
Appunti di Analisi I

Analisi Matematica (prof. Mongodi) - CdL Informatica
Unimib - 23/24

Federico Zotti

05 Nov 2023

Indice

1	Insiemi	5
1.1	Notazione	5
1.2	Prodotto cartesiano	5
1.3	Insieme delle parti	6
2	Funzioni	6
2.1	Funzioni Iniettive e Suriettive	7
2.2	Immagine e controimmagine	8
3	Numeri Reali	8
3.1	Insiemi numerici	8
3.2	Proprietà dei numeri reali	8
3.2.1	Algebriche	9
3.2.2	Di Ordinamento	9
3.2.3	Assioma di Continuità	9
3.3	Sottoinsiemi dei reali	10
4	Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo	10
4.1	Estremo superiore ed Estremo inferiore	11
4.1.1	Caratterizzazione di inf e sup	12
5	Funzioni reali	12
5.1	Grafici, Iniettività e Suriettività	13
6	Funzioni elementari	14
6.1	Potenze pari	14
6.2	Potenze dispari	14
6.3	Esponenziali	15
6.4	Funzioni trigonometriche	15
6.4.1	Seno	15
6.4.2	Coseno	16
6.4.3	Tangente	16

7	Trasformazione di grafici	17
8	Successioni	17
8.1	Terminologia	17
8.2	Successioni a valori reali	18
8.3	Limite di una successione	18
8.4	Teorema di unicità del limite	19
8.5	Limitatezza delle successioni convergenti	19
8.6	Teorema di permanenza del segno	19
8.7	Retta reale estesa	20
8.8	Teoremi algebrici	20
8.9	Teoremi di confronto	21
9	Tecniche di calcolo dei limiti	22
9.1	Disuguaglianza di Bernoulli	22
9.2	Dimostrazione teorema del confronto a 2	23
10	Criterio del rapporto & Criterio della radice	23
10.1	Criterio del rapporto	23
10.2	Criterio della radice	24
10.3	Fattoriale	24
10.4	Gerarchia degli infiniti	25
10.5	Criterio del rapporto-radice	25
10.6	Dimostrazione del criterio della radice	27
11	Principio di induzione	27
11.1	Disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione)	28
11.2	Coeff. binomiali	29
12	Successioni monotone	29
13	Successioni per ricorrenza	31
14	Serie numeriche	33
14.1	Definizione SBAGLIATA	33

14.2	Definizione CORRETTA	34
14.3	Carattere di una serie (comportamento)	34
14.4	Serie telescopiche	34
14.5	Serie geometriche	35
14.6	Strumenti per lo studio delle serie	36
14.6.1	Teoremi algebrici	36
14.6.2	Condizione necessaria	37
14.6.3	Serie note	37
14.6.4	Serie a termini di segno costante	38
14.6.5	Assoluta convergenza per serie a termini di segno variabile	44
14.6.6	Criterio di Leibniz per serie a termini alterni	44
15	Limiti di Funzione	45
15.1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	45
15.2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	46
15.3	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	46
15.3.1	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	47
15.3.2	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	47
15.4	Note tecniche	47
15.5	Caratterizzazione del limite per successioni	48
16	Tecniche di Calcolo dei Limiti	48
16.1	Continuità	49
16.1.1	Come trovare funzioni continue	49
16.2	Limiti notevoli	49
16.2.1	Patriarchi	49
16.2.2	Prima generazione	50
16.2.3	Seconda generazione	50
16.3	Cambi di variabile	50
17	O-piccolo e Equivalenza asintotica	50
17.1	Proprietà algebriche degli o-piccoli	51
17.2	Transitività degli o-piccoli	51

17.3 Limiti notevoli espressi in o-piccoli	52
17.4 Equivalenza asintotica	52

1 Insiemi

1.1 Notazione

Per *elenco*: Prima operazione, poi insieme di partenza

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$B = \{ n^2 \mid n \text{ naturale} \}$$

Per *proprietà*: Prima insieme che scelgo, poi la proprietà che verifico

$$C = \{ n \text{ naturale} \mid n \text{ è un quadrato} \}$$

Altri simboli:

$$\text{appartiene} \rightarrow a \in A$$

$$\text{non appartiene} \rightarrow a \notin A$$

$$\text{è sottoinsieme} \rightarrow A \subseteq B$$

$$\text{è sottoinsieme stretto} \rightarrow A \subset B$$

$$\text{insieme vuoto} \rightarrow \emptyset$$

$$\text{unione} \rightarrow A \cup B \mid \vee$$

$$\text{intersezione} \rightarrow A \cap B \mid \wedge$$

$$\text{sottrazione} \rightarrow A \setminus B$$

$$\text{cardinalità} \rightarrow |A|$$

1.2 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B , il loro **prodotto cartesiano** è l'insieme delle coppie (a, b) con $a \in A$, $b \in B$.

Si indica con $A \times B$.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Es:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

1.3 Insieme delle parti

Dato A , $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A .

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Es:

$$A = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{0\}, \{1\}\}$$

2 Funzioni

Come si descrive una funzione:

1. Un insieme di partenza (A) (*dominio*);
2. Un insieme di arrivo (B) (*codominio*);
3. Una serie di regole che ad ogni elemento di A associa un **unico** elemento di $f(a) \in B$.

$$f : A \rightarrow B$$

Il grafico di una funzione è:

$$\begin{aligned} g &= \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\} \\ &= \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} \end{aligned}$$

2.1 Funzioni Iniettive e Suriettive

Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione.

- f si dice **iniettiva** se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B .

$$a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ovvero se

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- f si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f .

$$\forall b \in B \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Una funzione si dice **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Teo: Una funzione $f : A \rightarrow B$ è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione $g : B \rightarrow A$ t.c.:

$$g(f(a)) = a \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \forall b \in B$$

Oss:

$$f : A \rightarrow B$$

- è iniettiva se ogni elemento di B è ottenuto da al più un elemento di A tramite f ;
- è suriettiva se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f .

2.2 Immagine e controimmagine

Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione.

- Se $b = f(a)$ con $a \in A, b \in B$, si dice che b è immagine di a tramite f ;
- Sia $C \subseteq A$ un sottoinsieme, si dice *immagine di C* tramite f l'insieme degli elementi di B che sono immagine di elementi di C . $f(C) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$
- Immagine di A : $f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$
- Sia $D \subseteq B$ un sottoinsieme, si dice **controimmagine di D** tramite f l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno immagine contenuta in D .
- Controimmagine di D : $f^{-1}(D) = \{ a \in A : f(a) \in D \}$ (definita anche se f non è invertibile).

3 Numeri Reali

3.1 Insiemi numerici

- **Naturali:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Razionali:** $\mathbb{Z} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$
- **Reali:** \mathbb{R}
- **Irrazionali:** \mathbb{Q}
- **Complessi:** \mathbb{C}

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

3.2 Proprietà dei numeri reali

Sono di tre tipi:

- Algebriche;
- Di Ordinamento;
- Assioma di Continuità.

