = y$ ($R \cap R^{-1} \subseteq I_A$)
- **Antisimmetrica** (*def alternativa*) se $x \neq y \wedge \langle x, y \rangle \in R \implies \langle y, x \rangle \notin R$ ($R \cap R^{-1} \subseteq I_A$)
- **Transitiva** se $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R \implies \langle x, z \rangle \in R$

Funzioni

Una classe di relazioni binarie di particolare importanza sono le **funzioni** (o **applicazioni**).

Una funzione è una relazione $R \subseteq A \times B$ tale che ad ogni $a \in A$ corrisponde **al più** un elemento $b \in B$.

Formalmente: se $\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in R$ allora $b = c$.

Notazione: $f : A \to B$

Se per ogni $a \in A$ esiste **esattamente un** $b \in B$ tale che $\langle a, b\rangle \in R$, allora f è una **funzione totale**.

Riformulazione: una relazione $f \subseteq A \times B$ è una funzione se per ogni $x \in \text{dom}(f)$ esiste un unico $y \in B$ tale che $\langle x, y\rangle \in f$. $f(x)$ denota tale elemento y.

Se $x \in \text{dom}(f)$, allora si dice che f è **definita** in x. Se $A = \text{dom}(f)$ allora f è una funzione **totale**.

Funzione iniettiva

Una funzione f è **iniettiva** se porta elementi distinti del dominio in elementi distinti del codominio (immagine).

> $f : A \to B$ è iniettiva sse per ogni $x, y \in A, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

Funzione suriettiva

Una funzione f è **suriettiva** quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A ossia, quando $B = \text{codom}(f)$.

> $f : A \to B$ è suriettiva sse per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Funzione biiettiva

Una funzione $f : A \to B$ è **biettiva** sse è iniettiva e suriettiva.

Attenzione: f può non essere totale.

- Ad ogni $x \in \text{dom}(f)$ corrisponde esattamente un $y \in B$
- Ad ogni $y \in B$ corrisponde esattamente un $x \in \text{dom}(f)$

Corrispondenza biunivoca

Una **corrispondenza biunivoca** tra A e B è una relazione binaria $R \subseteq A \times B$ tale che ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di B e viceversa, ad ogni elemento di B corrisponde uno ed un solo elemento di A.

Tale R deve essere una funzione *totale*, *iniettiva* e *suriettiva*.

Formalizzazione

$f \subseteq A \times B$

$$\mathsf{dom}(f) = \{\, x \in A \mid \exists\, y \in B.\langle x, y\rangle \in f \,\}$$
$$\mathsf{codom}(f) = \{\, y \in A \mid \exists\, x \in B.\langle x, y\rangle \in f \,\}$$

Funzione (parziale)

$$\forall\, a \in A.\forall\, x, y \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle a, y\rangle \in f) \implies x = y$$

Funzione totale

$$\forall\, a \in A.\exists!\, x \in B.\langle a, x\rangle \in f$$

Funzione iniettiva

$$\forall\, a \in A.\forall\, x, y \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle a, y\rangle \in f) \implies x = y \land$$
$$\forall\, a, b \in A.\forall\, x \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle b, x\rangle \in f) \implies a = b$$

Funzione suriettiva

$$\forall\, a \in A.\forall\, x, y \in B.(\langle a, x\rangle \in f \land \langle a, y\rangle \in f) \implies x = y \land$$
$$\forall\, x \in B.\exists\, a \in A.\langle a, x\rangle \in f$$

Funzione biiettiva

$$\forall\, a \in A. \forall\, x, y \in B. (\langle a, x\rangle \in f \land \langle a, y\rangle \in f) \implies x = y \land$$
$$\forall\, a, b \in A. \forall\, x \in B. (\langle a, x\rangle \in f \land \langle b, x\rangle \in f) \implies a = b \land$$
$$\forall\, x \in B. \exists\, a \in A. \langle a, x\rangle \in f$$

Punto fisso

Sia A un insieme e $f : A \to A$ una funzione.

