Appunti di Algoritmi e Strutture Dati

Algoritmi e Strutture Dati (prof. Pirola) - CdL Informatica Unimib - 23/24

Federico Zotti

10 maggio 2024

Indice

1 Introduzione

Un'**algoritmo** è una sequenza di istruzioni **elementari** (devono essere comprese e eseguite dall'esecutore) che permettono di risolvere un problema computazionale (ovvero per ogni possibile input produce l'output corretto).

Per definire un **problema** è necessario specificare:

- Il tipo del parametro in input
- Il tipo del risultato in output
- Il legame tra input e output

Un'**istanza** di un problema si ottiene specificando uno dei possibili valori in input specifico per il problema.

1.1 Algoritmo: Definizione dell'ordinamento di un vettore

Sort:

- Input: `Array Int` (`Dim` n) $\rightarrow A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$
- Output: `Array Int` (`Dim` n) $\rightarrow A' = \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \rangle$

A' è una permutazione di A, tale che $a'_1 \leq a'_{i+1} \quad \forall i \,.\, 1 \leq i \leq n-1$.

1.2 Scelta di un algoritmo

L'algoritmo migliore è quello che utilizza il minor numero di risorse.

Le risorse sono:

- Il tempo di esecuzione
- Lo spazio (memoria) utilizzato

1.2.1 Tempo di esecuzione

Per calcolare il tempo utilizziamo una funzione $T(n)$. n rappresenta la quantità di dati in input.

- $T_p(n)$ rappresenta il caso peggiore
- $T_n(n)$ rappresenta il caso "medio" (non è la media dei due)
- $T_m(n)$ rappresenta il caso migliore

1.2.1.1 Esempio

- Algoritmo 1: $T(n) = 100000 \cdot n$
- Algoritmo 2: $T(n) = 10 \cdot n^3$
- Algoritmo 3: $T(n) = 1 \cdot 2^n$

In questo caso il migliore dipende dal grado di n, dunque l'algoritmo 1 risulta quello più veloce. Per numeri di n molto piccoli invece è meglio calcolare caso per caso il tempo. Nel caso ci siano più n, si considera quello con il grado maggiore.

$$T(n) = 7n^3 + 2n + 10000 \sim n^3$$

1.3 Algoritmo: Ricerca sequenziale

- V: vettore di interi
- k: intero da cercare nel vettore
- p: posizione nel vettore

```
Ricerca_Seq(V, k)
    p = 1
    while (V[p] != k) and (p <= V.length)
        p = p + 1
    if p > V.length
        return -1
    else
        return p
```

Analisi del tempo di esecuzione:

- Caso peggiore: $k \neq V[\,] \Rightarrow T(n) = 3 + 2 \cdot n + 1 \sim n$
- Caso migliore: $k = V[1] \Rightarrow T(n) = 4 \sim c$
- Caso medio: $k = V[\frac{n}{2}] \Rightarrow 3 + 2\frac{n}{2}(\pm 1) \sim n$

Se V è ordinato ci si può fermare appena trova un numero più grande di k.


```
Ricerca_Seq(V, k)
    p = 1
    while (V[p] < k) and (p <= V.length)
        p = p + 1
    if (V[p] != k) or (p > V.length)
        return -1
    else
        return p
```

Analisi del tempo di esecuzione:

- Caso migliore: $V[p] \geq k \Rightarrow 4 \sim c$
- Caso peggiore: $k > V[p] \Rightarrow 3 + 2n \sim n$
- Caso medio: $k = V\left[\frac{n}{2}\right] \Rightarrow 3 + 2\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Per avere un'ottimizzazione significativa si può sfruttare il fatto che il vettore è ordinato per implementare una semplice ricerca binaria (spezzare il vettore e guardare solo una metà).

```
Ricerca_Dic(V, k)
    sx = 1
    dx = V.length
    p = (dx + sx) div 2
    while (V[p] != k) and (sx < dx)
        if k > V[p]
            sx = p + 1
        else
            dx = p - 1
        p = (dx + sx) div 2

    if V[p] = k
        return p
    else
        return -1
```

Analisi del tempo di esecuzione:

- Caso migliore: $V\left[\frac{n}{2}\right] = k \Rightarrow t_m(n) = 6 \sim c$
- Caso peggiore: $k \notin V \Rightarrow T_p(n) = 5 + 4 \cdot (\log_2 n) + 1 \sim \log_2 n$
- Caso medio: $T(n) = \frac{T_p(n)}{2} \sim \log_2 n$

2 Problema computazionale

Un problema computazionale è una relazione tra input e output.

$$P \subseteq I \times O$$

2.1 Esempio: Ricerca in un vettore

Input:

- Un vettore V di n elementi
- Un valore k

Output:

- Un intero i, t.c. $i = -1$ se $k \notin V$ altrimenti $V[i] = k$

Ci sono tanti algoritmi per risolvere questo problema. Un esempio è la **ricerca sequenziale**.

> Aggiungere algo. #todo-uni

2.2 Esempio: Ricerca in un vettore ordinato

Input:

- Un vettore **ordinato** V di n elementi
- Un valore k

Output:

- Un intero i, t.c. $i = -1$ se $k \notin V$ altrimenti $V[i] = k$

Questo problema è diverso dal precedente, perché i dati in input sono diversi. Essendo che l'algoritmo della ricerca sequenziale è corretto per tutti i vettori in input, è corretto anche per i vettori ordinati. Esistono però algoritmi specifici per questo problema. Per esempio la **ricerca binaria** (o dicotomica).

> Inserire algo. #todo-uni

3 Trovare il miglior algoritmo

Generalmente il **tempo di esecuzione** e lo **spazio utilizzato** da un algoritmo sono legati alla grandezza dell'input. Dunque è possibile esprimere questi due dati come funzioni di n.

$$T(n)$$

$$S(n)$$

> In questo corso ci si concentrerà di più su $T(n)$.