3.2.1 Algebriche

Sui numeri reali sono definite due operazioni $+$ e \cdot , dette somma e prodotto, con le seguenti proprietà:

- Relative alla somma:
 - **Commutativa:** $a + b = b + a \forall a, b \in \mathbb{R} (n, z, q, r, c)$
 - **Associativa:** $(a + b) + c = a + (b + c) \forall a, b, c \in \mathbb{R} (n, z, q, r, c)$
 - **Elemento neutro somma:** $\exists 0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a + 0 = a \forall a \in \mathbb{R} (n, z, q, r, c)$
 - **Esistenza dell'inverso:** $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a + b = 0 (z, q, r, c)$
- Relative al prodotto:
 - **Commutativa:** $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in \mathbb{R} (n, z, q, r, c)$
 - **Associativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c \in \mathbb{R} (n, z, q, r, c)$
 - **Elemento neutro prodotto:** $\exists 1 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot 1 = a \forall a \in \mathbb{R} (n, z, q, r, c)$
 - **Esistenza dell'inverso:** $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \cdot b = 1 (q, r, c)$
- **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = ab + ac \forall a, b, c \in \mathbb{R} (n, z, q, r, c)$

3.2.2 Di Ordinamento

Dati due numeri reali x e y , si ha sempre che $x \geq y$ oppure $x \leq y$. Tale ordinamento ha le proprietà:

- **Riflessiva:** $x \geq x \forall x \in \mathbb{R}$
- **Antisimmetrica:** se $x \geq y \wedge y \geq x$, allora $x = y$
- **Transitiva:** se $x \geq y \wedge y \geq z$, allora $x \geq z$
- se $x \geq y$, allora $x + z \geq y + z \forall z \in \mathbb{R}$
- se $x \geq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \forall z \in \mathbb{R} \text{ con } z \geq 0$

Queste valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ma non in \mathbb{C} .

3.2.3 Assioma di Continuità

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi diversi da \emptyset . Diciamo che A sta tutto a sinistra di B se $a \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$.

L'assioma di continuità dice che se A sta tutto a sinistra di B allora esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ t.c. $c \geq a \forall a \in A; c \leq b \forall b \in B$.

c non è obbligato ad essere unico; c può appartenere ad A , a B o anche a entrambi (in questo caso è unico elemento "separatore").

Es:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 > 2\}$$

$$\text{se } a \in A, b \in B \rightarrow a < b$$

$$c^2 = 2$$

Questo è impossibile in \mathbb{Q} , quindi l'assioma di continuità non vale in \mathbb{Q} .

Conclusione: sui numeri reali, $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore tra A e B e si può dimostrare che è unico.

3.3 Sottoinsiemi dei reali

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo separato da estremi $a, b \in \mathbb{R}$ (con $a < b$).

- $]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b\}$

4 Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme *non vuoto*.

$M \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di A se $M \geq a \forall a \in A$

$m \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** di A se $m \leq a \forall a \in A$

Minoranti e maggioranti non sono obbligati ad esistere. Ad esempio $A = \mathbb{N}$ ha minoranti ma non ha maggioranti.

Se esiste un maggiorante invece, ne esistono infiniti. Se M è un maggiorante, anche $M + 1$ lo è. Lo stesso vale per i minoranti.

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ si dice **superiormente limitato** se ammette un maggiorante e **inferiormente limitato** se ammette un minorante. Si dice **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

Es:

- $A = (0, +\infty)$ è inferiormente limitato ma non superiormente
- $B = \{ \frac{1-n}{2} : n \in \mathbb{N} \}$ è superiormente limitato, ma non inferiormente
- $C = (1, 7]$ è limitato

$M \in \mathbb{N}$ si dice **massimo** di A (e si scrive $M = \max A$) se $M \in A \wedge M \geq a \forall a \in A$
 $m \in \mathbb{N}$ si dice **minimo** di A (e si scrive $m = \min A$) se $m \in A \wedge m \leq a \forall a \in A$

\max e \min non sono obbligati ad esistere, nemmeno per insiemi limitati.

Es:

- $A = (0, 1)$ non ha né \max , né \min

\max e \min , se esistono, sono **unici**.

4.1 Estremo superiore ed Estremo inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

Si dice che $\sup A = +\infty$ se A non è superiormente limitato o $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se lo è e L è il minimo dei maggioranti.

Si dice che $\inf A = -\infty$ se A non è inferiormente limitato o $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se lo è e l è il massimo dei minoranti.

Es:

- $\sup \mathbb{N} = +\infty$
- $\inf \mathbb{N} = 0$
- $\sup (0, 1) = 1$

Teo: Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ è superiormente limitato, allora il minimo dei maggioranti esiste.

Dim: Sia $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \ \forall a \in A\}$ l'insieme dei maggioranti. Allora A sta tutto a sinistra di B . Per l'*assioma di continuità* c'è un elemento separatore $c \in \mathbb{R}$, ovvero $c \leq b \ \forall b \in B$ e $c \geq a \ \forall a \in A \implies c \in B$. Quindi $c = \min B$.

Esercizio per casa #todo-compito: Enunciare e dimostrare il teorema analogo per il massimo dei minoranti.

4.1.1 Caratterizzazione di inf e sup

- $\sup A = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$ (*ovvero se posso trovare elementi di A grandi quanto voglio*)
- $\inf A = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A$ t.c. $a \leq M$
- $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se
 - $a \leq L \ \forall a \in A$ (*L è un maggiorante*)
 - $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$
- $\inf A = L \in \mathbb{R}$ se
 - $a \geq L \ \forall a \in A$ (*L è un minorante*)
 - $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.c. $a \leq L + \varepsilon$

Se esiste $M = \max A$ allora $\sup A = M$. Se esiste $m = \min A$ allora $\inf A = m$. $\sup A$ non è obbligato ad appartenere ad A , ma se vi appartiene è il **massimo**. Stessa cosa per $\inf A$.

5 Funzioni reali

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oppure $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Grafico di $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Proprietà di simmetria:

- si dice **pari** se $f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'asse y*)

- f si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'origine*)
- f si dice **periodica** se $\exists T > 0$ t.c. $f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ (*il grafico si ottiene traslando il pezzo $[0, T]$ in $[T, 2T]$, $[T, 3T]$, ...*)

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari, allora $f(0) = 0$.

Se T è un periodo, anche $2T, 3T, 4T, \dots$ lo sono. Il **minimo periodo** è il più piccolo T (se esiste) per cui vale $f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietà di **monotonia**:

- f si dice **monotona**:
 - f si dice **strettamente crescente** se $x > y \implies f(x) > f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
 - f si dice **strettamente decrescente** se $x > y \implies f(x) < f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente crescente** se $x > y \implies f(x) \geq f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente decrescente** se $x > y \implies f(x) \leq f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$

Se f è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente. Se f è strettamente decrescente allora è anche debolmente decrescente.

