Appunti di Analisi I

Analisi Matematica - Informatica - 23/24

Federico Zotti

2023-10-20

Indice

1 Insiemi

1.1 Notazione

Per *elenco*: Prima operazione, poi insieme di partenza

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{n^2 \mid n \text{ naturale}\}$$

Per *proprietà*: Prima insieme che scelgo, poi la proprietà che verifico

$$C = \{n \text{ naturale} \mid n \text{ è un quadrato}\}$$

Altri simboli:

$$\begin{aligned}
\text{appartiene} &\to a \in A \\
\text{non appartiene} &\to a \notin A \\
\text{è sottoinsieme} &\to A \subseteq B \\
\text{è sottoinsieme stretto} &\to A \subset B \\
\text{insieme vuoto} &\to \emptyset \\
\text{unione} &\to A \cup B \mid \vee \\
\text{intersezione} &\to A \cap B \mid \wedge \\
\text{sottrazione} &\to A \setminus B \\
\text{cardinalità} &\to |A|
\end{aligned}$$

1.2 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, il loro **prodotto cartesiano** è l'insieme delle coppie (a, b) con $a \in A, b \in B$.

Si indica con $A \times B$.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

1.2.1 Esempio

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$
$$A \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$

1.3 Insieme delle parti

Dato A, $\mathscr{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$

1.3.1 Esempio

$$A = \{ 1, 2 \}$$
$$\mathscr{P}(A) = \{ \varnothing, A, \{ 0 \}, \{ 1 \} \}$$

2 Funzioni

Come si descrive una funzione:

1. Un insieme di partenza (A) (*dominio*);
2. Un insieme di arrivo (B) (*codominio*);
3. Una serie di regole che ad ogni elemento di A associa un **unico** elemento di $f(a) \in B$.

$$f : A \to B$$

Il grafico di una funzione è:

$$
\begin{aligned}
g &= \{(a, f(a)) \in A \times B \,|\, a \in A\} \\
&= \{(a, b) \in A \times B \,|\, b = f(a)\}
\end{aligned}
$$

2.1 Funzioni Iniettive e Suriettive

Sia $f : A \to B$ una funzione.

- f si dice **iniettiva** se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B.

$$a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ovvero se

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- f si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f.

$$\forall\, b \in B\, \exists\, a \in A \text{ t.c. } f(a) = b$$

Una funzione si dice **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Teorema: Una funzione $f : A \to B$ è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione $g : B \to A$ t.c. :

$$
\begin{aligned}
g(f(a)) &= a \,\forall\, a \in A \\
f(g(b)) &= b \,\forall\, b \in B
\end{aligned}
$$

Osservazione:

$$f : A \to B$$

- è iniettiva se ogni elemento di B è ottenuto da al più un elemento di A tramite f;

- è suriettiva se ogni elemento di B è ottenuto da almeno un elemento di A tramite f.

2.2 Immagine e controimmagine

Sia $f : A \to B$ una funzione.

- Se $b = f(a)$ con $a \in A, b \in B$, si dice che *b è immagine di a tramite f*;
- Sia $C \subseteq A$ un sottoinsieme, si dice *immagine di C* tramite f l'insieme degli elementi di B che sono imamgine di elementi di C. $f(c) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$
- Immagine di A: $f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$
- Sia $D \subseteq B$ un sottoinsieme, si dice **controimmagine di D** tramite f l'insieme di tutti gli elementi di A che hanno immagine contenuta in D.
- Controimmagine di D: $f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$ (definita anche se f non è invertibile).

3 Numeri Reali

3.1 Insiemi numerici

- **Naturali:** $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- **Razionali:** $\mathbb{Z} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \} \}$
- **Reali:** $\mathbb{R}$
- **Irrazionali:** $\mathbb{Q}$
- **Complessi:** $\mathbb{C}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

3.2 Proprietà dei numeri reali

Sono di tre tipi:

- Algebriche;

- Di Ordinamento;
- Assioma di Continuità.

3.2.1 Algebriche

Sui numeri reali sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$, dette somma e prodotto, con le seguenti proprietà:

- Relative alla somma:
  - **Commutativa:** $a + b = b + a \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Asociativa:** $(a + b) + c = a + (b + c) \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Elemento neutro somma:** $\exists\, 0 \in R$ t.c. $a + 0 = a \ \forall\, a \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Esistenza dell'inverso:** $\forall\, a \in \mathbb{R} \ \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a + b = 0$ *(z,q,r,c)*
- Relative al prodotto:
  - **Commutativa:** $a \cdot b = b \cdot a \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Associativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Elemento neutro prodotto:** $\exists 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = a \ \forall\, a \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*
  - **Esistenza dell'inverso:** $\forall\, a \in \mathbb{R} \ \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$ *(q,r,c)*
- **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = ab + ac \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ *(n,z,q,r,c)*

3.2.2 Di Ordinamento

Dati due numeri reali x e y, si ah sempre che $x \geq y$ oppure $x \leq y$. Tale ordinamento ha le proprietà:

- **Riflessiva:** $x \geq x \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
- **Antisimmetrica:** se $x \geq y \land y \geq x$, allora $x = y$
- **Transitiva:** se $x \geq y \land y \geq z$, allora $x \geq z$
- se $x \geq y$, allora $x + z \geq y + z \ \forall\, z \in \mathbb{R}$
- se $x \geq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \ \forall\, z \in \mathbb{R}$ con $z \geq 0$

Queste valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{C}$.