Il tempo di esecuzione non può essere espresso in secondi, perché questi dipendono dalla velocità dell'elaboratore (da quanto tempo viene impiegato ad eseguire ogni singola istruzione). Dunque il tempo viene espresso in quante istruzioni devono essere eseguite.

Non sempre però il tempo dipende soltanto da n. Per esempio $300 + 200$ risulta molto più semplice di $345 + 783$, nonostante abbiano lo stesso numero di cifre. Dunque $T(n)$ oscilla tra il caso migliore $T_{migl}(n)$ e il caso peggiore $T_{pegg}(n)$.

3.1 Esempio

Riprendendo gli algoritmi di ricerca si possono definire i tempi di esecuzione.

- **Ricerca sequenziale:**
  - $T_{migl}(n) = a_1$
  - $T_{pegg}(n) = a_2 + b_2 n$
- **Ricerca binaria:**
  - $T_{migl}(n) = a_3$
  - $T_{pegg}(n) = a_4 + b_4 \log_2 n$

4 Notazioni asintotiche

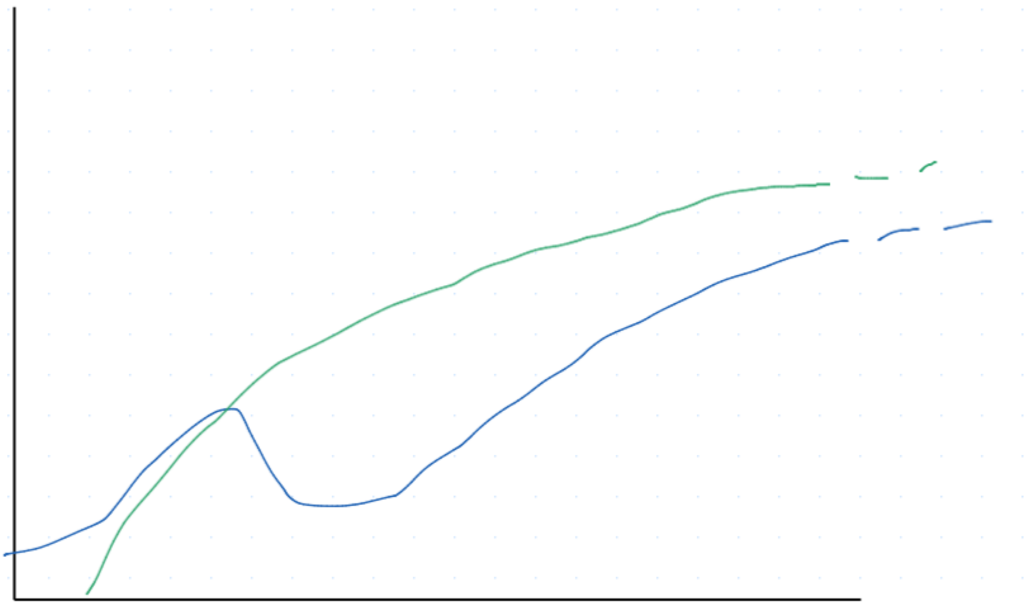
4.1 Limite asintotico superiore

Assunzioni:

- Le funzioni $T(n)$, $S(n)$ sono definite nei numeri naturali, ma i grafici vengono definiti nei reali per semplicità

- Le funzioni sono definitivamente positive

> Aggiungere grafico con una funzione casuale e una funzione def maggiore. #todo-uni



- Blu: $T_{pegg}(n) = f(n)$
- Verde: $O(g(n))$

$$O(g(n)) = \left\{ f(n) \mid \exists\, n_0 > 0, c > 0 \,:\, 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \forall\, n > n_0 \right\}$$

Ovvero $O(g(n))$ è l'insieme delle funzione superiormente limitate da $g(n)$ per una costante c *$(g(n) \cdot c)$*.

> **Esempio:**
>
> - $f(n) = 3n^2$
> - $3n^2 \in O(n^3)$? ovvero
> - $\exists\, n_0, c > 0 \,:\, 0 \leq 3n^2 \leq c \cdot n^3 \forall n > n_0$?
>
> $n \geq \frac{3}{c}$? Questo è verificato per esempio con $c = 3, n_0 = 1$.
>
> È possibile però che esista una funzione $g(n)$ "minore": $3n^2 = O(n^2)$?
>
> $c \geq 3$? Questo è verificato per esempio con $c = 4, n_0 = 1$.
>
> Dunque $3n^2 = O(n^2)$.

Si può provare con una funzione ancora più “bassa”, ma facendo i calcoli la condizione non viene soddisfatta.

Esempio:

- $f(n) = 5n^3 + n^2$
- $f(n) \in O(n^3)$? ovvero
- $\exists\, n_0, c > 0 : 0 \leq 5n^3 + n^2 \leq c \cdot n^3 \forall n > n_0$?

$6n^3 \leq cn^3$? Questo è verificato per esempio con $c = 7, n_0 = 1$.

Si può provare con una funzione ancora più “bassa”, ma facendo i calcoli la condizione non viene soddisfatta.

4.2 Limite asintotico inferiore

> Aggiungere grafico con funzione $T(n)$ e una funzione def inferiore.

$$\Omega(g(n)) = \{\, f(n) \mid \exists\, n_0 > 0, c > 0 \text{ t.c. } 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \,\forall\, n > n_0 \,\}$$

Es:

- $f(n) = 3n^2$
- $g(n) = n$
- $3n^2 \in \Omega(n)$?

$$\exists\, c > 0, n_0 > 0 \quad 0 \leq cn \leq 3n^2 \quad \forall\, n > n_0$$
$$3n^2 \geq cn$$
$$n \geq \frac{c}{3}$$
$$c = 3 \quad n_0 = 1$$

Dunque è verificato.

Si può dire che $3n^2 = \Omega(n)$ *(impropriamente)*.

Proseguendo, $3n^2 = \Omega(n^2)$?

$$\exists\, c > 0, n_0 > 0 \quad 0 \leq cn^2 \leq 3n^2 \quad \forall\, n > n_0$$
$$3n^2 \geq cn^2$$
$$3 \geq c$$
$$c = 3 \quad n_0 = 1$$

Dunque è verificato.

