Fisica

January 2026

Contents

Capitolo 1 — Introduzione alla Fisica

1.1 Metodo scientifico

Il metodo scientifico è il processo con cui la fisica costruisce modelli e leggi a partire dall'osservazione dei fenomeni.

- **Osservazione**: descrizione del fenomeno.
- **Ipotesi / Modello**: introduzione di assunzioni semplificative (es. attrito trascurabile, punto materiale).
- **Previsioni**: deduzione di risultati verificabili tramite formule.
- **Esperimento**: misure e confronto con le previsioni.
- **Validazione / Revisione**: se i dati coincidono il modello è valido, altrimenti si corregge.

In fisica si lavora con modelli, che non descrivono tutta la realtà ma solo gli aspetti necessari per calcolare e prevedere un fenomeno.

1.2 Grandezze fisiche e definizione operativa

Una **grandezza fisica** è una proprietà osservabile che può essere espressa in modo quantitativo. In generale si scrive:

$$\text{grandezza} = (\text{numero}) \cdot (\text{unità})$$

Esempio:

$$v = 12 \text{ m/s}$$

In fisica, l'unica definizione rigorosa di una grandezza è la **definizione operativa**, cioè la sequenza di operazioni da eseguire per ottenere il valore numerico della grandezza. Queste operazioni possono includere:

- misure dirette (con strumenti);
- calcoli a partire da altre grandezze note;
- una combinazione di misure e calcoli.

1.2.1 Esempi: lunghezza, distanza e intervallo di tempo

Lunghezza di un oggetto rettilineo: si può misurare confrontando l'oggetto con un metro graduato, allineando un estremo con lo zero e leggendo la tacca più vicina all'altro estremo.

Distanza tra due punti: si può definire operativamente in modo analogo, usando un metro disposto lungo il segmento che unisce i due punti.

Intervallo di tempo: si definisce operativamente mediante un orologio, contando il numero di cicli di un fenomeno periodico regolare tra due eventi.

1.2.2 Misura completa: valore, incertezza, unità

Una misura fisica non è completa se non include:

- il **valore numerico stimato**;
- l'**incertezza** (o errore);
- l'**unità di misura**.

Si scrive:

$$X = (x \pm \Delta x) \text{ unità}$$

Esempio:

$$L = (125 \pm 1) \text{ cm}$$

che equivale a:

$$L = 125 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$$

1.2.3 Incertezza assoluta, relativa e percentuale

L'incertezza Δx è detta **errore assoluto**. L'**errore relativo** è:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

L'**errore percentuale** è:

$$\varepsilon_{x\%} = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100$$

Esempio:

$$x = 2.50 \pm 0.05 \text{ m}$$

$$\varepsilon_x = \frac{0.05}{2.50} = 0.02 \qquad \varepsilon_{x\%} = 2\%$$

1.2.4 Errori di sensibilità e di precisione

- **Errore di sensibilità**: legato alla risoluzione dello strumento (distanza tra tacche).
- **Errore di precisione**: legato alla variabilità di misure ripetute (fluttuazioni).

1.2.5 Compatibilità tra misure

Due misure possono essere considerate **compatibili** se i rispettivi intervalli di incertezza si sovrappongono almeno in parte. Ad esempio, (125 ± 1) cm e (128.2 ± 3.4) cm possono essere compatibili, mentre (125 ± 1) cm e (129.1 ± 2.2) cm non lo sono.

1.3 Grandezze fondamentali e derivate (SI)

Nel Sistema Internazionale (SI) esistono 7 grandezze fondamentali.

1.3.1 Grandezze fondamentali

Grandezza	**Unità SI**
Lunghezza	metro (m)
Massa	chilogrammo (kg)
Tempo	secondo (s)
Corrente elettrica	ampere (A)
Temperatura	kelvin (K)
Quantità di sostanza	mole (mol)
Intensità luminosa	candela (cd)

1.3.2 Grandezze derivate (esempi importanti)

Le grandezze **derivate** si ottengono tramite calcoli a partire da grandezze fondamentali.

$$A = L^2 \qquad [A] = \mathrm{m}^2$$

$$V = L^3 \qquad [V] = \mathrm{m}^3$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad [a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$F = ma \qquad [F] = \mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$W = F \cdot s \qquad [W] = \mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad [E_c] = \mathrm{J}$$

$$P = \frac{W}{t} \qquad [P] = \mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

$$p = \frac{F}{A} \qquad [p] = \mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

1.3.3 Grandezze scalari e vettoriali

- **Scalari**: massa, tempo, temperatura, energia (basta un valore numerico con unità).
- **Vettoriali**: spostamento, velocità, accelerazione, forza (modulo, direzione e verso).

Esempio di vettore in 2D:

$$\vec{F} = (F_x, F_y)$$

Modulo:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

1.4 Unità di misura, prefissi e conversioni

Le unità fondamentali del SI sono:

$$\text{m, kg, s, A, K, mol, cd}$$

Unità derivate comuni:

$$\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}, \quad \text{J} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}, \quad \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}}, \quad \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$$

1.4.1 Prefissi principali

Prefisso	**Nome**	**Fattore**
T	tera	10^{12}
G	giga	10^{9}
M	mega	10^{6}
k	chilo	10^{3}
m	milli	10^{-3}
μ	micro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	pico	10^{-12}

Esempi:

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \qquad 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \qquad 1 \ \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$$

1.4.2 Conversioni di unità

Esempio: conversione di 72 km/h in m/s:

$$72 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 72 \cdot \frac{1000}{3600} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esempio: conversione di 100 cm^3 in m^3:

$$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ cm}^3 = (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$100 \text{ cm}^3 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

1.5 Cifre significative e notazione scientifica

Le **cifre significative** sono le cifre di un numero che hanno reale significato fisico, ossia sono note con un'incertezza accettabile.

Esempio:

$$G = 276 \pm 20$$

L'incertezza ± 20 rende non significativa la cifra delle unità. Un modo corretto di riportare il valore è:

$$G \approx 280$$

La forma più chiara è la **notazione scientifica**:

$$G = 2.8 \times 10^2$$

In generale:

$$47520000 = 4.752 \times 10^7 \qquad 0.000000641 = 6.41 \times 10^{-7}$$

1.6 Dimensioni e analisi dimensionale

Le dimensioni descrivono la natura di una grandezza fisica indipendentemente dall'unità scelta. Le dimensioni fondamentali sono:

$$[L] = \text{lunghezza}, \qquad [M] = \text{massa}, \qquad [T] = \text{tempo}$$

1.6.1 Esempi di dimensioni

$$[x] = [L] \qquad [t] = [T] \qquad [v] = \frac{[L]}{[T]} \qquad [a] = \frac{[L]}{[T]^2}$$

$$[F] = \frac{[M][L]}{[T]^2} \qquad [E] = \frac{[M][L]^2}{[T]^2}$$

1.6.2 Omogeneità dimensionale

Una formula fisica deve essere **omogenea dimensionalmente**: le dimensioni del primo membro e del secondo membro devono coincidere.

Esempio corretto:

$$x = vt \qquad [L] = \frac{[L]}{[T]} \cdot [T] = [L]$$

Esempio errato:

$$x = v + t \qquad [L] \neq \frac{[L]}{[T]} + [T]$$

1.6.3 Ricavare dipendenze con l'analisi dimensionale

Esempio: il periodo del pendolo semplice T dipende dalla lunghezza l e dall'accelerazione di gravità g. Ipotesi:

$$T \propto l^a g^b$$

Dimensioni:

$$[T] = [L]^a \left(\frac{[L]}{[T]^2} \right)^b = [L]^{a+b} [T]^{-2b}$$

Confrontando gli esponenti:

$$1 = -2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \qquad 0 = a + b \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Formula completa (con costante numerica):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.7 Punti chiave per gli esercizi

- Ogni formula deve essere omogenea dimensionalmente.
- Non si sommano grandezze con unità diverse.
- Durante le conversioni conviene scrivere sempre le unità in ogni passaggio.
- Ricordare bene le unità derivate principali: N, J, W, Pa, Hz.
- Riportare i risultati con cifre significative coerenti con l'incertezza.

Capitolo 2 — Cinematica del punto materiale (moto in una dimensione)

2.1 Cinematica 1D: definizioni di base

La **cinematica** è la parte della meccanica che descrive quantitativamente il movimento, senza studiarne le cause (forze). In questa sezione ci occupiamo del moto **in una dimensione spaziale (1D)**, ossia lungo una linea prefissata (rettilinea o anche curvilinea, ma descritta con una sola coordinata).

2.1.1 Posizione e spazio (origine e orientamento)

Nel moto 1D la posizione dell'oggetto è descritta da una sola variabile, detta **coordinata** x. Per definire quantitativamente la posizione servono:

- una misura di lunghezza (e quindi un'unità di misura);
- una **origine** O scelta come riferimento (dove $x = 0$);
- un **orientamento** (verso positivo) lungo la linea di moto.

Se per andare dall'origine all'oggetto ci si muove nel verso positivo, la posizione è positiva; altrimenti è negativa. Il termine **spazio** indica l'insieme di tutte le posizioni possibili.

2.1.2 Sistema di riferimento (asse 1D)

Gli elementi precedenti costituiscono un **sistema di riferimento** in 1D: un asse orientato con un'origine O e una coordinata x. In generale si usa x sia per indicare la coordinata (posizione) sia l'asse stesso.

2.1.3 Il punto materiale

Un oggetto reale ha estensione, ma spesso è possibile schematizzarlo come **punto materiale**, cioè come un punto che ne rappresenta la posizione. Questa approssimazione è lecita quando le dimensioni dell'oggetto sono molto piccole rispetto alle altre lunghezze del problema e rispetto alla precisione richiesta.

2.1.4 Tempo e origine dei tempi

Per descrivere il moto serve anche la grandezza **tempo** t. Operativamente si sceglie un istante di riferimento detto **origine dei tempi** (dove $t = 0$), poi si misura l'intervallo di tempo tra $t = 0$ e l'evento considerato.

2.1.5 Il movimento: legge oraria

Il movimento (moto) di un oggetto corrisponde al fatto che la sua posizione varia nel tempo. Una descrizione completa del moto richiede di specificare la posizione per tutti gli istanti in un intervallo di interesse. Questo si esprime tramite la **legge oraria**:

$$x = x(t)$$

dove t è la variabile indipendente e x la variabile dipendente.

2.1.6 Rappresentazioni del moto

La funzione $x(t)$ può essere specificata in tre modi principali:

- **Tabella**: valori di x (misurati o calcolati) per diversi istanti t;
- **Grafico** x-t: detto **diagramma orario**;
- **Formula analitica**: un'espressione matematica per $x(t)$.

2.1.7 Correttezza dimensionale

Se $x(t)$ è espressa con una formula, deve essere **dimensionalmente corretta**:

- il risultato deve avere dimensioni di lunghezza $[L]$;
- termini sommati o sottratti devono avere la stessa dimensione;
- gli argomenti di funzioni come sin, cos, exp devono essere adimensionali.

Esempio: $x(t) = 2t$ non è corretto (a destra ha dimensione di tempo). Un esempio corretto è $x(t) = ct$, con c avente dimensioni di velocità $[L][T^{-1}]$.

2.1.8 Moto particolare: stato di quiete

Se l'oggetto è fermo, la posizione non cambia nel tempo:

$$x(t) = x_0$$

Il grafico x-t è una retta orizzontale.

2.2 Spostamento e spazio percorso

2.2.1 Spostamento

Consideriamo un intervallo di tempo (t_1, t_2), con $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$. Lo **spostamento** è la variazione di posizione:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$$

Lo spostamento può essere positivo o negativo a seconda del verso del moto rispetto all'asse scelto.

2.2.2 Distanza tra due posizioni e valore assoluto

La distanza tra la posizione iniziale e finale è:

$$d_{1,2} = |\Delta x|$$

Una proprietà importante è che lo spostamento Δx **non dipende** dalla scelta dell'origine: se si cambia origine, x_1 e x_2 cambiano della stessa quantità e la differenza resta invariata.

2.2.3 Spazio percorso

Lo **spazio percorso** Δs è la lunghezza totale del percorso effettuato nell'intervallo.

- Se il moto **non cambia mai verso** nell'intervallo, allora:

$$\Delta s = d_{1,2} = |\Delta x|$$

- Se il moto **inverte verso** una o più volte, allora Δs è la somma degli spazi percorsi in ciascun sottointervallo in cui il verso resta unico (quindi in generale $\Delta s \geq |\Delta x|$).

2.3 Velocità

2.3.1 Velocità media

La **velocità media** su un intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ è:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Se il moto è sempre nello stesso verso nell'intervallo, si può anche scrivere:

$$v_m = \pm \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove il segno dipende dal verso del moto rispetto all'asse.

2.3.2 Velocità istantanea

La **velocità istantanea** è definita come limite della velocità media per $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Il segno di $v(t)$ indica il verso istantaneo del moto lungo l'asse.

2.3.3 Velocità scalare (modulo della velocità)

Si definisce anche la **velocità scalare** (sempre non negativa):

$$|v(t)| = \left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$$

dove ds è lo spazio percorso infinitesimo.

2.3.4 Interpretazione grafica della velocità

Nel diagramma orario $x(t)$, la velocità istantanea in un istante t corrisponde alla **pendenza della tangente** alla curva in quel punto:

- tangente con pendenza positiva $\Rightarrow v(t) > 0$;
- tangente con pendenza negativa $\Rightarrow v(t) < 0$;
- tangente orizzontale $\Rightarrow v(t) = 0$ (possibile inversione del moto).

2.3.5 Determinare il moto dalla velocità (cenno)

Se si conosce $v(t)$ e si conosce la posizione $x(t_0) = x_0$ ad un istante t_0, allora:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'$$

Quindi per ricostruire $x(t)$ dalla velocità serve conoscere anche una condizione iniziale.

2.4 Accelerazione

2.4.1 Accelerazione media

L'**accelerazione media** su un intervallo Δt è:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

2.4.2 Accelerazione istantanea

L'**accelerazione istantanea** è:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2.4.3 Significato grafico dell'accelerazione (idea qualitativa)

Nel diagramma orario $x(t)$ l'accelerazione è legata alla **curvatura** della traiettoria:

- andamento più "curvo" rispetto a una retta $\Rightarrow$ accelerazione diversa da zero;
- concavità verso l'alto $\Rightarrow a(t) > 0$;
- concavità verso il basso $\Rightarrow a(t) < 0$.

2.4.4 Determinare la velocità dall'accelerazione (cenno)

Se si conosce $a(t)$ e si conosce $v(t_0) = v_0$, allora:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

Per ricostruire completamente $x(t)$ da $a(t)$ servono quindi sia $v(t_0)$ sia $x(t_0)$.

2.5 Moti rettilinei notevoli

2.5.1 Moto rettilineo uniforme (MRU)

Condizione:

$$v = \text{costante} \qquad a = 0$$

Legge oraria:

$$x(t) = x_0 + vt$$

2.5.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA)

Condizione:

$$a = \text{costante}$$

Legge della velocità:

$$v(t) = v_0 + at$$

Legge oraria:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Formula senza tempo:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

2.5.3 Caduta libera (caso particolare di MRUA)

L'accelerazione di gravità vale:

$$g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

Se l'asse y è positivo verso l'alto:

$$a = -g$$

Formule:

$$v(t) = v_0 - gt \qquad y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

2.6 Esercizi svolti (tipo esame)

2.6.1 Esercizio 1 (MRU: trovare la posizione)

Un'auto si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 20$ m/s. All'istante iniziale si trova in $x_0 = 50$ m. Calcolare la posizione dopo $t = 8$ s.

Dati:

$$v = 20 \text{ m/s}, \quad x_0 = 50 \text{ m}, \quad t = 8 \text{ s}$$

Formula:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Calcolo:

$$x(8) = 50 + 20 \cdot 8 = 210 \text{ m}$$

Risposta:

$$x = 210 \text{ m}$$

2.6.2 Esercizio 2 (velocità media)

Un punto materiale si sposta da $x_1 = 10$ m a $x_2 = 130$ m in $\Delta t = 6$ s. Trovare la velocità media.

Dati:

$$x_1 = 10 \text{ m}, \quad x_2 = 130 \text{ m}, \quad \Delta t = 6 \text{ s}$$

Spostamento:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 120 \text{ m}$$

Formula:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Calcolo:

$$v_m = \frac{120}{6} = 20 \text{ m/s}$$

Risposta:

$$v_m = 20 \text{ m/s}$$

2.6.3 Esercizio 3 (MRUA: trovare la velocità finale)

Un corpo parte con velocità iniziale $v_0 = 5$ m/s e accelera con $a = 2$ m/s^2 per $t = 7$ s. Trovare la velocità finale.

Dati:

$$v_0 = 5 \text{ m/s}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad t = 7 \text{ s}$$

Formula:

$$v = v_0 + at$$

Calcolo:

$$v = 5 + 2 \cdot 7 = 19 \text{ m/s}$$

Risposta:

$$v = 19 \text{ m/s}$$

2.6.4 Esercizio 4 (MRUA: trovare la posizione)

Un corpo parte da fermo ($v_0 = 0$) in $x_0 = 0$ e accelera con $a = 3$ m/s^2 per $t = 4$ s. Calcolare la posizione finale.

Dati:

$$x_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad a = 3 \text{ m/s}^2, \quad t = 4 \text{ s}$$

Formula:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Calcolo:

$$x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 = 24 \text{ m}$$

Risposta:

$$x = 24 \text{ m}$$

2.6.5 Esercizio 5 (MRUA senza tempo)

Un corpo ha velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s e accelerazione costante $a = 4$ m/s^2. Dopo aver percorso $\Delta x = 25$ m, calcolare la velocità finale v.

Dati:

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, \quad a = 4 \text{ m/s}^2, \quad x - x_0 = 25 \text{ m}$$

Formula:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Calcolo:

$$v^2 = 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 25 = 300 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{300} \approx 17.3 \text{ m/s}$$

Risposta:

$$v \approx 17.3 \text{ m/s}$$

2.6.6 Esercizio 6 (caduta libera: tempo di caduta)

Un oggetto viene lasciato cadere da fermo da un'altezza $h = 20$ m. Trovare il tempo di caduta (attrito trascurabile). Scegliamo l'asse y positivo verso l'alto, quindi $a = -g$.

Dati:

$$y_0 = 20 \text{ m}, \quad y = 0, \quad v_0 = 0, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Formula:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sostituzione:

$$0 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9.81\ t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{40}{9.81}} \approx 2.0 \text{ s}$$

Risposta:

$$t \approx 2.0 \text{ s}$$

2.7 Schema veloce (scelta della formula)

- Se $a = 0$ (velocità costante) $\Rightarrow$ MRU:

$$x = x_0 + vt$$

- Se a è costante $\Rightarrow$ MRUA:

$$v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- Se moto verticale con gravità (senza attrito) $\Rightarrow$ MRUA con $a = -g$:

$$v = v_0 - gt \qquad y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Capitolo 3 — Moti piani

3.1 Cinematica bidimensionale e tridimensionale

In questa sezione descriviamo il moto di un punto materiale nello spazio tramite coordinate cartesiane e componenti. Il caso 2D (moto nel piano) è quello più usato negli esercizi, ma i concetti si estendono in modo diretto al caso 3D.

3.2 Moto nel piano (2D)

Un moto nel piano si descrive usando un sistema di assi cartesiani (x, y). La posizione del punto materiale è il vettore:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$$

dove $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ sono i versori degli assi x e y.

3.2.1 Spostamento

Tra due istanti t_1 e t_2:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} \qquad \text{con } \Delta x = x(t_2) - x(t_1),\ \Delta y = y(t_2) - y(t_1)$$

3.2.2 Velocità nel piano

La velocità istantanea è la derivata del vettore posizione:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath}$$

Quindi:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

Modulo della velocità:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

3.2.3 Accelerazione nel piano

L'accelerazione istantanea è la derivata della velocità:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Componenti:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Modulo dell'accelerazione:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

3.2.4 Descrizione per componenti e indipendenza dei moti

Il moto di un punto materiale nel piano può essere visto come composizione di due moti indipendenti:

$$\text{moto lungo } x \quad \text{e} \quad \text{moto lungo } y$$

In molti esercizi si studiano separatamente le due componenti e poi si ricompone il moto.

3.3 Moto nello spazio (3D) — cenno

Nel caso tridimensionale si introduce un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z). La posizione è:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

Velocità per componenti:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Accelerazione per componenti:

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \qquad a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \qquad a_z(t) = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

3.4 Ricostruzione del moto da velocità e accelerazione (idea)

Come nel caso 1D, se conosciamo le componenti della velocità o dell'accelerazione, possiamo ricostruire le coordinate integrando nel tempo, usando condizioni iniziali (posizione e/o velocità a t_0):

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt', \qquad v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt'$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y(t')\,dt', \qquad v_y(t) = v_{y0} + \int_{t_0}^{t} a_y(t')\,dt'$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z(t')\,dt', \qquad v_z(t) = v_{z0} + \int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt'$$

3.5 Moto del proiettile (lancio obliquo)

Il **moto del proiettile** è un moto nel piano in cui l'unica accelerazione è quella di gravità (trascurando attrito dell'aria). Scegliamo:

$$x \text{ orizzontale,} \qquad y \text{ verticale verso l'alto}$$

Allora:

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \qquad g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

3.5.1 Velocità iniziale scomposta in componenti

Se la velocità iniziale ha modulo v_0 e forma un angolo θ con l'orizzontale:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

3.5.2 Equazioni del moto

Lungo x (MRU):

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$v_x(t) = v_{0x} = \text{costante}$$

Lungo y (MRUA):

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

3.5.3 Equazione della traiettoria

Eliminando t:

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

Sostituendo in $y(t)$:

$$y(x) = y_0 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2$$

La traiettoria è una **parabola**.