Se f è sia deb. crescente che deb. decrescente allora è **costante**.

5.1 Grafici, Iniettività e Suriattività

- Suriattiva \iff in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *almeno* una freccia (*tutto l'asse y è "coperto"*)
- Iniettiva \iff in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *al più* (0|1) una freccia (*l'asse y è "coperto" solo una volta*)
- Retta orizzontale: $y = \lambda$
- Grafico di f : $y = f(x)$
- Intersezioni: $f(x) = \lambda$

$$f \text{ iniettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha al più una soluz. } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ suriettiva} \iff f(x) = \lambda \text{ ha almeno una soluz. } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Se f è pari o periodica non è iniettiva. Se f è strettamente crescente o strettamente decrescente allora è iniettiva.

6 Funzioni elementari

6.1 Potenze pari

$$f(x) = x^{2k} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Con $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*non iniettiva o suriettiva*).
- Con $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ (*iniettiva ma non suriettiva*)
- Con $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*non iniettiva ma suriettiva*)
- Con $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*biunivoca*)

Quindi l'inverso è

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$g(x) = \sqrt{x^{2k}}$$

Oss: $f(x) = x^{2k}$ è una funzione *pari*, strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente su $[-\infty, 0)$.

Oss: la funzione $f(x) = |x|$ ha le stesse proprietà.

6.2 Potenze dispari

$$f(x) = x^{2k+1} \quad k \in \mathbb{N}$$

È una funzione dispari.

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*biunivoca*)

L'inverso è definito come

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sqrt{x^{2k+1}}$$

Vale lo stesso per $f(x) = \frac{1}{x^k}$

[!warning] Confermare la funzione

| **Oss:** $f(x) = x^{2k+1}$ è strettamente crescente su \mathbb{R} .

6.3 Esponenziali

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a > 1$$

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*iniettiva*)
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \log_a x$$

| **Ese:** fate lo stesso per $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

| **Oss:** se $a \in (0, 1)$ allora $b = \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$.

6.4 Funzioni trigonometriche

6.4.1 Seno

$$f(x) = \sin x$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo 2π ed è dispari ($\sin(-x) = -\sin x$).

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(x) = \arcsin x$$

Oss: $\arcsin(\sin(\frac{3}{4}\pi)) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3}{4}\pi$

6.4.2 Coseno

$$f(x) = \cos x$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo 2π ed è pari ($\cos x = \cos(-x)$).

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$g(x) = \arccos x$$

Oss: $\arccos(\cos(\frac{3}{2}\pi)) \neq \frac{3}{2}\pi$

6.4.3 Tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo π ed è dispari (*solo suriettiva*)
- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è dispari (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(x) = \arctan x$$

7 Trasformazione di grafici

Dato $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- *Simmetria* assiale rispetto all'asse x : $y = -f(x)$
- *Simmetria* assiale rispetto all'asse y : $y = f(-x)$
- *Traslazione* del vettore $(0, c)$ (verso l'alto se $c > 0$): $y = f(x) + c$
- *Traslazione* del vettore $(-c, 0)$ (verso sinistra se $c > 0$): $y = f(x + c)$
- *Compressione* verso l'asse x (dilatazione se $c > 1$): $y = f(x) \cdot c$
- *Dilatazione* verso l'asse y (compressione se $c > 1$): $y = f(x \cdot c)$
- *Ribaltamento* sull'asse x : $y = |f(x)|$
- *Ribaltamento* sull'asse y : $y = f(|x|)$

8 Successioni

8.1 Terminologia

Sia $\mathcal{P}(n)$ una affermazione a proposito del numero $n \in \mathbb{N}$. Sarà vera o falsa a seconda del valore di n .

Diciamo che:

- $\mathcal{P}(n)$ è vera *frequentemente* se è vera per infiniti $n \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{P}(n)$ è vera *definitivamente* se è vera “da un certo punto in poi”, cioè se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

Oss: Definitivamente \implies Frequentemente.

Es:

1. $n^2 \geq 1000$ è vera definitivamente
2. n^3 è multiplo di 8 è vera frequentemente, ma non definitivamente
3. $n + 1 \geq 3^n$ è falsa definitivamente

8.2 Successioni a valori reali

Def rigida: una successione a valori reali è una funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Di solito, invece di scrivere $a(n)$, si scrive a_n .

Oss: così non è possibile considerare $a_n = \frac{1}{n}$.

Def più elastica: una successione a valori reali è una funzione $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{N}$, tale che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ per cui $\forall n \geq n_0, n \in A$ (tale che $n \in A$ definitivamente).

8.3 Limite di una successione

Sia a_n una successione. Abbiamo 4 possibili comportamenti:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ ($a_n \rightarrow \ell$; $\ell \in \mathbb{R}$)
2. $\lim a_n = +\infty$ ($a_n \rightarrow +\infty$)
3. $\lim a_n = -\infty$ ($a_n \rightarrow -\infty$)
4. $\lim a_n$ non esiste (a_n è indeterminata)

Def:

- Una successione è di tipo **4**, se non è di nessun degli altri tipi
- Una successione è di tipo **2**, se $\forall M \in \mathbb{R}, a_n \geq M$ definitivamente ($\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq M \forall n \geq n_0$)
- Una successione è di tipo **3**, se $\forall m \in \mathbb{R}, a_n \leq m$ definitivamente ($\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq m \forall n \geq n_0$)
- Una successione è di tipo **1**, se
 - $\forall \varepsilon > 0, a_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ definitivamente \vee
 - $\forall \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente \vee
 - $\forall \varepsilon > 0, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ definitivamente

Varianti di **1**.

- $a_n \rightarrow \ell^+$ tende a ℓ da destra se $\forall \varepsilon > 0, \ell < a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente
- $a_n \rightarrow \ell^-$ tende a ℓ da sinistra se $\forall \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n < \ell$ definitivamente

8.4 Teorema di unicità del limite

Una successione ricade sempre in uno e uno solo dei quattro tipi di comportamento.
Se poi ricade nel tipo 1. ($\ell \in \mathbb{R}$), il valore ℓ è unico.

Dim: se a_n è di tipo 1. cioè $a_n \rightarrow \ell$, allora definitivamente $\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$. $\ell - 1 \leq a_n$ implica che non può essere di tipo 3.. $a_n \leq \ell + 1$ implica che non può essere di tipo 2.. Inoltre se è di tipo 2., definitivamente si avrà $a_n \geq 1$. Se è di tipo 3., definitivamente si avrà $a_n \leq -1$. Queste condizioni non possono accadere insieme.

Infine, se $a_n \rightarrow \ell_1$, $a_n \rightarrow \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$, allora fisso $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$. Quindi a_n si ritrova in due intervalli contemporaneamente: $\ell_1 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_1 + \varepsilon$ e $\ell_2 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_2 + \varepsilon$. Se $\ell_1 < \ell_2$ allora $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$. Dunque $a_n \leq \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente. Questo è assurdo!