Continuando, $3n^2 = \Omega(n^3)$?

$$\exists\, c > 0, n_0 > 0 \quad 0 \leq cn^3 \leq 3n^2 \quad \forall\, n > n_0$$
$$3n^2 \geq cn^3$$
$$3 \geq cn$$
$$n \leq \frac{3}{c}$$

Questo non è verificato definitivamente. $3n^2 \notin \Omega(n^3)$. Lo stesso vale per tutti gli $\Omega(n^\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 2$.

4.3 Limite asintotico stretto

Devo trovare due costanti c_1, c_2 tale che la funzione $T(n)$ è compresa definitivamente tra $c_1 g(n)$ e $c_2 g(n)$.

> Disegnare grafico #todo-uni : funzione casuale $T(n)$ con due "rette"/"curve" che stanno def. sopra e def. sotto $T(n)$.

$$\Theta(g(n)) = \{\ f(n) \mid \exists\, n_0, c_1, c_2 > 0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \forall\, n > n_0\ \}$$

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$$

Es 1: continuando gli esempi precedenti, sappiamo che

$$3n^2 = \Omega(n^2) \land 3n^2 = O(n^2) \implies 3n^2 = \Theta(n^2)$$

Es 2:

- $f(n) = 5n^3 + n^2$
- $g(n) = n^3$
- $5n^3 + n^2 = \Omega(n^3)$?

$$5n^3 + n^2 \geq 5n^3 = \Omega(n^3)$$
$$5n^3 + n^2 = O(n^3) \implies 5n^3 + n^2 = \Theta(n^3)$$

Es 3:

- $f(n) = 5n^3 - 10n^2 - 30n$
- $g(n) = n^3$
- $f(n) = \Omega(n^3)$?

$$\exists\, c, n_0 > 0 \quad 0 \leq cn^3 \leq 5n^3 - 10n^2 - 30n \quad \forall\, n > n_0$$
$$5n^3 - 10n^2 - 30n \geq cn^3$$
$$5n^3 - cn^3 \geq 10n^2 + 30n$$
$$(5 - c)n^3 \geq 10n^2 + 30n$$

Sapendo che

- $10n^2 \leq 10n^2$
- $30n \leq 30n^2$

possiamo scrivere $10n^2 + 30n \leq 10n^2 + 30n^2$. Adesso dobbiamo stabilire se $(5 - c)n^2 \geq 10n^2 + 30n^2$ (perché implica la disuguaglianza precedente).

$$(5 - c)n^2 \geq 10n^2 + 30n^2$$
$$n \geq \frac{40}{5 - c} \qquad \text{con } c < 5$$
$$c = 1 \quad n_0 = 9$$

Dunque è verificato.

Inoltre $f(n) = O(n^3) \implies f(n) = \Theta(n^3)$.

Dim: $\Omega()$ è uguale a n al grado massimo del polinomio?

- $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0 \quad a_k > 0$
- $g(n) = n^k$
- $f(n) = \Omega(n^k)$?

$$\exists\, c, n_0 > 0 \quad 0 \le cn^k \le f(n) \quad \forall\, n > n_0$$
$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0 \ge cn^k$$
$$(a_k - c)n^k \ge -a_{k-1} n^{k-1} - \ldots - a_0$$

$$-a_{k-1} n^{k-1} - \ldots - a_0 \le |a_{k-1}| n^{k-1} + |a_{k-2}| n^{k-1} + \ldots + |a_0| n^{k-1}$$

$$(a_k - c)n^k \ge \sum_{i=0}^{k-1} |a_i| n^{k-1}$$
$$(a_k - c)n^k \ge n^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} |a_i|$$
$$(a_k - c)n \ge \sum_{i=0}^{k-1} |a_i|$$
$$n \ge \frac{\sum_{i=0}^{k-1} |a_i|}{a_k - c} \qquad \text{con } c < a_k$$

Dimostrato che un polinomio è un omega di n al grado massimo.

Dim: un'esponenziale è limitato inferiormente da un polinomio.

- $f(n) = 2^n$
- $2^n = O(2^n)$
- $2^n = \Omega(n^b) \quad \forall\, b > 0$?

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^b}{2^n} = 0$$
$$\implies \exists\, n_0 \quad \forall\, n > n_0 \quad \frac{n^b}{2^n} < 1$$
$$2^n > 1n^b$$

Quindi tutti i polinomi limitano inferiormente un esponenziale. E sapendo che $2^n =$

$\Omega(2^n)$, si considera questo perché è "il più grande". Ciò implica $2^n = \Theta(2^n)$.

Dim: lo stesso per i logaritmi.

- $f(n) = \log_2^a n$
- $\log_2^a n = O(n^b) \quad \forall\, b > 0\,?$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2^a n}{n^b} = 0$$
$$\implies \exists\, n_0 \quad \forall\, n > n_0 \quad \frac{\log_2^a n}{n^b} < 1$$
$$\log_2^a = O(n^b)$$

Quindi tutti i polinomi limitano inferiormente un logaritmo. E sapendo che $\log_2^a = O(\log_2^a)$, si considera questo perché è "il più piccolo". Ciò implica $\log_2^a = \Theta(\log_2^a)$.

4.4 Scala degli asintoti

- 1
- $\log n$
- $n^b \quad \forall\, 0 < b < 1$
- n
- $n \cdot \log n$
- $n^{1+\varepsilon} \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1$
- n^2
- $n^2 \cdot \log n$
- $n^{2+\varepsilon} \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1$
- n^3
- $n^3 \cdot \log n$
- $n^{2+\varepsilon} \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1$
- $\dots$
- $a^n \quad \forall\, a > 1$ *(ogni a è una classe a se)*
- $n!$
- n^n

4.5 Esempi

Es 1: ricerca in un vettore ordinato.

