
Appunti di Geometria e Algebra Lineare

Algebra lineare e Geometria (prof. Borghesi) - CdL
Informatica Unimib - 23/24

Federico Zotti

20 Mar 2024



Indice

1	Insiemi	2
1.1	Sottoinsieme	2
1.2	Unione disgiunta	2
1.3	Complemento	2
1.4	Prodotto cartesiano	2
1.4.1	Prodotto cartesiano di tre insiemi	3
2	Funzioni	3
2.1	Notazione	3
3	Campi	4
4	Spazi vettoriali	5
4.1	Sottospazi vettoriali	8
4.2	Vettori linearmente dipendenti	10
5	Basi	12
6	Matrici	14

1 Insiemi

Tutto uguale a fondamenti.

1.1 Sottoinsieme

- \subset indica un sottoinsieme (quello che precedentemente era definito come \subseteq)
- \subsetneq indica un sottoinsieme proprio (quello che precedentemente era definito come \subset)

1.2 Unione disgiunta

$$A = \{ a, b, c \}$$

$$B = \{ x, b, z \}$$

$$A \amalg B = \{ a, b_A, c, x, b_B, z \}$$

Gli elementi doppi vengono considerati due volte.

1.3 Complemento

$$B \setminus A = \{ x \in B : x \notin A \}$$

1.4 Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$$

$$B \times A = \{ (x, y) : x \in B, y \in A \}$$

> Notare che le coppie vengono denotate da parentesi tonde, e non angolate.

| **Oss:** supponendo $x_0 \neq y_0$, si noti che $(x_0, y_0) \neq (y_0, x_0)$.

1.4.1 Prodotto cartesiano di tre insiemi

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 4, 5, 6 \}$$

$$C = \{ 8, 9 \}$$

$$A \times B = \{ (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), \dots \}$$

$$(A \times B) \times C = \{ ((1, 4), 8), ((1, 4), 9), ((1, 5), 8), ((1, 5), 9), \dots \}$$

$$A \times (B \times C) = \{ (1, (4, 8)), (1, (4, 9)), (1, (5, 8)), (1, (5, 9)), \dots \}$$

$$A \times B \times C = \{ (1, 4, 8), (1, 4, 9), (1, 5, 8), (1, 5, 9), \dots \}$$

2 Funzioni

Una funzione è una corrispondenza tra un elemento di un insieme ad un elemento di un altro insieme.

Notare che le funzioni non vengono considerate insiemi, a differenza di fondamenti.

Due funzioni $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$ sono uguali ($f = g$) sse

1. $A = C, B = D$
2. $f(x) = g(x), \forall x \in A$

$f(x)$ viene chiamata immagine di x tramite f e $g(x)$ immagine di x tramite g .

2.1 Notazione

$$f : A \rightarrow B$$

- A è il **dominio** di f
- B è il **codominio** di f
- Sia $S \subset A$, allora $f(S)$ è l'**immagine di S tramite f**

$$f(S) = \{ b \in B : \exists a \in S \text{ con } f(a) = b \}$$

Ovvero $f(S)$ è l'insieme che contiene tutte le immagini degli elementi di S tramite f . Se si restringe il dominio di f da A ad S , si crea una nuova funzione $f|_S$.

Attenzione: \subset è solo un'inclusione insiemistica. (Più avanti verranno introdotti gli spazi vettoriali).

L'immagine di $f = f(A)$. Non bisogna confondere l'immagine di una funzione con il suo codominio, perché il codominio potrebbe essere più grande della sua immagine.

- Sia $R \subset B$, allora $f^{-1}(R)$ è la **controimmagine di R tramite f**

$$f^{-1}(R) = \{ a \in A : f(a) \in R \}$$

- f è **iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in A$, allora $f(a_1) \neq f(a_2)$
- f è **suriettiva** se $\forall b \in B, \exists a_b \in A : f(a_b) = b$ ($Imm(f) := f(A)$ deve essere uguale a B)

Oss: affinché $f : A \rightarrow B$ sia una funzione deve avvenire:

1. $\forall x \in A, \exists f(x) \in B$
 2. $f(x)$ è un solo elemento di B
- f è **biiettiva** (o **biunivoca**) se è sia iniettiva che suriettiva
 - Siano $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow D$ due funzioni, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (**composizione**)