3.2.3 Assioma di Continuità

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi diversi da $\emptyset$. Diciamo che A sta tutto a sinistra di B se $a \leq b\ \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B$.

L'assioma di continuità dice che se A sta tutto a sinstra di B allora esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ t.c. $c \geq a\ \forall\, a \in A; c \leq b\ \forall\, b \in B$.

> c non è obbligato ad essere unico; c può appartenere ad A, a B o anche a entrambi (in questo caso è unico elemento "separatore").

3.2.3.1 Esempio

$$
\begin{aligned}
A &= \{\, x \in Q \ :\ x \geq 0 \wedge x^2 < 2 \,\} \\
B &= \{\, x \in Q \ :\ x \geq 0 \wedge x^2 > 2 \,\} \\
&\text{se } a \in A, b \in B \to a > b \\
c^2 &= 2
\end{aligned}
$$

Questo è impossibile in Q, quindi l'assioma di continuità non vale in Q.

Conclusione: sui numeri reali, $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore tra A e B e si può dimostrare che è unico.

3.3 Sottoinsiemi dei reali

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo separato da estremi $a, b \in \mathbb{R}$ (con $a < b$).

- $]a, b[\ = (a, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b \,\}$
- $[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq x \leq b \,\}$

4 Inferiore, Superiore, Massimo e Minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme *non vuoto*.

> $M \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di A se $M \geq a \; \forall a \in A$

> $m \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** di A se $m \leq a \; \forall a \in A$

Minoranti e maggioranti non sono obbligati ad esistere. Ad esempio $A = \mathbb{N}$ ha minoranti ma non ha maggioranti.

Se esiste un maggiorante invece, ne esistono infiniti. Se M è un maggiorante, anche $M+1$ lo è. Lo stesso vale per i minoranti.

> $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ si dice **superiormente limitato** se ammette un maggiorante e **inferiormente limitato** se ammette un minorante. Si dice **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

Esempi:

- $A = (0, +\inf)$ è inferiormente limitato ma non superiormente
- $B = \{ \frac{1-n}{2} \; : \; n \in \mathbb{N} \}$ è superiormente limitato, ma non inferiormente
- $C = (1, 7]$ è limitato

> $M \in \mathbb{N}$ si dice **massimo** di A (e si scrive $M = \max A$) se $M \in A \wedge M \geq a \; \forall a \in A$

> $m \in \mathbb{N}$ si dice **minimo** di A (e si scrive $m = \min A$) se $m \in A \wedge m \leq a \; \forall a \in A$

$\max$ e $\min$ non sono obbligati ad esistere, nemmeno per insiemi limitati.

Esempio:

- $A = (0, 1)$ non ha nè $\max$, nè $\min$

$\max$ e $\min$, se esistono, sono **unici**.

4.1 Estremo superiore ed Estremo inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

> Si dice che $\sup A = +\inf$ se A non è superiormente limitato o $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se lo è e L è il minimo dei maggioranti.

> Si dice che $\inf A = -\inf$ se A non è inferiormente limitato o $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se lo è e l è il massimo dei minoranti.

Esempi:

- $\sup \mathbb{N} = +\inf$
- $\inf \mathbb{N} = 0$
- $\sup (0, 1) = 1$

> **Teo:** Se $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ è superiormente limitato, allora il minimo dei maggioranti esiste.

Dimostrazione: Sia $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \; \forall a \in A \}$ l'insieme dei maggioranti. Allora A sta tutto a sinistra di B. Per l'*assioma di continuità* c'è un elemento separatore $c \in \mathbb{R}$, ovvero $c \leq b \; \forall b \in B$ e $c \geq a \; \forall a \in A \implies c \in B$. Quindi $c = \min B$.

Esercizio per casa #todo/compito: Enunciare e dimostrare il teorema analogo per il massimo dei minoranti.

