

---

# Appunti di Geometria e Algebra Lineare

Algebra lineare e Geometria (prof. Borghesi) - CdL  
Informatica Unimib - 23/24

Federico Zotti

14 Mar 2024



## Indice

<b>1</b>	<b>Insiemi</b>	<b>2</b>
1.1	Sottoinsieme . . . . .	2
1.2	Unione disgiunta . . . . .	2
1.3	Complemento . . . . .	2
1.4	Prodotto cartesiano . . . . .	2
1.4.1	Prodotto cartesiano di tre insiemi . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Funzioni</b>	<b>3</b>
2.1	Notazione . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>4</b>
3.1	Sottospazi vettoriali . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Campi</b>	<b>10</b>

## 1 Insiemi

Tutto uguale a fondamenti.

### 1.1 Sottoinsieme

- $\subset$  indica un sottoinsieme (quello che precedentemente era definito come  $\subseteq$ )
- $\subsetneq$  indica un sottoinsieme proprio (quello che precedentemente era definito come  $\subset$ )

### 1.2 Unione disgiunta

$$A = \{ a, b, c \}$$

$$B = \{ x, b, z \}$$

$$A \amalg B = \{ a, b_A, c, x, b_B, z \}$$

Gli elementi doppi vengono considerati due volte.

### 1.3 Complemento

$$B \setminus A = \{ x \in B : x \notin A \}$$

### 1.4 Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$$

$$B \times A = \{ (x, y) : x \in B, y \in A \}$$

> Notare che le coppie vengono denotate da parentesi tonde, e non angolate.

| **Oss:** supponendo  $x_0 \neq y_0$ , si noti che  $(x_0, y_0) \neq (y_0, x_0)$ .

### 1.4.1 Prodotto cartesiano di tre insiemi

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 4, 5, 6 \}$$

$$C = \{ 8, 9 \}$$

$$A \times B = \{ (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), \dots \}$$

$$(A \times B) \times C = \{ ((1, 4), 8), ((1, 4), 9), ((1, 5), 8), ((1, 5), 9), \dots \}$$

$$A \times (B \times C) = \{ (1, (4, 8)), (1, (4, 9)), (1, (5, 8)), (1, (5, 9)), \dots \}$$

$$A \times B \times C = \{ (1, 4, 8), (1, 4, 9), (1, 5, 8), (1, 5, 9), \dots \}$$

## 2 Funzioni

Una funzione è una corrispondenza tra un elemento di un insieme ad un elemento di un altro insieme.

Notare che le funzioni non vengono considerate insiemi, a differenza di fondamenti.

Due funzioni  $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$  sono uguali ( $f = g$ ) sse

1.  $A = C, B = D$
2.  $f(x) = g(x), \forall x \in A$

$f(x)$  viene chiamata immagine di  $x$  tramite  $f$  e  $g(x)$  immagine di  $x$  tramite  $g$ .

### 2.1 Notazione

$$f : A \rightarrow B$$

- $A$  è il **dominio** di  $f$
- $B$  è il **codominio** di  $f$
- Sia  $S \subset A$ , allora  $f(S)$  è l'**immagine di  $S$  tramite  $f$**

$$f(S) = \{ b \in B : \exists a \in S \text{ con } f(a) = b \}$$

Ovvero  $f(S)$  è l'insieme che contiene tutte le immagini degli elementi di  $S$  tramite  $f$ . Se si restringe il dominio di  $f$  da  $A$  ad  $S$ , si crea una nuova funzione  $f|_S$ .

**Attenzione:**  $\subset$  è solo un'inclusione insiemistica. (Più avanti verranno introdotti gli spazi vettoriali).

L'immagine di  $f = f(A)$ . Non bisogna confondere l'immagine di una funzione con il suo codominio, perché il codominio potrebbe essere più grande della sua immagine.