3 Campi

Def: un **campo** è un insieme dotato di due operazioni $(+, \cdot)$. Deve avere tre proprietà:

1. $(K, +)$ è un gruppo abeliano
 - $+: K \times K \rightarrow K$ (l'operazione non esce dal gruppo)
 - $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K$ (proprietà associativa)
 - $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in K$ (esistenza del neutro)
 - $\forall a \in K \quad \exists -a \in K$ t.c. $-a + a = a + (-a) = 0$ (esistenza dell'opposto)
 - $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$ (proprietà commutativa)

2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

- $\cdot : K \times K \rightarrow K$ (l'operazione non esce dal gruppo)
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$ (proprietà associativa)
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$ (esistenza del neutro)
- $\forall a \in K \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in K \setminus \{0\}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (esistenza dell'opposto)
- $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K$ (proprietà commutativa)

3. Il prodotto è distributivo rispetto alla somma: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$

4 Spazi vettoriali

Siano V un **insieme** e K un **campo** (per es. \mathbb{Q}, \mathbb{R}).

Attenzione a non confondere i due insiemi. Anche se sono lo stesso o uno è sottoinsieme dell'altro, rimangono due insiemi distinti.

Gli elementi di V si chiamano **vettori**, mentre gli elementi di K si chiamano **scalari**.

Def: V è uno **spazio vettoriale su un campo K** se esistono due operazioni su V :

1. $“+” : V \times V \rightarrow V \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Con proprietà:

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$ (associatività)
- $\exists \vec{0} \in V : \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$ (esistenza dell'elemento neutro)
- $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$ (esistenza degli opposti)
- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ (commutatività)

Ciò vuol dire che $(V, +)$ è un gruppo abeliano.

2. $“\cdot” : K \times V \rightarrow V \quad (\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$ (prodotto per scalare)

Attenzione: l'operazione $\vec{v} \cdot \alpha$ non è definita.

Con proprietà:

- $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V \vec{v} + \lambda_2 \cdot_V \vec{v} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$ (*distributività*)
- $\lambda \cdot_V (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \cdot_V \vec{v}_1 + \lambda \cdot_V \vec{v}_2 \quad \forall \lambda \in K, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
- $(\lambda_1 \cdot_K \lambda_2) \cdot_V \vec{v} = \lambda_1 \cdot_V (\lambda_2 \cdot_V \vec{v}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \vec{v} \in V$
- $1_K \cdot_V \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

Oss: V (come ogni altro spazio vettoriale) non ha un suo prodotto interno, cioè non esiste un vettore " $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ ".

Queste proprietà ne implicano altre (corollari). Si può dimostrare che, se V è uno spazio vettoriale su K , allora:

- $0 \cdot_V \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V$
- $\lambda \cdot_V \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot_V \vec{v} = -\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$ (in questo caso $-1 \in K$ è l'elemento opposto dell'identità moltiplicativa del campo K)

Es 1:

$$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{R}$$

Dotiamo \mathbb{R}^n di una struttura di spazio vettoriale su K .

La **somma** è definita come:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \right) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ (*vettore nullo, elemento neutro additivo*)
- $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $-\vec{v} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

La **moltiplicazione per scalare** è definita come:

$$\cdot : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left(\alpha, (x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \mapsto (\alpha \cdot x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Es 2:

$$V = \mathbb{R}_{[x]} = \{ \text{polinomi in } x \text{ a coeff reali} \}$$

$$= \{ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_h x^h : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \}$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^h \lambda_i x^i : \lambda_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{N} \right\}$$

- Dati $p(x), q(x)$ polinomi in x :

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \sum_{i=0}^h \alpha_i x^i + \sum_{j=0}^l \beta_j x^j \\ &= \sum_{u=0}^{\max(l,h)} (\alpha_u + \beta_u) \cdot x^u \end{aligned}$$

- $0(x) = 0 \in \mathbb{R}$ (*polinomio nullo, di grado 0*)
- $-p(x) = \sum_{i=0}^h -\alpha_i \cdot x^i$
- $\lambda \cdot p(x) = \sum_{i=0}^h \lambda \cdot \alpha_i \cdot x^i$

Es 3:

Sia $V = \{ \text{funzioni} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \}$. Dotiamo V di una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} .