4.1.1 Caratterizzazione di inf e sup

- $\sup A = +\inf$ se $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$ (*ovvero se posso trovare elementi di A grandi quanto voglio*)
- $\inf A = -\inf$ se $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists a \in A$ t.c. $a \leq M$
- $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se
  - $a \leq L \; \forall a \in A$ (*L è un maggiorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$
- $\inf A = L \in \mathbb{R}$ se
  - $a \geq l \; \forall a \in A$ (*l è un minorante*)
  - $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A$ t.c. $a \leq l + \varepsilon$

Se esiste $M = \max A$ allora $\sup A = M$. Se esiste $m = \min A$ allora $\inf A = m$. $\sup A$ non è obbligato ad appartenere ad A, ma se vi appartiene è il **massimo**. Stessa cosa per $\inf A$.

5 Funzioni reali

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppure $f : A \to \mathbb{R}$.

Grafico di $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Proprietà di simmetria:

- f si dice **pari** se $f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'asse y*)
- f si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*simmetrica rispetto all'origine*)
- f si dice **periodica** se $\exists\, T > 0$ t.c. $f(x + T) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*il grafico si ottiene traslando il pezzo $[0, T]$ in $[T, 2T]$, $[T, 3T]$, $\ldots$*)

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari, allora $f(0) = 0$.

Se T è un periodo, anche $2T, 3T, 4T, \ldots$ lo sono. Il **minimo periodo** è il più piccolo T (se esiste) per cui vale $f(x + T) = f(x)\ \forall\, T \in \mathbb{R}$.

Proprietà di **monotonia**:

- f si dice **monotona**:
  - f si dice **strettamente crescente** se $x > y \implies f(x) > f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
  - f si dice **strettamente decrescente** se $x > y \implies f(x) < f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente crescente** se $x > y \implies f(x) \geq f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- f si dice **debolmente decrescente** se $x > y \implies f(x) \leq f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Se f è strettamente crescente allora è anche debolmente crescente. Se f è strettamente decrescente allora è anche debolmente decrescente.

Se f è sia deb. crescente che deb. decrescente allora è **costante**.

5.1 Grafici, Iniettività e Suriettività

- Suriettiva $\iff$ in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *almeno* una freccia (*tutto l'asse y è "coperto"*)
- Iniettiva $\iff$ in ogni elemento dell'insieme di arrivo termina *al più* $(0|1)$ una freccia (*l'asse y è "coperto" solo una volta*)

- Retta orizzontale: $y = \lambda$
- Grafico di f: $y = f(x)$
- Intersezioni: $f(x) = \lambda$

$$\begin{aligned} f \text{ iniettiva} &\iff f(x) = \lambda \text{ ha al più una soluz. } \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \\ f \text{ suriettiva} &\iff f(x) = \lambda \text{ ha almeno una soluz. } \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se f è pari o periodica non è iniettiva. Se f è strettamente crescente o strettamente decrescente allora è iniettiva.

6 Funzioni elementari

6.1 Potenze pari

$$f(x) = x^{2k} \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Con $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*non iniettiva o suriettiva*).
- Con $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ (*iniettiva ma non suriettiva*)
- Con $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*non iniettiva ma suriettiva*)
- Con $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*biunivoca*)

Quindi l'inverso è

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ g(x) &= \sqrt[2k]{x} \end{aligned}$$

Oss: $f(x) = x^{2k}$ è una funzione *pari*, strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente su $[-\infty, 0)$.

Oss: la funzione $f(x) = |x|$ ha le stesse proprietà.

6.2 Potenze dispari

$$f(x) = x^{2k+1} \qquad k \in \mathbb{N}$$

È una funzione dispari.

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*biunivoca*)

L'inverso è definito come

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sqrt{x}^{2k+1}$$

Vale lo stesso per $f(x) = \frac{1}{x^k}$

> [!warning] Confermare la funzione

Oss: $f(x) = x^{2k+1}$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

6.3 Esponenziali

$$f(x) = a^x \qquad \text{con } a > 1$$

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*inietiva*)
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \log_a x$$

Ese: fate lo stesso per $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

Oss: se $a \in (0, 1)$ allora $b = \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$.

6.4 Funzioni trigonometriche

6.4.1 Seno

$$f(x) = \sin x$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo 2π ed è dispari ($\sin(-x) = -\sin x$).

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$g(x) = \arcsin x$$

Oss: $\arcsin(\sin(\frac{3}{4}\pi)) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3}{4}\pi$

6.4.2 Coseno

$$f(x) = \cos x$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo 2π ed è pari ($\cos x = \cos(-x)$).