- Sia  $R \subset B$ , allora  $f^{-1}(R)$  è la **controimmagine di  $R$  tramite  $f$**

$$f^{-1}(R) = \{ a \in A : f(a) \in R \}$$

- $f$  è **iniettiva** se  $a_1 \neq a_2 \in A$ , allora  $f(a_1) \neq f(a_2)$
- $f$  è **suriettiva** se  $\forall b \in B, \exists a_b \in A : f(a_b) = b$  ( $Imm(f) := f(A)$  deve essere uguale a  $B$ )

**Oss:** affinché  $f : A \rightarrow B$  sia una funzione deve avvenire:

1.  $\forall x \in A, \exists f(x) \in B$
  2.  $f(x)$  è un solo elemento di  $B$
- $f$  è **biiettiva** (o **biunivoca**) se è sia iniettiva che suriettiva
  - Siano  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow D$  due funzioni,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  (**composizione**)

### 3 Spazi vettoriali

Definire cos'è un campo. #todo-uni

Siano  $V$  un **insieme** e  $K$  un **campo** (per es.  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ).

Attenzione a non confondere i due insiemi. Anche se sono lo stesso o uno è sottoinsieme dell'altro, rimangono due insiemi distinti.

Gli elementi di  $V$  si chiamano **vettori**, mentre gli elementi di  $K$  si chiamano **scalari**.

**Def:**  $V$  è uno **spazio vettoriale su  $K$**  se esistono due operazioni su  $V$ :

1. “+” :  $V \times V \rightarrow V \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Con proprietà:

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$  (*associatività*)
- $\exists \vec{0} \in V : \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$  (*esistenza dell'elemento neutro*)
- $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$  (*esistenza degli opposti*)
- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  (*commutatività*)

2. “.” :  $K \times V \rightarrow V \quad (\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$  (*prodotto per scalare*)

**Attenzione:** l'operazione  $\vec{v} \cdot \alpha$  non è definita.

Con proprietà:

- $(\lambda_1 +_K \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V \vec{v} +_V \lambda_2 \cdot_V \vec{v} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$  (*distributività*)
- $\lambda \cdot_V (\vec{v}_1 +_V \vec{v}_2) = \lambda \cdot_V \vec{v}_1 +_V \lambda \cdot_V \vec{v}_2 \quad \forall \lambda \in K, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
- $(\lambda_1 \cdot_K \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 \cdot_V \vec{v}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$

**Oss:**  $V$  (come ogni altro spazio vettoriale) non ha un suo prodotto interno, cioè non esiste un vettore “ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ ”.

Queste proprietà ne implicano altre (corollari). Si può dimostrare che, se  $V$  è uno spazio vettoriale su  $K$ , allora:

- $0 \cdot_V \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V$
- $\lambda \cdot_V \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot_V \vec{v} = -\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$  (in questo caso  $-1 \in K$  è l'elemento opposto dell'identità moltiplicativa del campo  $K$ )

| **Es 1:**

$$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{R}$$

Dotiamo  $\mathbb{R}^n$  di una struttura di spazio vettoriale su  $K$ .

La **somma** è definita come:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left( (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \right) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$  (*vettore nullo, elemento neutro additivo*)
- $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $-\vec{v} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

La **moltiplicazione per scalare** è definita come:

$$\cdot : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left( \alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \mapsto (\alpha \cdot x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

## Es 2:

$$V = \mathbb{R}_{[x]} = \{ \text{polinomi in } x \text{ a coeff reali} \}$$

$$= \{ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_h x^h : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \}$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^h \lambda_i x^i : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \right\}$$

- Dati  $p(x), q(x)$  polinomi in  $x$ :

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \sum_{i=0}^h \alpha_i x^i + \sum_{j=0}^l \beta_j x^j \\ &= \sum_{u=0}^{\max(l,h)} (\alpha_u + \beta_u) \cdot x^u \end{aligned}$$

- $0(x) = 0 \in \mathbb{R}$  (*polinomio nullo, di grado 0*)
- $-p(x) = \sum_{i=0}^h -\alpha_i \cdot x^i$
- $\lambda \cdot p(x) = \sum_{i=0}^h \lambda \cdot \alpha_i \cdot x^i$

**Es 3:**

Sia  $V = \{ \text{funzioni} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \}$ . Dotiamo  $V$  di una struttura di spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

La somma è definita come

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}) &\mapsto "f + g" : I \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

In questo caso  $f + g$  è definito come

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

Il prodotto viene definito come

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, f : I \rightarrow \mathbb{R}) &\mapsto "f \cdot g" : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