3.5.4 Tempo di volo (se $y_0 = 0$ e arrivo a $y = 0$)

Ponendo $y(t) = 0$:

$$0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Soluzioni: $t = 0$ oppure

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

3.5.5 Gittata (se $y_0 = 0$ e arrivo a $y = 0$)

La gittata è:

$$R = v_{0x}T$$

Quindi:

$$R = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2v_0 \sin\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

3.5.6 Altezza massima

Si raggiunge quando $v_y(t) = 0$:

$$0 = v_{0y} - gt_{\max} \qquad \Rightarrow \qquad t_{\max} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Altezza massima (rispetto a y_0):

$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

3.6 Moto circolare

Il **moto circolare** è un moto nel piano in cui la traiettoria è una circonferenza di raggio R.

3.6.1 Grandezza angolare

Si usa l'angolo $\theta(t)$ (in radianti). L'arco percorso s è:

$$s = R\theta$$

3.6.2 Velocità angolare

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Unità:

$$[\omega] = \mathrm{rad/s}$$

3.6.3 Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Unità:

$$[\alpha] = \mathrm{rad/s^2}$$

3.6.4 Relazioni tra grandezze lineari e angolari

Velocità tangenziale:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Accelerazione tangenziale:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

3.7 Accelerazione centripeta

Nel moto circolare, anche se il modulo della velocità è costante, la direzione cambia continuamente, quindi esiste un'accelerazione diretta verso il centro (centripeta):

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Usando $v = R\omega$:

$$a_c = R\omega^2$$

Direzione: sempre verso il centro della circonferenza.

3.8 Accelerazione tangenziale

Se il modulo della velocità cambia nel tempo (moto circolare non uniforme), esiste un'accelerazione lungo la tangente alla traiettoria:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

In forma angolare:

$$a_t = R\alpha$$

Direzione: tangente alla circonferenza (nel verso del moto se la velocità aumenta).

3.9 Accelerazione totale nel moto circolare

Nel moto circolare non uniforme, l'accelerazione totale è la somma vettoriale di:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Poiché sono perpendicolari tra loro, il modulo vale:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$$

3.10 Caso particolare: moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme:

$$\omega = \text{costante} \qquad \alpha = 0 \qquad a_t = 0$$

Quindi l'unica accelerazione è quella centripeta:

$$a = a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

3.11 Coordinate polari nel piano (cenno)

Un modo alternativo per descrivere la posizione nel piano è usare le coordinate polari (r, φ):

$$r = \text{distanza dall'origine}, \qquad \varphi = \text{angolo rispetto all'asse } x$$

Conversioni:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Viceversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(*attenzione al quadrante*).

3.12 Cambiamento del sistema di riferimento (cenno)

Nel piano possiamo cambiare sistema di riferimento in due modi principali.

3.12.1 Traslazione dell'origine

Se la nuova origine O' ha coordinate $(x_{O'}, y_{O'})$ nel vecchio sistema:

$$x' = x - x_{O'} \qquad y' = y - y_{O'}$$

3.12.2 Rotazione degli assi

Se ruotiamo gli assi di un angolo θ:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Formulario — Capitolo 3 (Coordinate e componenti, Proiettile, Moto circolare)

Moto nel piano (2D)

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} \qquad \vec{v}(t) = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} \qquad \vec{a}(t) = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Moto del proiettile (attrito trascurabile)

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t \qquad y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$T = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} \qquad R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \qquad y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Moto circolare

$$s = R\theta \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$v = R\omega \qquad a_t = R\alpha \qquad a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$$

Esercizi tipo (svolti)

Esercizio 1 — Proiettile: tempo di volo e gittata (stessa quota)

Un proiettile viene lanciato da terra con velocità iniziale $v_0 = 20$ m/s e angolo $\theta = 30°$. Calcolare:

- il tempo di volo T;
- la gittata R.

Dati:

$$v_0 = 20 \text{ m/s}, \quad \theta = 30°, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Componenti iniziali:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 20 \cos 30° \approx 17.32 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta = 20 \sin 30° = 10 \text{ m/s}$$

Tempo di volo:

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{20}{9.81} \approx 2.04 \text{ s}$$

Gittata:

$$R = v_{0x}T \approx 17.32 \cdot 2.04 \approx 35.3 \text{ m}$$

Risposta:

$$T \approx 2.04 \text{ s} \qquad R \approx 35.3 \text{ m}$$

Esercizio 2 — Proiettile: altezza massima

Con gli stessi dati dell'esercizio precedente, calcolare l'altezza massima $y_{\max}$.

Formula:

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Calcolo:

$$y_{\max} = \frac{10^2}{2 \cdot 9.81} = \frac{100}{19.62} \approx 5.10 \text{ m}$$

Risposta:

$$y_{\max} \approx 5.10 \text{ m}$$

Esercizio 3 — Moto circolare uniforme: accelerazione centripeta

Un corpo si muove su una circonferenza di raggio $R = 5$ m con velocità costante $v = 10$ m/s. Calcolare l'accelerazione centripeta.

Dati:

$$R = 5 \text{ m}, \quad v = 10 \text{ m/s}$$

Formula:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Calcolo:

$$a_c = \frac{10^2}{5} = 20 \text{ m/s}^2$$

Risposta:

$$a_c = 20 \text{ m/s}^2$$

Esercizio 4 — Moto circolare: trovare v e a_c

Un punto ruota con velocità angolare $\omega = 4$ rad/s su una circonferenza di raggio $R = 0.50$ m. Calcolare la velocità tangenziale v e l'accelerazione centripeta a_c.

Dati:

$$\omega = 4 \text{ rad/s}, \quad R = 0.50 \text{ m}$$

Velocità tangenziale:

$$v = R\omega = 0.50 \cdot 4 = 2 \text{ m/s}$$

Accelerazione centripeta:

$$a_c = R\omega^2 = 0.50 \cdot 16 = 8 \text{ m/s}^2$$

Risposta:

$$v = 2 \text{ m/s} \qquad a_c = 8 \text{ m/s}^2$$

Scelta rapida della formula (guida pratica)

- **Proiettile:** separa sempre in due moti indipendenti:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Gittata e tempo di volo:** usali solo se partenza e arrivo sono alla stessa altezza:

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \qquad R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

- **Moto circolare uniforme:** velocità costante $\Rightarrow$ solo centripeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

- **Moto circolare non uniforme:** cambia il modulo della velocità:

$$a_t = R\alpha \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$$

Capitolo 4 — Sistemi di riferimento e moto relativo

4.1 Sistemi di riferimento in moto relativo

Un **sistema di riferimento** è un insieme di:

- un'origine O;
- assi cartesiani (es. x, y, z);
- un orologio per misurare il tempo t.

La descrizione del moto dipende dal sistema di riferimento scelto. Esempio: una persona seduta su un treno vede una pallina cadere verticalmente, mentre un osservatore fermo a terra vede una traiettoria obliqua.

4.1.1 Due sistemi di riferimento

Consideriamo due sistemi:

- S: sistema "fermo" (assoluto per comodità);
- S': sistema in moto rispetto a S.

Supponiamo che:

- S' si muova rispetto a S con velocità costante $\vec{V}$;
- gli assi di S e S' siano **paralleli**;
- all'istante $t = 0$ le origini coincidano: $O \equiv O'$.

4.1.2 Relazione tra i vettori posizione

La posizione di un punto materiale vista da S e da S' è legata da:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{R}(t)$$

dove:

- $\vec{r}(t)$ è la posizione nel sistema S;
- $\vec{r}\,'(t)$ è la posizione nel sistema S';
- $\vec{R}(t)$ è il vettore posizione dell'origine O' rispetto a O.

Se S' si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}t$$

Nel caso particolare spesso usato negli esercizi ($\vec{R}_0 = \vec{0}$):

$$\vec{R}(t) = \vec{V}t$$

4.2 Trasformazioni galileiane

Le **trasformazioni galileiane** collegano coordinate e tempi tra due sistemi inerziali (in moto relativo rettilineo uniforme).

Nel caso 1D (moto lungo x) con velocità relativa V:

$$x' = x - Vt \qquad x = x' + Vt$$

Il tempo è lo stesso in entrambi i sistemi:

$$t' = t$$

In 3D, se il moto relativo è lungo l'asse x:

$$x' = x - Vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

Quando si usano: quando le velocità sono molto minori della velocità della luce e i sistemi sono **inerziali** (cioè non accelerati).

4.3 Velocità di trascinamento (composizione delle velocità)

Partendo dalla relazione tra posizioni:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{R}(t)$$

derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{V}(t)$$

dove:

- $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ è la velocità osservata in S;
- $\vec{v}\,'(t) = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$ è la velocità osservata in S';
- $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$ è la **velocità di trascinamento** (velocità di S' rispetto a S).

4.3.1 Caso più comune: moto relativo uniforme

Se $\vec{V}$ è costante:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

Interpretazione: la velocità totale osservata in S è la somma della velocità relativa vista in S' e della velocità del sistema S' stesso.

4.3.2 Esempio tipico (treno)

- Un passeggero cammina nel treno con velocità $\vec{v}\,'$;
- il treno si muove rispetto a terra con velocità $\vec{V}$.

Allora la velocità del passeggero rispetto a terra è:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

4.4 Accelerazione di trascinamento (composizione delle accelerazioni)

Derivando ancora la relazione tra velocità:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}(t)$$

si ottiene:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A}$$

dove:

- $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ è l'accelerazione in S;
- $\vec{a}\,' = \dfrac{d\vec{v}\,'}{dt}$ è l'accelerazione in S';
- $\vec{A} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ è l'**accelerazione di trascinamento** (accelerazione di S' rispetto a S).

4.4.1 Caso più comune: sistemi inerziali

Se S' è inerziale rispetto a S, allora $\vec{V}$ è costante e:

$$\vec{A} = 0$$

Quindi:

$$\vec{a} = \vec{a}\,'$$

Risultato importante: nelle trasformazioni galileiane l'accelerazione è la stessa in tutti i sistemi inerziali.

4.5 Osservazioni importanti

- Le trasformazioni galileiane valgono solo tra **sistemi inerziali** (moto relativo rettilineo uniforme).
- Se un sistema è accelerato (non inerziale), compaiono le **forze apparenti** (che verranno studiate nella dinamica).
- In problemi di moto relativo la formula più usata è:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

4.6 Mini-schema (da ricordare)

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}} \qquad \boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}} \qquad \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A}}$$

dove:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

4.7 Traiettoria e spazio percorso: proprietà geometriche del moto

4.7.1 Descrizione del moto con traiettoria e spazio percorso

Finora abbiamo rappresentato il moto usando:

- coordinate cartesiane (o polari);
- vettori (posizione, velocità, accelerazione).

Esiste un terzo modo di descrivere il moto nello spazio, basato su due elementi distinti:

1. **Traiettoria**: la curva descritta dal punto materiale durante il moto, specificando anche il verso di percorrenza (curva orientata). In questa descrizione il tempo **non compare**.
2. **Spazio percorso** lungo la traiettoria in funzione del tempo $s(t)$: è la lunghezza dell'arco misurata a partire dalla posizione iniziale P_0 (che va sempre fissata).

La traiettoria può essere fornita:

- in forma grafica;
- in forma analitica, ad esempio (in 2D) con due funzioni $x(p)$ e $y(p)$, dove p è un parametro qualunque (non necessariamente il tempo).

4.7.2 Differenza tra ascissa curvilinea e spazio percorso

Lo spazio percorso $s(t)$ è simile all'ascissa curvilinea, ma con una differenza importante:

- l'**ascissa curvilinea** può aumentare o diminuire (moto avanti/indietro);
- lo **spazio percorso** $s(t)$ è definito in modo da essere sempre **positivo** e **crescente**, perché misura la distanza totale percorsa lungo la traiettoria fino all'istante t.

Se il moto ripercorre avanti e indietro lo stesso tratto, questo viene comunque conteggiato nello spazio totale percorso.

4.7.3 Proprietà geometrica della velocità: tangenza alla traiettoria

La velocità vettoriale è definita come:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Proprietà fondamentale: la velocità vettoriale è sempre **tangente alla traiettoria**. Questo perché lo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ è tangente alla traiettoria e la divisione per dt non ne cambia la direzione.

4.7.4 Velocità scalare e spazio percorso

Il modulo della velocità vettoriale è detto **velocità scalare**:

$$v(t) = |\vec{v}(t)|$$

Questa grandezza è legata allo spazio percorso infinitesimo ds tramite:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

In 3D, se $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

4.7.5 Moto particolare: moto circolare

Un moto è detto **circolare** se la traiettoria è una circonferenza di raggio R. Indicando con $\theta(t)$ (in radianti) l'angolo che individua la posizione del punto sulla circonferenza, lo spazio percorso lungo la circonferenza è:

$$s(t) = R\,\theta(t)$$

Derivando:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt}$$

Si definisce la **velocità angolare**:

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

quindi:

$$v(t) = R\,\omega(t)$$

4.7.6 Accelerazione nel moto circolare: tangenziale e centripeta

Nel moto circolare l'accelerazione si scompone in due componenti:

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\,\hat{u}_T(t) + a_C(t)\,\hat{u}_C(t)$$

dove:

- $\hat{u}_T$ è il versore tangente alla traiettoria;
- $\hat{u}_C$ è il versore centripeto (diretto verso il centro).

Le componenti valgono:

$$a_T(t) = \frac{dv}{dt} \qquad a_C(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

4.7.7 Accelerazione e traiettoria: caso generale

Un tratto infinitesimo di traiettoria può essere approssimato con un arco di cerchio. Il cerchio che approssima meglio la traiettoria in un punto è detto **cerchio osculatore**, e il suo raggio $R(t)$ è detto **raggio di curvatura**.

In generale vale ancora:

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\,\hat{u}_T(t) + a_C(t)\,\hat{u}_C(t)$$

con:

$$a_T(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad a_C(t) = \frac{v^2(t)}{R(t)}$$

4.7.8 Moto circolare uniforme

Il moto circolare è detto **uniforme** se la velocità scalare v è costante. In questo caso anche ω è costante:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

e la legge angolare è:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

L'accelerazione tangenziale è nulla:

$$a_T = 0$$

mentre l'accelerazione è solo centripeta:

$$a = a_C = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

4.7.9 Periodo del moto circolare uniforme

Un giro completo corrisponde a $\Delta\theta = 2\pi$, quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

Formule importanti e tipologia esercizi (Capitolo 4)

Formule da ricordare (moto relativo)

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}} \qquad \boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}} \qquad \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A}}$$

Formule da ricordare (traiettoria e proprietà geometriche)

$$\boxed{v = |\vec{v}|} \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt}} \qquad \boxed{\vec{v} \text{ tangente alla traiettoria}}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_C \hat{u}_C} \qquad \boxed{a_T = \frac{dv}{dt}} \qquad \boxed{a_C = \frac{v^2}{R}}$$

Esercizi tipici (cosa devi saper fare)

- Sommare velocità tra sistemi: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$.
- Sommare velocità in 2D (barca/vento): componenti e modulo.
- Capire che la velocità è tangente alla traiettoria.
- Calcolare v da $s(t)$ usando $v = ds/dt$.
- Moto circolare: usare $v = R\omega$, $a_C = v^2/R$.
- Moto circolare uniforme: usare $T = 2\pi/\omega$ e $a = R\omega^2$.

Capitolo 5 — Dinamica del punto materiale

5.1 Principi della dinamica

5.1.1 Idea di base

La dinamica studia il moto mettendo in relazione le **forze** applicate a un corpo e la sua **accelerazione**. Nel modello di **punto materiale** si trascurano dimensioni e rotazioni, descrivendo solo la traslazione.

5.1.2 Sistema inerziale e principio di inerzia

Un **sistema inerziale** è un sistema di riferimento in cui vale il principio di inerzia: se la risultante delle forze su un corpo è nulla, il corpo mantiene la velocità costante.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{costante}$$

Casi tipici:

- corpo fermo: $\vec{v} = \vec{0}$;
- moto rettilineo uniforme: $\vec{v} = \text{costante}$.

5.1.3 Legge fondamentale della dinamica

La legge fondamentale della dinamica collega la risultante delle forze esterne all'accelerazione:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Questa è la formula centrale della dinamica: data la risultante delle forze si ottiene l'accelerazione, oppure viceversa.

Unità di misura della forza:

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5.1.4 Azione e reazione

Le forze nascono da **interazioni** tra corpi. Se un corpo A esercita una forza su B, allora B esercita su A una forza uguale e opposta:

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Le due forze agiscono su **corpi diversi**, quindi non si annullano sullo stesso corpo.

5.1.5 Metodo essenziale per gli esercizi

- Individuare il corpo (punto materiale) da studiare.
- Disegnare tutte le forze esterne agenti sul corpo.
- Scegliere assi comodi.
- Scrivere:
$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y$$
- Risolvere per le incognite richieste.

5.1.6 Formule da ricordare

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{costante}} \qquad \boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}} \qquad \boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}}$$

5.2 Forze e principi di Newton

5.2.1 Forza come misura dell'interazione

Il principio di inerzia implica che un corpo **non soggetto a interazioni** ha accelerazione nulla. Quindi l'accelerazione è una manifestazione dell'interazione tra corpi. Tuttavia, quando due corpi interagiscono, essi in generale accelerano in modo diverso a causa delle loro masse. Per avere una misura **simmetrica** dell'interazione, si introduce la **forza**.

5.2.2 Definizione di forza

La forza agente su un corpo è definita come:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se due corpi 1 e 2 interagiscono solo tra loro, si ha:

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1, \qquad \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2$$

e per il principio di azione e reazione:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Il modulo della forza misura quindi l'intensità dell'interazione, in modo simmetrico per i due corpi. La direzione della forza è lungo la congiungente dei due corpi; il verso distingue interazioni **attrattive** o **repulsive**.

5.2.3 Unità di misura della forza e forza peso

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della forza è il **Newton** (N):

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Un esempio importante è la **forza peso**, cioè la forza gravitazionale che la Terra esercita su un corpo vicino alla superficie terrestre:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

dove $\vec{g}$ è il vettore accelerazione di gravità, di modulo:

$$g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2$$

e direzione verticale verso il basso.

5.2.4 Legge di forza

La legge fondamentale della dinamica implica che la forza dipende dalle posizioni, velocità e proprietà intrinseche dei corpi. In generale, si assume l'esistenza di una dipendenza funzionale detta **legge di forza**:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots;\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots;\ \text{proprietà intrinseche})$$

Nel concetto fisico di forza è quindi implicita l'idea che essa sia determinabile **indipendentemente dall'accelerazione**, tramite leggi di forza.

5.2.5 Forze fondamentali e forze empiriche macroscopiche

Le leggi generali della dinamica (principi di Newton) non sono sufficienti a determinare il moto: devono essere completate da leggi specifiche, che descrivono le **interazioni** tra corpi.

Una prima distinzione importante è tra:

- **forze fondamentali**: governano le interazioni tra i costituenti elementari della materia;
- **forze empiriche macroscopiche**: sono le forze tra oggetti macroscopici osservabili nella vita quotidiana.

Le forze macroscopiche derivano in realtà dalla somma di moltissime interazioni fondamentali tra particelle, ma i dettagli sono complessi; per questo spesso si usano leggi empiriche e approssimate.

5.2.6 Le quattro forze fondamentali

Le forze fondamentali note oggi sono quattro (in ordine di intensità crescente):

- forza gravitazionale;
- forza nucleare debole;
- forza elettromagnetica;
- forza nucleare forte.

In questo corso ci concentriamo sulle due che hanno manifestazioni macroscopiche evidenti: **gravità** ed **elettromagnetismo**.

5.2.7 Forza gravitazionale (legge di Newton)

La forza gravitazionale agisce tra qualunque coppia di corpi dotati di massa. La forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1 è:

$$\vec{F}_{2\to 1} = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\,\hat{u}_{21}$$

dove:

$$\hat{u}_{21} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \qquad G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$$

La forza gravitazionale è sempre **attrattiva**, proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Per corpi estesi sferici, la formula si può applicare usando come posizione il centro della sfera.

5.2.8 Forza peso come approssimazione della gravità terrestre

Vicino alla superficie terrestre si può approssimare la distanza dal centro della Terra come costante. In tal caso la forza gravitazionale si riduce alla **forza peso**:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

con $g \simeq 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ diretta verticalmente verso il basso. Se agisce da sola, produce un moto con accelerazione costante $\vec{g}$.

5.2.9 Massa inerziale e massa gravitazionale (osservazione)

Nella legge fondamentale della dinamica compare la massa come **massa inerziale** (inerzia del corpo), mentre nella legge di gravitazione compare la massa come **massa gravitazionale**. Sperimentalmente, per tutti i corpi queste due masse risultano proporzionali e, usando la stessa unità di misura, anche numericamente identiche. Questo spiega perché l'accelerazione gravitazionale risulta indipendente dalla massa.

5.2.10 Campo gravitazionale (idea di campo)

Un modo alternativo di descrivere l'interazione gravitazionale è introdurre il concetto di **campo**. Una massa sorgente genera nello spazio un campo gravitazionale $\vec{g}(\vec{r}, t)$, definito come l'accelerazione che una massa di prova avrebbe se fosse posta nel punto $\vec{r}$ al tempo t.

La forza su un corpo di massa m immerso nel campo è:

$$\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r}, t)$$

In questa descrizione, la forza dipende dal campo nel punto in cui si trova il corpo.