Algoritmo	**Tempo caso migliore**	**Tempo caso peggiore**
Ricerca sequenziale	$a_1 = \Omega(1)$	$a_2 + b_2 n = O(n)$
Ricerca dicotomica	$a_3 = \Omega(1)$	$a_4 + b_4 \log n = O(\log n)$

5 Selection Sort

5.1 Problema: Trova minimo

Attenzione: gli indici degli array partono da 1 e non da 0.

- **Input:** un vettore V di n interi
- **Output:** una posizione i t.c. $V[i] \leq V[j] \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$

```
Trova_Minimo(V)
    posMin = 1
    for i = 2 to V.length
        if V[i] < V[posMin]
            posMin = i
    return posMin
```

- **Caso migliore:** $1 + n + (n-1) + 0 + 1 = 2n + 1 = \Omega(n)$
- **Caso peggiore:** $1 + n + (n-1) + (n-1) + 1 = 3n = O(n)$

Dunque il tempo di calcolo di questo algoritmo è $\Theta(n)$.

5.1.1 Dimostrare che l'algoritmo è corretto

Riscriviamo l'algoritmo con un `while`.

```
Trova_Minimo(V)
    posMin = 1
    i = 2
    while i <= V.length
        if V[i] < V[posMin]
            posMin = i
        i = i + 1
    return posMin
```

- **Invariante di ciclo** *(condizione che deve essere sempre vera)*: `posMin` è la posizione che contiene il valore più piccolo di $V[1 \dots i-1]$.
- **Inizializzazione** *(prima del while)*: `posMin` è la posizione del minimo di $V[1 \dots 1]$? Sì
- **Conservazione** *(ciò che è vero alla prima istr. del ciclo deve essere vero anche alla fine)*: l'invariante di ciclo è vera alla fine se è vera anche all'inizio
- **Terminazione** *(la conseguenza dell'inizializzazione e della conservazione)*: $i = V.\text{length} + 1$. `posMin` è la posizione del minimo di $V[1 \dots V.\text{length}] = V$

5.2 Problema: Ordinamento di vettori

- **Input:** A un vettore di n interi
- **Output:** un vettore di n interi che contiene gli stessi valori di A ma ordinati in modo crescente

5.2.1 Esempio

Supponiamo di avere un vettore

$$A = (5, 2, 4, 6, 1, 3)$$

Per ordinarlo si possono seguire questi passi:

1. Trovo il minimo e la sua posizione
2. Scambio il minimo con il primo elemento

$$A = (1, 2, 4, 6, 5, 3)$$

3. Ora continuo considerando la restante parte del vettore $(2, 4, 6, 5, 3)$ trovando il minimo e la sua posizione *(il secondo elemento più piccolo)*
4. Scambio questo elemento con il secondo elemento di A
5. Continuo così finché non esaurisco il vettore

$$A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

5.2.2 Implementazione

```
Selection_Sort(A)
    for i = 1 to A.length
        // Trova l'elemento minimo
        posmin = i
        for j = i + 1 to A.length
            if A[j] < A[posmin]
                posmin = j

        scambia A[posmin] con A[i]
```

Per semplificare i calcoli il primo **for** va da 1 a `A.length` al posto che `A.length - 1`, e non entriamo nel secondo **for** quando `i = A.length`. Inoltre consideriamo i parametri come Java, quindi i vettori vengono passati per riferimento e dunque l'algoritmo non necessita di una **return**.

5.2.3 Analisi dei tempi di calcolo

> `for a to b`: $T(n) = b - a + 1 + 1$

Selection Sort	$T_{migl}(n)$	$T_{pegg}(n)$
`for i = 1 to A.length`	$n + 1$	$n + 1$
`posmin = i`	n	n
`for j = i + 1 to A.length`	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
`if A[j] < A[posmin]`	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
`posmin = j`	0	$\Theta(n^2)$
`scambia A[posmin] con A[i]`	n	n

- **Caso migliore:** $T_{migl}(n) = \Omega(n^2)$
- **Caso peggiore:** $T_{migl}(n) = O(n^2)$

Dunque l'algoritmo è $\Theta(n^2)$.

5.2.4 Considerazioni accessorie

5.2.4.1 Stabilità

In applicazioni più complesse gli elementi del vettore da ordinare sono **chiavi** a strutture con dati aggiuntivi. Dunque molto raramente due elementi (considerando anche questi dati aggiuntivi) risultano uguali. Se però bisogna ordinare il vettore, il selection sort si comporta nel seguente modo:

$$(5, 6, 3^A, 1, 3^B)$$
$$(1, 6, 3^A, 5, 3^B)$$
$$(1, 3^A, 6, 5, 3^B)$$
$$(1, 3^A, 3^B, 5, 6)$$
$$(1, 3^A, 3^B, 5, 6)$$

In questo caso 3^A risulta "prima" di 3^B. In quest'altro esempio invece:

$$(3^A, 5, 6, 3^B, 1)$$
$$(1, 5, 6, 3^B, 3^A)$$
$$(1, 3^B, 6, 5, 3^A)$$
$$(1, 3^B, 3^A, 5, 6)$$
$$(1, 3^B, 3^A, 5, 6)$$

3^B risulta "prima" di 3^A.

Ciò indica che **il selection sort non è stabile** perché non preserva l'ordine degli elementi di ugual valore.

5.2.4.2 In-place

Un algoritmo è **in-place** se lavora direttamente sul vettore in input, e non su un'altra copia.

Il selection sort è in-place.