Un **punto fisso** di f è un elemento di A che coincide con la sua immagine

$$x = f(x)$$

Operazioni

Sia A un insieme.

Un'**operazione** (n-aria) su A è una funzione $A^n \to A$.

L'operazione è totale sse la funzione è totale.

Immagine inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione e $y \in B$ l'**immagine inversa** di f in y è

$$f^{-1} : B \to \mathcal{P}(A)$$
$$f^{-1}(y) = \{\, x \in A \mid f(x) = y \,\}$$

Nota: f è iniettiva sse per ogni $y \in B$, $f^{-1}(y)$ ha al più un elemento.

Funzione inversa

Una funzione $f : A \to B$ è **invertibile** se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$o

$$g(f(x)) = x$$
$$f(g(y)) = y$$

In questo caso, g è l'**inverso** di f e si rappresenta come f^{-1}.

Una funzione f è invertibile sse è iniettiva. f_{-1} è totale sse f è suriettiva.

Composizione di Funzioni

La **composizione** di due funzioni si riferisce all'applicazione di una funzione al risultato di un'altra.

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. La funzione composta $g \circ f : A \to C$ è definita per ogni $x \in A$ da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$(g \circ f)(x)$ è definita sse $f(x)$ e $g(f(x))$ sono definite.

Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ sono due funzioni, allora la composizione $g \circ f$ è solo definibile se codom$(f) \subseteq C$.

Le proprietà della composizione:

- **Associativa:** $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Se f e g sono entrambe iniettive, allora $f \circ g$ è **iniettiva**
- Se f e g sono entrambe suriettive, allora $f \circ g$ è **suriettiva**
- Se f e g sono entrambe invertibili, allora $f \circ g$ è **invertibile** $((g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1})$

Funzione caratteristica

I sottoinsiemi di un insieme A si possono anche rappresentare tramite una funzione detta **caratteristica**.

La funzione caratteristica di un insieme $S \subseteq A$ è la funzione $f_S : A \to \{ 0, 1 \}$ dove

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x \notin S \\ 1 & x \in S \end{cases}$$

Per ogni $x \in A$

- $f_{S \cap T}(x) = f_S(x) \cdot f_T(x)$
- $f_{S \cup T}(x) = f_S(x) + f_T(x) - f_S(x) \cdot f_T(x)$
- $f_{S \triangle T}(x) = f_S(x) + f_T(x) - 2 \cdot f_S(x) \cdot f_T(x)$

Multinsiemi

Un **multinsieme** è una variante di un insieme dove gli elementi si possono ripetere

$$\{\!\{ a, a, b, c, c, c \}\!\} \neq \{\!\{ a, b, c \}\!\}$$

Formalmente un multinsieme è una funzione da un insieme a $\mathbb{N}$

$$f : A \to \mathbb{N}$$

che esprime quante volte si ripete ogni elemento nel multinsieme ($A = \{ a, b, c, d \}$)

$$\{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle d, 0 \rangle \}$$

Cardinalità

I **numeri cardinali** si utilizzano per misurare gli insiemi (indicare la loro *grandezza*). Se un insieme è **finito**, la sua cardinalità è un numero naturale (il numero di elementi). Con i numeri cardinali, possiamo anche misurare e classificare insiemi **infiniti**.

Cardinalità tramite funzioni

Georg Cantor utilizzò le proprietà delle funzioni per paragonare la cardinalità degli insiemi.

Sia f una funzione $f : A \to B$

- Se f è *suriettiva* allora B non è "più grande" di A
- Se f è *totale* e *iniettiva* allora A non è "più grande" di B

Due insiemi sono **equipotenti** (hanno la stessa cardinalità) sse esiste una funzione **biunivoca** fra di loro.

$$A \sim B$$

Cardinalità finite

Se A ha n elementi, allora $A \sim \{\, 1, \ldots, n \,\}$. In questo caso si dice che A è **finito** e ha **cardinalità** (o potenza) n.