5.2.11 Forza elettromagnetica: legge di Coulomb (elettrostatica)

Una prima approssimazione della forza elettromagnetica è la forza di Coulomb tra due cariche puntiformi. La forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1 è:

$$\vec{F}_{2\to 1} = -K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\, \hat{u}_{21}$$

dove q_1, q_2 sono le cariche elettriche (misurate in Coulomb, C) e:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \ \mathrm{N\,m^2/C^2}$$

La forza di Coulomb è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come la gravità, ma può essere:

- **repulsiva** se $q_1 q_2 > 0$ (cariche dello stesso segno);
- **attrattiva** se $q_1 q_2 < 0$ (cariche di segno opposto).

5.2.12 Azione di più forze e risultante

Se un corpo interagisce con più corpi, la forza complessiva agente su di esso, detta **risultante**, è la somma vettoriale delle forze dovute a ciascuna interazione:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

Ad esempio, se un corpo 1 interagisce con i corpi 2 e 3:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

dove $\vec{F}_{12}$ è la forza esercitata dal corpo 2 su 1 e $\vec{F}_{13}$ quella esercitata dal corpo 3 su 1.

5.2.13 Equilibrio e statica

La condizione di **equilibrio** di un corpo richiede accelerazione nulla e quindi forza risultante nulla:

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{\text{tot}} = \vec{0}$$

Questo è il punto di partenza della **statica**, che studia i corpi in equilibrio.

5.2.14 Forze empiriche macroscopiche (forze di contatto)

Le forze tra oggetti macroscopici sono la risultante di moltissime forze (per lo più elettromagnetiche) tra le particelle di cui sono composti i corpi. Una descrizione microscopica completa è impraticabile, perché richiederebbe di seguire il moto di un numero enorme di particelle.

Fortunatamente esistono **leggi di forza approssimate**, ricavate empiricamente, che descrivono le forze macroscopiche in funzione di poche proprietà macroscopiche.

Un aspetto comune di queste forze è che sono **forze di contatto**: in assenza di contatto, la forza si annulla.

5.2.15 Forza elastica (legge di Hooke)

La forza elastica nasce dalla deformazione di un corpo elastico che tende a ritornare alla configurazione di riposo. Nel caso di una molla ideale, la legge di Hooke afferma che la forza elastica sull'estremo della molla è:

$$\vec{F} = -k\,\Delta l\,\hat{u}$$

dove k è la costante elastica, Δl è l'allungamento (positivo in trazione, negativo in compressione) e $\hat{u}$ è un versore lungo l'asse della molla diretto dall'interno verso l'estremità spostata.

Se il moto avviene lungo un asse x e $\Delta l = x - x_0$, allora:

$$F_x = -k(x - x_0)$$

Se si sceglie l'origine nel punto di riposo ($x_0 = 0$):

$$F_x = -kx$$

La forza elastica ha segno opposto allo spostamento e tende a riportare l'estremo nel punto di equilibrio.

5.2.16 Attrito viscoso (basse velocità)

Un corpo che si muove in un fluido (liquido o gas) a bassa velocità subisce una forza di attrito detta **attrito viscoso**, proporzionale e opposta alla velocità:

$$\vec{F} = -b\,\vec{v}$$

dove b dipende dalle proprietà del fluido e dalla forma del corpo (per una sfera: $b = 6\pi\eta R$).

5.2.17 Resistenza del mezzo (alte velocità)

A velocità elevate, l'attrito di un fluido è spesso ben descritto da una legge quadratica:

$$\vec{F} = -c\,v\,\vec{v} = -c\,v^2\,\hat{u}$$

dove $v = |\vec{v}|$, $\hat{u}$ è un versore orientato come $\vec{v}$ e c dipende da densità del fluido e forma del corpo. Spesso si scrive:

$$c = \frac{c_r\,\rho\,S}{2}$$

con ρ densità del fluido, S area frontale e c_r coefficiente aerodinamico.

5.2.18 Forze vincolari e vincoli geometrici

Per alcuni contatti tra corpi solidi, le deformazioni sono così piccole da risultare trascurabili. In questi casi la legge di forza non è utilizzabile in pratica per determinare il modulo della forza vincolare.

Si sostituisce quindi la legge di forza con una **condizione geometrica** sul moto (vincolo), scritta come equazione o disequazione, che permette comunque di risolvere il problema.

5.2.19 Reazione normale di una superficie

Se un corpo C è a contatto con un piano rigido e altre forze tendono a farlo penetrare nel piano, il piano reagisce con una forza **normale** $\vec{N}$, perpendicolare alla superficie, che impedisce la penetrazione.

Scegliendo l'asse y perpendicolare al piano, il vincolo si esprime come:

$$y \geq y_0$$

dove y_0 è la quota del piano. Se il corpo resta appoggiato senza staccarsi, allora:

$$y = y_0 \quad \Rightarrow \quad a_y = 0$$

Esempio: corpo di massa m su piano orizzontale in equilibrio. Le forze verticali sono $P = mg$ (verso il basso) e N (verso l'alto), quindi:

$$N = mg$$

5.2.20 Tensione di un filo

Un filo ideale (inestensibile e di massa trascurabile) esercita una forza di **tensione** $\vec{T}$ sul corpo a cui è collegato. La direzione della tensione è sempre **tangente al filo** e, se il tratto è rettilineo, è parallela al filo.

Esempio: massa m appesa e in equilibrio. Agiscono $P = mg$ verso il basso e T verso l'alto, quindi:

$$T = mg$$

5.2.21 Trasmissione della tensione (filo ideale)

In un filo ideale teso tra due estremi, il modulo della tensione è lo stesso ai due capi. Questo perché, applicando il 2º principio al filo:

$$m_F \vec{a}_F = \vec{F}_{\text{ext}}$$

e per un filo ideale $m_F \simeq 0$, quindi la risultante delle forze esterne deve essere nulla. Ne segue che le tensioni ai capi hanno lo stesso modulo.

5.2.22 Tensione con carrucola ideale (puleggia)

Se un filo ideale passa su una carrucola ideale, il modulo della tensione resta lo stesso lungo tutto il filo:

$$T_1 = T_2$$

anche se la direzione cambia nei diversi tratti del filo.

5.2.23 Limiti delle forze vincolari

Le forze vincolari possono avere:

- un **modulo massimo** (es. $N_{\max}$ per un tavolo, $T_{\max}$ per un filo), oltre il quale il vincolo si rompe;
- un **vincolo sul verso**: ad esempio la reazione normale non può "tirare" un corpo per mantenerlo attaccato al piano.

Il criterio $N = 0$ (o $T = 0$) è spesso usato per stabilire il distacco dal vincolo (separazione dal piano, filo che si allenta, ecc.).

5.2.24 Attrito radente (attrito dinamico)

Quando un corpo scivola su una superficie, compare una forza di attrito radente $\vec{A}$ che si oppone al moto. Una legge empirica molto usata è:

$$\vec{A} = -\mu_d \, N \, \hat{u}$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico, N è il modulo della reazione normale e $\hat{u} = \vec{v}/v$ è un versore diretto come la velocità relativa.

A differenza dell'attrito nei fluidi, l'attrito radente non dipende dal modulo della velocità, ma dal contatto tra le superfici (materiale e rugosità).

5.2.25 Principi di Newton

5.2.25.1 Primo principio di Newton

Un corpo non soggetto a forze resta in quiete se inizialmente in quiete, oppure si muove di moto rettilineo uniforme se ha velocità iniziale non nulla.

5.2.25.2 Secondo principio di Newton

Un corpo soggetto a forze risponde con un'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{tot}}}{m}$$

dove $\vec{F}_{\text{tot}}$ è la risultante delle forze agenti sul corpo.

5.2.25.3 Terzo principio di Newton

Se un corpo 1 esercita su un corpo 2 una forza $\vec{F}_{2,1}$, allora il corpo 2 esercita sul corpo 1 una forza uguale e contraria:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Queste forze sono dirette lungo la congiungente dei due corpi, quindi parallele al vettore $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

5.3 Riferimenti inerziali e principio di relatività

5.3.1 Sistemi di riferimento reali

Un sistema di riferimento, in modo astratto, è una terna di assi cartesiani ortogonali con origine O. Per misurare realmente il moto, però, bisogna costruire un riferimento con oggetti fisici (asta, parete, laser, ecc.). Un riferimento reale è quindi un corpo fisico e può muoversi.

Il moto osservato di un corpo dipende dal riferimento scelto. Ad esempio, un oggetto fermo in un treno appare fermo nel riferimento solidale al treno, ma risulta in moto nel riferimento solidale al terreno.

Non esiste un significato assoluto di "fermo": un riferimento può essere fermo solo rispetto a un altro riferimento. Per questo motivo si introduce una classe di riferimenti privilegiati, detti **riferimenti inerziali**.

5.3.2 Sistemi di riferimento inerziali

Un riferimento è detto **inerziale** se in esso vale il principio d'inerzia: un corpo isolato (non interagente) si muove di moto rettilineo uniforme oppure resta fermo.

In un riferimento **non inerziale**, invece, corpi isolati mostrano accelerazioni senza una causa evidente. Inoltre, corpi isolati e anche lontani tra loro possono mostrare la stessa accelerazione, rendendo il moto "sincronizzato" pur senza interazioni.

Esempi di riferimenti non inerziali:

- un treno che accelera o frena;
- un sistema solidale con una giostra.

5.3.3 Il riferimento del Sole e delle stelle fisse

Un riferimento solidale con la Terra è una buona approssimazione di riferimento inerziale per moti di breve durata e su distanze ridotte, perché gli effetti non inerziali sono piccoli.

Per moti di grande estensione (stelle, pianeti), si osserva invece un moto apparente sincronizzato, che rivela che la Terra non è un riferimento inerziale perfetto a causa della rotazione e della rivoluzione.

Una migliore approssimazione di riferimento inerziale è un sistema con origine nel Sole (più precisamente nel centro di massa del sistema solare) e assi orientati verso stelle lontane (dette "stelle fisse"). In tale riferimento, un corpo isolato risulta con ottima approssimazione in moto rettilineo uniforme.

5.3.4 Riferimenti inerziali e principio d'inerzia

Dato un riferimento inerziale S, un altro riferimento S' è inerziale se si muove rispetto a S con moto **traslatorio uniforme** e senza rotazioni.

Le condizioni sono:

- l'origine O' di S' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a S (assenza di accelerazione);
- gli assi x', y', z' restano paralleli a x, y, z oppure inclinati di angoli costanti (assenza di rotazione).

Un treno che accelera non soddisfa la prima condizione. Una giostra o la Terra non soddisfano la seconda condizione.

Il contenuto fisico del principio d'inerzia è il fatto sperimentale che **esistono** riferimenti in cui esso vale, ossia esistono riferimenti inerziali.

5.3.5 Principio di relatività

Tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i riferimenti inerziali. Questo è il **principio di relatività**:

> le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Questo principio vale per le leggi generali della fisica, non per le leggi orarie specifiche di un moto, che cambiano in base al riferimento.

In meccanica classica, gli effetti relativistici sono trascurabili finché le velocità sono molto minori della velocità della luce:

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

5.3.6 Massa e accelerazione

La forma:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{tot}}}{m}$$

può suggerire che l'accelerazione sia sempre inversamente proporzionale alla massa. In realtà:

- per molte interazioni (non gravitazionali) l'accelerazione dipende dalla massa in questo modo;
- per l'interazione gravitazionale, l'accelerazione è indipendente dalla massa del corpo soggetto alla forza.

In termini di leggi di forza, questo significa che in generale la forza non dipende dalle masse dei corpi, con l'eccezione della forza gravitazionale, che è proporzionale a entrambe le masse dei corpi interagenti.

5.3.7 Azione e reazione: ulteriori considerazioni

Il principio di azione e reazione afferma che le forze scambiate tra due corpi interagenti sono uguali e opposte e sono dirette lungo la congiungente.

Un punto fondamentale è che le due forze non agiscono mai sullo stesso corpo: azione e reazione sono sempre applicate a corpi diversi.

Per identificare la reazione a una forza bisogna individuare il corpo sorgente della forza.

Esempi:

- spinta su un oggetto: l'oggetto esercita una forza opposta su chi spinge;
- rinculo di un'arma: il proiettile esercita una forza opposta sull'arma;
- forza peso: la Terra attrae il corpo, e il corpo attrae la Terra con forza uguale e opposta.

5.4 Sistemi di riferimento in moto: forze apparenti

5.4.1 Sistemi di riferimento in moto

Un sistema di riferimento reale è realizzato tramite oggetti fisici, quindi può essere in moto. Esiste una classe privilegiata di riferimenti in cui i principi della dinamica valgono nella forma standard: i **riferimenti inerziali**.

Tuttavia, in molte situazioni è conveniente usare riferimenti **non inerziali**. Di fatto, qualunque riferimento "pratico" può essere non inerziale: ad esempio un riferimento solidale con la Terra, a causa della rotazione terrestre e della rivoluzione attorno al Sole.

La non inerzialità è spesso trascurabile per moti brevi e di piccola estensione, ma diventa importante per moti di grande estensione o quando serve alta precisione.

In questa unità vediamo:

- come si descrive il moto passando da un riferimento S a un riferimento S' in moto;
- come si modificano le equazioni della dinamica in un riferimento non inerziale tramite **forze apparenti**.

5.4.2 Posizione relativa

Consideriamo un punto materiale P osservato da due riferimenti tridimensionali S e S'. Indichiamo con:

$$\vec{r}(t) \quad \text{la posizione di } P \text{ in } S, \qquad \vec{r}\,'(t) \quad \text{la posizione di } P \text{ in } S',$$

e con:

$$\vec{r}_{O'}(t) \quad \text{la posizione dell'origine } O' \text{ di } S' \text{ vista da } S.$$

La relazione vettoriale fondamentale è:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_{O'}(t) + \vec{r}\,'(t)}$$

In generale **questa relazione non vale componente per componente** se S' ruota rispetto a S, perché gli assi non restano paralleli.

5.4.3 Moti relativi: caso puramente traslatorio

Nel caso più semplice, S' si muove rispetto a S con **sola traslazione** e gli assi restano sempre paralleli. Allora la relazione precedente vale anche per le componenti e derivando nel tempo si ottiene:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_{O'}(t) + \vec{v}\,'(t)}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_{O'}(t) + \vec{a}\,'(t)}$$

dove:

- $\vec{v}_{O'}$ è la **velocità di trascinamento** (traslazione di S');
- $\vec{a}_{O'}$ è l'**accelerazione di trascinamento**.

5.4.4 Forze apparenti nel caso traslatorio

Supponiamo che S sia inerziale e che S' sia in moto traslatorio accelerato rispetto a S (quindi S' è non inerziale).

Nel riferimento inerziale S vale:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{tot}}$$

Usando $\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}\,'$ e portando $m\vec{a}_{O'}$ a secondo membro:

$$m\vec{a}\,' = \vec{F}_{\text{tot}} - m\vec{a}_{O'}$$

Si introduce quindi la **forza apparente**:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{app}} = -m\vec{a}_{O'}}$$

e si può riscrivere:

$$\boxed{m\vec{a}\,' = \vec{F}_{\text{tot}} + \vec{F}_{\text{app}}}$$

La forza apparente non deriva da un'interazione reale con un altro corpo e non soddisfa il terzo principio.

Esempi tipici

- **Treno che accelera/frena:** se il treno accelera, gli oggetti sembrano spinti indietro; se frena, sembrano spinti in avanti.
- **Ascensore:** se accelera verso l'alto con accelerazione a_A, compare una forza apparente verso il basso e il "peso apparente" aumenta.

5.4.5 Moti relativi: caso generale (traslazione + rotazione)

Se S' ruota rispetto a S, gli assi non restano paralleli e la descrizione è più complessa. Si introduce la velocità angolare vettoriale $\vec{\omega}$, diretta lungo l'asse di rotazione (secondo la regola della mano destra).

Una relazione fondamentale per la variazione di un versore $\vec{u}$ solidale con S' è:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}}$$

Derivando correttamente la relazione tra posizioni si ottiene il:

$$\boxed{\text{Teorema delle velocità relative: } \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}\,'}$$

Nel caso generale la **velocità di trascinamento** è:

$$\boxed{\vec{v}_T = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'}$$

5.4.6 Teorema delle accelerazioni relative (risultato)

Nel caso generale vale:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C + \vec{a}\,'}$$

dove:

$$\boxed{\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}$$

è l'**accelerazione di Coriolis**, mentre l'**accelerazione di trascinamento** è:

$$\boxed{\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'}$$

Il termine $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$ è legato alla componente centripeta del moto circolare, mentre $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$ compare se la rotazione non è uniforme.

5.4.7 Forze apparenti nel caso generale

Se S è inerziale e S' è non inerziale (traslazione + rotazione), il 2° principio in S' mantiene la forma standard solo aggiungendo forze apparenti.

$$m\vec{a}\,' = \vec{F}_{\text{reali}} + \vec{F}_{\text{app}}$$

Le principali forze apparenti sono:

Forza apparente da traslazione

$$\boxed{\vec{F}_{\text{tras}} = -m\vec{a}_{O'}}$$

Forza centrifuga

$$\boxed{\vec{F}_{\text{cf}} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}$$

Attenzione: non è l'accelerazione centripeta, ma l'opposto (moltiplicato per m).

Forza apparente da rotazione variabile (Euler)

$$\boxed{\vec{F}_{\text{E}} = -m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'}$$

Forza di Coriolis

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}$$

5.4.8 Esempi e casi fisici importanti

- **Auto in curva:** nel riferimento solidale con l'auto compare una forza centrifuga verso l'esterno.

- **Giostra:** forza centrifuga verso l'esterno; se la rotazione cambia nel tempo compare anche la forza di Euler; se ci si muove sulla giostra compare anche la forza di Coriolis.

- **Terra:** nel riferimento terrestre compaiono effetti centrifughi e di Coriolis. La Coriolis devia i moti verso destra nell'emisfero boreale e verso sinistra nell'emisfero australe.

Capitolo 6 — Quantità di moto e momento angolare

6.1 Altre leggi di conservazione

L'energia non è l'unica grandezza che può conservarsi nel tempo. In questo capitolo introduciamo due grandezze fisiche con leggi di conservazione **non ovvie** e con validità molto generale:

- **Quantità di moto** (momentum) $\vec{p}$;
- **Momento angolare** $\vec{L}$.

6.2 Quantità di moto

6.2.1 Definizione

Per un punto materiale di massa m e velocità $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Unità di misura: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$.

6.2.2 Secondo principio di Newton (forma generale)

Poiché m è costante, dal 2° principio segue:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Questa è la forma più generale e utile: collega direttamente le forze alla variazione di quantità di moto.

6.2.3 Impulso e variazione della quantità di moto

Integrando nel tempo tra t_1 e t_2:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \vec{I}(t_1, t_2)$$

dove

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt$$

è l'**impulso** (unità: $\mathrm{N\,s} = \mathrm{kg\,m/s}$).

6.2.4 Conservazione della quantità di moto (caso singolo corpo)

Per un punto materiale **isolato** (nessuna forza):

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{costante}$$

Osservazione utile: se le forze agiscono solo lungo una direzione, allora le componenti di $\vec{p}$ nelle direzioni ortogonali restano costanti (esempio: moto balistico, componente orizzontale).

6.3 Momento angolare

6.3.1 Definizione (rispetto all'origine)

Il momento angolare di un punto materiale è:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Unità di misura: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

6.3.2 Definizione rispetto a un polo O

Se si sceglie un polo O (non necessariamente l'origine), con vettore posizione $\vec{r}_O$:

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{p}$$

6.4 Teorema del momento angolare

6.4.1 Derivata temporale

Vale il risultato:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

dove $\vec{M}$ è il **momento meccanico** (momento della forza, momento torcente, coppia):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(oppure, rispetto al polo O: $\vec{M} = (\vec{r} - \vec{r}_O) \times \vec{F}$).

6.4.2 Nota sulle unità

$\vec{M}$ ha unità $\mathrm{N\,m}$. Formalmente coincide con il joule, ma **non** si usa J perché J è riservato all'energia.

6.5 Conservazione del momento angolare

6.5.1 Condizione di conservazione

Dal teorema:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

segue che $\vec{L}$ è costante se:

$$\vec{M} = \vec{0}$$

6.5.2 Forze centrali

Un caso molto importante (non banale) è quando $\vec{F}$ è sempre parallela a $\vec{r}$ (forza **centrale**). In tal caso:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{costante}$$

Esempio: gravitazione con sorgente fissa (pianeti intorno al Sole, satelliti intorno alla Terra), dove il polo per definire $\vec{L}$ va scelto nel punto sorgente.

6.6 Riepilogo

- **Energia meccanica** $E = K + U$ conservata se agiscono solo **forze conservative**.
- **Quantità di moto** $\vec{p}$ conservata se il corpo è **isolato** (o per singole componenti se le forze hanno direzione nota).
- **Momento angolare** $\vec{L}$ conservato se il corpo è isolato oppure soggetto solo a **forze centrali**.

6.7 Formule essenziali (da sapere usare)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} \qquad \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \vec{I}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{costante} \qquad (\text{forza centrale: } \vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{M} = \vec{0})$$

Capitolo 7 — Lavoro ed energia

7.1 Leggi di conservazione e grandezze invarianti nel tempo

Nella dinamica (principi di Newton) si può prevedere il moto conoscendo forze e condizioni iniziali. Esiste però un'altra classe di leggi, dette **leggi di conservazione**, che introducono grandezze calcolabili a partire da **posizioni e velocità** e che possono restare **costanti nel tempo** (invarianti) durante il moto.

Le leggi di conservazione sono utili perché permettono di ottenere informazioni sul moto **senza risolverlo completamente** (offrono spesso una "scorciatoia" nei problemi).

7.2 Energia come grandezza conservata

In diversi sistemi meccanici compare una grandezza conservata chiamata **energia**.