La somma è definita come

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto "f + g" : I \rightarrow \mathbb{R}$$

In questo caso $f + g$ è definito come

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

Il prodotto viene definito come

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, f : I \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto "f \cdot g" : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

4.1 Sottospazi vettoriali

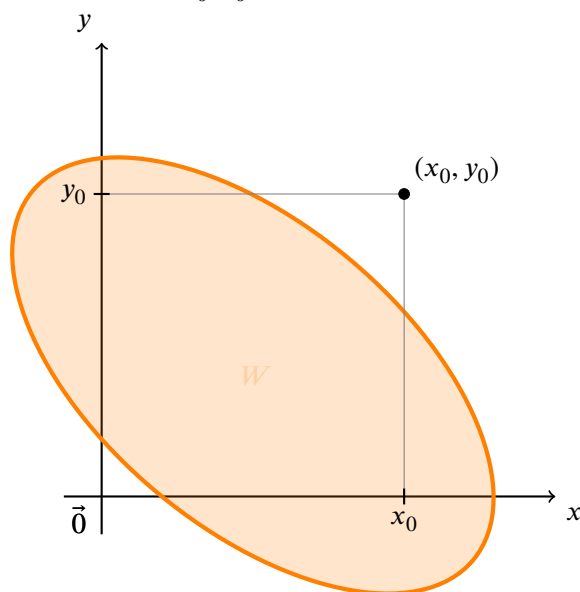
Def: sia V uno spazio vettoriale su K , e $W \subset V$. Diremo che W è un **sottospazio vettoriale di V** se:

1. $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W \quad \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$
2. $\lambda \cdot \vec{w} \in W \quad \forall \lambda \in K, \vec{w} \in W$

In tal caso denoteremo la relazione tra W e V come $W < V$.

Oss: se $W < V$, allora W è lui stesso uno spazio vettoriale.

Es 1: $V = \mathbb{R}^2 \ni (x_0, y_0)$

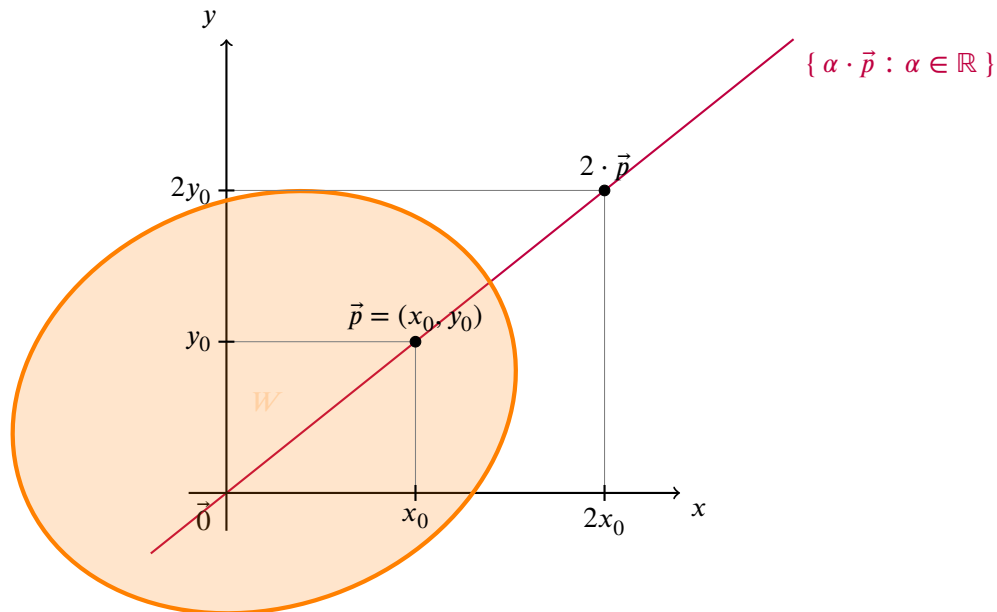


Sia $\lambda = 0$. Per la proprietà 2., $\lambda \cdot \vec{w} \in W$, ma in questo caso $0 \cdot \vec{w} = \vec{0} \notin W$.

Dunque W non può essere un sottospazio vettoriale di V .

Ciò non vuol dire che non si possa mettere una struttura di uno spazio vettoriale su W , ma essa non sarà quella ereditata da V .

