Statistica descrittiva bivariata

STATISTICA NUMERICA

A.Y. 2024-25

https://www.andreaminini.org/statistica/covarianza
https://tommasorigon.github.io/StatI/slides/sl_J.pdf
https://www.webtutordimatematica.it/materie/statistica-e-probabilita/variabili-aleatorie-e-distribuzioni-di-probabilita/covarianza

Covarianza fra due variabili

La covarianza indica la tendenza che hanno due variabili (X e Y) a *variare insieme*, ovvero, a *covariare*.
Ad esempio, si può supporre che vi sia una relazione tra l'insoddisfazione della madre e l'aggressività del bambino, nel senso che all'aumentare dell'una aumenta anche l'altra.

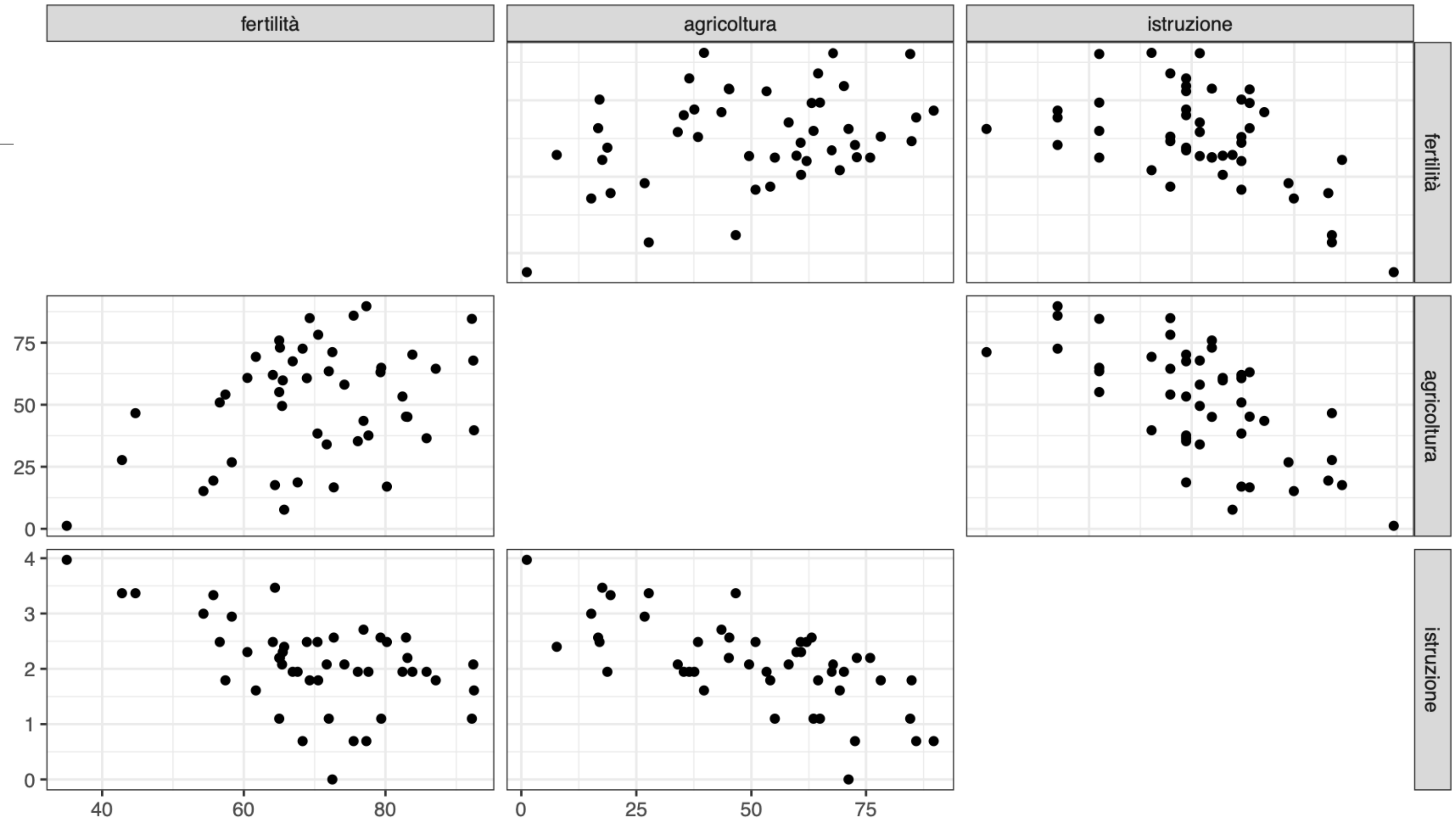
Quando si parla di correlazione bisogna prendere in considerazione due aspetti: *il tipo di relazione esistente* tra due variabili e *la forma della relazione*.