7.2.1 Moto balistico (solo forza peso)

Per un punto materiale soggetto alla sola forza peso, una grandezza invariante è:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + mgy$$

Il valore di E è fissato dalle condizioni iniziali (ad esempio v_{x0}, v_{y0}, y_0) e resta costante nel tempo.

7.2.2 Pendolo semplice

Per un pendolo (massa m, filo inestensibile di lunghezza l) vale ancora:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Usando $v = l\dot{\theta}$ e $y = l(1 - \cos\theta)$ si ottiene una forma equivalente:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

Se il pendolo parte da fermo con angolo iniziale θ_0, allora

$$E = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

e nel punto più basso ($\theta = 0$) si ricava la velocità angolare massima:

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos\theta_0)}{l}}$$

7.2.3 Sistema massa–molla (orizzontale)

Per una massa collegata a una molla (costante elastica k), una grandezza invariante è:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

7.3 Energia cinetica

In tutti gli esempi precedenti compare un termine sempre uguale, dipendente dalla velocità:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K è detta **energia cinetica** (energia associata al moto) e si annulla se $v = 0$.

7.3.1 Unità di misura: joule

Nel SI l'energia si misura in **joule**:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = 1\,\mathrm{N\,m}$$

7.4 Teorema dell'energia cinetica

Quando una forza agisce su un corpo, in generale cambia v e quindi cambia K. Il risultato fondamentale è:

$$\Delta K = K_B - K_A = W_{\mathrm{tot}}$$

dove W_{tot} è il **lavoro** compiuto dalla risultante delle forze nello spostamento da A a B.

7.5 Lavoro

7.5.1 Definizione generale

Il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ lungo una traiettoria γ da A a B è:

$$W_{A\to B} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Questo integrale è un **integrale di linea** (qui lo usiamo come formula operativa; la teoria completa si può lasciare come cenno).

7.5.2 Lavoro di una forza costante

Se $\vec{F}$ è costante, si può portare fuori dall'integrale e si ottiene:

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = Fs\cos\theta$$

dove θ è l'angolo tra forza e spostamento.

7.5.3 Segno del lavoro

- $W > 0$ (**lavoro motore**): la forza ha una componente concorde allo spostamento.
- $W < 0$ (**lavoro resistente**): la forza ha una componente opposta allo spostamento.
- $W = 0$: forza sempre perpendicolare allo spostamento (tipico esempio: reazione normale su vincolo liscio).

7.5.4 Additività del lavoro

7.5.4.1 Tratti successivi di traiettoria

Se il moto va da A a B e poi da B a C:

$$W_{A\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C}$$

7.5.4.2 Più forze contemporanee

Se agiscono più forze $\vec{F}_i$, la risultante è $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$ e vale:

$$W_{\text{tot}} = \int_\gamma \vec{F}_{\text{tot}} \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_\gamma \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i W_i$$

7.6 Potenza

La **potenza** è lavoro (o variazione di energia) per unità di tempo:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Per un punto materiale:

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unità di misura: **watt** (W),

$$1\,\text{W} = 1\,\text{J/s}$$

7.7 Formule essenziali (da sapere usare)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad W_{A\to B} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (\text{se } \vec{F} \text{ costante})\ W = Fs\cos\theta$$

$$\Delta K = W_{\text{tot}} \qquad \mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

7.8 Note di adattamento alle slide

- I dettagli su **lavoro di peso, attrito, molla** li useremo soprattutto quando parleremo di **energia potenziale e conservazione dell'energia**.
- Gli esercizi "piano inclinato, attrito, molla" restano utili, ma li conviene mettere dopo la parte su **energia potenziale** se la prof li tratta come applicazioni della conservazione dell'energia.

Capitolo 8 — Conservazione dell'energia

8.1 Forze conservative

Nel calcolare il lavoro, è utile distinguere tra **forze conservative** e **forze non conservative**.

Una forza $\vec{F}$ si dice **conservativa** se vale una delle seguenti proprietà (equivalenti):

- **Indipendenza dal percorso:** il lavoro tra due punti A e B dipende solo da A e B e non dalla traiettoria $\gamma(A, B)$:

$$W_{\gamma(A,B)} = W_{A \to B}$$

- **Circuitazione nulla:** il lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo:

$$W_{\text{ciclo}} = 0$$

8.1.1 Osservazione sul verso del percorso

Invertendo il verso di percorrenza, il lavoro cambia segno:

$$W_{A \to B} = -W_{B \to A}$$

(questa proprietà vale anche per forze che dipendono solo dalla posizione).

8.2 Energia potenziale

8.2.1 Definizione

Data una forza conservativa, si può definire una funzione scalare $U(\vec{r})$ detta **energia potenziale**.

Per definirla occorre scegliere un punto di riferimento O e fissare arbitrariamente $U(O)$ (ad esempio $U(O) = 0$). Per un punto generico P si definisce:

$$U(P) = W_{P \to O} + U(O)$$

dove $W_{P \to O}$ è il lavoro della forza conservativa nello spostamento da P a O.

8.2.2 Definizione equivalente (con forza esterna)

Se una forza esterna $\vec{F}_{ext}$ sposta lentamente il corpo da O a P (con corpo fermo all'inizio e alla fine), il lavoro esterno risulta uguale e opposto a quello della forza conservativa, quindi:

$$U(P) = W_{ext,\, O \to P} + U(O)$$

8.3 Lavoro e energia potenziale

Per una forza conservativa, il lavoro tra due punti A e B è:

$$W_{A\to B} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

dove $\Delta U = U(B) - U(A)$.

8.4 Significato fisico dell'energia potenziale

L'energia potenziale è una forma di energia associata alla **posizione** del corpo (e in realtà all'interazione tra corpi). Può trasformarsi in energia cinetica e viceversa.

Se agiscono più forze conservative, l'energia potenziale totale è additiva:

$$U_{tot}(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) + \dots$$

8.5 Forza ricavata dall'energia potenziale (cenno)

Se $U = U(x, y, z)$, le componenti della forza conservativa si ottengono da:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

In forma compatta:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

(*in questo corso si usa soprattutto come idea, senza esercizi pesanti di calcolo*).

8.6 Energia meccanica e conservazione

Consideriamo un corpo su cui agiscono **solo forze conservative**. Dal teorema dell'energia cinetica:

$$W_{tot} = \Delta K$$

ma per forze conservative:

$$W_{tot} = -\Delta U$$

quindi:

$$\Delta K = -\Delta U$$

Portando i termini a sinistra:

$$K(A) + U(A) = K(B) + U(B)$$

8.6.1 Energia meccanica

Si definisce **energia meccanica**:

$$E = K + U$$

Se agiscono solo forze conservative, allora:

$$E = \text{costante}$$

8.7 Variazione dell'energia meccanica (forze non conservative)

Se oltre alle forze conservative agiscono anche forze **non conservative** (attriti, resistenze, ecc.), vale la relazione generale:

$$\Delta E = W_{NC}$$

cioè:

$$E_B - E_A = W_{NC,\,A \to B}$$

In particolare, se le forze non conservative sono dissipative (attrito), allora $W_{NC} < 0$ e l'energia meccanica diminuisce.

8.8 Energie potenziali di forze comuni

8.8.1 Forza peso (campo uniforme vicino alla Terra)

Scegliendo asse y verso l'alto e $U(0) = 0$:

$$U_g = mgy$$

e quindi:

$$W_P = -\Delta U_g$$

8.8.2 Forza elastica (molla ideale)

Ponendo l'origine nel punto di equilibrio della molla:

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

(se l'origine non coincide con l'equilibrio: $U_{el} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$).

8.8.3 Reazione normale e tensione (vincoli ideali)

Per un singolo corpo su vincolo ideale, queste forze sono perpendicolari allo spostamento possibile, quindi compiono lavoro nullo:

$$W_N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad U_N = 0$$

8.9 Esempio di forza non conservativa: attrito radente

L'attrito dinamico ha modulo $f_d = \mu_d N$ ed è opposto al moto. Il lavoro lungo una traiettoria di lunghezza s è:

$$W_{attr} = -\mu_d N\, s$$

Dipende dalla lunghezza del percorso, quindi è **non conservativo** e dissipativo.

8.10 Conservazione dell'energia: validità universale

A livello macroscopico, con attriti, l'energia meccanica non si conserva. Tuttavia, l'energia totale si conserva comunque: l'energia "persa" si trasforma in energia interna (calore). Questo diventerà centrale nella termodinamica.

8.11 Formule essenziali (da sapere usare)

$$W_{cons} = -\Delta U \qquad E = K + U \qquad \text{(solo conservative)}\;\; E = \text{costante}$$

$$\Delta E = W_{NC} \qquad U_g = mgy \qquad U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

8.12 Esercizi tipo esame

Esercizio 1 — Caduta libera (senza attrito)

Dati: altezza h, velocità iniziale nulla.
Idea: solo forze conservative $\Rightarrow$ E costante.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gh}$$

Esercizio 2 — Salita senza attrito (altezza massima)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Esercizio 3 — Molla su piano senza attrito

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_{max} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esercizio 4 — Attrito (energia meccanica non conservata)

$$E_B - E_A = W_{attr} \qquad \text{con} \qquad W_{attr} = -\mu_d N s$$

Capitolo 9 — Dinamica dei sistemi di punti materiali

9.1 Concetti fondamentali

In questo capitolo si passa dalla dinamica del singolo punto materiale alla dinamica di un **sistema di più punti materiali**. Quando un corpo non può essere considerato puntiforme, lo si schematizza come un insieme di punti materiali. L'idea principale è separare:

- il **moto complessivo** del sistema (tramite il **centro di massa**);
- il **moto relativo interno** dei punti rispetto al centro di massa.

9.2 Sistema di punti materiali: forze interne ed esterne

Consideriamo un sistema di N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$, con masse m_i, posizione $\vec{r}_i(t)$, velocità $\vec{v}_i(t)$ e accelerazione $\vec{a}_i(t)$. Per ciascun punto materiale, la risultante delle forze si può scomporre in:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(\text{int})} + \vec{F}_i^{(\text{ext})}$$

dove:

- $\vec{F}_i^{(\text{int})}$ è la risultante delle **forze interne** (dovute agli altri punti del sistema);
- $\vec{F}_i^{(\text{ext})}$ è la risultante delle **forze esterne** (dovute a corpi esterni al sistema).

Le forze interne possono essere scritte come:

$$\vec{F}_i^{(\text{int})} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{i,j}$$

dove $\vec{F}_{i,j}$ è la forza che P_j esercita su P_i.

9.3 Centro di massa e teorema del centro di massa

9.3.1 Definizione di centro di massa

Per un sistema di N punti materiali con masse m_i e posizioni $\vec{r}_i$:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad \text{con} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Il centro di massa rappresenta una **posizione media pesata** del sistema.

9.3.2 Velocità e accelerazione del centro di massa

Derivando nel tempo:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

9.3.3 Teorema del centro di massa (I equazione cardinale)

Per ciascun punto materiale vale il 2º principio di Newton:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{(\mathrm{int})} + \vec{F}_i^{(\mathrm{ext})}$$

Sommando per $i = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\mathrm{int})} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\mathrm{ext})}$$

Le forze interne si annullano a coppie per azione e reazione:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\mathrm{int})} = 0$$

Quindi si ottiene:

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\mathrm{ext})}$$

Indicando con $\vec{F}_{\mathrm{ext,tot}}$ la risultante di tutte le forze esterne sul sistema:

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\mathrm{ext,tot}}}$$

Questo significa che il centro di massa si muove come se tutta la massa fosse concentrata in esso e agissero solo le forze esterne.

9.3.4 Sistema isolato

Se il sistema è isolato:

$$\vec{F}_{\mathrm{ext,tot}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{CM} = \text{costante}$$

Il centro di massa resta fermo se inizialmente fermo, oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

9.4 Proprietà globali additive del sistema

Alcune grandezze fisiche sono **additive**, cioè la loro somma su tutti i punti materiali ha significato fisico.

9.4.1 Quantità di moto totale

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

Dalla definizione di $\vec{V}_{CM}$ segue anche:

$$\boxed{\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{V}_{CM}}$$

9.4.2 Momento angolare totale

Rispetto a un polo O:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

9.4.3 Energia cinetica totale

$$K_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

9.5 Teoremi di König

9.5.1 Riferimento solidale con il centro di massa

Introduciamo un riferimento S' con origine nel centro di massa, con assi sempre paralleli a quelli del riferimento inerziale S. Per ogni punto materiale:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$$

Derivando:

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i'$$

Si ottengono le identità:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = 0$$

9.5.2 Primo teorema di König (momento angolare)

Il momento angolare totale si scompone in:

$$\boxed{\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'}$$

dove:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i')$$

9.5.3 Secondo teorema di König (energia cinetica)

L'energia cinetica totale si scompone in:

$$\boxed{K_{\text{tot}} = K_{CM} + K'}$$

dove:

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

9.6 Cenno agli urti

9.6.1 Classificazione (base)

- **Urto elastico**: si conserva la quantità di moto e anche l'energia cinetica totale.
- **Urto anelastico**: si conserva la quantità di moto ma **non** l'energia cinetica.
- **Urto completamente anelastico**: i corpi rimangono attaccati dopo l'urto.

9.6.2 Formula tipica (urto completamente anelastico in 1D)

$$(m_1 + m_2) v_f = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

9.7 Momento delle forze e seconda equazione cardinale

9.7.1 Momento di una forza (torque)

Il momento della forza $\vec{F}$ rispetto a un polo O è:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Per il sistema:

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{\text{ext},i}$$

9.7.2 Seconda equazione cardinale

La variazione del momento angolare totale dipende dai momenti delle forze esterne:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{ext}}}$$

9.7.3 Conservazione del momento angolare

Se il momento totale delle forze esterne è nullo:

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{\text{tot}} = \text{costante}$$

9.8 Errori comuni

- Applicare la conservazione di $\vec{P}$ anche quando sono presenti forze esterne non trascurabili.
- Confondere K_{tot} con K_{CM} (teorema di König).
- Usare la conservazione del momento angolare senza controllare $\vec{\tau}_{\text{ext}}$.
- Dimenticare che quantità di moto e momento angolare sono **vettori**.

9.9 Equazioni cardinali e leggi di conservazione

9.9.1 Teorema della variazione della quantità di moto (I equazione cardinale)

Dalla relazione

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{V}_{CM}$$

derivando rispetto al tempo e usando il teorema del centro di massa $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{ext,tot}}$ si ottiene:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext,tot}}}$$

Questa è una forma equivalente della I equazione cardinale, scritta in termini di quantità di moto.

9.9.2 Legge di conservazione della quantità di moto

Se il sistema è isolato (oppure la risultante delle forze esterne è nulla):

$$\vec{F}_{\text{ext,tot}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P}_{\text{tot}} = \text{costante}}$$

Questa legge è equivalente al fatto che il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme.

9.9.3 Esempio: propulsione a reazione (razzo) — idea base

Un sistema isolato non può "spingersi da solo" se non scambia quantità di moto con l'esterno. Un razzo accelera espellendo massa (gas) all'indietro: anche se la quantità di moto totale resta costante, la parte "astronave" può acquistare velocità in verso opposto a quella del gas espulso.

Nel caso semplice in cui una massa m_{gas} venga espulsa con velocità (assoluta) $\vec{v}_{\text{gas}}$, la parte restante dell'astronave (massa m_{astro}) acquista una velocità tale che:

$$m_{\text{astro}}\vec{v}_{\text{astro}} + m_{\text{gas}}\vec{v}_{\text{gas}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{\text{astro}} = -\frac{m_{\text{gas}}}{m_{\text{astro}}}\,\vec{v}_{\text{gas}}}$$

(se inizialmente il sistema era fermo e isolato).

9.9.4 Approfondimento: equazione del razzo ideale (Tsiolkovsky) — cenno

Nella propulsione prolungata, la massa del razzo $m(t)$ diminuisce nel tempo e la velocità di espulsione del gas è circa costante **rispetto al razzo**, indicata con Δv. Il risultato finale (senza dimostrazione) è:

$$\boxed{v_f - v_i = \Delta v\,\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)}$$

dove m_i è la massa iniziale e m_f la massa finale.

9.9.5 Approfondimento: sistema di due corpi e massa ridotta

Per due punti materiali che interagiscono solo tra loro (1 e 2):

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12}, \qquad m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Definendo la coordinata relativa $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e l'accelerazione relativa $\vec{a}_{12} = \ddot{\vec{r}}_{12}$, si ottiene un'equazione equivalente al moto di **un solo corpo** di massa ridotta:

$$\boxed{\mu\,\vec{a}_{12} = \vec{F}_{12}} \qquad \text{con} \qquad \boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

Una volta trovata $\vec{r}_{12}(t)$, le posizioni dei due corpi si ricavano da:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r}_{12}(t), \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r}_{12}(t)$$

9.9.6 Teorema del momento angolare (II equazione cardinale)

Il momento angolare totale rispetto all'origine O (o un polo fisso) è:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Derivando nel tempo e separando forze interne ed esterne, in condizioni standard le forze interne non contribuiscono al momento totale (coppie azione–reazione con forze centrali lungo la congiungente), e si ottiene:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{M}_{\text{ext}}} \qquad \text{con} \qquad \vec{M}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\text{ext})}$$

dove $\vec{M}_{\text{ext}}$ è il **momento meccanico totale delle forze esterne**.

9.9.7 II equazione cardinale con polo mobile (cenno)

Se si calcola il momento angolare rispetto a un polo O in moto con velocità $\vec{v}_O$, vale (forma utile come promemoria):

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(\text{ext})} - \vec{v}_O \times (M\vec{V}_{CM})}$$

Il termine aggiuntivo si annulla, ad esempio, se:

- il polo O è fermo;
- O coincide con il centro di massa;
- O si muove parallelamente al centro di massa.

9.9.8 Legge di conservazione del momento angolare

Se il momento totale delle forze esterne (rispetto al polo scelto) è nullo:

$$\vec{M}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_{\text{tot}} = \text{costante}}$$

Questo accade in particolare:

- per un sistema isolato;
- se le forze esterne sono **centrali** rispetto a un punto O (tutte dirette lungo $\vec{r} - \vec{r}_O$), scegliendo O come polo;
- se tutte le forze esterne agiscono in un singolo punto e si sceglie quel punto come polo.

9.9.9 Lavoro ed energia per un sistema di punti

Per ogni punto P_i, il lavoro infinitesimo è:

$$\delta L_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(\text{int})} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(\text{ext})} \cdot d\vec{r}_i$$

Sommando su tutti i punti:

$$\boxed{\delta L_{\text{tot}} = \delta L_{\text{int}} + \delta L_{\text{ext}}}$$

La variazione dell'energia cinetica totale è data da:

$$\boxed{\Delta K_{\text{tot}} = L_{\text{int}} + L_{\text{ext}}}$$

quindi, a differenza di quantità di moto e momento angolare, **l'energia cinetica totale in generale dipende anche dal lavoro delle forze interne**.

9.9.10 Energia potenziale ed energia totale (forze conservative)

Se le forze esterne sono conservative, si può introdurre un'energia potenziale esterna totale additiva sui punti:

$$U_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} U_i^{(\text{ext})}(\vec{r}_i)$$

Per forze interne conservative si introduce un'energia potenziale d'interazione additiva sulle **coppie**:

$$U_{\text{int}} = \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_{ij}) \qquad \text{con} \qquad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

Si definisce allora l'energia meccanica totale del sistema:

$$\boxed{E_{\text{tot}} = K_{\text{tot}} + U_{\text{int}} + U_{\text{ext}}}$$

Se tutte le forze interne ed esterne sono conservative:

$$\boxed{E_{\text{tot}} = \text{costante}}$$

9.9.11 Nota: additività dell'energia

L'energia non è in generale additiva come massa o quantità di moto, perché l'energia potenziale interna è una somma su **coppie** e unendo due sistemi compare in generale un termine di interazione tra i due. Per corpi macroscopici con interazioni a corto raggio, spesso l'energia è comunque additiva con buona approssimazione.

Capitolo 10 — Dinamica dei corpi rigidi

10.1 Dinamica dei corpi rigidi

10.1.1 Traslazione e rotazione

10.1.1.1 Corpi solidi e corpi rigidi

In questa parte studiamo il moto dei **solidi**. Un solido è un corpo che, grazie alle forze interne, tende a mantenere una **forma costante**, cioè:

- le **distanze** tra le sue parti restano costanti;
- di conseguenza restano costanti anche gli **angoli** interni.

In realtà, sotto l'azione di **forze esterne** un solido può deformarsi (sviluppando forze elastiche interne). Tuttavia, per molti materiali queste deformazioni sono **piccole** se le forze non sono troppo intense: in tal caso il solido può essere trattato come **corpo rigido ideale**, ossia:

> *un corpo perfettamente indeformabile, con distanze tra i punti materiali rigorosamente costanti.*

Questa è un'idealizzazione: una descrizione completa dovrebbe includere deformazioni elastiche e plastiche. Nel corso tali effetti non vengono trattati, salvo il caso idealizzato delle **molle** (legge di Hooke).

10.1.1.2 Movimento dei corpi rigidi: traslazioni e rotazioni

Per un corpo rigido ideale, gli unici moti possibili sono:

- **traslazione rigida**;
- **rotazione rigida**;
- **rototraslazione** (combinazione dei due).

10.1.1.3 Moto traslatorio dei corpi rigidi (I equazione cardinale)

Le traslazioni di un corpo rigido si descrivono in modo naturale tramite il moto del suo **centro di massa**. L'equazione fondamentale è la **I equazione cardinale** (II principio di Newton applicato al corpo intero):

$$\boxed{M_{\text{tot}}\,\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{tot}}}$$

dove M_{tot} è la massa totale del corpo e $\vec{F}_{\text{tot}}$ è la risultante delle forze esterne.