Utilizziamo la notazione

$$|A| = n$$

I numeri naturali si utilizzano come cardinali finiti.

Se$|A| = n$ allora $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$.

Numerabili

Basati su questa definizione, chiamiamo **numerabili** tutti gli insiemi che hanno la cardinalità di $\mathbb{N}$. I suoi elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i naturali.

$$A \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^{+}$$

La cardinalità di $\mathbb{N}$ è chiamata $\aleph_0$.

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$\aleph_0$ è il più piccolo dei numeri cardinali **transfiniti** (i cardinali per misurare insiemi infiniti). Ovviamente $\aleph_0$ non è un numero naturale.

I seguenti insiemi sono numerabili:

- L'insieme dei numeri pari
- L'insieme dei numeri primi
- L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{se } x \text{ pari} \\ \lceil \frac{x}{2} \rceil & \text{se } x \text{ dispari} \end{cases}$$

- Il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- I numeri razionali $\mathbb{Q}$ ($\subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Il continuo

$$[0, 1] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \,\} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

Denotiamo per convenzione $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$. Allora $|\mathbb{R}| \geq 2^{\aleph_0}$.

Cantor dimostro che $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (in realtà che $|A| < |\mathscr{P}(A)|$). Dunque $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Teorema di Cantor

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

Dobbiamo dimostrare che *non esiste* una funzione biunivoca $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Supponiamo che esiste una tale funzione f. Definiamo

$$Z = \{\, z \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n) \,\} \subseteq \mathbb{N}$$

Siccome f è biunivoca (quindi suriettiva), esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $f(k) = Z$.

Domanda: $k \in Z$?

Se $k \in Z$, allora per definizione $k \notin f(k) = Z$. Se $k \notin Z$, allora $k \notin f(x)$ e quindi per definizione $k \in Z$.

Conclusione: la funzione f non può esistere.

Gerarchia transfinita

Cantor definì la gerarchia dei numeri transfiniti

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

L'**ipotesi del continuo** dice che $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Non ci sono insiemi di cardinalità intermedia fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Rappresentazioni

Le relazioni possono essere rappresentate da diverse forme:

- **Rappresentazione per elencazione:** descrivere l'insieme di coppie ordinate ($R = \{ \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle \}$)
- **Rappresentazione sagittale:** collegare con delle frecce gli elementi che verificano la relazione
- **Rappresentazione tramite diagramma cartesiano:** se S e T sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, rappresentare le coppie come coordinate sul piano cartesiano
- **Rappresentazione tramite tabella:** una matrice booleana con per colonne gli elementi dell'insieme di arrivo e per righe l'insieme di partenza.

Relazioni in un insieme

Una relazione $R \subseteq S \times S$ è detta **relazione in** S. In una relazione in S, la rappresentazione sagittale collassa in un **grafo**. Usiamo lo stesso insieme per l'origine e la destinazione di ogni freccia. Formalmente un grafo è costituito da **nodi** collegati fra loro da frecce (o **spigoli**). Se $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$, disegnamo uno spigolo da x a y.

Le proprietà di una relazione sonon (*again*):

- **Riflessiva** se: $\langle x, x\rangle \in R \, \forall \, x \in S$ (*ogni nodo ha un cappio*)
- **Irriflessiva** se: $\langle x, x\rangle \notin R \, \forall \, x \in S$ (*nessun nodo ha un cappio*)
- **Simmetrica** se: $\langle x, y\rangle \in R \implies \langle y, x\rangle \in R$ (*ogni spigolo ha il suo inverso*)
- **Asimmetrica** se: $\langle x, y\rangle \in R \implies \langle y, x\rangle \notin R$ (*nessuno spigolo ha il suo inverso e nessun nodo ha un cappio*)
- **Antisimmetrica** se: $\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R \implies x = y$ (*nessuno spigolo ha il suo inverso (escluso il cappio)*)
- **Transitiva** se: $\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R \implies \langle x, z\rangle \in R$