ESERCIZIO 2

Calcolo delle derivate in $(0,1)$ della funzione:

$$f((x,y)) = x^2 + y^2 + xy \qquad (f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$$

OSS (FUNZIONI PIÙ VARIABILI):

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad n, m \in \mathbb{N}, \; n, m \geq 1$$

$$f(\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\mathbb{R}^n}) = \underbrace{(y_1, \dots, y_m)}_{\mathbb{R}^m}$$

$$\cancel{\frac{df}{dx}} \longrightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Jacobiano di f in un punto

$$\nabla f_1 := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Gradiente di f_1

$f((x,y)) = x^2 + y^2 + xy \qquad (f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$

$(0,1) = (\bar{x}, \bar{y})$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + \cancel{\dfrac{\partial}{\partial x}(y^2)} + \underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}(xy)}_{y} = \cancel{2x} + y \Big|_{\substack{x=\bar{x}=0 \\ y=\bar{y}=1}} = 1$

$2x$: $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2)$; $\cancel{2x} = 0$; $\cancel{\dfrac{\partial}{\partial x}(y^2)} = 0$

linearità della derivata

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \cancel{\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2)} + \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(xy)$

$= 0 + 2y + x \xrightarrow{(x,y)=(0,1)} 2$

derivata f 2 volte

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$? in questo caso sì!

Seconda Prima

Derivata seconda di f in un punto qualsiasi

$= \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x + y)$

$= \cancel{\dfrac{\partial}{\partial y}(2x)} + \dfrac{\partial}{\partial y}(y)$ (con $\cancel{\dfrac{\partial}{\partial y}(2x)} = 0$)

linearità della derivata

$= 1$

Quindi abbiamo che: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big|_{(0,1)} = 1$

Calcolate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \partial x \partial x$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \partial y \partial y$.

Data f funzione. Se (x,y) è un punto massimo/minimo locale per f

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \underline{0}}$$

condizione necessaria

sufficiente

vettore nullo

$\boxed{A} \Rightarrow \boxed{B}$

condizione necessaria per A

condizione sufficiente per B

Se B non vale allora A non vale, ma se A non vale non possiamo dire nulla su B.

ESEMPI (COND. NECESSARIE SUFFICIENTI)

1. Se $\nabla f(2,3) \neq 0$ allora $(2,3)$ non può essere un punto di max o min per f.
2. Se consideriamo

   A = "il numero è divisibile per 4"
   B = "il numero è pari"

- $A \Rightarrow B$, poiché se un numero è divisibile per 4, è divisibile anche per 2 e quindi è pari.

- $B \Rightarrow A$ non vale! 6 è pari, ma non è divisibile per 4.

Quindi "essere divisibile per 4" è condizione sufficiente per "essere pari", ma non è necessaria.

ESERCIZIO 7

$(0,0)$ è un punto stazionario per

$$f(x,y) = 2x^2y - xy^2 \ ?$$

SOL: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$= \left(4xy - y^2, \ 2x^2 - 2xy\right)$$

$$\nabla f(0,0) = (0, 0)$$

$\Rightarrow$ è punto stazionario, perché vale per definizione!

Un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è stazionario per f se $\nabla f(x,y) = 0$

MLE

ESERCIZIO 1

SOL: Dobbiamo generare $X_1, \_\_\_, X_{20}$ dalla distribuzione $Bin(n,p)$, dove $n=100$ e $p=0.55$

$$\mathcal{L}(p) = \mathbb{P}(x_1, x_2, \_\_\_, x_{20} \mid n)$$

indipendente v.a.

$$= \prod_{i=1}^{20} \mathbb{P}(x_i \mid n)$$

$$\mathbb{P}(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \qquad i=1, \_\_\_, 20$$

Point mass function (PMF)

$$\Rightarrow \mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^{20} \binom{100}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{100-x_i}$$

$$\Leftrightarrow \log(\mathcal{L}(p)) = \log\left(\prod_{i=1}^{20} \binom{100}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{100-x_i}\right)$$

implementato in Python: np.sums. ... logpmf

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{20} \log\left(\binom{100}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{100-x_i}\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{20} \left(\log\left(\overbrace{\binom{100}{x_i}}^{\in \mathbb{R}}\right) + \log\left(p^{x_i} (1-p)^{100-x_i}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{20} \log\left(p^{x_i} (1-p)^{100-x_i}\right) + \text{cost.}$$

$$= \sum_{i=1}^{20} \left(x_i \log(p) + (100-x_i)\log(1-p)\right) + \text{cost}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\log(\mathcal{L}(p)) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i \log(p) + (100-x_i)\log(1-p)\right) + 0$$

$$\Rightarrow \partial_p \log(\mathcal{L}(p)) = \sum_{i=1}^{20}\left(\frac{x_i}{p} - \frac{(100-x_i)}{1-p}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{20}\frac{x_i}{p} - \sum_{i=1}^{20}\frac{(100-x_i)}{1-p}$$

$$= \frac{1}{p}\underbrace{\overbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{20} x_i}}^{S \,=}}_{\text{moto}} - \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{20}(100-x_i)$$

$$= \frac{S}{p} - \frac{2000 - S}{1-p}$$

$$\partial_p(\log \mathcal{L}(p)) = 0 \iff \frac{S}{p} - \frac{2000-S}{1-p} = 0$$

$$\iff S(1-p) = (2000-S)p \iff$$

$$S - \cancel{Sp} = 2000p - \cancel{Sp} \iff \hat{p} = \frac{S}{2000}$$

ESERCIZIO 3

$$X_1, \_\_\_\_, X_{30} \sim \mathcal{N}(1,1)$$

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{30} f(x_i \mid \mu,\sigma)$$

$$f(x_i \mid \mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Implementato in Python np.sum....logpdf

$$\Rightarrow \log(\mathcal{L}(\mu,\sigma)) = \boxed{\sum_{i=1}^{30}\left(\log\left(e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}\right) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{30} -\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^{30}\log\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)$$

- $$\partial_\mu \log(\mathcal{L}(\mu,\sigma)) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{30}\partial_\mu\left((x_i-\mu)^2\right)$$

$$= \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\sum_{i=1}^{30}\cancel{-2}(x_i-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{30}(x_i-\mu)$$

$$\partial_\mu \log(\mathcal{L}(\mu,\sigma)) = 0 \iff \sum_{i=1}^{30}(x_i-\mu) = 0$$

$$\iff \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

- $$\partial_\sigma \log(\mathcal{L}(\mu,\sigma)) = \sum_{i=1}^{30}\left(\cancel{-\frac{1}{2}}\cancel{(-2)}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{\cancel{2}\cancel{\sigma}}{\cancel{2}\pi\sigma^{\cancel{2}}}\right)$$

$$\partial_\sigma \log(\mathcal{L}(\mu,\sigma)) = 0 \iff \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{30}(x_i-\mu)^2 - \frac{30}{\sigma} = 0$$

$$\iff \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}(x_i-\hat{\mu})^2$$