Se il corpo compie una **pura traslazione** (senza ruotare), il moto è equivalente a quello di un **punto materiale**. Se invece è presente anche rotazione, i due moti possono risultare **accoppiati**.

10.1.1.4 Moto rotatorio: descrizione (asse fisso)

Una rotazione arbitraria in 3D può essere descritta tramite tre angoli (angoli di Eulero). In questa parte ci limitiamo a rotazioni attorno a un **asse fisso** (bloccato da vincoli esterni, come perni o giunti).

In una rotazione attorno ad asse fisso, il moto è una **pura rotazione** (le traslazioni sono bloccate). La configurazione è descritta da un solo angolo $\theta(t)$.

$$\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}} \qquad \boxed{\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

È utile introdurre anche la **velocità angolare vettoriale** $\vec{\omega}(t)$:

- direzione: lungo l'asse di rotazione;
- verso: tale che la rotazione appaia **antioraria** osservando dal lato verso cui punta $\vec{\omega}$;
- modulo: $|\vec{\omega}| = \omega$.

10.1.1.5 Moto rotatorio: velocità dei punti del corpo

Consideriamo un asse fisso di rotazione z e un punto materiale P del corpo, con vettore posizione $\vec{r}$ rispetto a un punto O sull'asse. Per un corpo rigido il modulo $|\vec{r}|$ resta costante.

Il punto P compie un moto circolare attorno all'asse z con raggio pari alla distanza dall'asse:

$$\boxed{r_\perp = r \sin\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

dove γ è l'angolo tra $\vec{r}$ e l'asse z.

La velocità scalare vale:

$$\boxed{v = \omega r_\perp}$$

La relazione vettoriale fondamentale per la velocità di un punto in rotazione è:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

10.1.1.6 Velocità angolare e momento angolare: definizione di momento d'inerzia

Il momento angolare del punto P_i di massa m_i è:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

Nel caso di rotazione attorno all'asse fisso z, risulta che la componente lungo l'asse z è proporzionale a ω:

$$\boxed{L_{z,\text{tot}} = I_z\, \omega}$$

dove I_z è il **momento d'inerzia** del corpo rispetto all'asse z. Per un sistema discreto di punti materiali:

$$\boxed{I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \, r_{\perp i}^2}$$

10.1.1.7 Equazione del moto rotatorio (II equazione cardinale)

La **II equazione cardinale** per la componente lungo l'asse z è:

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = M_z}$$

Sostituendo $L_z = I_z\omega$ (con I_z costante per un asse fisso) si ottiene:

$$\boxed{I_z \, \alpha = M_z}$$

Questa è l'equazione fondamentale del moto rotatorio attorno a un asse fisso.

10.1.1.8 Energia cinetica rotazionale

L'energia cinetica totale di un corpo rigido in rotazione attorno all'asse z è:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

10.1.1.9 Lavoro in rotazione e potenza

Per un corpo rigido, il **lavoro totale delle forze interne** è nullo, poiché le distanze tra i punti materiali restano costanti. Quindi le variazioni energetiche dipendono solo dalle **forze esterne**.

Per una rotazione infinitesima $d\theta$ il lavoro delle forze esterne vale:

$$\boxed{\delta L = M_z \, d\theta}$$

Per una rotazione da θ_A a θ_B:

$$\boxed{L = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M_z(\theta) \, d\theta}$$

La potenza è:

$$\boxed{\mathcal{P} = M_z \, \omega}$$

10.1.1.10 Analogia tra traslazioni e rotazioni

Esiste una forte analogia tra traslazioni 1D e rotazioni attorno ad un asse fisso z:

Traslazione (1D)	**Rotazione (asse z)**
$x(t)$	$\theta(t)$
$v = \dot{x}$	$\omega = \dot{\theta}$
$a = \dot{v} = \ddot{x}$	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
m	I_z
F	M_z
$ma = F$	$I_z\alpha = M_z$
$p = mv$	$L_z = I_z\omega$
$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_k = \frac{1}{2}I_z\omega^2$
$L = \int F\,dx$	$L = \int M_z\,d\theta$
$\mathcal{P} = Fv$	$\mathcal{P} = M_z\omega$

10.1.1.11 Momento meccanico (momento della forza)

Il **momento meccanico** (o **momento torcente**, **coppia**) di una forza $\vec{F}$ applicata nel punto di posizione $\vec{r}$ è:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Nel caso di rotazione attorno all'asse fisso z è sufficiente la componente z:

$$\boxed{M_z = (\vec{r} \times \vec{F})_z = xF_y - yF_x = r_\perp F_\theta}$$

dove $r_\perp$ è il braccio della forza (distanza dall'asse) e F_θ è la componente tangenziale della forza.

10.1.1.12 Momento d'inerzia per corpi continui

Per un corpo continuo con densità $\rho(\vec{r})$:

$$\boxed{I_z = \int \rho(\vec{r})\, r_\perp^2\, dV = \int \rho(x, y, z)\,(x^2 + y^2)\, dV}$$

Il momento d'inerzia dipende dalla **distribuzione di massa** rispetto all'asse: a parità di massa, contribuiscono di più le parti **più lontane** dall'asse.

10.1.1.13 Momenti d'inerzia notevoli (asse passante per il centro)

Per corpi omogenei, rispetto ad un asse z passante per il centro:

$$\boxed{I_{\text{anello sottile}} = mR^2} \quad \boxed{I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}mR^2}$$

$$\boxed{I_{\text{guscio cilindrico sottile}} = mR^2} \quad \boxed{I_{\text{cilindro pieno}} = \frac{1}{2}mR^2}$$

$$\boxed{I_{\text{guscio sferico sottile}} = \frac{2}{3}mR^2} \quad \boxed{I_{\text{sfera piena}} = \frac{2}{5}mR^2}$$

$$\boxed{I_{\text{asta sottile}} = \frac{1}{12}md^2} \quad \boxed{I_{\text{lastra rettangolare}} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)}$$

10.1.1.14 Teorema di Huygens–Steiner (assi paralleli)

Se si conosce il momento d'inerzia rispetto a un asse z' passante per il centro di massa, quello rispetto a un asse z parallelo e distante a vale:

$$\boxed{I_z = I_{z'} + ma^2}$$

10.1.2 Problemi notevoli

10.1.2.1 Sistemi rotanti: impostazione generale

In questa parte consideriamo esempi tipici di problemi con:

- **rotazione attorno ad asse fisso** (dischi, carrucole, pendoli composti);
- **equilibrio rispetto a rotazioni** (leve, solidi appoggiati);
- cenni a **rotazioni libere** e **giroscopi/trottole**;
- cenno a **corpi deformabili** in rotazione (momento d'inerzia variabile).

Il metodo di risoluzione richiede in genere **due equazioni**:

- moto traslatorio (I equazione cardinale);
- moto rotatorio (II equazione cardinale $\Rightarrow I\alpha = M$);

più eventuali **vincoli** (ad es. assenza di slittamento).

10.1.2.2 Disco rotante con forza tangenziale costante al bordo

Disco omogeneo di raggio R e massa m, imperniato nel centro. Una forza esterna di modulo F applicata sul bordo e **tangenziale** produce:

$$\boxed{M_z = \pm RF}$$

(il segno dipende dal verso scelto per θ). Le forze vincolari del perno hanno **momento nullo** (braccio nullo; trascurando attriti nel perno).

Equazione del moto:

$$\boxed{I_z \alpha = RF}$$

Per un disco omogeneo:

$$\boxed{I_z = \frac{1}{2} m R^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha = \frac{RF}{I_z} = \frac{2F}{mR}}$$

Moto uniformemente accelerato (se α costante):

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t} \qquad \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2}$$

10.1.2.3 Carrucola con peso (filo senza slittamento)

Carrucola: disco omogeneo di massa M e raggio R:

$$\boxed{I_z = \frac{1}{2} M R^2}$$

A un filo ideale è appesa una massa m (peso). Se il filo non slitta, traslazione del peso e rotazione della carrucola sono **accoppiate**.

Equazioni:

$$\boxed{m a_y = T - mg}$$

$$\boxed{I_z \alpha = RT}$$

Vincolo (assenza di slittamento):

$$\boxed{\alpha = -\frac{a_y}{R}}$$

Da cui:

$$\boxed{a_y = -\frac{mg}{m + \frac{I_z}{R^2}}}$$

10.1.2.4 Differenza di tensione ai capi della carrucola reale

Se un filo passa su una carrucola con momento d'inerzia non trascurabile, in generale le tensioni ai due lati **non sono uguali**. Per una carrucola con due tratti di filo di tensione T_1 e T_2:

$$\boxed{I_z\alpha = R(T_1 - T_2)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_1 - T_2 = \frac{I_z\alpha}{R}}$$

Nel caso di carrucola **ideale** ($I_z \simeq 0$) oppure in **equilibrio** ($\alpha = 0$) la differenza si annulla.

10.1.2.5 Pendolo composto (pendolo fisico)

Corpo rigido di massa m imperniato su asse orizzontale z, ruota in un piano verticale. Il centro di massa dista d_{CM} dall'asse. Definiamo θ come angolo tra l'asse solidale x' e la verticale.

Il momento della forza peso rispetto all'asse è:

$$\boxed{M_z = -d_{CM}\, mg \sin\theta}$$

Equazione del pendolo composto:

$$\boxed{I_z\ddot{\theta} = -d_{CM}\, mg \sin\theta}$$

È analogo a un pendolo semplice con **lunghezza efficace**:

$$\boxed{\ell_{\text{eff}} = \frac{I_z}{m\, d_{CM}}}$$

Caso particolare: **asta omogenea sottile** di lunghezza ℓ imperniata a un estremo. Si ha $d_{CM} = \ell/2$ e (con Huygens–Steiner):

$$\boxed{I_z = \frac{1}{3}m\ell^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\ell_{\text{eff}} = \frac{2\ell}{3}}$$

10.1.2.6 Caduta dell'asta (uso dell'energia)

Asta omogenea di lunghezza ℓ, inizialmente verticale e ferma, con estremità inferiore bloccata (attrito statico). Si vuole la velocità dell'estremità superiore quando l'asta arriva orizzontale.

Usiamo conservazione dell'energia:

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}I_z\omega_f^2$$

Con asse nel punto di contatto (estremità) per un'asta:

$$\boxed{I_z = \frac{1}{3}m\ell^2}$$

Quindi:

$$\boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}} \qquad \boxed{v_f = \ell\,\omega_f = \sqrt{3\ell g}}$$

10.1.2.7 Leva ed equilibrio rotazionale

Leva: asta rigida imperniata in un punto (fulcro). Forze F_1 e F_2 applicate a distanze l_1 e l_2 dal fulcro, approssimativamente perpendicolari all'asta.

Moto molto lento $\Rightarrow$ equilibrio rotazionale ($\alpha = 0$), quindi:

$$\boxed{M_{z,\text{tot}} = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{l_1 F_1 - l_2 F_2 = 0}$$

Da cui:

$$\boxed{F_1 = \frac{l_2}{l_1} F_2}$$

Il "vantaggio meccanico" dipende dal rapporto dei bracci. Le leve si classificano in I, II, III genere a seconda della posizione del fulcro.

10.1.2.8 Equilibrio di solidi appoggiati su un piano

Un solido appoggiato su un piano può restare in equilibrio oppure ribaltarsi. Spesso l'inizio della caduta è una **rotazione** attorno a uno spigolo della base (attrito statico).

Criterio di equilibrio:

> *Il corpo è in equilibrio se e solo se la proiezione verticale del centro di massa cade all'interno della base d'appoggio.*

10.1.2.9 Rotazione libera e assi principali d'inerzia (cenno)

Per un corpo libero nello spazio, l'asse di rotazione in generale **non resta costante** nel tempo. L'equazione di base resta la II equazione cardinale sul vettore momento angolare $\vec{L}$. In generale **non** vale $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

Esistono però almeno tre **assi principali d'inerzia** (passanti per il centro di massa) tali che:

$$\boxed{\vec{L} = I_{\text{asse princ.}}\,\vec{\omega}}$$

Una rotazione libera attorno a un asse principale può avvenire con $\vec{\omega}$ costante (in particolare un asse di simmetria cilindrica è sempre asse principale). Per una sfera vale $\vec{L} = I\vec{\omega}$ per qualunque asse passante per il centro.

10.1.2.10 Giroscopio e trottola (cenno qualitativo)

Un corpo che ruota velocemente attorno a un asse principale ha un momento angolare $\vec{L}$ grande. Se i momenti esterni sono nulli, $\vec{L}$ si conserva e l'asse di rotazione tende a restare stabile (principio del giroscopio).

Per una **trottola** o una monetina in rapida rotazione, l'equilibrio (finché ruota) è legato alla conservazione del momento angolare. Se l'asse è inclinato, il momento della forza peso rispetto al punto di contatto non è nullo: non provoca una caduta immediata, ma induce una **precessione** (l'asse descrive lentamente un cono).

10.1.2.11 Rotazione di corpi deformabili: piroetta (momento d'inerzia variabile)

Se un corpo è deformabile, il momento d'inerzia I_z può variare nel tempo. Se il momento esterno totale è nullo, il momento angolare si conserva:

$$\boxed{L_z = I_z\omega = \text{costante}}$$

Quindi, se I_z diminuisce (massa più vicina all'asse), allora ω aumenta.

Esempio: ballerina/pattinatrice che avvicina le braccia al corpo $\Rightarrow$ riduce I_z e aumenta ω.

10.1.3 Rototraslazione e rotolamento

10.1.3.1 Moto roto-traslatorio

In un **moto roto-traslatorio** un corpo **trasla e ruota simultaneamente** rispetto a un riferimento inerziale S.

La traslazione è descritta dal moto del centro di massa $\vec{r}_{CM}(t)$ ed è governata dalla I equazione cardinale:

$$\boxed{M_{\text{tot}}\, \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{tot}}}$$

Nel riferimento S' con origine nel centro di massa, il centro di massa è fermo e il corpo compie una **rotazione pura** attorno a un asse passante per il centro di massa (asse con orientazione costante). La rotazione attorno al CM è governata da:

$$\boxed{I_{CM}\, \alpha = M_{CM,\text{tot}}}$$

dove I_{CM} è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il CM, $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ e $M_{CM,\text{tot}}$ è il momento totale delle forze esterne calcolato rispetto al CM.

In generale $\vec{F}_{\text{tot}}$ e $M_{CM,\text{tot}}$ possono dipendere sia da $\vec{r}_{CM}$ che da θ, quindi **traslazione e rotazione sono spesso accoppiate** e vanno risolte insieme.

10.1.3.2 Velocità di un punto materiale in rototraslazione

Sia P un punto del corpo, con posizione $\vec{r}$ in S e $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{CM}$ rispetto al CM. La velocità totale è somma di:

- velocità del centro di massa $\vec{v}_{CM}$;
- velocità di rotazione rispetto al CM.

Quindi:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM})}$$

10.1.3.3 Teoremi di König

Per un corpo rigido (o sistemi di corpi rigidi), i teoremi di König permettono di separare i contributi traslazionali e rotazionali:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\, m\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\, I_{CM}\, \omega^2}$$

$$\boxed{\vec{P} = m\, \vec{v}_{CM}}$$

$$\boxed{L_z = \left(\vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM}\right)_z + I_{CM}\, \omega}$$

(il contributo rotazionale alla quantità di moto totale si annulla).

10.1.3.4 Lavoro delle forze esterne nel moto roto-traslatorio

Nel caso dei solidi rigidi, le forze interne non compiono lavoro. Il lavoro esterno totale si scinde in:

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{trasl}} + \mathcal{L}_{\text{rot}} = \int \vec{F}_{\text{tot}} \cdot d\vec{r}_{CM} + \int M_{CM,\text{tot}}\, d\theta}$$

Le variazioni dell'energia cinetica traslazionale dipendono solo da $\mathcal{L}_{\text{trasl}}$, quelle dell'energia cinetica rotazionale solo da $\mathcal{L}_{\text{rot}}$.

10.1.3.5 Asse istantaneo di rotazione (moto piano)

Se il moto avviene in un piano (ad es. parallelo a xy), allora istante per istante è equivalente a una **pura rotazione** attorno a un **asse istantaneamente fisso** parallelo a z. Esiste un punto P_A (sull'asse istantaneo) con velocità nulla; per ogni punto P:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)}$$

10.1.4 Rotolamento

10.1.4.1 Definizione e vincolo

Il **rotolamento** è una roto-traslazione vincolata di un corpo circolare (raggio R) su una superficie.

Il vincolo (dovuto all'**attrito statico**) impone che il **punto di contatto** P_c sia **istantaneamente fermo**:

$$\boxed{\vec{v}(P_c) = \vec{0}}$$

Se non c'è slittamento, non c'è dissipazione da attrito dinamico; l'attrito statico non dissipa energia perché non fa lavoro (spostamento nullo nel punto di contatto).

10.1.4.2 Condizione di rotolamento (velocità e accelerazione)

Imponendo $\vec{v}(P_c) = 0$ nella formula di rototraslazione:

$$\vec{0} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Proiettando lungo la direzione del moto (asse x), si ottiene la condizione vincolare:

$$\boxed{v_{CM,x} \pm \omega R = 0}$$

Il segno dipende dalle convenzioni scelte (verso di x e verso positivo di rotazione).

Derivando nel tempo:

$$\boxed{a_{CM,x} \pm \alpha R = 0}$$

10.1.4.3 Rotolamento come pura rotazione attorno al punto di contatto

Poiché il punto di contatto P_c è istantaneamente fermo, il rotolamento è descrivibile anche come **pura rotazione attorno a un asse fisso istantaneo** passante per P_c.

Si possono usare due approcci:

- traslazione + rotazione attorno al CM + vincolo;
- rotazione attorno a P_c con $I_{P_c}\alpha = M_{P_c}$.

I due momenti d'inerzia sono legati da Huygens–Steiner:

$$\boxed{I_{P_c} = I_{CM} + mR^2}$$

10.1.4.4 Energia e momento angolare nel rotolamento

Due forme equivalenti dell'energia cinetica:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{P_c}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I_{P_c}}{R^2}\,v_{CM}^2}$$

(dove si usa il vincolo $v_{CM} = \omega R$ a segno vicino).

Per il momento angolare (asse z) si può scrivere:

$$\boxed{L_z = I_{P_c}\,\omega}$$

10.1.4.5 Ruota su piano orizzontale con forza applicata all'asse

Ruota cilindrica (cilindro pieno) di massa m che rotola su piano orizzontale scabro. Una forza orizzontale costante F è applicata all'asse.

Usiamo la pura rotazione attorno a P_c: l'attrito statico non dà momento (braccio nullo), mentre F dà:

$$\boxed{M_z = -RF}$$

Quindi:

$$\alpha = \frac{M_z}{I_{P_c}} = -\frac{RF}{I_{P_c}}$$

Dal vincolo sulle accelerazioni ($a_x = R\alpha$ a segno vicino):

$$\boxed{a_x = \frac{R^2 F}{I_{P_c}}}$$

Per cilindro pieno: $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow I_{P_c} = I_{CM} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$. Allora:

$$\boxed{a_x = \frac{2F}{3m}}$$

La forza d'attrito statico A_x si ricava dall'equazione traslazionale lungo x:

$$ma_x = F + A_x \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A_x = ma_x - F = -\frac{F}{3}}$$

Condizione di non slittamento:

$$|A_x| < \mu_s N, \qquad N = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{F < 3\mu_s mg}$$

10.1.4.6 Sfera piena su piano inclinato

Sfera piena omogenea di massa m e raggio R che rotola su piano inclinato di angolo γ e lunghezza ℓ.

Usiamo la pura rotazione attorno a P_c. Il momento della forza peso rispetto a P_c vale:

$$\boxed{M_z = mgR\sin\gamma}$$

Per sfera piena: $I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2 \Rightarrow I_{P_c} = I_{CM} + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$. Quindi:

$$\alpha = \frac{M_z}{I_{P_c}} = \frac{mgR\sin\gamma}{\frac{7}{5}mR^2} = \frac{5}{7}\frac{g\sin\gamma}{R}$$

e dal vincolo $a = R\alpha$:

$$\boxed{a = \frac{5}{7}g\sin\gamma}$$

Velocità finale (partenza da ferma), usando conservazione dell'energia:

$$mg\,\ell\sin\gamma = E_k = \frac{1}{2}\frac{I_{P_c}}{R^2}v^2 = \frac{1}{2}\frac{\frac{7}{5}mR^2}{R^2}v^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

Da cui:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}g\,\ell\sin\gamma}}$$

Capitolo 11 — Statica dei corpi rigidi

11.1 Statica dei corpi rigidi

11.1.1 Formulario: formule importanti e quando usarle

11.1.1.1 Equilibrio traslazionale (corpo fermo)

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Quando usarla: quando il corpo è in equilibrio e quindi non accelera. In pratica, quasi sempre si usano le due componenti:

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0$$

Tipico: corpi appoggiati, corpi appesi, sistemi con corde, equilibrio su piani.

11.1.1.2 Equilibrio rotazionale (corpo non ruota)

$$\sum \tau = 0$$

Quando usarla: quando il corpo è in equilibrio e non deve ruotare. **Tipico:** leve, aste, travi, bilance, scale appoggiate.

11.1.1.3 Momento di una forza (caso semplice)

Se una forza F è **perpendicolare** al braccio r:

$$\tau = F \cdot r$$

Quando usarla: quando la forza fa ruotare il corpo e la distanza dal perno è nota. **Nota pratica:** se la forza non è perpendicolare, si usa solo la componente perpendicolare.

11.1.1.4 Scomposizione di una forza inclinata

Se una forza F forma un angolo θ con l'orizzontale:

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\sin\theta$$

Quando usarla: ogni volta che una forza è inclinata (tensione di una fune, forza applicata obliqua, reazione vincolare inclinata).