6 Insertion sort

- **Input:** un vettore A di n interi
- **Output:** un vettore di n interi che contiene gli stessi valori di A ma ordinati in modo crescente

6.1 Esempio

Supponiamo di avere un vettore

$$A = (5, 2, 4, 6, 1, 3)$$

1. Controlliamo il secondo elemento (2) con il primo elemento (5).
2. Essendo minore sposto il 2 a sinistra del 5
3. Non ci sono altri elementi a sinistra, quindi mi fermo

$$A = (2, 5, 4, 6, 1, 3)$$

4. Controllo il terzo elemento (4) con il precedente (5)
5. Essendo minore sposto il 4 a sinistra del 5
6. Controllo il 4 con il precedente (2)
7. Essendo il 4 maggiore di 2, mi fermo

$$A = (2, 4, 5, 6, 1, 3)$$

8. Controllo il quarto elemento (6) con il precedente (5)
9. Essendo maggiore, mi fermo

$$A = (2, 4, 5, 6, 1, 3)$$

10. Controllo il quinto elemento (1) con il precedente (6)
11. Essendo minore sposto l'1 a sinistra del 6
12. Controllo l'1 con il precedente

13. Essendo minore sposto l'1 a sinistra del 5
14. Continuo così finché l'elemento precedente è minore di 1 o non ci sono più elementi
15. Continuo così per tutti gli elementi restanti nel vettore

$$A = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Il vettore è ordinato.

6.2 Implementazione

```
Insertion_Sort(A)
    for i = 1 to A.length
        key = A[i]
        j = i - 1

        while (j > 0) and (A[j] > key)
            A[j+1] = A[j]
            A[j] = key
            j = j - 1
```

6.3 Analisi dei tempi di calcolo

Insertion sort	$T_{migl}(n)$	$T_{pegg}(n)$
`for i = 1 to A.length`	$n+1$	$n+1$
`key = A[i]`	n	n
`j = i - 1`	n	n
`while (j > 0)and (A[j] > key)`	n	$\Theta(n^2)$
`A[j+1] = A[j]`	0	$\Theta(n^2)$
`A[j] = key`	0	$\Theta(n^2)$
`j = j - 1`	0	$\Theta(n^2)$

- **Caso migliore:** *(A è già ordinato in modo crescente)* $T_{migl}(n) = \Omega(n)$
- **Caso peggiore:** *(A è ordinato in modo decrescente)* $T_{pegg}(n) = O(n^2)$

6.4 Considerazioni accessorie

L'insertion sort è **stabile** e **in-place**.

7 Ricorsione

7.1 Problema: Esponenziale di un numero

- **Input:** un reale a e un naturale n
- **Output:** un reale b tale che $b = a^n$

7.1.1 Implementazione iterativa

```
EsponenzialeIt(a, n)
    ris = 1
    for i = 1 to n
        ris = a * ris
    return ris
```

$$T(n) = \Theta(n)$$

7.1.2 Implementazione ricorsiva

```
EsponenzialeRic(a, n)
    if n == 0
        return 1

    return a * EsponenzialeRic(a, n-1)
```

7.1.3 Tempi dell'implementazione ricorsiva

In questo specifico esempio non ha senso calcolare i tempi migliore e peggiori perché la quantità in input invariabile.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0 \\ T(n-1) + \Theta(1) & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Il problema è che rimane la ricorrenza anche all'interno del calcolo.

Riscrivo il caso $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + \Theta(1) \\ &= T(n-1) + c \\ &= \big(T(n-2) + c\big) + c \\ &= T(n-3) + 3c \\ &= \dots \\ &= T(n-i) + ic \end{aligned}$$

Ad un certo punto si arriverà che $n - i = 0$. A quel punto si sarà nel caso $T(n) = \Theta(1)$. Dunque il tutto si può riscrivere come

$$T(n) = T(0) + nc = \Theta(1) + nc = \Theta(n)$$

> **Attenzione:** questi casi non sono il peggiore e il migliore, perché in quei casi non si può fissare n. Questi sono solo in casi in cui n è fissato.

Nonostante le due implementazioni siano asintoticamente equivalenti, nella realtà le versioni iterative sono più veloci di quelle ricorsive.

7.1.4 Seconda implementazione ricorsiva

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a^{\frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ a \cdot a^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \cdot a^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

```
EsponenzialeRicV2(a, n)
    if n == 0
        return 1

    if n == 1
        return a

    m = floor(n/2)
    ris = EsponenzialeRicV2(a, m)
```

```
    ris = ris * ris

    if dispari(n)
        ris = a * ris

    return ris
```

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0 \\ \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Supponendo che n sia sempre pari, e che tutti i $\frac{n}{2}$ siano pari:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c \\ &= T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c \\ &= \dots \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + ic \end{aligned}$$

Il tutto termina quando $i = \log_2 n$. A quel punto si può riscrivere come

$$\begin{aligned} T(n) &= T(1) + ic \\ &= T(1) + c \log_2 n \\ &= \Theta(\log_2 n) \\ &= \Theta(\log n) \end{aligned}$$

7.2 Ricerca dicotomica

$$A = (1, 5, 7, 11, 15, 18, 21, 32, 35, 39, 40, 45, 48, 51, 57, 61)$$

Dobbiamo trovare 40 all'interno di A.

1. Trovo l'elemento a metà (pos. 8): 32
2. Lo confronto con 40: è minore, dunque scarto tutta la metà inferiore
3. Trovo l'elemento a metà della parte superiore $(35, 39, 40, 45, 48, 51, 57, 61)$ (pos. 12): 45

4. Lo confronto con 40: è maggiore, allora scarto la parte superiore
5. Trovo l'elemento a metà della parte inferiore $(35, 39, 40, 45)$ (pos. 11): 40
6. Lo confronto con 40: è minore *o uguale*, allora scarto la parte inferiore
7. Trovo l'elemento a metà della parte superiore $(40, 45)$ (pos. 11): 40
8. Continuo così finché il vettore considerato avrà dimensione 1, a quel punto l'elemento dovrebbe essere l'elemento cercato se è presente.
9. Confronto l'elemento trovato con quello che stavo cercando

7.2.1 Implementazione

- **Input:** A vettore ordinato di interi, x elemento da cercare
- **Input ricorsivi:** *input* + l indice sinistro, r indice destro
- **Output:** un valore booleano che indica se l'elemento x è presente nell'array

```
Ricerca_Dic_Ric(A, x, l, r)
    if l == r
        return x == A[l]

    if l > r
        return FALSE

    mid = floor( ( l + r ) / 2 )

    if x <= A[mid]
        return Ricerca_Dic_Ric(A, x, l, mid)
    else
        return Ricerca_Dic_Ric(A, x, mid+1, r)

Ricerca_Dic_Entry(A, x)
    return Ricerca_Dic_Ric(A, x, 1, A.length)
```

7.2.2 Analisi dei tempi

$n = \text{dim input} = r - l + 1$.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 1 \\ \Theta(1) + T\left(\frac{n}{2}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Semplificando la ricorsione si ottiene

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

7.3 Merge sort

Vogliamo ordinare il seguente vettore

$$A = (11, 5, 8, 7, 13, 6, 9, 1)$$

Possiamo dividere l'array in due parti e ordinarle separatamente:

$$(5, 7, 8, 11) \qquad (1, 6, 9, 13)$$

A questo punto confronto i primi elementi delle due metà. Sicuramente uno dei due è il primo elemento di A. Continuo così fino a "svuotare" le due metà e ricostruire A ordinato.