**3.1 Sottospazi vettoriali**

**Def:** sia  $V$  uno sp. vett. su  $K$ , e  $W \subset V$ . Diremo che  $W$  è un **sottospazio vettoriale di  $V$**  se:

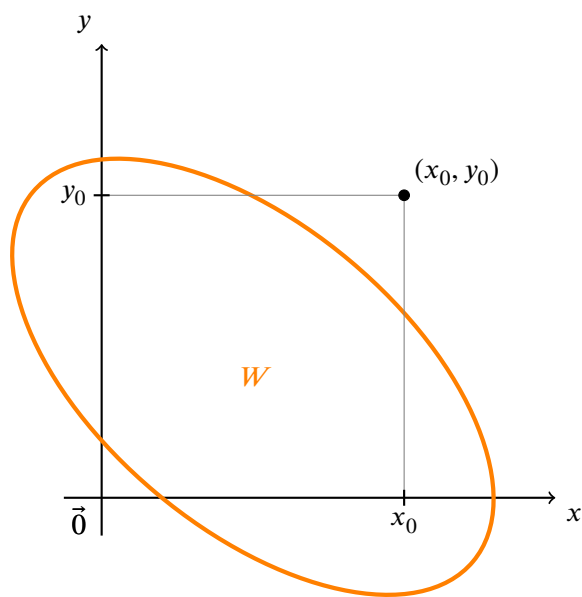
1.  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W \quad \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$
2.  $\lambda \cdot \vec{w} \in W \quad \forall \lambda \in K, \vec{w} \in W$

In tal caso denoteremo la relazione tra  $W$  e  $V$  come  $W < V$ .

**Oss:** se  $W < V$ , allora  $W$  è lui stesso uno spazio vettoriale.

**Es 1:**  $V = \mathbb{R}^2 \ni (x_0, y_0)$



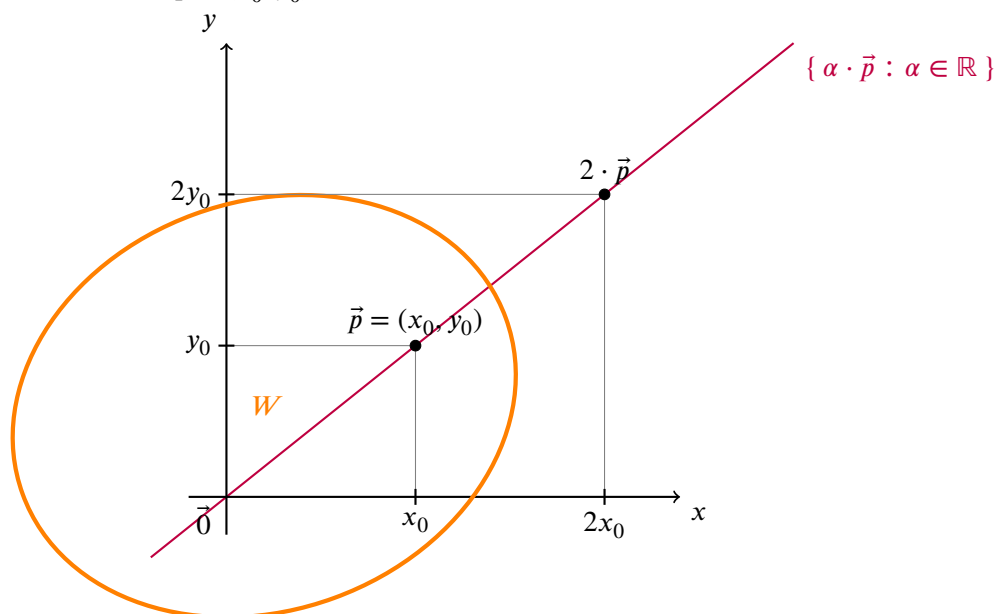


Sia  $\lambda = 0$ . Per la proprietà 2,  $\lambda \cdot \vec{w} \in W$ , ma in questo caso  $0 \cdot \vec{w} = \vec{0} \notin W$ .

Dunque  $W$  non può essere un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Ciò non vuol dire che non si possa mettere una struttura di uno spazio vettoriale su  $W$ , ma essa non sarà quella ereditata da  $V$ .