8.5 Limitatezza delle successioni convergenti

- Se $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato
- Se $a_n \rightarrow +\infty$ allora $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è inferiormente limitato
- Se $a_n \rightarrow -\infty$ allora $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato

Dimostrazione nelle slide. #view-slide

8.6 Teorema di permanenza del segno

- Se $a_n \rightarrow \ell \in (0, +\infty)$ o se $a_n \rightarrow +\infty$ allora $a_n > 0$ definitivamente
- Se $a_n \geq 0$ definitivamente e se $a_n \rightarrow \ell$ allora $\ell \geq 0$ oppure $\ell = +\infty$

Dimostrazione nelle slide #view-slide

Oss: vale lo stesso risultato con i negativi.

- Se $a_n \rightarrow \ell \in (-\infty, 0)$ o se $a_n \rightarrow -\infty$ allora $a_n < 0$ definitivamente
- Se $a_n \leq 0$ definitivamente e se $a_n \rightarrow \ell$ allora $\ell \leq 0$ oppure $\ell = -\infty$

8.7 Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- Posso scrivere $a_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per unificare i tipi 1., 2., 3.
- Le operazioni di \mathbb{R} si estendono a $\overline{\mathbb{R}}$ *quasi bene*:

$$+x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$-x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{x}{+\infty} = 0$$

- Ci sono 2 eccezioni:

1. Le 7 forme indeterminate:

$$(+\infty) + (-\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$0^0$$

$$1^{\pm\infty}$$

$$(\pm\infty)^0$$

2. Le divisioni per 0

8.8 Teoremi algebrici

Siano a_n, b_n successioni, $a_n \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}, b_n \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2}$$

Con le dovute eccezioni di ∞ .

8.9 Teoremi di confronto

Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

1. Se $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$, allora $a \leq b$
2. Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora $b_n \rightarrow +\infty$
3. Se $b_n \rightarrow -\infty$, allora $a_n \rightarrow -\infty$

Se a_n, b_n, c_n sono tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \rightarrow \ell, c_n \rightarrow \ell$ (lo stesso $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) allora $b_n \rightarrow \ell$. (*teorema del carabiniere*).

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \cos n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos n \geq -1 \implies n + \cos n \geq n - 1$$

Per il teorema del confronto a 2, visto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = [+\infty - 1] = +\infty$, ho che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \cos n = +\infty$$

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

E poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, per il teorema del confronto a 3 $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

9 Tecniche di calcolo dei limiti

Fatto N.1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty \quad \forall a > 0$$

Fatto N.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = 0^+ \quad \forall a < 0$$

Oss: $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{-a}} = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0^+$

Ricordare negli esercizi di scrivere *teoremi algebrici dove vengono usati*.

9.1 Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1 \quad \text{si ha} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

Fatto N.3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty \quad \forall a > 1$$

Dim: $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) \rightarrow [1 + \infty(a-1)] = +\infty \Rightarrow a^n \rightarrow +\infty$ per il confronto a 2.

Fatto N.4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad \forall 0 < a < 1$$

Dim: $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ e $b^n \rightarrow +\infty$ quindi $a^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0^+$.

Fatto N.5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 1$$

Dim: $a^{\frac{1}{n}} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Finire la dim dalle slide #todo-uni .

9.2 Dimostrazione teorema del confronto a 2

Sappiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente

1. Se $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, vogliamo dimostrare che $a \leq b$

Per assurdo, se $b < a$, posso scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \frac{a-b}{2} \Rightarrow b + \varepsilon < a - \varepsilon$.

Allora definitivamente $a_n \geq a - \varepsilon$ e $b_n \leq b + \varepsilon$, quindi $b_n \leq b + \varepsilon < a - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente.

Ciò significa che $b_n < a_n$, il che è assurdo.

2. Se $a_n \rightarrow +\infty, \forall M \in \mathbb{R}$, ho $a_n \geq M$ definitivamente \Rightarrow ho $b_n \geq a_n \geq M$ definitivamente $\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$.

3. Uguale a 2..

10 Criterio del rapporto & Criterio della radice**10.1 Criterio del rapporto**

Sia a_n una successione definitivamente positiva (> 0). Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se $\ell < 1, a_n \rightarrow 0$

2. se $\ell > 1, a_n \rightarrow +\infty$
3. se $\ell = 1, ??$

10.2 Criterio della radice

Sia a_n una successione definitivamente ≥ 0 . Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se $\ell < 1, a_n \rightarrow 0$
2. se $\ell > 1, a_n \rightarrow +\infty$
3. se $\ell = 1, ??$

Es: $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ con i teo. algebrici ottengo $[\frac{+\infty}{+\infty}]$, quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{2}$$

per il criterio del rapporto $a_n \rightarrow 0$.

Fatto N.6 (*Esponenziale batte potenza*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \forall b > 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

10.3 Fattoriale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

Fatto N.7 (*Il fattoriale batte l'esponenziale*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \quad \forall b > 0$$

****Fatto *N.7** n^n batte il fattoriale.***

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

10.4 Gerarchia degli infiniti

1. n^n
2. $n!$
3. b^n
4. n^a
5. n

Attenzione: nella gerarchia degli infiniti, dovete rispettare religiosamente le espressioni date. $n!$ batte 2^n , ma non so cosa fa con $2^{(n^2)}$.

10.5 Criterio del rapporto-radice

Supponiamo $a_n > 0$ definitivamente e che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad (\text{stesso } \ell)$$

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = ?$

Applico il criterio rapporto-radice con $a_n = n$, che è definitivamente > 0 . Ho che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = ?$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{a}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{1}{n}})^a = 1$$

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 - n^2 + 1} = ?$

Ha senso perché $n^7 - n^2 + 1 \rightarrow +\infty \implies$ è definitivamente positiva per il teorema di permanenza del segno.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^7}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Fatto N.8

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1 \quad \forall \text{ polinomio}$$

Fatto N.9

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = ?$

Metodo 1: $\forall b > 1$ ho che $n! > b^n$ (per il teo di permanenza del segno: $\frac{b^n}{n!} \rightarrow 0 \implies$ definitivamente $\frac{b^n}{n!} < 1 \implies b^n < n!$ definitivamente) $\implies \sqrt[n]{n!} > b$ definitivamente $\forall b > 1 \implies \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$.

Metodo 2:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$$

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = ?$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Oss: per n molto grandi, $n!$ assomiglia a $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = ?$

Applico il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n!}} = \frac{(2^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \dots$$

10.6 Dimostrazione del criterio della radice

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell > 1$, allora la media sarà un numero tra 1 e ℓ

$$1 < \frac{\ell + 1}{2} < \ell \implies \text{definitivamente } \sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell + 1}{2} \implies a_n \geq \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n$$

e poiché $\frac{\ell + 1}{2} > 1$, $\left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n \rightarrow +\infty$. Quindi per il confronto a 2, ho che $a_n \rightarrow +\infty$.