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*non iniettiva e non suriettiva*)
- $[0, \pi] \to [-1, 1]$ (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$g(x) = \arccos x$$

Oss: $\arccos(\cos(\frac{3}{2}\pi)) \neq \frac{3}{2}\pi$

6.4.3 Tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo π ed è dispari (*solo suriettiva*)
- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è dispari (*biunivoca*)

L'inversa è

$$g : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$g(x) = \arctan x$$

7 Trasformazione di grafici

Dato $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *Simmetria* assiale rispetto all'asse x: $y = -f(x)$
- *Simmetria* assiale rispetto all'asse y: $y = f(-x)$
- *Traslazione* del vettore $(0, c)$ (verso l'alto se $c > 0$): $y = f(x) + c$
- *Traslazione* del vettore $(-c, 0)$ (verso sinistra se $c > 0$): $y = f(x + c)$
- *Compressione* verso l'asse x (dilatazione se $c > 1$): $y = f(x) \cdot c$
- *Dilatazione* verso l'asse y (compressione se $c > 1$): $y = f(x \cdot c)$
- *Ribaltamento* sull'asse x: $y = |f(x)|$
- *Ribaltamento* sull'asse y: $y = f(|x|)$

8 Successioni

8.1 Terminologia

Sia $\mathscr{P}(n)$ una affermazione a proposito del numero $n \in \mathbb{N}$. Sarà vera o falsa a seconda del valore di n.

Diciamo che:

- $\mathscr{P}(n)$ è vera *frequentemente* se è vera per infiniti $n \in \mathbb{N}$
- $\mathscr{P}(n)$ è vera *definitivamente* se è vera "da un certo punto in poi", cioè se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall\, n \geq n_0$

Oss: Definitivamente $\implies$ Frequentemente.

Es:

1. $n^2 \geq 1000$ è vera definitivamente

2. n^3 è multiplo di 8 è vera frequentemente, ma non definitivamente
3. $n + 1 \geq 3^n$ è falsa definitivamente

8.2 Succesioni a valori reali

> **Def rigida:** una successione a valori reali è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Di solito, invece di scrivere $a(n)$, si scrive a_n.

Oss: così non è possibile considerare $a_n = \frac{1}{n}$.

Def più elastica: una successione a valori reali è una funzione $a : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{N}$, tale che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ per cui $\forall\, n \geq n_0, n \in A$ (tale che $n \in A$ definitivamente).

8.3 Limite di una successione

Sia a_n una successione. Abbiamo 4 possibili comportamenti:

1. $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ ($a_n \to \ell\,;\ \ell \in \mathbb{R}$)
2. $\lim a_n = +\infty$ ($a_n \to +\infty$)
3. $\lim a_n = -\infty$ ($a_n \to -\infty$)
4. $\lim a_n$ non esiste (a_n è indeterminata)

Def:

- Una successione è di tipo *4.* se non è di nessun degli altri tipi
- Una successione è di tipo *2.* se $\forall\, M \in \mathbb{R}, a_n \geq M$ definitivamente ($\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq M\ \forall\, n \geq n_0$)
- Una successione è di tipo *3.* se $\forall\, m \in \mathbb{R}, a_n \leq m$ definitivamente ($\forall\, m \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq m\ \forall\, n \geq n_0$)
- Una successione è di tipo *1.* se
  - $\forall\, \varepsilon > 0, a_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ definitivamente $\vee$
  - $\forall\, \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente $\vee$
  - $\forall\, \varepsilon > 0, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ definitivamente

Varianti di *1.*:

- $a_n \to \ell^+$ tende a ℓ da destra se $\forall\, \varepsilon > 0, \ell < a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente
- $a_n \to \ell^-$ tende a ℓ da sinistra se $\forall\, \varepsilon > 0, \ell - \varepsilon \leq a_n < \varepsilon$ definitivamente

8.4 Teorema di unicità del limite

Una successione ricade sempre in uno e uno solo dei quattro tipi di comportamento. Se poi ricade nel tipo *1.* ($\ell \in \mathbb{R}$), il valore ℓ è unico.

Dim: se a_n è di tipo *1.* cioè $a_n \to \ell$, allora definitivamente $\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$. $l - 1 \leq a_n$ implica che non può essere di tipo *3.*. $a_n \leq \ell + 1$ implica che non può essere di tipo *2.*.

Inoltre se è di tipo *2.*, definitivamente si avrà $a_n \geq 1$. Se è di tipo *3.*, definitivamente si avrà $a_n \leq -1$. Queste condizioni non possono accadere insieme.

Infine, se $a_n \to \ell_1$, $a_n \to \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$, allora fisso $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$. Quindi a_n si ritrova in due intervalli contemporaneamente: $\ell_1 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_1 + \varepsilon$ e $\ell_2 - \varepsilon \leq a_n \leq \ell_2 + \varepsilon$. Se $\ell_1 < \ell_2$ allora $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$. Dunque $a_n \leq \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente. Questo è assurdo!

8.5 Limitatezza delle successioni convergenti

- Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora $\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ è limitato
- Se $a_n \to +\infty$ allora $\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ è inferiormente limitato
- Se $a_n \to -\infty$ allora $\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ è superiormente limitato

> *Dimostrazione nelle slide.* #view-slide

8.6 Teorema di permanenza del segno

- Se $a_n \to \ell \in (0, +\infty)$ o se $a_n \to +\infty$ allora $a_n > 0$ definitivamente
- Se $a_n \geq 0$ definitivamente e se $a_n \to \ell$ allora $\ell \geq 0$ oppure $\ell = +\infty$

> *Dimostrazione nelle slide* #view-slide

Oss: vale lo stesso risultato con i negativi.