Per ordinare le due metà iniziali è possibile svolgere lo stesso algoritmo ricorsivamente.

7.3.1 Implementazione

- **Input:** A vettore di interi
- **Input ricorsivi:** *input* + l indice sinistro, r indice destro
- **Output:** stesso A ordinato in modo crescente

```
Merge(A, l, mid, r)
    T = new [(r-l+1) int]
    i = l          // Indice della parte l -> mid
    j = mid + 1    // Indice della parte mid+1 -> r
    k = 1          // Indice del vettore T dove inserire i nuovi elementi

    while (i <= mid) and (j <= r)
        if A[i] <= A[j]
            T[k] = A[i]
            i = i + 1
        if A[i] > A[j]
            T[k] = A[j]
            j = j + 1
        k = k + 1

    while i <= mid
        T[k] = A[i]
        i = i + 1
        k = k + 1

    while j <= r
        T[k] = A[j]
        j = j + 1
        k = k + 1
```



```

    for c = 1 to T.length
        A[c+l-1] = T[c]


Merge_Sort_Ric(A, l, r)
    if l < r
        mid = floor( ( l + r ) / 2)
        Merge_Sort_Ric(A, l, mid)
        Merge_Sort_Ric(A, mid+1, r)

        Merge(A, l, mid, r)


Merge_Sort_Entry(A)
    return Merge_Sort_Ric(A, 1, A.length)
```

7.3.2 Analisi dei tempi

$n = \text{dim input} = r - l + 1$

$$T_{\text{Merge}}(n) = \Theta(n)$$

$$\begin{aligned} T_{\text{MSort}}(n) &= \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

7.3.3 Differenze di implementazione

Primo tipo:

```
if l < r
    mid = floor( ( l + r ) / 2 )
    Merge_Sort_Ric(A, l, mid)
    Merge_Sort_Ric(A, mid+1, r)
    Merge(A, l, mid, r)
```

Secondo tipo:

```
if l >= r
    return
mid = floor( ( l + r ) / 2 )
Merge_Sort_Ric(A, l, mid)
Merge_Sort_Ric(A, mid+1, r)
Merge(A, l, mid, r)
```


Nel secondo caso viene evidenziato il caso base rispetto al passo ricorsivo. I due tipi sono equivalenti.

7.3.4 Altre considerazioni

Questo algoritmo non è in-place, perché la `Merge` utilizza un array di appoggio. Inoltre è stabile con questa implementazione di `Merge`.

La merge sort è un esempio classico di un algoritmo **divide et impera** *(divide, impera, combina)*. Questa tipologia di algoritmi divide un problema in più sottoproblemi. Vengono risolti questi sottoproblemi e vengono ricombinati per ottenere la soluzione al problema iniziale.

Questi algoritmi hanno

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \text{ suff. piccolo } \forall\, n \leq n_0 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & \text{se } n > n_0 \end{cases}$$

7.4 Teorema dell'esperto

Se abbiamo un algoritmo **divide et impera** (come il merge sort precedente), dunque avente la formula

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \text{ suff. piccolo } \forall\, n \leq n_0 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & \text{se } n > n_0 \end{cases}$$

con $a \geq 1, b > 1$ e $f(n)$ asintoticamente non negativa, possiamo semplificare la formula con i seguenti casi:

1. Se $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ per $\varepsilon > 0 \implies T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
2. Se $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \implies T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$
3. Se $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ per $\varepsilon > 0$ e $\exists c < 1$ t.c. $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ per n suff. grandi $\implies T(n) = \Theta(f(n))$

7.4.1 Esempi

Es 1: $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$

- $a = 1$
- $b = 2$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0 = 1$
- $f(n) = \Theta(1) = c$

Vediamo i casi:

1. $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $c = O(n^{0-\varepsilon})$? *NO*
2. $c = \Theta(n^0) = \Theta(1)$? *SÌ*

Dunque $T(n) = \Theta(n^0 \cdot \log n) = \Theta(\log n)$.

Es 2: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$

- $a = 2$
- $b = 2$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$
- $f(n) = \Theta(n) = cn$

Vediamo i casi:

1. $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $c = O(n^{1-\varepsilon})$? *NO*
2. $n = \Theta(n)$? *SÌ*

Dunque $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Es 3: $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(1)$

- $a = 1$
- $b = \frac{3}{2}$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$
- $f(n) = \Theta(1) = c$

Vediamo i casi:

1. $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $c = O(n^{0-\varepsilon})$? *NO*
2. $c = \Theta(n^0) = \Theta(1)$? *SÌ*

Dunque $T(n) = \Theta(n^0 \log n) = \Theta(\log n)$.

Es 3: $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

- $a = 3$
- $b = 2$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 3} = n^{1,\dots}$
- $f(n) = n^3$

Vediamo i casi:

1. $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $c = O(n^{1,\dots-\varepsilon})$? *NO*
2. $n^3 = \Theta(n^{1,\dots})$? *NO*
3. $\exists \varepsilon > 0 \quad n^3 = \Omega(n^{1,\dots+\varepsilon})$ *SÌ*

Condizione di regolarità: $\exists c < 1$ t.c. $af\left(\frac{n}{b}\right) < cf(n)$ *SÌ, $c = \frac{3}{8}$*

Dunque $T(n) = \Theta(n^3)$.