Se invece $0 \leq \ell < 1$, allora $0 \leq \frac{\ell + 1}{2} < 1 \implies$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell + 1}{2}$, inoltre $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell + 1}{2} \implies 0 \leq a_n \leq \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n$ definitivamente e $0 < \frac{\ell + 1}{2} < 1 \implies \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, dunque, per il teo del confronto a 3, $a_n \rightarrow 0$.

11 Principio di induzione

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathcal{P}(n)$ = affermazione a prop. di n che può essere vera o falsa

Es: $n^2 = n + 6$ (*definitivamente vera*)

- $n = 0$: falsa
- $n = 1$: falsa
- $n = 2$: falsa
- $n = 3$: vera!
- $n = 4$: falsa
- $n = 5$: falsa

Es: se l'insieme A ha n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi (*definitivamente vera*).

Principio di induzione: supponiamo di sapere che

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera (*passo base*)
2. $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1) \forall n \geq 0$ (*passo induttivo*)

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Es: dimostrare che $0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dimostrazione per induzione:

1. $n = 0 : 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \rightarrow \text{vero}$
2. Ipotesi (passo n) : $0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Voglio dire che $0 + 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
 $0 + 1 + \dots + (n+1) = 0 + 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ese: da fare a casa #todo-compito

1. $0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $0^3 + 1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

11.1 Disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1 \text{ si ha } (1+x)^n \geq 1+nx$$

Dimostrazione per induzione su n

1. *Passo base:*

$$n = 0 \quad (1+x)^0 \geq 1 \quad \forall x > -1$$

$$n = 1 \quad (1+x)^1 \geq 1+x \quad \forall x \geq -1$$

2. *Passo induttivo:*

Ipotesi(passo n) : $(1+x)^n \geq 1+nx$

Tesi(passo $n+1$) : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1+nx+x+nx^2 = \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \longrightarrow \text{Vero!} \Rightarrow\end{aligned}$$

La disug è dimostrata $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1$

11.2 Coeff. binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ è l'elemento in posizione k nella riga n del **triangolo di Tartaglia** (si conta da 0).

Sviluppo del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j$$

12 Successioni monotone

Sia a_n una successione. Diciamo che a_n è

1. **strettamente crescente** se $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$
2. **strettamente decrescente** se $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$
3. **debolmente crescente** se $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
4. **debolmente decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$

Oss: similmente si definiscono i corrispondenti concetti per successioni definitivamente monotone.

Teo delle successioni monotone: sia a_n una successione *debolmente crescente*, allora a_n ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Più precisamente $a_n \rightarrow \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Lo stesso vale per

le successioni debolmente decrescenti ($a_n \rightarrow \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Dim (caso crescente):

Primo caso: $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty \implies \forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_{n_0} \geq M$. Ma se la succ. è debolmente crescente $\implies \forall n \geq n_0, a_n \geq a_{n_0} \geq M \implies a_n \rightarrow \infty$.

Secondo caso: $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \ell \in \mathbb{R} \implies$

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell$ (ℓ è un maggiorante)
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \ell - \varepsilon \leq a_{n_0}$ (ℓ è il minimo tra i maggioranti)

Ma a_n è debolmente crescente $\implies \forall n \geq n_0$ ho che $\ell - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq \ell \implies a_n \rightarrow \ell^-$

Caso decrescente: #todo-compito

Oss:

1. Se a_n è debolmente crescente e superiormente limitata, allora $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$
2. Se a_n è definitivamente debolmente crescente (o decrescente) allora $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (o $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$), ma non posso dire che $\ell = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Es: Sia $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Allora

1. $2 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Per il teo sulle successioni monotone, $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ e $2 \leq \ell \leq 3$.

Dim:

1. Per Bernoulli: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot \frac{1}{n^j} \rightarrow$ *guardare le slide*
3. $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \implies a_n$ è decrescente \rightarrow *guardare le slide*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

Es:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

13 Successioni per ricorrenza

Una successione per ricorrenza si presenta così:

- Un punto di partenza: $a_0 = 2$
- Una regola per calcolare il valore di un elemento dati i precedenti: $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{1}{n+2}$

Possono essere dimostrate per induzione.

Es 1:

$$\begin{cases} a_0 = 1 & (I) \\ a_n = n \cdot a_{n-1} & (II) \end{cases}$$

Se voglio calcolare $a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot a_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.

In questo caso si ha $a_n = n!$.

Es 2:

$$\begin{cases} a_0 = 3 & (I) \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 & (II) \end{cases}$$

Calcolando un po' di valori trovo **guess**: $a_n = 2^{n+1} + 1$. Si può dimostrare per induzione:

- **P.B.:** $n = 0$ per (I), $a_0 = 3 = 2^{0+1} + 1$ (**Ok!**)
- **P.I.:** se $a_n = 2^{n+1} + 1$ allora $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{(n+1)+1} + 1$ (**Ok!**)

Attenzione: Poter trovare una formula esplicita per le successioni per ricorrenza è *rarissimo!*

Terminologia: una successione per ricorrenza che dipende dai k termini precedenti si dice di **ordine** k . Una successione per ricorrenza senza una dipendenza esplicita da n si dice **autonoma**.

Tratteremo quasi esclusivamente successioni per ricorrenza di ordine 1, autonome.

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Es 3:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = a_{n-1}^2 - 1 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = f(a_{n-1})$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

Intersezioni con la bisettrice $y = x$: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Guess: la successione è crescente e tende a $+\infty$.

Strategia:

1. $a_n \geq 2 \quad \forall n \geq 0$
2. $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$
3. $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
4. $\ell = +\infty$

Dim 3.: segue dal punto 2. per il teo sulle successioni monotone.

Dim 4.: Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora posso passare al limite la relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 - 1 \\ \implies \ell &= \ell^2 - 1 \\ \implies \ell &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ oppure } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Ma $a_n \geq 2 \quad \forall n$ (per 1.) $\implies \ell \geq 2$ (permanenza del segno) \implies nessuno dei valori trovati è accettabile $\implies \ell = +\infty$.

Dim 1.: $a_n \geq 2 \quad \forall n$. Per induzione:

- **P.B.:** $a_n = 2 \geq 2$ (Ok!)
- **P.I.:** se $a_n \geq 2$, allora $a_{n+1} = a_n^2 - 1 \geq 4 - 1 = 3 \geq 2$ (Ok!)

Dim 2.: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$. Per induzione:

- **P.B.:** $a_1 = a_0^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \geq a_0$ (Ok!)
- **P.I.:** se $a_n \leq a_{n+1}$, allora $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$ perché $f(x) = x^2 - 1$ è crescente su $[0, +\infty)$.

Quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

14 Serie numeriche

14.1 Definizione SBAGLIATA

Data una successione a_n , indico con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la somma di tutti i termini della successione (che sono infiniti).

Questo non ha senso

14.2 Definizione CORRETTA

Def: data una successione a_n , dato $k \in \mathbb{N}$, la **somma parziale** k -esima di a_n è

$$S_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

Def: una **serie numerica** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ($\sum a_n$) è il limite della successione S_k , per $k \rightarrow \infty$. Cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_k)$$

14.3 Carattere di una serie (comportamento)

Essendo un limite, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha 4 possibili comportamenti:

1. **Converge** a $\ell \in \mathbb{R}$ se $S_k \rightarrow \ell$
2. **Diverge** a $+\infty$ se $S_k \rightarrow +\infty$
3. **Diverge** a $-\infty$ se $S_k \rightarrow -\infty$
4. È **indeterminata** se S_k non ha limite

14.4 Serie telescopiche

Es:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

- $S_2 = a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $S_3 = a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$

- $S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$
- $S_k = 1 - \frac{1}{k}$ (*dimostrato per induzione*)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = 1 \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} \text{ converge a } 1$$

14.5 Serie geometriche

La serie geometrica di ragione $a \in \mathbb{R}$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Lemma: $a^0 + a^1 + \dots + a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$ se $a \neq 1$

Dim:

$$\begin{aligned} (a^0 + a^1 + \dots + a^k) \cdot a &= a^1 + a^2 + \dots + a^{k+1} + \\ (a^0 + a^1 + \dots + a^k)(-1) &= -a^0 - a^1 - \dots - a^k = \\ (a^0 + a^1 + \dots + a^k)(a - 1) &= -a^0 + a^{k+1} \end{aligned}$$

Poiché $a \neq 1$, posso dividere ed ottengo il teo.

Oss: se $a = 1$, $a^0 + \dots + a^k = k + 1$.

Dunque si ha

$$S_k = \begin{cases} k + 1 & \text{se } a = 1 \\ \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} & \text{se } a \neq 1 \end{cases}$$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = ?$

1. Se $-1 < a < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-a}$
2. Se $a = 1$ vedere esempio 2.
3. Se $a > 1$ diverge a $+\infty$
4. Se $a < -1$ non ha limite

5. Se $a = -1$ vedere esempio stupido 4

Dimostrazioni nelle slide #view-slide

14.6 Strumenti per lo studio delle serie

Il problema è determinare il carattere di una serie senza poter ricavare un'espressione esplicita per le somme parziali. Per farlo abbiamo:

- Teoremi algebrici
- Condizione necessaria alla convergenza
- Serie “note”
- Criteri di convergenza
 - Serie a termini di segno costante ($a_n \geq 0$ def. o $a_n \leq 0$ def.)
 - ★ Radice
 - ★ Rapporto
 - ★ Confronto
 - ★ Confronto asintotico
 - ★ *Condensazione di Cauchy*
 - Serie a termini di segno alterno
 - ★ Leibniz
 - Serie a termini di segno qualunque
 - ★ Assoluta convergenza

14.6.1 Teoremi algebrici

1. Sia a_n una successione e sia $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Allora (*come operazione in $\overline{\mathbb{R}}$*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ (come operazione in } \overline{\mathbb{R}})$$

2. Se a_n, b_n sono successioni, allora (*con tutte le attenzioni delle operazioni nella retta reale estesa*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

3. **Attenzione!**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

14.6.2 Condizione necessaria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \implies a_n \rightarrow 0$$

Dim: $a_n = S_n - S_{n-1}$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $S_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \ell - \ell = 0$.

Dunque se a_n non tende a 0, la serie non può convergere (può divergere o essere indeterminata). Se $a_n \rightarrow 0$, *potrebbe* convergere.

14.6.3 Serie note

1. Serie geometriche
2. Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

3. Parenti dell'armonica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

14.6.4 Serie a termini di segno costante

Lemma: sia a_n una successione def. ≥ 0 . Allora la successione $S_k = (a_0 + \dots + a_k)$ delle somme parziali è def. debolmente crescente.

Dim:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0, a_n \geq 0 \implies$$

$$\forall n \geq n_0, S_n = a_n + S_{n-1} \geq S_{n-1}$$

Teo: Se a_n è una succ. def. ≥ 0 , allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha due comportamenti possibili: converge o diverge a $+\infty$.

Dim: teo sulle successioni monotone applicato a S_k .

Oss: vale lo stesso risultato se $a_n \leq 0$ def. In quel caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge oppure diverge a $-\infty$.

14.6.4.1 Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ def. Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $\ell > 1$ la serie diverge a $+\infty$
2. Se $\ell < 1$ la serie converge
3. Se $\ell = 1$???

Dim: #view-slide

Se $a_n \geq 0$ def. e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora

1. $\ell < 1 \iff \sum a_n$ converge
2. $\ell > 1 \iff \sum a_n$ diverge a $+\infty$

Dim 2.: se $\ell > 1$, per il criterio della radice per successioni, $a_n \rightarrow +\infty$. Quindi non è rispettata la condizione necessaria per la convergenza. Poiché la serie è a termini def. ≥ 0 , può solo convergere o divergere a $+\infty$. Dunque $\sum a_n$ diverge a $+\infty$.

Dim 1.:

$$\begin{aligned}
\ell < 1 &\implies \varepsilon = \frac{1-\ell}{2} \implies \ell + \varepsilon < 1 \text{ e } \varepsilon > 0 \\
\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 &\quad \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon < 1 \\
&\implies \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq (\ell + \varepsilon)^n < 1 \\
&\implies \forall k \geq n_0 \quad S_k = \\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

Ho dimostrato che $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $S_k \leq M$ def.. Ma poiché $a_n \geq 0$ def., S_k è una successione crescente \implies per il teo sulle successioni monotone, $S_k \rightarrow L \in \mathbb{R} \implies \sum a_n$ converge.

14.6.4.2 Criterio del rapporto

Sia $a_n > 0$ def. Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $\ell > 1$ la serie diverge a $+\infty$
2. Se $\ell < 1$ la serie converge
3. Se $\ell = 1$???

14.6.4.3 Confronto per serie numeriche

Siano a_n, b_n successioni.

Def: se $0 \leq a_n \leq b_n$ def., allora:

1. $\sum a_n$ diverge a $+\infty \implies \sum b_n$ diverge a $+\infty$
2. $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge

Occhio: ogni altra implicazione è **ILLEGALE!**

Dim:

A meno di cambiare le serie per un *numero finito* di termini, posso supporre che la disuguaglianza $0 \leq a_n \leq b_n$ valga per $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$S_k^a = a_0 + \dots + a_k \quad S_k^b = b_0 + \dots + b_k$$

allora $0 \leq S_k^a \leq S_k^b \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

1. Se $S_k^a \rightarrow +\infty$, per il confronto tra successioni, $S_k^b \rightarrow +\infty$. Ovvero, se $\sum a_n$ diverge a $+\infty$, allora $\sum b_n$ diverge a $+\infty$.
2. Se $\sum b_n$ converge, allora $S_k^b \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, ma $b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies S_k^b$ è deb. crescente verso $\ell \implies S_k^b \leq \ell \forall k \in \mathbb{N} \implies S_k^a \leq S_k^b \leq \ell \forall k \in \mathbb{N} \implies S_k^a$ deb. crescente e limitata \implies convergente.