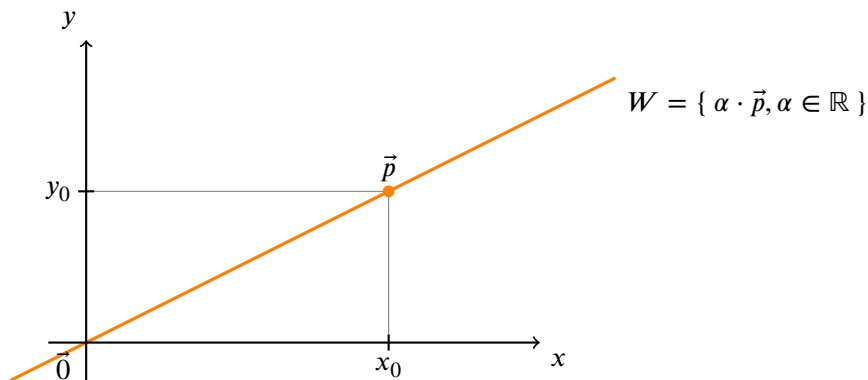
Es 2: $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



Per la proprietà $\lambda \cdot \vec{p} \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Sia $\lambda = 2$, $\lambda \cdot \vec{p}$ diventa $2 \cdot \vec{p} = (2x_0, 2y_0)$. Si può notare che $2 \cdot \vec{p} \notin W$.

Dunque W non è un sottospazio vettoriale di V .

Es 3: $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{p} = (x_0, y_0)$



W è un sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{R}^2$ perché vengono soddisfatte le due condizioni:

1. $\alpha_1 \cdot \vec{p} + \alpha_2 \cdot \vec{p} \stackrel{?}{\in} W$. Questo si può riscrivere raccogliendo come $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \vec{p} \in W$ ed è dimostrato perché la somma di scalari è uno scalare
2. Verificata banalmente

Oss: in alternativa alle due proprietà del sottospazio vettoriale (dalla definizione), possiamo controllare che $W \subset V$, con V sp. vett. su campo K , sia un sottospazio vett. verificando che $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ si abbia $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in W$.

Quali sono tutti i sottospazi di \mathbb{R}^2 ?

- $\{\vec{0}\}$
- $\{\alpha \cdot \vec{p}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ (*rette passanti per l'origine*)
- \mathbb{R}^2

Oss: ogni sp. vett. V ammette almeno due sottosp. vett. cioè $\{\vec{0}\}$ e V stesso.

Domanda cruciale: dato $S \subset V$ (sottoinsieme di uno spazio vettoriale), esiste il “più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene S ”? La risposta è sì.

Def: $\langle S \rangle \subset V$ denoterà il più piccolo sottospazio di V che contiene S . Esso si chiama **sottospazio vettoriale generato da S** .

Si dimostra che

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Quindi $\langle S \rangle$ è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ con i coefficienti $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tutti i vettori in S .

Oss: $S \subset \langle S \rangle$

4.2 Vettori linearmente dipendenti

Def: sia $S \subset V$ spazio vettoriale.

I vettori di S sono detti **linearmente dipendenti** se $\exists \vec{w} \in S$ e vettori $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_h \in S$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ tali che $\vec{w} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \vec{z}_i$.

S sono **linearmente indipendenti** se non sono dipendenti.

Se $W \subset V$, allora $\langle W \rangle = W$.

Lemma: $S \subset V$ sp. vett.. Allora S è un insieme di vettori **linearmente indipendenti** se e solo se

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0} \implies \mathbb{R} \ni \lambda_i = 0, \forall i$$

Ciò deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\{\vec{z}_i\} \subset S$ ($\{z_i\} \neq \{\vec{0}\}$).

Dim:

$$A \implies B$$

$$\neg A \iff \neg B$$

$S \subset V$ è un insieme di vettori lin. indep.. Vogliamo dimostrare che, se $\{\vec{z}_i\} \subset S$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0}$, allora $\lambda_i = 0, \forall i$.