- Se $a_n \to \ell \in (-\infty, 0)$ o se $a_n \to -\infty$ allora $a_n < 0$ definitivamente
- Se $a_n \leq 0$ definitivamente e se $a_n \to \ell$ allora $\ell \leq 0$ oppure $\ell = -\infty$

8.7 Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- Posso scrivere $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per unificare i tipi *1.*, *2.*, *3.*
- Le operazioni di $\mathbb{R}$ si estendono a $\overline{\mathbb{R}}$ *quasi bene*:

$$\begin{aligned}
+x \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\
-x \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty \\
x + (\pm\infty) &= \pm\infty \\
(+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty \\
\frac{x}{+\infty} &= 0
\end{aligned}$$

- Ci sono 2 eccezioni:

  1. Le 7 forme indeterminate:

$$\begin{aligned}
&(+\infty) + (-\infty) \\
&0 \cdot (\pm\infty) \\
&\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \\
&\frac{0}{0} \\
&0^0 \\
&1^{\pm\infty} \\
&(\pm\infty)^0
\end{aligned}$$

2. Le divisioni per 0

8.8 Teoremi algebrici

Siano a_n, b_n successioni, $a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$$a_n + b_n \to l_1 + l_2$$
$$a_n - b_n \to l_1 - l_2$$
$$a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$$
$${a_n}^{b_n} \to {l_1}^{l_2}$$

Con le dovute eccezioni di ∞.

8.9 Teoremi di confronto

Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

1. Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, allora $a \leq b$
2. Se $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$
3. Se $b_n \to -\infty$, allora $a_n \to -\infty$

Se a_n, b_n, c_n sono tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$ (lo stesso $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) allora $b_n \to \ell$. (*teorema del carabiniere*).

Es: $\lim_{n\to+\infty} n + \cos n$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \cos n \geq -1 \implies n + \cos n \geq n - 1$$

Per il teorema del confronto a 2, visto che $\lim_{n\to+\infty} n - 1 = [+\infty - 1] = +\infty$, ho che $\lim_{n\to+\infty} n + \cos n = +\infty$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \sin n \leq \frac{1}{n}$$

E poichè $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, per il teorema del confronto a 3 $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

9 Tecniche di calcolo dei limiti

Fatto *N.1*

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty \qquad \forall\, a > 0$$

Fatto *N.2*

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = 0^+ \qquad \forall\, a < 0$$

Oss: $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^a = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-a}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+$

> [!note] Ricordare negli esercizi di scrivere *teoremi algebrici dove vengono usati*.

9.1 Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geq -1 \quad \text{si ha} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Fatto *N.3*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \qquad \forall\, a > 1$$

Dim: $a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) \to [1 + \infty(a-1)] = +\infty \Rightarrow a^n \to +\infty$ per il confronto a 2.

Fatto *N.4*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \qquad \forall\, 0 < a < 1$$

Dim: $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$ e $b^n \to +\infty$ quindi $a^n = \frac{1}{b^n} \to 0^+$.

Fatto *N.5*

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \forall\, a > 1$$

Dim: $a^{\frac{1}{n}} \geq 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

> [!warning] Finire la dim dalle slide.

9.2 Dimostrazione teorema del confronto a 2

Sappiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente

1. Se $a_n \to a, b_n \to b$, vogliamo dimostrare che $a \leq b$

   Per assurdo, se $b < a$, posso scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \frac{a-b}{2} \Rightarrow b + \varepsilon < a - \varepsilon$.

   Allora definitivamente $a_n \geq a - \varepsilon$ e $b_n \leq b + \varepsilon$, quindi $b_n \leq b + \varepsilon < a - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente.

   Ciò significa che $b_n < a_n$, il che è assurdo.

2. Se $a_n \to +\infty, \forall\, M \in \mathbb{R}$, ho $a_n \geq M$ definitivamente $\Rightarrow$ ho $b_n \geq a_n \geq M$ definitivamente $\forall\, M \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n \to +\infty$.

3. Uguale a *2.*.

10 Criterio del rapporto & Criterio della radice

10.1 Criterio del rapporto

Sia a_n una successione definitivamente positiva (> 0). Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se $\ell < 1, a_n \to 0$
2. se $\ell > 1, a_n \to +\infty$
3. se $\ell = 1, ??$

10.2 Criterio della radice

Sia a_n una successione definitivamente ≥ 0. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

1. se $\ell < 1$, $a_n \to 0$
2. se $\ell > 1$, $a_n \to +\infty$
3. se $\ell = 1$, ??