14.6.4.4 Confronto asintotico per serie numeriche

Siano a_n, b_n successioni con $a_n \geq 0, b_n > 0$ def..

Def: se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty) \quad [\ell \neq 0, \ell \neq +\infty]$$

allora $\sum a_n, \sum b_n$ hanno lo *stesso comportamento*.

14.6.4.4.1 Casi limite del confronto asintotico

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, allora $0 \leq a_n \leq b_n$ def. \implies applico il confronto
 1. $\sum a_n$ diverge a $+\infty \implies \sum b_n$ diverge a $+\infty$
 2. $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, allora $0 \leq b_n \leq a_n$ def. \implies applico il confronto
 1. $\sum b_n$ diverge a $+\infty \implies \sum a_n$ diverge a $+\infty$
 2. $\sum a_n$ converge $\implies \sum b_n$ converge

14.6.4.5 Esempi

Es: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$

$$a_n = \frac{1}{3^n+1} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

Condizione necessaria: $\lim a_n = 0$

Radice:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n + 1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{3^n}}} \\
 &= \frac{1}{3} \implies \sum a_n \text{ converge perchè } \ell < 1
 \end{aligned}$$

Rapporto:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n+1} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3^{n+1}}} \\
 &= \frac{1}{3} \implies \sum a_n \text{ converge perchè } \ell < 1
 \end{aligned}$$

Confronto: $0 \leq a_n = \frac{1}{3^{n+1}} \leq \frac{1}{3^n}$

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{1}{3^n} &\text{ è geometrica di ragione } \frac{1}{3} \implies \text{converge} \\
 \implies \sum \frac{1}{3^{n+1}} &\text{ converge per il confronto}
 \end{aligned}$$

Confronto asintotico: $a_n = \frac{1}{3^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{3^n}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = 1 \in (0, +\infty) \\
 \implies \sum a_n, \sum b_n &\text{ hanno lo stesso comp. per il confr. asint.} \\
 \implies \sum b_n &\text{ converge perchè geom di rag. } \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Es: $\sum \frac{3}{n^2+1}$

$$a_n = \frac{3}{n^2 + 1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad a_n \rightarrow 0$$

Occhio: *radice* e *rapporto* sono inconcludenti ($\ell = 1$)!

Confronto: $b_n = \frac{3}{n^2} \geq \frac{3}{n^2+1} = a_n$

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{3}{n^2} &= 3 \sum \frac{1}{n^2} \text{ è convergente (arm. gener.)} \\
 \implies \text{per il confr. anche } \sum a_n &\text{ converge}
 \end{aligned}$$

Confronto asintotico: $b_n = \frac{3}{n^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} \\
&= 3 \in (0, +\infty) \\
&\Rightarrow \sum b_n \text{ e } \sum a_n \text{ hanno stesso carattere} \\
&\Rightarrow \sum a_n \text{ conv. perchè } \sum b_n \text{ conv.}
\end{aligned}$$

Es: $\sum \frac{n^2-7}{n+1}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2}{n+1} > 0 \text{ definitivamente} \\
a_n \rightarrow +\infty &\Rightarrow \sum a_n \text{ diverge a } +\infty
\end{aligned}$$

Es: $\sum \frac{n^3-8}{3^n}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^3-8}{3^n} > 0 \text{ definitivamente} \\
a_n \rightarrow +\infty &= 0
\end{aligned}$$

Confronto e confronto asintotico sono complicati da usare.

Crit. del rapporto:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^3-8}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3-8}{n^3-8} \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3-8}{n^3-8} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{1-\frac{8}{(n+1)^3}}{1-\frac{8}{n^3}} \\
&= \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}
\end{aligned}$$

Es: $\sum \frac{\cos^2(n)}{n^2}$

Occhio: radice e rapporto non funzionano. Confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$ non funziona ($\nexists \lim \cos^2(n)$).

$$a_n = \frac{\cos^2(n)}{n^2} \geq 0 \text{ def.}$$

$a_n \rightarrow 0$ per il teo del confr. a 3 :

$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

So che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (armonica generalizzata di esponente > 1). Dunque per il confronto tra serie a termini positivi, $\sum a_n$ converge.

Es: $\sum \frac{\cos^2(n)}{n}$

Boh! (per quello che ne sappiamo noi).

Es: $\sum \frac{n^2 - n + 2}{\sqrt{n} \cdot n^3 - n + 7}$

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{\sqrt{n} \cdot n^3 - n + 7} > 0 \text{ def.}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n^2} + \frac{7}{\sqrt{n} \cdot n^3}} \rightarrow 0$$

Posso applicare il **confronto asintotico** con $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n}$ e ho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n^2} + \frac{7}{\sqrt{n} \cdot n^3}}$$

$$= 1 \in (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \sum a_n, \sum b_n \text{ hanno lo stesso carattere}$$

$$\Rightarrow \text{converge}$$

Es: $\sum \frac{2^n}{n!}$

$$a_n = \frac{2^n}{n!} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Crit. del rapporto:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} \\ &= 0 < 1 \\ \implies \sum a_n &\text{ converge}\end{aligned}$$

Es per casa: determinare per quali $a > 0$ la seguente serie converge

$$\sum \frac{n^a + 2}{n\sqrt{n} + 2n - \sqrt[3]{n} + 8}$$

Per altri esempi consultare le slide #view-slide

14.6.5 Assoluta convergenza per serie a termini di segno variabile

Teo: se $\sum |a_n|$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

Se voglio studiare $\sum a_n$ con termini a segno variabile, provo a studiare $\sum |a_n|$ che è a termini ≥ 0 : 1. $\sum |a_n|$ converge $\implies \sum a_n$ converge (*per il crit. di conv. assoluta*) 2. $\sum |a_n|$ diverge a $+\infty \implies$ **il criterio fallisce!**

Terminologia: se $\sum |a_n|$ converge, si dice che $\sum a_n$ converge *assolutamente*.

Es: $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$

Provo a studiare $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$.

$$\forall n \quad 0 \leq \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ converge per il criterio di assoluta convergenza.

14.6.6 Criterio di Leibniz per serie a termini alterni

Sia a_n una successioni dalla forma $a_n = (-1)^n \alpha_n$ tale che

1. $\alpha_n \geq 0$ definitivamente
2. α_n decrescente definitivamente

$$3. \alpha_n \rightarrow 0$$

allora $\sum a_n = \sum (-1)^n \alpha_n$ converge.