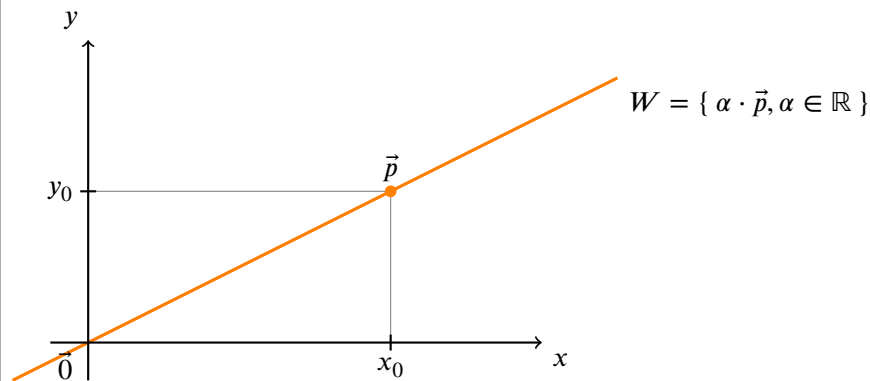
**Es 2:**  $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



Per la proprietà 2,  $\lambda \cdot \vec{p} \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Sia  $\lambda = 2$ ,  $\lambda \cdot \vec{p}$  diventa  $2 \cdot \vec{p} = (2x_0, 2y_0)$ . Si può notare che  $2 \cdot \vec{p} \notin W$ .

| Dunque  $W$  non è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

**Es 3:**  $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



$W$  è un sottospazio vettoriale di  $V = \mathbb{R}^2$  perché vengono soddisfatte le due condizioni:

1.  $\alpha_1 \cdot \vec{p} + \alpha_2 \cdot \vec{p} \in W$ . Questo si può riscrivere raccogliendo come  $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \vec{p} \in W$  ed è dimostrato perché la somma di scalari è uno scalare
2. Verificata banalmente

Quali sono tutti i sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ ?

- $\{ \vec{0} \}$
- $\{ \alpha \cdot \vec{p}, \alpha \in \mathbb{R} \}$  (*rette passanti per l'origine*)
- $\mathbb{R}^2$

**Domanda cruciale:** dato  $S \subset V$  (sottoinsieme di uno spazio vettoriale), esiste il “più piccolo sottospazio vettoriale di  $V$  che contiene  $S$ ”? La risposta è sì.

**Def:**  $\langle S \rangle \subset V$  denoterà il più piccolo sottospazio di  $V$  che contiene  $S$ . Esso si chiama **sottospazio vettoriale generato da  $S$** .

Si dimostra che

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Quindi  $\langle S \rangle$  è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori  $\{ z_1, z_2, \dots, z_n \}$  con i coefficienti  $\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e tutti i vettori in  $S$ .

| **Oss:**  $S \subset \langle S \rangle$

**Def:** sia  $S \subset V$  spazio vettoriale.

I vettori di  $S$  sono detti **linearmente dipendenti** se  $\exists \vec{w} \in S$  e vettori  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_h \in S$  con  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  tali che  $\vec{w} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \vec{z}_i$ .

$S$  sono **linearmente indipendenti** se non sono dipendenti.

## 4 Campi

**Def:** un campo è un insieme dotato di due operazioni  $(+, \cdot)$ . Deve avere tre proprietà:

1.  $(K, +)$  è un gruppo abeliano -  $+: K \times K \rightarrow K$  (*l'operazione non esce dal gruppo*)

-  $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K$  (*proprietà associativa*) -  $a + 0 = 0 + a =$

$a \quad \forall a \in K$  (*esistenza del neutro*) -  $\forall a \in K \quad \exists -a \in K$  t.c.  $-a + a = a + (-a) =$

$0$  (*esistenza dell'opposto*) -  $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$  (*proprietà commutativa*) 2.

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$  è un gruppo abeliano -  $\cdot: K \times K \rightarrow K$  (*l'operazione non esce dal gruppo*) -

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$  (*proprietà associativa*) -  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$

(*esistenza del neutro*) -  $\forall a \in K \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in K \setminus \{0\}$  t.c.  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

(*esistenza dell'opposto*) -  $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K$  (*proprietà commutativa*) 3. Il prodotto

è distributivo rispetto alla somma:  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$