Es: $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ con i teo. alg. ottengo $[\frac{+\infty}{+\infty}]$, quindi

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{2}$$

per il criterio del rapporto $a_n \to 0$.

Fatto *N.6* (*Esponenziale batte potenza*)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \qquad \forall\, b > 1,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$$

10.3 Fattoriale

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

Fatto *N.7* (*Il fattoriale batte l'esponenziale*)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \qquad \forall b > 0$$

n^n batte il fattoriale.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

10.4 Gerarchia degli infiniti

1. n^n
2. $n!$
3. b^n
4. n^a
5. n

Attenzione: nella gerarchia degli infiniti, dovete rispettare religiosamente le espressioni date. $n!$ batte 2^n, ma non so cosa fa con $2^{(n^2)}$.

10.5 Criterio del rapporto-radice

Supponiamo $a_n > 0$ definitivamente e che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad \text{(stesso } \ell\text{)}$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = ?$

Applico il criterio rapporto-radice con $a_n = n$, che è definitivamente > 0. Ho che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = ?$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{a}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (n^{\frac{1}{n}})^a = 1$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^7 - n^2 + 1} = ?$

Ha senso perchè $n^7 - n^2 + 1 \to +\infty \implies$ è definitivamente positiva per il teorema di permanenza del segno.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^7} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^7}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Fatto *N.8*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1 \qquad \forall \text{ polinomio}$$

Fatto *N.9*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = ?$

Metodo 1: $\forall b > 1$ ho che $n! > b^n$ (per il teo di permanenza del segno: $\frac{b^n}{n!} \to 0 \implies$ definitivamente $\frac{b^n}{n!} < 1 \implies b^n < n!$ definitivamente) $\implies \sqrt[n]{n!} > b$ definitivamente $\forall\, b > 1n \implies \sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

Metodo 2:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = ?$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

Oss: per n molto grandi, $n!$ assomiglia a $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Es: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = ?$

Applico il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n!}} = \frac{(2^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \dots$$

10.6 Dimostrazione del criterio della radice

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell > 1$, allora la media sarà un numero tra 1 e ℓ

$$1 < \frac{ell + 1}{2} < \ell \implies \text{definitivamente } \sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell + 1}{2} \implies a_n \geq \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n$$

e poichè $\frac{\ell+1}{2} > 1$, $\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \to +\infty$. Quindi per il confronto a 2, ho che $a_n \to +\infty$.

Se invece $0 \leq \ell < 1$, allora $0 \leq \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$, inoltre $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \implies 0 \leq a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ definitivamente e $0 < \frac{\ell+1}{2} < 1 \implies \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \to 0$, dunque, per il teo del confronto a 3, $a_n \to 0$.

11 Principio di induzione

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathscr{P}(n) = \text{affermazione a prop. di } n \text{ che può essere vera o falsa}$$

Es: $n^2 = n + 6$ (*definitivamente vera*)

- $n = 0$: falsa
- $n = 1$: falsa
- $n = 2$: falsa
- $n = 3$: vera!
- $n = 4$: falsa
- $n = 5$: falsa

Es: se l'insieme A ha n elementi, allora $\mathscr{P}(A)$ ha 2^n elementi (*definitivamente vera*).

Principio di induzione: supponiamo di sapere che

1. $\mathscr{P}(0)$ è vera (*passo base*)
2. $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ $\forall\, n \geq 0$ (*passo induttivo*)

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Es: dimostrare che $0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dimostrazione per induzione:

1. $n = 0 : \ 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \longrightarrow$ vero
2. Ipotesi(passo n) $: \ 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Voglio dire che $0 + 1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. $0 + 1 + \cdots + (n+1) = 0 + 1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Es: da fare a casa #todo/compito

1. $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

11.1 Disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione)

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geq -1 \text{ si ha } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostrazione per induzione su n

1. *Passo base:*

$$\begin{aligned} n = 0 \quad & (1+x)^0 \geq 1 & \forall\, x > -1 \\ n = 1 \quad & (1+x)^1 \geq 1 + x & \forall\, x \geq -1 \end{aligned}$$

2. *Passo induttivo:*

$$\begin{aligned} \text{Ipotesi(passo } n) : \ & (1+x)^n \geq 1 + nx \\ \text{Tesi(passo } n+1) : \ & (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \\ (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1 + nx + x + nx^2 = \\ &= 1 + (n+1)^x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \longrightarrow \text{Vero!} \Rightarrow \\ & \text{La disug è dimostrata } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geq -1 \end{aligned}$$

11.2 Coeff. binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ è l'elemento in posizione k nella riga n del **triangolo di Tartaglia** (*si conta da* 0).

Sviluppo del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j$$

12 Successioni monotone

Sia a_n una successione. Diciamo che a_n è

1. **strettamente crescente** se $a_{n+1} > a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
2. **strettamente decrescente** se $a_{n+1} < a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
3. **debolmente crescente** se $a_{n+1} \geq a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
4. **debolmente decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Oss: similmente si definiscono i corrispondenti concetti per successioni definitivamente monotone.