7.5 Problema: Ricerca del minimo

- **Input:** vettore A di n interi
- **Output:** la posizione del minimo in A

Per creare un algoritmo ricorsivo è possibile utilizzare il fatto che

$$\min(A) = \min(A[0], \min(A[1 \dots n-1]))$$

Per delimitare la porzione di array su cui opera l'algoritmo usiamo due parametri `l` e `r`. Questo evita di copiare ogni volta il sotto-array da passare alla chiamata ricorsiva (con costo $\Theta(n)$). È necessaria una funzione di utilità che inizializza i parametri aggiuntivi per la chiamata ricorsiva iniziale.


```java
// JAVA Class (LAB)

// Funzione ricorsiva
private static int _findPosMin(int[] A, int l, int r){
    // Caso base: ho un solo valore
    if (l + 1 == r)
        return l;
    // Chiamata ricorsiva
    int rest = _findPosMin(A, l+1, r);
    if (A[l] < A[rest])
        return l;
    return rest;
}

// Funzione di inizializzazione parametri
public static int findPosMin(int[] A) {
    return _findPosMin(A, 0, a.length);
}
```

7.5.1 Selection sort ricorsivo

Con la funzione appena definita, è possibile riscrivere anche il selection sort in maniera ricorsiva

```java
// JAVA Class (LAB)

// Funzione ricorsiva
private static void _selectionsort(int [] A, int l, int r) {
    // Caso base: array vuoto o con un elemento
    if (l + 1 >= r)
        return;
    // Passo ricorsivo:
    // Cerca posizione minimo
    int posMin = _findPosMin(A, l, r);
    // Scambia
    int tmp = A[posMin];
    a[posMin] = a[l];
    a[l] = tmp;
    // Prosegui ricorsivamente
    _selectionsort(A, l + 1, r);
}

// Funzione di inizializzazione parametri
public static void selectionsort(int[] A) {
    _selectionsort(A, 0, A.length);
}
```

8 Quick Sort

> Completare #todo-uni

> Noi abbiamo guardato la partizione di Hoare, ma si può seguire tranquillamente quella di Lomuto. Hai fini dell'esame non è importante.

> Viene dimostrata anche la correttezza.

8.1 Tempi di calcolo

Nel caso peggiore (array ordinato) l'equazione di ricorrenza è

$$T(n) = T(n-k) + T(k) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

con k costante.

Nel caso migliore invece è

$$T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

con $0 < \alpha < 1$.

Dunque il Quick Sort è $\Omega(n \log n)$ e $O(n^2)$.

Se l'input è casuale, il tempo atteso però è $\Theta(n \log n)$.

8.2 Random partition

```
Rnd_Partition(A, l, r):
    Scambia A[l] con un A[l-c] scelto casualmente
    return Partition(A, l, r)

Rnd_QS(A, l, r):
    if l<r then
        cut = Rnd_Partition(A, l, r)
        Rnd_QS(A, l, cut)
        Rnd_QS(A, cut+1, r)
```

9 Problema di selezione

- **Input:** un array A di n interi distinti, un intero i $\in [1, n]$
- **Output:** il valore di A tale che è maggiore esattamente di i-1 elementi

9.1 Esempio

$$15 \quad 4 \quad 8 \quad 12 \quad 22 \quad 26 \quad 9 \quad 19$$

- Con $i = 1$ l'output sarà 4 (minimo)
- Con $i = 8$ l'output sarà 26 (massimo)
- Con $i = \frac{n}{2} = 4$ l'output sarà 12 (mediana)

9.2 Implementazioni

9.2.1 Naive

```
Naive(A, i):
    Ordina A
    return A[i]
```

9.2.2 Selez

```
Cut(A, l, r):
    // Lo stesso del quick sort

Selez(A, i, l, r):
    if l == r then
        return A[l]

    cut = Partition(A, l, r)
    dim1 = cut - l + 1
    if i <= dim1 then
        return Selez(A, i, l, cut)
    else
        return Selez(A, i-dim1, cut+1, r)
```

Questa implementazione è una ricerca binaria mischiata al quick sort.

9.3 Tempi

Se divide a metà

$$T(n) = \Theta(n) + T\left(\frac{n}{2}\right) = \Theta(n)$$

Se invece toglie un elemento per volta

$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1) = \Theta(n^2)$$

Quindi

$$O(n^2) \qquad \Omega(n)$$

10 Counting Sort

- **Input:** A vettore di interi e k intero t.c. $\forall i. 0 \leq A[i] \leq k$

```
CountingSort(A, k):
    C = nuovo vettore con indici da 0 a k
    for i = 0 to k:
        C[i] = 0

    for i = 1 to A.length:
        C[A[i]] = C[A[i]] + 1

    for i = 1 to k:
        C[i] = C[i] + C[i-1]

    B = nuovo vettore da 1 a A.length
    for i = A.length down to 1:
        B[C[A[i]]] = A[i]
        C[A[i]] = C[A[i]] - 1

    return B
```

10.1 Calcolo dei tempi

$$T(n,k) = \Theta(n+k)$$

11 Radix Sort

- **Input:** A vettore di interi, d massimo numero di cifre di ogni elemento

```
RadixSort(A, d):
    for i = 1 to d:
        aplica un alg. di ord. stabile per ordinare A sulla i-esima cifra meno
             significativa
```