11.1.1.5 Momento di una coppia

Una coppia è formata da due forze uguali e opposte, distanti d:

$$\tau_c = Fd$$

Quando usarla: quando le forze si annullano come risultante ma fanno ruotare il corpo (esempio: volante, manubrio, chiave inglese).

11.1.1.6 Baricentro (masse puntiformi su una linea)

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

Quando usarla: quando il peso totale può essere considerato applicato in un punto e le masse sono concentrate in posizioni note.

11.2 Esercizi tipo esame svolti

11.2.1 Esercizio 1 — Leva (equilibrio dei momenti)

Una leva è incernierata in un punto (perno). A sinistra, a distanza r_1 dal perno, agisce una forza verso il basso F_1. A destra, a distanza r_2 dal perno, agisce una forza verso il basso F_2.

Determinare F_2 affinché la leva sia in equilibrio.

Soluzione

Per essere in equilibrio, la leva non deve ruotare, quindi vale:

$$\sum \tau = 0$$

Scelgo come riferimento il perno, così le distanze sono semplici.

Il momento prodotto da F_1 tende a far ruotare la leva in un verso, mentre quello di F_2 nel verso opposto. In equilibrio i due momenti devono avere lo stesso valore:

$$F_1r_1 = F_2r_2$$

Ricavo F_2:

$$F_2 = \frac{F_1r_1}{r_2}$$

Interpretazione: se r_2 è più grande, basta una forza più piccola per bilanciare.

11.2.2 Esercizio 2 — Asta uniforme appoggiata su due supporti

Un'asta uniforme di lunghezza L e peso P è appoggiata su due supporti alle estremità:

- reazione verticale a sinistra R_A,
- reazione verticale a destra R_B.

Determinare R_A e R_B.

Soluzione

Essendo l'asta uniforme, il peso P si applica al centro, cioè a distanza $L/2$ da ogni estremità.

Equilibrio delle forze verticali Il corpo è fermo, quindi:

$$R_A + R_B - P = 0$$

quindi:

$$R_A + R_B = P$$

Equilibrio dei momenti Scelgo come punto di riferimento A (così il momento di R_A è nullo perché passa per A).

Il momento prodotto da R_B vale $R_B \cdot L$.

Il momento del peso vale $P \cdot \frac{L}{2}$.

Condizione di equilibrio:

$$R_B \cdot L = P \cdot \frac{L}{2}$$

Semplifico L:

$$R_B = \frac{P}{2}$$

Ora uso la prima equazione:

$$R_A = P - R_B = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$$

$$\boxed{R_A = \frac{P}{2} \qquad R_B = \frac{P}{2}}$$

11.2.3 Esercizio 3 — Baricentro di due masse su una linea

Due masse puntiformi sono su una linea:

- m_1 nel punto x_1,
- m_2 nel punto x_2.

Determinare la posizione del baricentro x_G.

Soluzione

La formula del baricentro su una linea è:

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Controllo rapido:

- se $m_1 = m_2$, allora x_G è il punto medio tra x_1 e x_2;
- se m_2 è molto più grande, x_G è più vicino a x_2.

11.2.4 Esercizio 4 — Forza inclinata: equilibrio in 2D

Un punto è in equilibrio sotto l'azione di:

- una forza orizzontale verso destra F,
- una tensione T lungo una fune inclinata di angolo θ rispetto all'orizzontale, diretta verso sinistra e in alto.

Determinare T.

Soluzione

La tensione T è inclinata, quindi la scompongo:

$$T_x = T\cos\theta \qquad T_y = T\sin\theta$$

Equilibrio orizzontale In orizzontale devono annullarsi:

$$F = T\cos\theta$$

Quindi:

$$\boxed{T = \frac{F}{\cos\theta}}$$

Osservazione In questo esercizio non serviva l'equilibrio verticale perché non sono presenti altre forze verticali. Se ci fosse stato anche un peso P, allora si sarebbe usata anche:

$$T\sin\theta - P = 0$$

11.2.5 Esercizio 5 — Coppia di forze (momento puro)

Due forze uguali F e opposte agiscono su un corpo su rette parallele distanti d. Determinare il momento della coppia.

Soluzione

Le due forze si annullano come forza totale (non spingono il corpo in una direzione), ma fanno ruotare. Il momento della coppia è:

$$\boxed{\tau_c = Fd}$$

Significato:

- se aumenta d, la coppia fa ruotare di più;
- se aumenta F, la coppia fa ruotare di più.

Capitolo 12 — Gravitazione e orbite

12.1 Gravitazione e orbite

12.1.1 Impostazione del problema: massa sorgente e corpo in moto

Consideriamo un corpo di massa M molto grande (massa *sorgente*), che assumiamo immobile. Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine nel corpo di massa M. Un secondo corpo, di massa m, si muove sotto l'effetto della sola forza gravitazionale dovuta a M.

Indichiamo con $\mathbf{r}(t)$ il vettore posizione del corpo m rispetto all'origine, con modulo $r = |\mathbf{r}|$, e con

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

il versore radiale.

12.1.2 Forza gravitazionale (forma vettoriale)

La forza gravitazionale esercitata da M su m è una forza centrale (diretta lungo $\mathbf{r}$) ed è:

$$\boxed{\mathbf{F} = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\mathbf{u}}$$

equivalentemente:

$$\boxed{\mathbf{F} = -G\,\frac{mM}{r^3}\,\mathbf{r}}$$

(il segno meno indica che la forza è attrattiva, diretta verso l'origine).

12.1.3 Equazione del moto

Dal secondo principio di Newton:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

Sostituendo la forza gravitazionale e semplificando m:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = -GM\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}}$$

Questa è l'equazione differenziale vettoriale che descrive il moto di pianeti/satelliti nel caso ideale a due corpi con massa sorgente dominante.

12.2 Leggi di Keplero

Le leggi di Keplero descrivono le proprietà del moto orbitale in un campo gravitazionale centrale e sono conseguenza dell'equazione del moto precedente.

12.2.1 Prima legge (orbite ellittiche)

I pianeti si muovono su orbite chiuse ellittiche, con la massa sorgente (es. il Sole) in uno dei fuochi dell'ellisse.

12.2.2 Seconda legge (legge delle aree)

Il raggio vettore $\mathbf{r}(t)$ spazza aree uguali in tempi uguali: la **velocità areale** è costante.

12.2.3 Terza legge (periodo e semiasse maggiore)

Il periodo di rivoluzione T è proporzionale a $a^{3/2}$, dove a è il semiasse maggiore dell'orbita:

$$\boxed{T \propto a^{3/2}}$$

Nel caso particolare di orbita circolare, $a = r$.

12.3 Orbita circolare

12.3.1 Velocità orbitale per orbita circolare

Supponiamo un'orbita circolare di raggio r. Allora il moto è circolare uniforme e l'accelerazione è centripeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

La forza gravitazionale fornisce la forza centripeta:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

Semplificando m e risolvendo per v:

$$\boxed{v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

Questa è la velocità necessaria per mantenere un'orbita circolare di raggio r.

12.3.2 Periodo dell'orbita circolare (terza legge in forma esplicita)

Per un moto circolare uniforme:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Sostituendo $v = v_c$:

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Da cui:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

Quindi $T \propto r^{3/2}$, in accordo con la terza legge di Keplero (caso circolare).

12.4 Momento angolare e seconda legge di Keplero

12.4.1 Forza centrale e conservazione del momento angolare

La forza gravitazionale è centrale (diretta lungo $\mathbf{r}$), quindi il momento torcente rispetto all'origine è nullo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Ne segue la conservazione del momento angolare:

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{costante}}$$

12.4.2 Moto piano

Poiché $\mathbf{L}$ è costante in direzione, il moto avviene in un piano perpendicolare a $\mathbf{L}$.

12.4.3 Velocità areale costante (legge delle aree)

L'area infinitesima spazzata in un tempo dt dal raggio vettore è:

$$dA = \frac{1}{2}\, r\, |d\mathbf{r}|\, \sin\theta$$

dove θ è l'angolo tra $\mathbf{r}$ e la direzione dello spostamento (o tra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$).

Dividendo per dt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\, r\, v\, \sin\theta$$

Ma il modulo del momento angolare è:

$$L = |\mathbf{L}| = mrv\sin\theta$$

quindi:

$$\boxed{L = 2m\,\frac{dA}{dt}}$$

Se L è costante, allora anche $\frac{dA}{dt}$ è costante: questa è la **seconda legge di Keplero**.

Conseguenza qualitativa:

- il corpo in orbita si muove **più veloce** quando è più vicino alla massa sorgente;
- e **più lento** quando è più lontano.

12.5 Energia, velocità di fuga e tipo di traiettoria

12.5.1 Energia totale (conservazione)

La forza gravitazionale è conservativa. Scegliendo lo zero del potenziale a distanza infinita, l'energia totale è:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}}$$

e si conserva durante il moto.

12.5.2 Velocità di fuga

Per poter arrivare all'infinito con velocità finale non immaginaria serve $E \geq 0$. Nel caso limite $E = 0$:

$$0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r}$$

Semplificando m:

$$v_f^2 = \frac{2GM}{r}$$

quindi:

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}\, v_c}$$

(dove $v_c = \sqrt{GM/r}$ è la velocità orbitale circolare alla stessa distanza).

12.5.3 Traiettorie chiuse e aperte

Dalla conservazione dell'energia:

- se $E < 0$ (equivalentemente $v < v_f$ all'istante considerato), la traiettoria è **chiusa** (orbita ellittica);
- se $E > 0$ (equivalentemente $v > v_f$), la traiettoria è **aperta** (parabola o iperbole);
- caso limite $E = 0$: traiettoria **parabolica** con afelio a distanza infinita.

12.5.4 Nota fisica

Tutto quanto sopra vale nel modello ideale in cui l'unica forza in azione è la gravità della massa sorgente. Se agiscono forze non conservative (es. propulsione), l'energia meccanica non si conserva e si può passare da un'orbita a un'altra o da orbite chiuse a traiettorie aperte.

12.6 Perielio e afelio (cenno)

Nei punti di minima e massima distanza dalla massa sorgente (perielio e afelio), la velocità è perpendicolare a $\mathbf{r}$, quindi $\theta = 90°$ e:

$$L = mvr \quad \Rightarrow \quad v = \frac{L}{mr}$$

Sostituendo questa v nell'energia:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{mr}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

si ottiene un'equazione per r che ammette:

- due soluzioni fisiche ($r_{\min}$ e $r_{\max}$) se $E < 0$ (orbita chiusa);
- una sola soluzione fisica se $E > 0$ (traiettoria aperta: esiste solo il perielio).

Capitolo 13 — Oscillazioni, orbite e sistemi non inerziali

13.1 Oscillazioni, orbite e sistemi non inerziali

Questa parte tratta tre argomenti distinti:

- fenomeni oscillatori: energia, smorzamento, forzante esterna e risonanza;
- orbite gravitazionali: leggi di Keplero e collegamento con Newton;
- sistemi di riferimento non inerziali: forze apparenti in riferimenti accelerati o rotanti.

13.2 Oscillazioni ed energia

13.2.1 Oscillazione armonica: legge oraria

Un moto armonico può essere descritto dalla legge oraria:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

dove:

- A è l'ampiezza dell'oscillazione;
- ω è la pulsazione;
- φ è la fase iniziale.

13.2.2 Caso massa–molla: pulsazione

Nel caso di un sistema massa–molla:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

dove k è la costante elastica e m la massa.

13.2.3 Velocità nel moto armonico

Derivando la legge oraria:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

13.2.4 Energia cinetica

$$E_K(t) = \frac{1}{2}mv^2$$

Sostituendo $v(t)$:

$$E_K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Poiché $\omega^2 = \frac{k}{m}$, si ottiene:

$$E_K(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

13.2.5 Energia potenziale elastica

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2$$

Sostituendo $x(t)$:

$$U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

13.2.6 Energia meccanica totale (conservazione)

L'energia meccanica totale è:

$$E = E_K(t) + U(t)$$

Sommando:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \left[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

Usando l'identità $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

Quindi l'energia meccanica si conserva ed è costante nel tempo (forza elastica conservativa). Inoltre l'energia è proporzionale ad A^2.

13.2.7 Conversione tra energia cinetica e potenziale

Durante l'oscillazione:

- in alcuni istanti l'energia è tutta cinetica ($E = E_{K,\max}$);
- in altri istanti l'energia è tutta potenziale ($E = U_{\max}$);

a patto di scegliere lo zero dell'energia potenziale nel punto di equilibrio.

13.2.8 Esempio: pendolo (energia totale)

Per un pendolo (anche per oscillazioni non piccole) l'energia totale si conserva ed è:

$$E = E_{K,\max} = U_{\max}$$

In particolare:

$$\boxed{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_{\max}^2 = mgl(1 - \cos\theta_{\max})}$$

dove:

- l è la lunghezza del filo;
- $\dot{\theta}_{\max}$ è la massima velocità angolare;
- $\theta_{\max}$ è il massimo angolo raggiunto.

13.3 Oscillazioni smorzate

13.3.1 Attrito viscoso ed equazione del moto

Nella realtà sono presenti attriti che dissipano energia e riducono l'ampiezza nel tempo. Consideriamo un sistema massa–molla con attrito viscoso:

$$ma = -kx - bv$$

dove b è il coefficiente di attrito viscoso.

Scrivendo in forma standard:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

dove:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$$

13.3.2 Soluzione (smorzamento debole)

Se lo smorzamento non è troppo grande (condizione $\omega_0 > \gamma$), una soluzione è:

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_s t + \varphi_0)}$$

dove:

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Quindi l'ampiezza decresce esponenzialmente:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$$

13.3.3 Energia e decadimento

Poiché l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, essa decade come:

$$\boxed{E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}}$$

Inoltre, se $\gamma \ll \omega_0$, allora $\omega_s \simeq \omega_0$.

13.3.4 Tempi caratteristici e fattore di qualità

Si introducono due tempi caratteristici:

- periodo delle oscillazioni:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

- tempo caratteristico di attenuazione dell'ampiezza:

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Il fattore di qualità (o di merito) è definito come:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}}$$

Un alto Q indica oscillazioni poco smorzate (molte oscillazioni prima dell'attenuazione significativa), un basso Q indica forte smorzamento.

13.4 Oscillazioni forzate e risonanza

13.4.1 Forza esterna periodica

Consideriamo un sistema massa–molla soggetto ad una forza esterna periodica:

$$F_{\text{ext}}(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

dove ω è la pulsazione della forzante. La pulsazione naturale del sistema è:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

13.4.2 Caso senza attrito

L'equazione del moto è:

$$ma = -kx + F_{\text{ext}}(t)$$

Dividendo per m:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

Cerchiamo una soluzione con la stessa frequenza della forzante:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

Sostituendo, si ottiene:

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

L'ampiezza cresce quando ω si avvicina a ω_0 e diverge per $\omega = \omega_0$ (questa divergenza non è fisica: nella realtà entrano attrito e non-linearità).

13.4.3 Caso con attrito viscoso

Con attrito viscoso l'equazione diventa:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

La soluzione a regime può essere scritta come:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

L'ampiezza risulta:

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$$

13.4.4 Picco di risonanza

In presenza di attrito non c'è più divergenza, ma un massimo (picco di risonanza). L'ampiezza massima è tanto maggiore quanto minore è l'attrito.

13.4.5 Fattore di amplificazione in risonanza

Il rapporto tra ampiezza in risonanza e ampiezza per forze quasi statiche è:

$$\boxed{\frac{A(\omega_0)}{A(0)} = Q}$$

quindi il fattore di qualità misura anche l'amplificazione in risonanza.

13.4.6 Regime e transiente

La soluzione completa è data dalla somma di:

- una soluzione a regime (forzata);
- una soluzione transiente (smorzata) che dipende dalle condizioni iniziali.

In forma compatta:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_s t + \varphi_0)}$$

Dopo un certo tempo il termine transiente si annulla e resta solo la soluzione a regime.

Capitolo 14 — Fluidi

14.1 Introduzione ai fluidi

I **fluidi** sono corpi che non mantengono una forma propria, ma assumono quella del contenitore. Si distinguono in:

- **liquidi**: tendono a mantenere (circa) costante il volume;
- **gas**: cambiano facilmente sia forma sia volume.

Nel seguito adottiamo una **descrizione continua**: il fluido è visto come suddiviso in elementi di volume molto piccoli dV. La massa dell'elemento è fissata dalla densità di massa $\rho(\vec{r})$:

$$dm = \rho(\vec{r})\, dV.$$

14.2 Pressione

14.2.1 Definizione di pressione

Elementi di fluido adiacenti si scambiano **forze di contatto** con componente **normale** alla superficie di contatto. Per un elemento di superficie dS con normale uscente $\vec{n}$, si definisce la **pressione** come forza normale per unità di area:

$$p = \frac{dF_n}{dS}, \qquad \text{con } dF_n = d\vec{F} \cdot \vec{n}.$$

Equivalentemente, la forza di pressione su dS è (in modulo) $dF_n = p\, dS$.

14.2.2 Isotropia della pressione

Nel limite di elementi di volume infinitesimi, la pressione risulta **uguale in tutte le direzioni** (quantità **scalare**): in un fluido in quiete, in un punto la pressione non dipende dall'orientazione della superficie su cui la si "misura".

14.2.3 Unità di misura

Nel SI:

$$[p] = \mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}.$$

Unità comuni:

$$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}, \qquad 1\,\mathrm{atm} = 101325\,\mathrm{Pa} \approx 1.01325\,\mathrm{bar}, \qquad 1\,\mathrm{atm} = 760\,\mathrm{torr}\,(= 760\,\mathrm{mmHg}).$$

14.2.4 Gradienti di pressione e forza risultante

Se la pressione varia nello spazio, su un elemento di volume dV le forze di pressione sulle facce opposte non si bilanciano. Il risultato, in forma vettoriale, è:

$$\textbf{Forza di pressione per unità di volume:} \qquad \frac{d\vec{F}}{dV} = -\nabla p.$$

I gradienti di pressione generano quindi forze interne che tendono a muovere il fluido, se non bilanciate da altre forze.

14.2.5 Lavoro della pressione

Consideriamo un fluido che spinge una parete mobile (pistone) di area S, con pressione uniforme p. La forza è $F = pS$. Se la parete si sposta di dx:

$$\delta L = F\,dx = pS\,dx = p\,\delta V, \qquad \delta V = S\,dx.$$

In generale, anche per deformazioni più complesse, il lavoro di pressione resta:

$$\delta L = p\,\delta V.$$

Per un passaggio finito tra due stati $A \to B$:

$$L_{A\to B} = \int_A^B p\,dV.$$

Se p è costante:

$$L = p\,\Delta V.$$

14.2.6 Relazione costitutiva

La pressione è legata alle altre proprietà del fluido (ad es. densità e temperatura) tramite una **relazione costitutiva**. Due casi limite ideali:

- **fluidi incomprimibili** (buona approssimazione per i liquidi);
- **gas perfetti** (buona approssimazione per gas rarefatti).

14.2.6.1 Liquidi e incomprimibilità

Per un **fluido incomprimibile** si assume ρ **costante** (nel tempo e nello spazio). In molti problemi la pressione si comporta come una grandezza che "si aggiusta" per mantenere la densità costante.

14.2.6.2 Gas e numero di moli

Per quantificare la quantità di sostanza si usa il numero di moli n. Una mole contiene il numero di Avogadro:

$$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}.$$

In pratica:

$$n = \frac{m}{m_{\text{mol}}},$$

dove m è la massa totale e m_{mol} è la **massa molare** (in g/mol, numericamente uguale al peso molecolare).

14.2.6.3 Gas perfetti

$$\textbf{Legge dei gas perfetti:} \qquad pV = nRT,$$

con $R \simeq 8.3\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ e T in Kelvin.

Poiché

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_{\text{mol}}\,n}{V},$$

si ottiene anche la forma in termini di densità:

$$p = \frac{RT}{m_{\text{mol}}}\,\rho.$$

A temperatura costante, p è proporzionale a ρ.

14.2.7 Forza peso distribuita nel fluido

Ogni elemento di volume subisce la forza peso $dm\,\vec{g}$. Quindi:

$$\textbf{Forza peso per unità di volume:} \qquad \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\,\vec{g}.$$

L'energia potenziale gravitazionale del fluido (asse z verso l'alto) si può scrivere:

$$U = \int \rho(\vec{r})\,g\,z\,dV.$$

Il lavoro della forza peso si ottiene dalle variazioni di energia potenziale.

14.3 Mini-formulario (Pressione)

$$dm = \rho\,dV \qquad p = \frac{dF_n}{dS} \qquad \frac{d\vec{F}}{dV} = -\nabla p$$

$$\delta L = p\,\delta V \qquad L_{A\to B} = \int_A^B p\,dV \qquad pV = nRT$$

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\,\vec{g} \qquad U = \int \rho\,g\,z\,dV$$

14.4 Statica dei fluidi

14.4.1 Equilibrio idrostatico di un fluido pesante

In condizioni **statiche**, all'interno di un fluido agiscono:

- le **forze di pressione** (dovute ai gradienti di pressione);
- la **forza peso** distribuita $\rho\,\vec{g}$.

La condizione di equilibrio per ogni elemento di volume è:

$$-\nabla p + \rho\,\vec{g} = \vec{0}.$$

Scegliendo un asse z verticale orientato verso l'alto, si ottiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Quindi:

- a **parità di quota** (piani orizzontali) la pressione è **costante**;
- la variazione con z dipende da come varia la densità ρ.

14.4.2 Legge di Stevino (liquido incomprimibile)

Per un liquido incomprimibile $\rho =$ costante, si ottiene:

$$p(x, y, z) = p_0 - \rho g z,$$

dove p_0 è la pressione alla quota di riferimento $z = 0$.