Occhio: se manca anche solo una delle 3 ipotesi il criterio fallisce!

Es: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \implies \alpha_n = \frac{1}{n}$$

1. $\alpha_n > 0 \forall n \geq 1$
2. α_n è decrescente: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \forall n$
3. $\alpha_n \rightarrow 0$

Posso dunque applicare Leibniz $\implies \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Oss: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ non converge *assolutamente* cioè $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ diverge.

Copiare anche altro esempio #todo-uni

15 Limiti di Funzione

$A \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (*A è di solito un'unione di intervalli*). Voglio definire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).

Per le successioni, facevamo i limiti solo per $n \rightarrow +\infty$, ora abbiamo 3 casi da distinguere:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

15.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

1. $\ell \in \mathbb{R}$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \geq k$
 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \geq k$
 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^-$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell \forall x \geq k$
2. $+\infty$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \forall x \geq k$
3. $-\infty$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall m \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq m \forall x \geq k$
4. **N.E.**: Si dice che $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ se non è nessuno degli altri casi

15.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

1. $\ell \in \mathbb{R}$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \leq k$
 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^+$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon \forall x \leq k$
 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^-$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell \forall x \leq k$
2. $+\infty$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \forall x \leq k$
3. $-\infty$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall m \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq m \forall x \leq k$
4. **N.E.**: Si dice che $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ se non è nessuno degli altri casi

15.3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Possono esserci quattro risultati per $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

1. $\ell \in \mathbb{R}$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ ($\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$)
 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ ($\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$)
 2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ ($\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$)
2. $+\infty$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ ($\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$)

3. $-\infty$: Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall m \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq m$ se $0 < |x - x_0| < \delta$ ($\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$)
4. **N.E.**: Si dice che $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se non è nessuno degli altri casi

15.3.1 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ vuol dire x tende a x_0 da destra. Ciò significa che la condizione è se $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ ($\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$).

15.3.2 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ vuol dire x tende a x_0 da sinistra. Ciò significa che la condizione è se $x_0 - \delta \leq x < x_0$ ($\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$).

Occhio: al limite non frega nulla del valore di $f(x_0)$

15.4 Note tecniche

Quando possiamo calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($x \in \overline{\mathbb{R}}$)? Quando x_0 è **punto di accumulazione** del dominio di f .

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A è unione di intervalli e semirette *localmente finita*, cioè vicino a un qualunque punto di \mathbb{R} trovo un numero finito di intervalli che compongono A .

Contresempio:

$$f(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{\pi}\right) \cup \left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}\right) \cup \dots \cup \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \cup \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$$

x_0 è un **punto interno ad A** se sta dentro ad uno degli intervalli che compongono A (*gli esterni non vanno bene*).

x_0 è un **punto di accumulazione di A** se è un punto interno o è un estremo di un intervallo o semiretta che compone A .

Es: $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \ln x.$

Posso calcolare:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \forall x_0 > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

15.5 Caratterizzazione del limite per successioni

Teo: sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di acc. di A . Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall a_n$ successione con: $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq x_0$ def., $a_n \rightarrow x_0$ si ha $f(a_n) \rightarrow \ell$

Conseguenza: tutti i risultati generali sulle successioni valgono anche per i limiti di funzione:

1. Unicità del limite
2. Teoremi algebrici (e forme indeterminate)
3. Teoremi di confronto a 2 e a 3

Oss: $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ si ottengono usando successioni a_n tale che $a_n \rightarrow x_0^+$ o $a_n \rightarrow x_0^-$.

16 Tecniche di Calcolo dei Limiti

1. Continuità
2. Teoremi algebrici
3. Teoremi di confronto a 2 e a 3
4. Cambi di variabile
5. Limiti notevoli
6. Criterio funzioni - successioni
7. Confronto tra ordini di infiniti (gerarchia degli infiniti)

16.1 Continuità

Def: $x_0 \in A$ punto di accumulazione, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **continua** in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua su A se è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.

Oss: se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, f si dice continua in x_0 da destra. Se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, f si dice continua in x_0 da sinistra.

16.1.1 Come trovare funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi, radici, trig., trig. inverse) e quelle ottenute da loro tramite operazioni algebriche e composizione sono continue dove non hanno *problemi burocratici* di definizione (denominatore = 0, radice < 0, ...).

16.2 Limiti notevoli

I limiti notevoli sono limiti che si dimostrano una volta per tutte *e poi si ricordano per la vita!*

16.2.1 Patriarchi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

16.2.2 Prima generazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

16.2.3 Seconda generazione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

16.3 Cambi di variabile**Es:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

Pongo $x^2 = y$. Se $x \rightarrow 0$, allora $y \rightarrow 0$ ($\tan x$ è continua in $x = 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

| **Es:** copiare #todo-uni

17 O-piccolo e Equivalenza asintotica

Siano $f(x), g(x)$ funzioni, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ in cui posso calcolare i loro limiti.

Def: si dice che $f(x)$ è **o-piccolo** di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ e si scrive $f(x) = (g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste una funzione $\omega(x)$ tale che

- $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$

Cioè $f(x) = g(x) \cdot [\text{roba che tende a 0 in } x_0]$.

Def quasi equivalente: se posso dividere per $g(x)$ vicino a x_0 (cioè se $\exists \delta > 0$ t.c. $g(x) \neq 0 \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$), allora $f(x) = (g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Questo permette di esprimere le gerarchie degli infiniti.

Es: $x^2 = (x)$ per $x \rightarrow 0$

Verifica: $x^2 = x \cdot x$ ($x = \omega(x) \rightarrow 0$)

Terminologia: $f(x)$ si dice **infinitesima** per $x \rightarrow x_0$ se il suo limite è 0.

Oss: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff f(x) = (1) \quad x \rightarrow x_0$

17.1 Proprietà algebriche degli o-piccoli

Se $f_1 = (g), f_2 = (g)$ per $x \rightarrow x_0$, allora

1. $f_1 \pm f_2 = (g)$
2. $a \cdot f_1 = (g) \quad a \in \mathbb{R}$
3. $f_1 \cdot f_2 = (g^2)$
4. $\frac{f_1}{f_2}$ *non funziona!*

17.2 Transitività degli o-piccoli

$$f = (g), g = (h) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \implies f = (h) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

17.3 Limiti notevoli espressi in o-piccoli

$$\sin x = x + (x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\tan x = x + (x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + (x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + (x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + (x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + (x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

17.4 Equivalenza asintotica

Def: si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **asintoticamente equivalenti per $x \rightarrow x_0$** e si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste

- $f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 1$

Definizione quasi equivalente: $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

| **Es:** $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow x_0$

| **Es:** $\cos x \sim 1$ per $x \rightarrow x_0$
 $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow x_0$