Teo delle successioni monotone: sia a_n una successione *debolmente crescente*, allora a_n ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Più precisamente $a_n \to \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Lo stesso vale per le successioni debolmente decrescenti ($a_n \to \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Dim (*caso crescente*):

Primo caso: $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty \implies \forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq M$. Ma se la succ. è debolmente crescente $\implies \forall\, n \geq n_0\,,\ a_n \geq a_{n_0} \geq M \implies a_n \to \infty$.

Secondo caso: $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \ell \in \mathbb{R} \implies$

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \leq \ell$ (*ℓ è un maggiroante*)
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq a_{n_0}$ (*ℓ è il minimo tra i maggioranti*)

Ma a_n è debolmente crescente $\implies$ $\forall n \geq n_0$ ho che $\ell - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq \ell \implies a_n \to \ell^-$

Caso decrescente: #todo/compito

Oss:

1. Se a_n è debolmente crescente e superiormente limitata, allroa $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$
2. Se a_n è definitivamente debolmente crescente (o decrescente) allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (o $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$), ma non posso dire che $\ell = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Applicazione: Sia $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Allora

1. $2 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Per il teo sulle successioni monotone, $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e $2 \leq \ell \leq 3$.

Dim:

1. Per Bernoulli: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \cdot 1^{n-j} \cdot \frac{1}{n^j} \longrightarrow$ *guardare le slide*
3. $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow a_n$ è decrescente $\longrightarrow$ *guardare le slide*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

Es:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

13 Successioni per ricorrenza

Una successione per ricorrenza si presenta così:

- Un punto di partenza: $a_0 = 2$
- Una regola per calcolare il valore di un elemento dati i precedenti: $a_n = a_{n-1}^2 + \frac{1}{n+2}$

Possono essere dimostrate per induzione.

Es *1*:

$$\begin{cases} a_0 = 1 & (I) \\ a_n = n \cdot a_{n-1} & (II) \end{cases}$$

Se voglio calcolare $a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot a_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$. In questo caso si ha $a_n = n!$.

Es *2*:

$$\begin{cases} a_0 = 3 & (I) \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 & (II) \end{cases}$$

Calcolando un po' di valori trovo *guess:* $a_n = 2^{n+1} + 1$. Si può dimostrare per induzione:

- **P.B.:** $n = 0$ per (I), $a_0 = 3 = 2^{0+1} + 1$ (*Ok!*)
- **P.I.:** se $a_n = 2^{n+1} + 1$ allora $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{(n+1)+1} + 1$ (*Ok!*)

Attenzione: Poter trovare una formula esplicita per le successioni per ricorrenza è *rarissimo*!

Terminologia: una successione per ricorrenza che dipende dai k termini precedenti si dice di **ordine** k. Una successione per ricorrenza senza una dipendenza esplicita da n si dice **autonoma**.

> Tratteremo quasi esclusivamente successioni per ricorrenza di ordine 1, autonome.

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Es *3*:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = a_{n-1}^2 - 1 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = f(a_{n-1})$$
$$f(x) = x^2 - 1$$

Intersezioni con la bisettrice $y = x$: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Guess: la successione è crescente e tende a $+\infty$.

Strategia:

1. $a_n \geq 2 \quad \forall n \geq 0$
2. $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$
3. $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
4. $\ell = +\infty$

Dim *3*.: segue dal punto *2.* per il teo sulle successioni monotone.

Dim *4*.: Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora posso passare al limite la relazione ricorsiva:

$$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n^2 - 1$$
$$\implies \ell = \ell^2 - 1$$
$$\implies \ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ oppure } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Ma $a_n \geq 2 \; \forall n$ (per *1.*) $\implies \ell \geq 2$ (permanenza del segno) $\implies$ nessuno dei valori trovati è accettabile $\implies \ell = +\infty$.

Dim *1*.: $a_n \geq 2 \; \forall n$. Per induzione:

- **P.B.:** $a_n = 2 \geq 2$ (*Ok!*)

- **P.I.:** se $a_n \geq 2$, allora $a_{n+1} = a_n^2 - 1 \geq 4 - 1 = 3 \geq 2$ (*Ok!*)

Dim 2.: $a_n \leq a_{n+1}\ \forall\, n$. Per induzione:

- **P.B.:** $a_1 = a_0^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \geq a_0$ (*Ok!*)
- **P.I.:** se $a_n \leq a_{n+1}$, allora $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$ perchè $f(x) = X^2 - 1$ è crescente su $[0, +\infty)$.

Quindi $a_n \to +\infty$.

14 Serie numeriche

14.1 Definizione SBAGLIATA

Data una successione a_n, indico con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la somma di tutti i termini della successione (che sono infiniti).