Ne segue che la pressione:

- è **invariante** in un piano orizzontale;
- **aumenta** andando in profondità (cioè per z più negativo).

14.4.3 Superficie libera e vasi comunicanti

In un recipiente aperto la pressione sulla superficie libera è:

$$p = p_{\text{atm}}.$$

Poiché p è costante sulla superficie libera, in equilibrio tale superficie è **orizzontale**.

Nei **vasi comunicanti** (recipienti collegati e aperti), le superfici libere del liquido si trovano alla **stessa quota**.

14.4.4 Leva idraulica

Consideriamo due contenitori con un liquido collegati da una tubazione immersa e chiusi da due pareti mobili di aree S_1 e S_2 alla stessa quota. La pressione del liquido adiacente è la stessa, quindi:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Si può generare una forza grande su una parete grande applicando una forza più piccola su una parete piccola.

14.4.5 Equilibrio di un gas pesante (gas perfetto, T costante)

Per un gas perfetto (temperatura uniforme), la pressione varia con la quota in modo **esponenziale**:

$$p(x, y, z) = p_0 \, e^{-z/\ell}, \qquad \ell = \frac{RT}{m_{\text{mol}} \, g}.$$

Per l'aria ℓ è grande (ordine di chilometri), quindi in contenitori di dimensioni "normali" (metri) la pressione è quasi uniforme con ottima approssimazione.

14.4.6 Spinta di Archimede

Un corpo immerso in un fluido in equilibrio subisce le forze di pressione su tutta la sua superficie. Il risultato complessivo è la **forza di Archimede**, diretta verso l'alto:

$$\vec{F}_A = -\rho V \, \vec{g},$$

dove ρ è la densità del fluido (assunta costante) e V è il volume immerso (tutto il corpo se è completamente immerso). In modulo:

$$F_A = \rho g V = m_{\text{fluido spostato}} \, g.$$

14.4.7 Condizione di galleggiamento

Il galleggiamento dipende dal confronto tra peso del corpo $P = mg$ e spinta di Archimede $F_A = \rho g V_{\text{imm}}$. Il criterio può essere espresso come:

$$m < m_{\text{fluido spostato}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho_c < \rho,$$

dove $\rho_c = \frac{m}{V}$ è la densità media del corpo.

Se il corpo **galleggia in equilibrio**, solo una parte è immersa e vale:

$$\rho \, g \, V_{\text{imm}} = \rho_c \, g \, V \qquad \Rightarrow \qquad V_{\text{imm}} = \frac{m}{\rho} = \frac{\rho_c}{\rho} V.$$

14.5 Mini-formulario (Statica dei fluidi)

$$-\nabla p + \rho\,\vec{g} = \vec{0} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$p(x,y,z) = p_0 - \rho g z \qquad p = p_{\text{atm}} \text{ (superficie libera, recipiente aperto)}$$

$$p = p_0\, e^{-z/\ell}, \quad \ell = \frac{RT}{m_{\text{mol}} g}$$

$$\vec{F}_A = -\rho V\,\vec{g}, \quad F_A = \rho g V \qquad V_{\text{imm}} = \frac{\rho_c}{\rho}\, V$$

14.6 Dinamica dei fluidi

14.6.1 Descrizione del moto: lagrangiana ed euleriana

Un modo per descrivere il moto del fluido è **seguire** nel tempo ciascun elemento di volume identificato dalla sua posizione iniziale $\vec{r}_0$, specificando $\vec{r}(t;\vec{r}_0)$ e $\vec{v}(t;\vec{r}_0)$: questa è la descrizione **lagrangiana**. In pratica, però, diventa spesso troppo complicata.

La descrizione usata più comunemente è **euleriana**: si fissano nello spazio piccoli volumi dV e si studiano le grandezze del fluido che li attraversano nel tempo. In questo caso:

$$\rho = \rho(\vec{r},t), \qquad \vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t), \qquad p = p(\vec{r},t).$$

Il moto è detto **stazionario** se le grandezze non dipendono dal tempo:

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r}), \qquad \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r}).$$

14.6.2 Flusso e portata

Spesso interessa sapere *quanto* fluido attraversa una sezione per unità di tempo.

- **Flusso di massa (portata massica):** massa per unità di tempo

$$F_m = \frac{\delta M}{dt}.$$

- **Portata (flusso di volume):** volume per unità di tempo

$$Q = \frac{\delta V}{dt}.$$

Per densità costante:

$$F_m = \rho\, Q.$$

Unità: Q in $\mathrm{m^3/s}$ (spesso anche L/s, con $1\,\mathrm{L} = 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$).

14.6.3 Portata e velocità

Se in un tubo il fluido ha velocità uniforme $\vec{v}$ e la sezione ha area S:

$$Q = v\,S.$$

Se la velocità forma un angolo θ con la normale $\vec{n}$ alla superficie:

$$Q = v \cos\theta\, S.$$

Se la velocità non è uniforme:

$$Q = \int_S v \cos\theta \, dS = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Si può anche introdurre una velocità media normale $v_{\perp,\mathrm{med}}$ tale che:

$$Q = v_{\perp,\mathrm{med}}\, S.$$

14.6.4 Equazione di continuità (fluido incomprimibile)

Per un fluido **incomprimibile** il volume non può cambiare, quindi lungo un tubo:

$$Q_1 = Q_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Se un tubo si dirama in più rami:

$$Q_{\mathrm{monte}} = \sum_i Q_i \quad \text{(somma delle portate a valle).}$$

Per fluidi comprimibili è più sicuro ragionare sul **flusso di massa**, perché la massa totale resta costante.

14.6.5 Legge di Bernoulli (fluido ideale)

Consideriamo un fluido **incomprimibile** in **moto stazionario**, in cui agiscono:

- forze interne di **pressione**,
- **forza peso**,
- e si trascurano gli attriti (viscosità ≈ 0).

Allora lungo il tubo (o lungo un tubo di flusso) vale:

$$\textbf{Legge di Bernoulli:} \qquad p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = H = \text{costante}.$$

La costante H è detta **carico idrodinamico**.

Tra due sezioni 1 e 2:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

14.6.6 Effetto Venturi

Dalla legge di Bernoulli segue che, a quota simile, nelle zone dove v aumenta la pressione tende a diminuire:

$$v \uparrow \Rightarrow \ p \downarrow .$$

Questo è il principio alla base dell'**effetto Venturi** e (a livello qualitativo) della **portanza** delle ali.

14.6.7 Tubi di flusso e moto laminare

Le leggi di continuità e Bernoulli non richiedono un tubo fisico: basta un **tubo di flusso** ideale, delimitato da una superficie laterale formata da **linee di corrente** (tangenti alla velocità in ogni punto).

Condizioni tipiche:

- moto **stazionario** (il tubo di flusso non cambia nel tempo);
- moto **laminare** (linee di corrente ben definite e non intrecciate).

Se il moto non è laminare, diventa **turbolento**.

14.6.8 Viscosità (cenno)

Nella realtà esistono attriti interni: in un fluido newtoniano essi sono legati ai gradienti di velocità. Ad esempio, per due strati adiacenti con velocità lungo x che varia con y:

$$dF_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS,$$

dove η è il **coefficiente di viscosità**. La forza tende a ridurre le differenze di velocità e a rallentare il flusso vicino alle pareti.

A livello più compatto, la forza viscosa per unità di volume (caso incomprimibile) è:

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \eta \nabla^2 \vec{v}.$$

14.6.9 Legge di Poiseuille (cenno)

In un tubo reale la viscosità comporta una **perdita di carico** lungo il tubo. Una forma utile (scritta come nelle slide) è:

$$\Delta H = \Delta p + \rho g \, \Delta h + \frac{1}{2} \rho \, \Delta v^2 = R \, Q,$$

dove R è la **resistenza fluidodinamica** del tubo.

Per un tubo cilindrico di lunghezza L e sezione costante S:

$$R = \frac{8\pi\eta L}{S^2}.$$

14.6.10 Cenno alle equazioni generali

Descrizione locale (più generale) del moto:

Equazione di continuità della massa: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Equazione di Navier–Stokes (fluido newtoniano): $$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}.$$

Queste equazioni vanno completate con una relazione costitutiva tra p e ρ (es. gas perfetto) oppure, per fluidi incomprimibili, con l'assunzione $\rho =$ costante.

14.7 Mini-formulario (Dinamica dei fluidi)

$$Q = \frac{\delta V}{dt} \qquad F_m = \frac{\delta M}{dt} \qquad F_m = \rho Q$$

$$Q = vS \qquad Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS \qquad v_1 S_1 = v_2 S_2 \ \ \text{(incomprimibile)}$$

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

$$dF_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \qquad \frac{d\vec{F}}{dV} = \eta \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \qquad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Capitolo 15 — Termodinamica

15.1 Introduzione alla termodinamica

La **termodinamica** studia l'energia "nascosta" nella materia, cioè l'energia microscopica associata ai moti caotici di atomi e molecole, detta **energia interna** U. Quando l'energia meccanica macroscopica diminuisce per effetti dissipativi, essa si trasferisce tipicamente a livello microscopico e diventa macroscopicamente "invisibile".

Il trasferimento di questa energia invisibile tra sistemi, dovuto a una **differenza di temperatura**, è detto **calore**.

15.1.1 Principi della termodinamica (panoramica)

La termodinamica è formulata tramite principi fondamentali:

- **Principio zero**: introduce la **temperatura**.
- **Primo principio**: introduce **energia interna** e **calore**.
- **Secondo principio**: introduce l'**entropia** (trattato nella prossima lezione).
- **Terzo principio**: legato allo **zero assoluto** (cenno).

15.2 Sistema termodinamico e ambiente

Un **sistema termodinamico** S è la materia (ed energia) contenuta in una porzione definita di spazio. Tutto ciò che si trova fuori da S è l'**ambiente esterno** E.

Il sistema è individuato da una **superficie di confinamento** (reale o ideale), che può essere rigida oppure mobile/deformabile. Le proprietà delle pareti determinano la tipologia di sistema:

- **Sistema aperto**: scambia **materia** ed **energia** con l'ambiente.
- **Sistema chiuso**: non scambia materia, ma può scambiare **energia**.
- **Sistema isolato**: non scambia né materia né energia.

Nel seguito si considerano principalmente **sistemi chiusi**. È importante la sottoclasse di sistema **adiabatico**: sistema chiuso che può scambiare energia con l'ambiente **solo sotto forma di lavoro**, ma **non** sotto forma di calore.

15.3 Variabili termodinamiche

Le grandezze macroscopiche che caratterizzano il sistema e che possono variare nel tempo sono dette **variabili termodinamiche**. Esempi:

$$V,\ p,\ \rho,\ T,\ \theta$$

Le variabili si distinguono in:

- **Estensive**: proporzionali alla quantità di materia/dimensioni del sistema (es. V, M).
- **Intensive**: indipendenti dalle dimensioni (es. p, ρ, T).

15.4 Equilibrio termodinamico e postulato di stato

Un sistema S è in **equilibrio** quando tutte le variabili termodinamiche sono **costanti nel tempo**. Lo **stato termodinamico** è per definizione uno **stato di equilibrio**.

In condizioni di equilibrio molte variabili non sono indipendenti. Si individua quindi un insieme minimo di variabili indipendenti, dette **coordinate termodinamiche**, che determinano completamente lo stato.

15.4.1 Postulato di stato (forma usata nelle slide)

Una volta raggiunto l'equilibrio, un sistema chiuso ha uno stato interamente determinato da:

- variabili estensive di tipo **geometrico** (es. V),
- più una singola variabile **non geometrica** (es. p, oppure T, oppure U).

15.5 Sistemi semplici e piano pV (piano di Clapeyron)

I sistemi chiusi più semplici, detti **sistemi comprimibili semplici**, hanno una sola variabile geometrica (V). In tal caso, due coordinate come p e V sono sufficienti per specificare lo stato in equilibrio.

Lo stato può essere rappresentato come un punto nel piano pV, detto **piano di Clapeyron**.

15.6 Trasformazioni termodinamiche

Una **trasformazione termodinamica** (o processo) è un cambiamento di stato del sistema, individuato da uno stato iniziale A e uno finale B.

Durante la trasformazione il sistema in generale **non** è in equilibrio, quindi gli stati intermedi non sono necessariamente definiti. Una trasformazione estremamente lenta, tale da mantenere il sistema praticamente in equilibrio durante tutto il processo, è detta **quasi-statica** e può essere rappresentata nel piano pV come una curva continua tra A e B.

Una trasformazione **reversibile** è un'idealizzazione in cui è possibile invertire il verso del processo riportando sia il sistema sia l'ambiente nelle condizioni iniziali. Le trasformazioni non quasi-statiche sono in generale **irreversibili**.

15.7 Sistemi composti ed equilibri tra due sistemi

Due sistemi S_1 e S_2 posti a contatto formano un sistema composto $S_c = S_1 + S_2$.

15.7.1 Equilibrio meccanico

Se i due sistemi sono separati da una parete mobile, può avvenire uno scambio di energia sotto forma di lavoro. La condizione di equilibrio meccanico è:

$$p_1 = p_2$$

15.7.2 Equilibrio termico e principio zero

Due sistemi si dicono in **equilibrio termico** se, messi a contatto, il loro stato non cambia nel tempo.

Il **principio zero della termodinamica** afferma: se S_1 è in equilibrio termico con S_2 e S_2 è in equilibrio termico con S_3, allora S_1 è in equilibrio termico con S_3.

Questo principio consente di introdurre una grandezza che controlla l'interazione termica: la **temperatura**.

15.8 Temperatura empirica e termometro

Si introduce un sistema di riferimento detto **sistema termometro** S_T, tipicamente un sistema comprimibile semplice con una sostanza termometrica. Si fissa una coordinata (ad esempio p_T) e si lascia libera di variare una sola coordinata, detta **variabile termometrica** (ad esempio V_T).

Per un sistema S messo in contatto con S_T, una volta raggiunto l'equilibrio termico, si definisce la **temperatura empirica** θ come funzione monotona crescente della variabile termometrica in equilibrio. In forma lineare:

$$\theta = aV_T + b$$

15.8.1 Condizione di equilibrio termico

Due sistemi sono in equilibrio termico se e solo se hanno la stessa temperatura empirica:

$$\theta_1 = \theta_2$$

15.9 Scale Celsius e Kelvin

Nella scala Celsius si fissano due punti di riferimento (fusione del ghiaccio ed ebollizione dell'acqua a pressione atmosferica) e si definisce la scala tramite una relazione lineare.

La scala Kelvin ha uno zero legato a un fenomeno fisico (zero assoluto) ed è detta **scala assoluta**. La temperatura dello **zero assoluto** è:

$$0\,\mathrm{K} = -273.15\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Non è possibile raggiungere esattamente $0\,\mathrm{K}$, ma solo avvicinarsi.

Nel seguito si usa la temperatura assoluta indicata con T (in Kelvin).

15.10 Equazione di stato

Per un sistema comprimibile semplice in equilibrio esiste una relazione funzionale tra le variabili:

$$T = T(p, V)$$

che lega temperatura, pressione e volume. Questa relazione è detta **equazione di stato**.

La temperatura è una variabile intensiva e può essere usata come coordinata al posto di p oppure di V (ad esempio descrivendo lo stato con (T, V) o (T, p), con la terza variabile determinata dall'equazione di stato).

15.11 Energia interna e calore

15.11.1 Primo principio della termodinamica

Il **I principio della termodinamica** è la legge di **conservazione dell'energia** estesa ai processi macroscopici anche in presenza di forze non conservative. Introduce l'esistenza di una forma di energia contenuta nella materia, detta **energia interna** U, le cui variazioni possono compensare variazioni dell'energia meccanica macroscopica.

Per un sistema termodinamico S:

$$\boxed{\Delta U = U(B) - U(A) = Q - \mathcal{L}}$$

dove:

- U è l'**energia interna** del sistema;

- Q è il **calore** scambiato (energia scambiata senza movimento macroscopico);
- $\mathcal{L}$ è il **lavoro** (scambio meccanico di energia con l'ambiente).

15.11.2 Convenzione dei segni

Nella convenzione usata:

- $Q > 0$ se il calore è **assorbito** dal sistema, $Q < 0$ se è **ceduto**;
- $\mathcal{L} > 0$ se il lavoro è **fatto dal sistema sull'ambiente**;
- $\mathcal{L} < 0$ se è l'ambiente a fare lavoro positivo sul sistema.

Nella relazione non compaiono energie cinetiche o potenziali macroscopiche perché si assume che, all'equilibrio, il sistema sia in quiete e in posizione costante. Le energie potenziali dovute a interazioni **interne** (ad esempio elastiche) sono invece incluse in U.

15.11.3 Lavoro

Assumiamo che una parte meccanica del sistema si muova lungo un asse x sotto l'azione di una forza esterna F_{ext}. Il lavoro del sistema verso l'ambiente nella trasformazione $A \to B$ è definito come:

$$\boxed{\mathcal{L}_{A\to B} = -\int_{x_A}^{x_B} F_{\text{ext}}(x)\, dx = -\int_{t_A}^{t_B} F_{\text{ext}}(t)\, v(t)\, dt}$$

15.11.4 Lavoro con parete mobile (pistone)

Se il sistema è confinato da una parete mobile di area S_{par}, si introduce la pressione esterna

$$p_{\text{ext}}(t) = \frac{F_{\text{ext}}(t)}{S_{\text{par}}}$$

e si ottiene:

$$\boxed{\mathcal{L}_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p_{\text{ext}}\, dV = \int_{t_A}^{t_B} p_{\text{ext}}(t)\, \dot{V}(t)\, dt}$$

Se la trasformazione è **quasi-statica reversibile**, vale $p = p_{\text{ext}}$ in ogni istante, quindi:

$$\boxed{\mathcal{L}_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p\, dV}$$

15.11.5 Contenitori adiabatici e calore

Nell'equazione del I principio compaiono U e Q, che vengono introdotte tramite definizioni operative.

Un contenitore che impedisce (o rende molto lento) il passaggio di calore realizza sperimentalmente la condizione $Q \simeq 0$. Nel limite idealizzato $Q = 0$ il contenitore è detto **adiabatico**.

In condizioni adiabatiche, dalla relazione del I principio segue:

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{A\to B} = U(A) - U(B)$$

cioè, per trasformazioni adiabatiche, il lavoro risulta dipendere solo dagli stati iniziale e finale.

I contenitori adiabatici impediscono anche il raggiungimento dell'equilibrio termico tra due sistemi, confermando che l'interazione termica è associata al passaggio di calore.

15.11.6 Energia interna: definizione operativa

Per definire operativamente U si inserisce il sistema S in un contenitore **adiabatico** con una parete mobile, in modo che possa scambiare lavoro ma non calore.

Si fissa uno stato di riferimento O e un valore convenzionale $U(O)$. Dato un altro stato A, si può realizzare una trasformazione adiabatico-lavoro $O \to A$ oppure $A \to O$ e si definisce:

$$\boxed{U(A) = -\mathcal{L}_{O\to A} + U(O)} \qquad \boxed{U(A) = \mathcal{L}_{A\to O} + U(O)}$$

Questa costruzione permette di definire la funzione di stato $U(p, V)$. La definizione è fissata a meno di una costante additiva, fisicamente irrilevante perché contano solo le variazioni ΔU.

L'energia interna è **estensiva** ed è **additiva** quando si uniscono sistemi (se l'energia di interazione è trascurabile).

15.11.7 Calore: definizione operativa

Definita quantitativamente U, il calore assorbito in una trasformazione $A \to B$ si definisce tramite il I principio:

$$\boxed{Q = \mathcal{L}_{A\to B} + U(B) - U(A)}$$

Il calore è un **trasferimento di energia**, non una funzione di stato: dipende dal processo. Per un sistema complessivo isolato $S + E$, il calore assorbito da S è uguale e opposto a quello ceduto dall'ambiente:

$$\boxed{Q_S = -Q_E}$$

Unità di misura: Joule (J). Unità storiche:

$$1\,\mathrm{cal} \approx 4.185\,\mathrm{J}, \qquad 1\,\mathrm{Cal} = 1\,\mathrm{kcal} \approx 4185\,\mathrm{J}$$

15.11.8 Calore, energia interna e temperatura

Temperatura T ed **energia interna** U sono **funzioni di stato**, cioè proprietà del sistema. Il **calore** Q non è una funzione di stato: dipende dalla trasformazione.

In trasformazioni in cui il lavoro è nullo, una variazione di U può essere interpretata come "energia immagazzinata" tramite calore, ma in generale ΔU può avvenire anche per lavoro, in assenza di calore.

La temperatura controlla il passaggio di calore: il calore passa spontaneamente dal sistema con T maggiore a quello con T minore. Se le temperature sono uguali, lo scambio di calore si annulla (equilibrio termico).

È possibile esprimere l'energia interna con coordinate diverse, ad esempio:

$$U = U(T, V) \qquad \text{oppure} \qquad U = U(T, p)$$

15.11.9 Capacità termica

Si definisce la **capacità termica** C come rapporto tra calore assorbito e variazione di temperatura.