11.1 Calcolo dei tempi

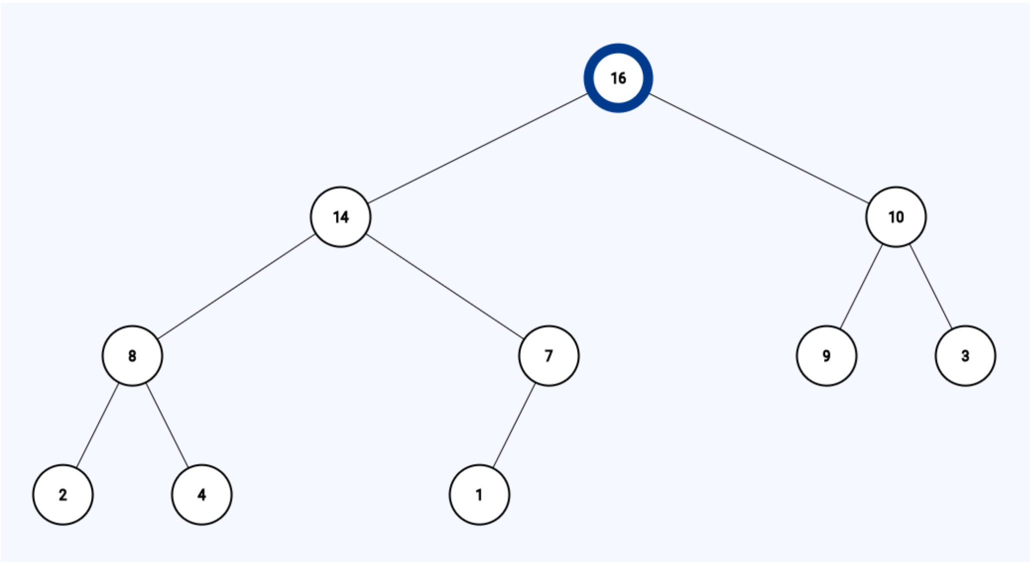
$$T(n, d) = \Theta(d \cdot T_0(n))$$

12 Binary Heap

Un **binary heap** è una struttura dati memorizzata in un array e un certo campo accessorio (**heap size**).

- Essa può essere vista come albero binario quasi completo
- Tutti gli elementi tranne il primo soddisfano la **proprietà dello heap**

$$16 \quad 11 \quad 10 \quad 8 \quad 7 \quad 9 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1$$



{

height: 5cm }

$$parent(i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$$

$$left(i) = 2i$$

$$right(i) = 2i + 1$$

$$A.\text{length} = 10$$

$$A.\text{heap\_size} = 10$$

12.1 Proprietà dello heap

$$\forall i \qquad 1 < i \leq A.\text{heap\_size}$$

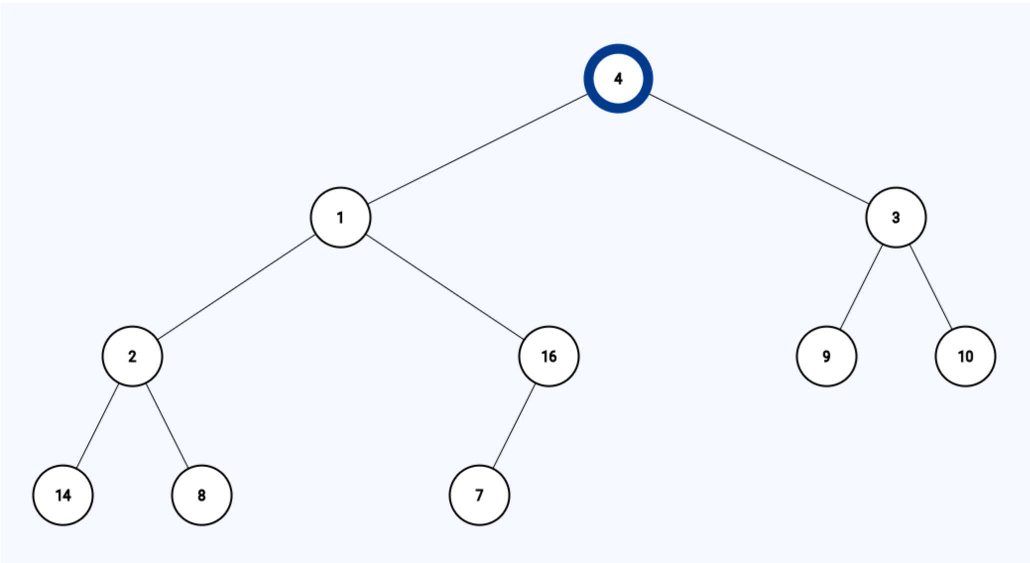
Se A è:

- **Max heap:** $A[parent(i)] \geq A[i]$
- **Min heap:** $A[parent(i)] \leq A[i]$

> **Oss:** se A è ordinato in modo decrescente, allora è un heap. Il contrario invece non è sempre vero.

12.2 Esempi

$$A = \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 16 \quad 9 \quad 10 \quad 14 \quad 8 \quad 7$$



{

height: 5cm }

12.3 Generare un binary heap

Per rendere un normale albero un binary heap abbiamo bisogno delle seguenti procedure:

- `BuildMaxHeap` per rendere un array un max heap
- `MinHeapify` per rendere un albero un min heap

12.3.1 MaxHeapify

```
MaxHeapify(A, i):
    l = left(i)
    r = right(i)
    largest = i
    if l <= A.heap_size AND A[largest] < A[l]:
        largest = l
    if r <= A.heap_size AND A[largest] < A[r]:
        largest = r
    if i != largest:
        A[i], A[largest] = A[largest], A[i]
        MaxHeapify(A, largest)

BuildMaxHeap(A):
    A.heap_size = A.length
    for i = floor(A.heap_size / 2) down to 1 do
        MaxHeapify(A, i)
```

12.3.1.1 Tempi

I tempi della `MaxHeapify` sono:

$$T(h) = \Theta(1) + T(h-1) = O(h)$$

$$T(n) = O(\log n)$$

I tempi di `BuildMaxHeap` sono:

$$T(n) \leq \frac{n}{2} \cdot O(\log n) = O(n \log n)$$

$$T(n) = \Theta(n)$$

12.4 Heap Sort

```
HeapSort(A):
    BuildMaxHeap(A)
    for i = A.length to 2:
        scambia A[1] con A[i]
        A.heap_size = A.heap_size - 1
        MaxHeapify(A, 1)
```

$$T(n) = O(n \log n)$$

Questo è un algoritmo **in-place**.