Supponiamo che $\exists \lambda_h \neq 0 : \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0}$.

$$\lambda_h \vec{z}_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_j \vec{z}_j$$

$$\lambda_h^{-1} \lambda_h \vec{z}_h = \lambda_h^{-1} \cdot \sum_{j \neq h} \lambda_j \vec{z}_j$$

$$\vec{z}_h = \sum_{j \neq h} (-\lambda_h^{-1} \lambda_j) \cdot \vec{z}_j$$

Questo implica che S è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

$$B \implies A$$

$$\neg B \iff \neg A$$

Supponiamo che $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{z}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$, dimostriamo che S è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Supponiamo che S sia un insieme di vettori lin. dip. $\implies \exists \vec{z}_c \in S$ e $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m \in S$ tali che $\vec{z}_c = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{z}_j$, $\vec{z}_j \neq \vec{z}_c \forall j$.

$$\vec{0} = -\vec{z}_c + \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{z}_j$$

Tale combinazione lineare mi nega B .

5 Basi

Sia $W < V$. Per comunicare uno spazio vettoriale ci sono due modi:

1. Siccome $W \subset V$, $W = \{ \dots \}$
2. Sfrutto il fatto che $W < V$ e quindi $\exists S \subset V : \langle S \rangle = W$

Per il punto 2. bisogna “ottimizzare” S . Ovvero trovare il più piccolo S che genera W . La minimalità è equivalente a $W \neq \langle S - \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in S$.

Def: sia V uno spazio vettoriale. Un insieme ordinato $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ di vettori di V si dice **base di V** se ogni vettore \vec{v} di V si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i$$

con $\vec{v}_i \in B$.

Gli scalari a vengono chiamate **coordinate**.

Teo: le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \subset V$ è una **base** di V
2. S è un **sistema di generatori** per V (cioè $\langle S \rangle = V$) e i vettori di S sono linearmente indipendenti
3. $\langle S \rangle = V$ e $\forall \vec{v} \in V, \exists! \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v}, \quad \{ \vec{v}_i \} \subset S$
4. S è un insieme minimale di generatori di V
5. S è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti di V

Corollario: ogni spazio vettoriale che ammette un sistema finito di generatori ammette una base.

Es 1: $V = \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$.

Base canonica:

$$\{ (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) \}$$

n volte

Verifichiamo che è una base usando il punto 3. del teorema.

Sia $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, verifichiamo che $\vec{v} \in \langle S \rangle$, cioè che $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$.

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \\ &= \sum_{i=1}^n (0, \dots, 0, \overset{i}{\lambda_i}, 0, \dots, 0) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\end{aligned}$$

L'eguaglianza è verificata se $\lambda_i = x_i, \forall i$.

In conclusione $\{ \vec{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \}$ sono generatori per \mathbb{R}^n , ma anche una base.

Es 2: $V = \mathbb{R}[x] \ni \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{i=0}^n a_i x^i$ è combinazione lineare di $\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ con coefficienti $\{ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \}$.

Un insieme di generatori di $\mathbb{R}[x]$ è $\{ 1, x, x^2, \dots \} = \{ x^i, i \in \mathbb{N} \}$, che è anche una base.

Teorema di estensione ad una base: V spazio vettoriale.

Siano $I = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h \}$ vettori linearmente indipendenti $\subset V$ e $G = \{ \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \}$ generatori di V .

Allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ è una base di V .

Teo: con le notazione del teo precedente

$$\#(I) \leq \#(G)$$

Corollario: supponiamo che V ammetta un sistema di generatori finito. Allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi.

Def: sia V sp. vett. che ammette un sistema di generatori finito. La **dimensione** di V è il numero di vettori di una sua base qualunque (*hanno tutte lo stesso numero di elementi*).

Corollario: $\dim(V) = n \implies n$ vettori linearmente indipendenti di V sono anche generatori. Questo implica anche che n generatori di V sono linearmente indipendenti.

Esercizio:

$$S = \{ (1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 2, 0) \} \subset \mathbb{R}^3$$

Ottenere una base da S .

Notazione: V sp. vett. e $W, Z \leq V$.

- $W \cap Z \leq V$
- $W \cup Z \subset V$ (*solo sottoinsieme*)
- $\langle W \cup Z \rangle = W + Z$ (*abuso di simbologia, si usa solo a denotare l'unione*)

Teorema di Grassmann: sia V sp. vett. di dim. finita. Allora, conta la notazione precedente:

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

6 Matrici

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$