In una trasformazione infinitesima a volume costante (quindi senza lavoro), dal I principio:

$$dU = \delta Q$$

e si definisce la capacità termica a volume costante:

$$\boxed{C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$$

Spesso C_V varia lentamente con T e può essere considerata approssimativamente costante, ottenendo:

$$\boxed{Q \simeq C_V\,(T_B - T_A)}$$

15.11.10 Calore specifico e formula calorimetrica

Poiché C_V è estensiva, si introduce il **calore specifico massico**:

$$\boxed{c_V = \frac{C_V}{m}}$$

e quindi la formula calorimetrica (a volume costante):

$$\boxed{Q \simeq m\,c_V\,(T_B - T_A)}$$

Per l'acqua a temperatura ambiente:

$$c \approx 4180\,\mathrm{J/(kg\ K)} \approx 1\,\mathrm{kcal/(kg\ K)}$$

Per i gas si usa anche il calore specifico molare:

$$c_V = \frac{C_V}{n}$$

15.11.11 Capacità termica a pressione costante ed entalpia

A pressione costante, in una trasformazione infinitesima:

$$\delta Q = dU + p\,dV = dH$$

dove si introduce l'**entalpia**:

$$\boxed{H = U + pV}$$

La capacità termica a pressione costante è:

$$\boxed{C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}$$

Se c_p è circa costante, con $c_p = C_p/m$:

$$\boxed{Q \simeq m\,c_p\,(T_B - T_A)}$$

Per solidi e liquidi spesso $c_p \simeq c_V$ perché la dilatazione termica è piccola.

15.11.12 Transizioni di fase e calore latente

Durante una transizione di fase (fusione/solidificazione, ebollizione/condensazione), la temperatura resta costante anche se il sistema assorbe o cede calore. In questo caso la formula calorimetrica non è applicabile.

Il calore scambiato è proporzionale alla massa che cambia fase:

$$\boxed{Q = \lambda\,\Delta m}$$

dove λ è il **calore latente** (dipende da materiale, transizione e pressione) e Δm è la massa che ha cambiato fase.

Quando la transizione termina, la temperatura riprende a variare e tornano valide le formule calorimetriche.

15.12 Trasformazioni dei gas

15.12.1 Gas ideali (o perfetti)

I **gas ideali** (o **perfetti**) rappresentano il limite ideale dei gas molto rarefatti. Le leggi empiriche (Boyle, Volta-Gay-Lussac, Avogadro) si sintetizzano nella:

$$\boxed{pV = nRT}$$

dove n è il numero di moli e $R \simeq 8.3\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ è la costante dei gas.

Un'altra proprietà empirica fondamentale dei gas perfetti è che l'energia interna dipende **solo dalla temperatura**:

$$\boxed{U = U(T)}$$

quindi, scegliendo (p, V) come coordinate, U dipende solo dal prodotto pV, che tramite l'equazione di stato è fissato da T.

15.12.2 Calore specifico dei gas perfetti

Per i gas perfetti, in un ampio intervallo di temperature, vale una regola empirica (spiegabile con la meccanica statistica): il **calore specifico molare a volume costante** è:

$$\boxed{c_V = \frac{f}{2}R}$$

dove f è il numero di gradi di libertà (traslazionali + rotazionali) della molecola, assunta rigida.

Esempi tipici:

- **Gas monoatomici**: $f = 3 \Rightarrow \boxed{c_V = \frac{3}{2}R}$
- **Gas biatomici (e molecole lineari)**: $f = 5 \Rightarrow \boxed{c_V = \frac{5}{2}R}$
- **Molecole poliatomiche non lineari**: $f = 6 \Rightarrow \boxed{c_V = 3R}$

Se c_V è approssimativamente costante:

$$\boxed{U(T) \simeq n\, c_V\, T + \text{cost.}}$$

15.12.3 Relazione tra c_p e c_V nei gas perfetti

Nei gas perfetti vale sempre:

$$\boxed{c_p = c_V + R}$$

È utile introdurre anche il rapporto:

$$\boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_V}}$$

Valori tipici:

- gas monoatomico: $\gamma = \frac{5}{3}$
- gas biatomico/lineare: $\gamma = \frac{7}{5}$
- gas poliatomico non lineare: $\gamma = \frac{4}{3}$

15.12.4 Trasformazioni termodinamiche notevoli

Le trasformazioni notevoli sono:

- **Isocora**: $V = \text{cost.}$
- **Isobara**: $p = \text{cost.}$

- **Isoterma**: $T = \text{cost.}$
- **Adiabatica**: $Q = 0$

Ciascuna può essere irreversibile o reversibile. Nel piano pV:

- isocora: retta verticale
- isobara: retta orizzontale
- isoterma gas perfetto: $pV = \text{cost.}$ (ramo di iperbole)
- adiabatica reversibile gas perfetto: andamento caratteristico (vedi sotto)

15.12.5 Adiabatica reversibile di un gas perfetto

Per trasformazioni infinitesime di un gas perfetto:

$$\delta Q = dU + p\,dV$$

e usando $dU = nc_V\,dT$ e $p = \frac{nRT}{V}$:

$$\delta Q = nc_V\,dT + \frac{nRT}{V}\,dV$$

In una trasformazione **adiabatica** si ha $\delta Q = 0$, da cui si ottiene l'equazione delle adiabatiche reversibili:

$$\boxed{pV^\gamma = \text{cost.}}$$

La costante è fissata dallo stato iniziale, ad esempio $p_A V_A^\gamma$.

15.12.6 Lavoro e calore nelle trasformazioni notevoli

Per una trasformazione **isoterma reversibile** di gas perfetto da A a B:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV$$

con $p = \frac{nRT}{V}$:

$$\boxed{\mathcal{L}_{A\to B} = nRT\int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

Poiché in isoterma $U = U(T)$ e T è costante, $\Delta U = 0$, quindi dal I principio:

$$\boxed{Q = \mathcal{L}}$$

15.12.7 Trasformazioni cicliche

Un sistema può compiere una sequenza di trasformazioni e tornare nello stato iniziale: si parla di **ciclo**.

In un ciclo:

$$\boxed{\Delta U = 0}$$

quindi dal I principio:

$$\boxed{Q = \mathcal{L}}$$

Se il ciclo è rappresentato nel piano pV, il lavoro totale è l'**area racchiusa** dalla curva:

- area con segno **positivo** se il ciclo è percorso in senso orario (lavoro del sistema sull'ambiente)
- area con segno **negativo** se il ciclo è percorso in senso antiorario (lavoro dell'ambiente sul sistema)

15.12.8 Cenno alla teoria cinetica dei gas perfetti

Nel modello cinetico un gas perfetto è descritto come un insieme di N particelle puntiformi non interagenti che urtano elasticamente le pareti di un contenitore.

Da un'analisi statistica si ottiene una legge equivalente all'equazione di stato:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E_c \rangle$$

che, confrontata con $pV = nRT$, porta a:

$$\boxed{T = \frac{2\langle E_c \rangle}{3k_B}} \qquad \text{con} \qquad k_B = \frac{R}{N_A}$$

Per particelle non interagenti l'energia interna coincide con l'energia cinetica microscopica totale:

$$U = N\langle E_c \rangle$$

e quindi, per un gas monoatomico:

$$\boxed{U = \frac{3}{2} nRT}$$

(coerente con $c_V = \frac{3}{2}R$ e con costante additiva nulla).

Capitolo 16 — Entropia, irreversibilità e secondo principio

16.1 Secondo principio della termodinamica

16.1.1 Irreversibilità e limiti alle trasformazioni energetiche

Il **secondo principio della termodinamica** riguarda l'**irreversibilità** delle trasformazioni termodinamiche e, più in generale, dei fenomeni fisici macroscopici. A livello pratico impone limiti alle possibili trasformazioni dell'energia:

- l'energia meccanica macroscopica ("visibile") può trasformarsi integralmente in energia interna ("invisibile");
- non è invece possibile, in generale, trasformare integralmente energia interna (calore) in lavoro meccanico in modo ciclico.

Per questo si dice che l'energia **si consuma** pur conservandosi: energia utilizzabile diventa energia meno utilizzabile.

Una macchina che trasforma calore in lavoro meccanico con un **processo ciclico** (ripetibile indefinitamente) è detta **macchina termica** o **motore termico**. Il secondo principio pone limiti precisi al suo funzionamento.

16.1.2 Enunciati di Clausius e Kelvin

Il II principio si esprime tradizionalmente con uno dei seguenti enunciati (equivalenti tra loro).

- **Enunciato di Clausius:** è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico esito sia il passaggio di calore da un corpo più freddo a un corpo più caldo.
- **Enunciato di Lord Kelvin:** è impossibile realizzare una trasformazione ciclica il cui unico esito sia la trasformazione in lavoro di tutto il calore assorbito da una singola sorgente termica omogenea.

Per **sorgente termica** si intende un sistema capace di scambiare calore. Nel seguito si considerano sorgenti ideali che, pur scambiando calore, mantengono **temperatura costante** (capacità termica infinita).

16.1.3 Ciclo di Carnot e macchina termica ideale

Consideriamo un sistema termodinamico semplice S (controllato in volume) che opera tra due sorgenti ideali:

$$S_1 : \ \theta_1, \qquad S_2 : \ \theta_2 > \theta_1$$

(dove θ indica una temperatura empirica).

Il **ciclo di Carnot** è costituito da quattro trasformazioni **reversibili**:

- compressione isoterma a θ_1 con scambio di calore con S_1;
- compressione adiabatica che porta la temperatura da θ_1 a θ_2;
- espansione isoterma a θ_2 con scambio di calore con S_2;
- trasformazione adiabatica che riporta la temperatura a θ_1.

Il lavoro complessivo eseguito dal sistema in un ciclo è

$$\mathcal{L} = Q_{\text{tot}} = Q_2 + Q_1$$

e, in valore assoluto, se $|Q_2|$ è il calore assorbito dalla sorgente calda e $|Q_1|$ quello ceduto alla sorgente fredda:

$$\mathcal{L} = |Q_2| - |Q_1|$$

16.1.4 Rendimento di una macchina termica

Il **rendimento** η di una macchina termica è la frazione del calore assorbito dalla sorgente calda convertita in lavoro:

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{L}}{|Q_2|} = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|}}$$

16.1.5 Ciclo inverso di Carnot: frigorifero e pompa di calore

Poiché il ciclo di Carnot è reversibile, può essere percorso al contrario. In tal caso:

- il sistema assorbe calore dalla sorgente più fredda (θ_1);
- cede calore alla sorgente più calda (θ_2);
- richiede un lavoro esterno $|\mathcal{L}|$ fornito dall'ambiente.

Questo ciclo invertito è alla base di una **macchina frigorifera** (o **pompa di calore**): sottrae calore a un corpo freddo "pagando" lavoro meccanico, e scarica calore (maggiore di quello sottratto) verso un corpo caldo.

16.1.6 Equivalenza tra gli enunciati

I due enunciati sono equivalenti:

- se fosse falso Kelvin (convertire tutto il calore di una sola sorgente in lavoro in un ciclo), allora si potrebbe trasformare quel lavoro in calore e trasferirlo a una sorgente più calda, ottenendo come unico effetto il passaggio di calore da freddo a caldo, negando Clausius;
- se fosse falso Clausius (far passare calore da freddo a caldo come unico effetto), combinando questa possibilità con una macchina termica tra due sorgenti si potrebbe ottenere lavoro prelevando calore da una sola sorgente, negando Kelvin.

16.1.7 Teorema di Carnot

Teorema di Carnot: tra tutte le macchine che operano tra le stesse due temperature, la macchina reversibile (di Carnot) ha il **massimo rendimento**.

In particolare:

- tutte le macchine **reversibili** che lavorano tra le stesse temperature hanno lo **medesimo rendimento**.

16.1.8 Temperatura termodinamica assoluta

Il teorema di Carnot consente di introdurre una definizione operativa di temperatura assoluta **termodinamica**, che non dipende da una sostanza termometrica.

Fissata una sorgente di riferimento S_0 a temperatura convenzionale T_0, e una sorgente S_x di temperatura T_x da misurare, si esegue un ciclo di Carnot tra S_0 e S_x e si misurano i calori scambiati Q_0 e Q_x. Si definisce:

$$\boxed{T_x = \frac{|Q_x|}{|Q_0|} T_0}$$

Questa definizione è coerente e porta, per una macchina di Carnot tra due sorgenti a temperature assolute $T_1 < T_2$, al risultato:

$$\boxed{\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2}}$$

16.1.9 Rendimento del ciclo di Carnot

Per una macchina di Carnot che opera tra $T_1 < T_2$, vale:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

16.1.10 Coincidenza delle scale (gas perfetti)

Se il sistema S del ciclo di Carnot è un gas perfetto, usando le leggi dei gas perfetti si ottiene di nuovo:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

dove T è la temperatura assoluta definita empiricamente tramite un gas perfetto.

Il confronto con l'espressione generale mostra che la scala delle temperature termodinamiche coincide con quella assoluta empirica, a meno della scelta della costante di riferimento. Perciò la temperatura termodinamica è espressa in **Kelvin** (K).

16.2 Entropia

16.2.1 Secondo principio: formulazione generale

Il secondo principio implica che le trasformazioni **irreversibili** di un sistema **isolato** (o anche solo **adiabatico**) sono possibili solo in un verso e non nel verso opposto.

Per descrivere in modo semplice e generale il verso delle trasformazioni possibili si introduce una nuova variabile termodinamica detta **entropia**, indicata con $\mathcal{S}$, definita da una **funzione di stato** $\mathcal{S} = \mathcal{S}(p, V)$.

Il secondo principio può essere formulato così:

- in un sistema **isolato/adiabatico** l'entropia non può mai **diminuire**;
- resta **costante** nelle trasformazioni **reversibili**;
- **cresce** nelle trasformazioni **irreversibili**.

La definizione dell'entropia e questa formulazione generale si basano sul **teorema di Clausius**.

16.2.2 Teorema di Clausius

Per un ciclo di Carnot, includendo i segni dei calori scambiati dal sistema, vale:

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0}$$

Consideriamo ora un sistema S che compie una trasformazione ciclica (non necessariamente reversibile) interagendo con N sorgenti $S_1, \ldots, S_N$ alle temperature $T_1, \ldots, T_N$, assorbendo i calori $Q_1, \ldots, Q_N$ (negativi se ceduti).

Il secondo principio implica la seguente:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0}$$

Nel limite continuo (variazioni infinitesime), la relazione si scrive:

$$\boxed{\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0}$$

dove $\oint$ indica un integrale su un percorso chiuso e δQ è un elemento di calore non necessariamente legato alla variazione di una funzione di stato.

16.2.3 Equazione di Clausius (caso reversibile)

Se la trasformazione ciclica è **reversibile**, il ciclo può essere invertito e ciò implica che deve valere l'uguaglianza:

$$\boxed{\oint \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}} = 0}$$

In questo caso T rappresenta anche la temperatura del sistema S (non solo quella delle sorgenti).

16.2.4 Definizione termodinamica di entropia

Consideriamo due stati qualsiasi A e B e due trasformazioni **reversibili** che portano da A a B. Combinando una trasformazione con l'inversa dell'altra si ottiene un ciclo reversibile, per cui:

$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}} = 0$$

Da ciò segue che l'integrale di $(\delta Q/T)_{\text{rev}}$ tra A e B è **indipendente dal percorso** e dipende solo dagli estremi.

Questo permette di definire una funzione di stato $\mathcal{S}$ tale che:

$$\boxed{\mathcal{S}(B) - \mathcal{S}(A) = \Delta\mathcal{S} = \int_{A\to B} \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}}}$$

La definizione fissa $\mathcal{S}$ a meno di una costante additiva (in genere irrilevante nei problemi).

16.2.5 Proprietà essenziali dell'entropia

- Unità di misura: J/K.
- La variazione infinitesima di entropia è un differenziale esatto:

$$\boxed{d\mathcal{S} = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}}}$$

- L'entropia è **estensiva** e **additiva**: per un sistema composto $S = S_1 + S_2$ in equilibrio, e trascurando l'interazione:

$$\boxed{\Delta\mathcal{S} = \Delta\mathcal{S}_1 + \Delta\mathcal{S}_2}$$

16.2.6 Secondo principio ed entropia (forma generale)

Consideriamo una trasformazione qualsiasi (anche irreversibile) che porta S da A a B. Tornando poi da B ad A con una trasformazione reversibile, si ottiene un ciclo, e dalla disuguaglianza di Clausius segue:

$$\boxed{\int_{A\to B} \frac{\delta Q}{T} \leq \mathcal{S}(B) - \mathcal{S}(A)}$$

16.2.7 Trasformazione adiabatica: aumento dell'entropia

Se la trasformazione $A \to B$ è **adiabatica**, allora $\delta Q = 0$ e si ottiene:

$$\boxed{\mathcal{S}(B) \geq \mathcal{S}(A)}$$

con uguaglianza nel caso di trasformazioni adiabatiche **reversibili**.

16.3 Ordine, disordine e verso del tempo

16.3.1 Irreversibilità dei fenomeni macroscopici

Nell'esperienza comune, la maggioranza dei fenomeni è **irreversibile**: il fenomeno "invertito temporalmente" risulta impossibile.

L'idea di fenomeno invertito temporalmente può essere visualizzata come ciò che si vedrebbe in un filmato riprodotto all'indietro. Esempi tipici:

- un oggetto fragile cade, urta il pavimento e si rompe: nel film al contrario i frammenti si ricompongono e l'oggetto risale nella mano;
- latte e caffè mescolati diventano caffelatte: nel film al contrario la miscela si separa spontaneamente in due componenti.

Questi esempi mostrano che, a livello macroscopico, il **verso del tempo** è univocamente definito: è immediato riconoscere se un film è riprodotto "nel verso giusto" o "al contrario".

16.3.2 Reversibilità delle leggi microscopiche

Questa irreversibilità sembra ovvia, ma entra in tensione con molte leggi del moto studiate in meccanica. Se si escludono forze dissipative (attrito, viscosità, resistenza), le leggi della meccanica classica sono **simmetriche per inversione temporale**.

Sostituendo formalmente t con $-t$, le equazioni restano invariate (ad esempio la II legge di Newton e le leggi di forza conservative). Di conseguenza: se un moto $\vec{r}(t)$ è possibile, allora è possibile anche il moto "invertito" $\vec{r}'(t) = \vec{r}(-t)$.

Ad esempio, una palla che rimbalza **elasticamente** può in linea di principio compiere anche il moto inverso nel tempo.

16.3.3 Forze dissipative e trasformazioni energetiche

Una prima differenza tra micro e macro è la presenza, a livello macroscopico, di forze dissipative come gli **attriti**. L'attrito sottrae energia meccanica macroscopica e la trasforma in **energia interna** e/o in **calore** ceduto all'ambiente.

Il fenomeno inverso (un sistema che si raffredda o assorbe calore dall'ambiente e usa quell'energia per aumentare spontaneamente la propria energia meccanica macroscopica) è vietato dal **secondo principio della termodinamica**.

Questo mostra che l'irreversibilità macroscopica è legata alle trasformazioni energetiche:

$$\text{energia meccanica “ordinata”} \longrightarrow \text{energia interna “disordinata”}$$

16.3.4 Interpretazione statistica: frammenti che si uniscono

L'esempio dell'oggetto che si rompe mostra però che il problema non è *solo* l'attrito. Anche trascurando gli attriti, il moto inverso (frammenti che si riuniscono perfettamente e l'oggetto risale nella mano) non viola in linea di principio le leggi del moto, ma è comunque praticamente impossibile.

Il motivo è **statistico**: esiste una combinazione estremamente speciale di posizioni, orientazioni, velocità (traslazionali e rotazionali) e vibrazioni interne dei frammenti che porta alla riunificazione, mentre esiste un numero enorme di combinazioni che non la produce.

16.3.5 Esempio probabilistico: palline bianche e nere

Supponiamo una scatola con N palline (distinguibili), metà bianche e metà nere, inizialmente separate. Agitando la scatola, le palline si mescolano rapidamente fino a una configurazione circa omogenea.

In linea di principio il processo inverso non è vietato dalle leggi del moto, ma è **estremamente improbabile**. Se ogni pallina può stare a sinistra o a destra con probabilità $1/2$, il numero di configurazioni possibili è 2^N. Le configurazioni perfettamente “ordinate” (tutte bianche da un lato e tutte nere dall'altro) sono solo due. Quindi la probabilità di osservare una configurazione ordinata è circa:

$$\boxed{P_{\text{ordinata}} \simeq \frac{1}{2^N}}$$

Già per N moderati questa probabilità diventa irrisoria (ad esempio cresce rapidamente la scala di rarità all'aumentare di N).

16.3.6 Disordine e numero di configurazioni possibili

Il mescolamento latte–caffè è analogo, ma coinvolge un numero di particelle dell'ordine del numero di Avogadro,

$$N \sim 10^{23}$$

per cui la separazione spontanea diventa praticamente un'impossibilità assoluta.

In generale, le configurazioni "disordinate" sono enormemente più numerose delle configurazioni "ordinate":

- è facile passare da ordinato a disordinato;
- il contrario è praticamente impossibile.

Anche l'attrito, a livello microscopico, può essere interpretato in modo simile: trasforma energia "ordinata" (moti coerenti) in energia "disordinata" (agitazione microscopica).

16.3.7 Entropia statistica (Boltzmann)

A livello macroscopico, l'irreversibilità appare come una legge universale: la sua formulazione termodinamica è proprio il **secondo principio**.

Esiste anche una formula microscopica (statistica) dell'entropia, proposta da Boltzmann:

$$\boxed{\mathcal{S}(A) = k_B \ln \Omega(A)}$$

dove:

- $\Omega(A)$ è il numero di microstati compatibili con lo stato macroscopico A;
- k_B è la costante di Boltzmann, con

  $$\boxed{k_B = \frac{R}{N_A}}$$

  dove R è la costante dei gas e N_A è il numero di Avogadro.

Nel caso delle palline, lo stato "ordinato" ha pochissimi microstati (addirittura $\Omega = 1$ in un'idealizzazione), mentre lo stato "disordinato" ha un numero enorme di microstati (dell'ordine di 2^N): di conseguenza, lo stato disordinato ha entropia maggiore.

Questa interpretazione rende naturale il legame:

$$\text{processi spontanei} \implies \text{aumento di } \Omega \implies \text{aumento di } \mathcal{S}$$