> **Questo non ha senso**

14.2 Definizione CORRETTA

Def: data una successione a_n, dato $k \in \mathbb{N}$, la **somma parziale** k-esima di a_n è

$$S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Def: Una **serie numerica** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $(\sum a_n)$ è il limite della successione S_k, per $k \to \infty$. Cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to +\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

14.3 Carattere di una serie (comportamento)

Essento un limite, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha 4 possibili comportamenti:

1. **Converge** a $\ell \in \mathbb{R}$ se $S_k \to \ell$
2. **Diverge** a $+\infty$ se $S_k \to +\infty$
3. **Diverge** a $-\infty$ se $S_k \to -\infty$
4. È **indeterminata** se S_k non ha limite

14.4 Serie telescopiche

Es:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

- $S_2 = a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $S_3 = a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$
- $S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$
- $S_k = 1 - \frac{1}{k}$ (*dimostrato per induzione*)

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = 1 \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} \text{ converge a } 1$$

14.5 Serie geometriche

La serie geometrica di ragione $a \in \mathbb{R}$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Lemma: $a^0 + a^1 + \cdots + a^k = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$ se $a \neq 1$

Dim:

$$
\begin{aligned}
(a^0 + a^1 + \dots + a^k) \cdot a = a^1 + a^2 + \dots + a^{k+1} \quad & + \\
(a^0 + a^1 + \dots + a^k)(-1) = -a^0 - a^1 - \dots - a^k \quad & = \\
(a^0 + a^1 + \dots + a^k)(a - 1) = -a^0 + a^{k+1} &
\end{aligned}
$$

Poichè $a \neq 1$, posso dividere ed ottengo il teo.

Oss: se $a = 1, a^0 + \dots + a^k = k + 1$.

Dunque si ha

$$
S_k = \begin{cases} k + 1 & \text{se } a = 1 \\ \frac{a^{k+1}-1}{a-1} & \text{se } a \neq 1 \end{cases}
$$

$\lim_{k \to +\infty} S_k = ?$

1. Se $-1 < a < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-a}$
2. Se $a = 1$ vedere esempio 2.
3. Se $a > 1$ diverge a $+\infty$
4. Se $a < -1$ non ha limite
5. Se $a = -1$ vedere esempio stupido 4

> *Dimostrazioni nelle slide* #view-slide

14.6 Strumenti per lo studio delle serie

Il problema è determinare il carattere di una serie senza poter ricavare un'espressione esplicita per le somme parziali. Per farlo abbiamo:

- Teoremi algebrici
- Condizione necessaria alla convergenza
- Serie "note"
- Criteri di convergenza
  - Serie a termini di segno costante ($a_n \leq 0$ def. o $a_n \leq 0$ def.)
    - Radice

    - Rapporto
    - Confronto
    - Confronto asintotico
    - *Condensazione di Cauchy*
  - Serie a termini di segno alterno
    - Leibniz
  - Serie a termini di segno qualunque
    - Assoluta convergenza

14.6.1 Teoremi algebrici

1. Sia a_n una successione e sia $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Allora (*come operazione in* $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ (come operazione in } \overline{\mathbb{R}})$$

2. Se a_n, b_n sono successioni, allora (*con tutte le attenzioni delle operazioni nella retta reale estesa*)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

3. **Attenzione!**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

14.6.2 Condizione necessaria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge } \implies a_n \to 0$$

Dim: $a_n = S_n - S_{n-1}$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \ell - \ell = 0$.

Dunque se a_n non tende a 0, la serie non può convergere (può divergere o essere indeterminata). Se $a_n \to 0$, *potrebbe* convergere.

14.6.3 Serie note

1. Serie geometriche
2. Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

3. Parenti dell'armonica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

14.6.4 Serie a termini di segno costante

Lemma: sia a_n una successione def. $\geq 0.$ Allora la succesione $S_k = (a_0 + \cdots + a_k)$ delle somme parziali è def. debolmente crescente.

Dim:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall\, n \geq n_0,\ a_n \geq 0 \implies$$
$$\forall\, n \geq n_0,\ S_n = a_n + S_n \geq S_{n-1}$$

Teo: Se a_n è una succ. def. ≥ 0, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha due comportamenti possibili: converge o diverge a $+\infty$.

Dim: teo sulle successioni monotone applicato a S_k.

Oss: Vale lo stesso risultato se $a_n \leq 0$ def. In quel caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge oppure diverge a $-\infty$.

14.6.4.1 Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ def. Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $\ell > 1$ la serie diverge a $+\infty$
2. Se $\ell < 1$ la serie converge
3. Se $\ell = 1$???

14.6.4.2 Criterio del rapporto

Sia $a_n > 0$ def. Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $\ell > 1$ la serie diverge a $+\infty$
2. Se $\ell < 1$ la serie converge
3. Se $\ell = 1$???