Covarianza fra due variabili: esempio

Consideriamo **tre indicatori socio-economici** disponibili per $n = 47$ province svizzere di lingua francese.
I dati sono storici e si riferiscono al 1888. Consideriamo:

- Una **misura di fertilità** (nati per donna), standardizzata in maniera tale che vari tra 0 e 100.
- Percentuale degli **occupati in agricoltura** sul totale degli occupati, interpretabile come un indicatore di urbanizzazione della provincia.
- Il logaritmo della percentuale della popolazione con un'**istruzione** superiore alla scuola primaria.

Il problema che ci poniamo è di cercare di descrivere le **relazioni** esistenti tra i tre indicatori.



fertilità
agricoltura
istruzione
fertilità
agricoltura
istruzione
0
25
50
75
0
1
2
3
4
40
60
80
0
25
50
75

Covarianza fra due variabili: esempio

- La percentuale di occupati in agricoltura e fertilità sono **positivamente associati**.
- Province con una alta percentuale di occupati in agricoltura hanno anche una alta fertilità. Viceversa, basse percentuali di occupati in agricoltura si osservano in province con bassi livelli di fertilità.
- Esiste una **associazione negativa** tra istruzione e fertilità. Province con un alto livello di istruzione hanno una fertilità più bassa delle province con un basso livello di istruzione.
- Simili considerazioni possono essere fatte per la relazione tra le variabili agricoltura e istruzione, in cui si osserva una **associazione negativa**.

Covarianza fra due variabili: esempio

- La relazione tra agricoltura e fertilità sembra **più debole** della relazione esistente tra agricoltura ed istruzione.

- Meno facile è valutare l'intensità delle relazioni intercorrenti tra istruzione e, rispettivamente, agricoltura e fertilità.

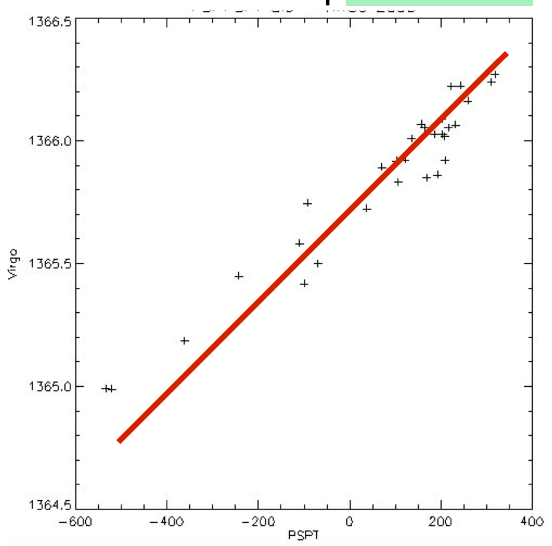
- La prima relazione (istruzione — agricoltura) sembra però in una qualche misura **più forte** della seconda (istruzione — fertilità).

Per quantificare queste relazioni, abbiamo pertanto bisogno di un **indice** che sia in grado di identificare forza e direzioni delle associazioni tra variabili.

Relazione lineare fra due variabili

Per quanto riguarda il **tipo di relazione**, essa può essere *lineare* o *non lineare.*

La relazione è di tipo *lineare* se, rappresentata su assi cartesiane, si avvicina alla forma di una retta.



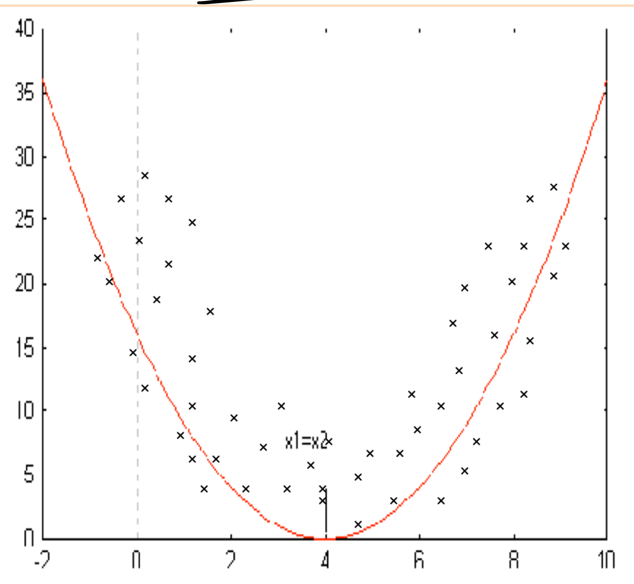
In questo caso, all'aumentare (o al diminuire) di X aumenta (diminuisce) Y.

Ad esempio, all'aumentare dell'altezza di una persona aumenta anche il suo peso.

- costante rispetto a un determinato valore
- direttamente proporzionale
- inversamente proporzionale

Relazione non lineare fra due variabili

La relazione è di tipo *non lineare,* se rappresentata su assi cartesiane, ha un andamento curvilineo (parabola o iperbole).

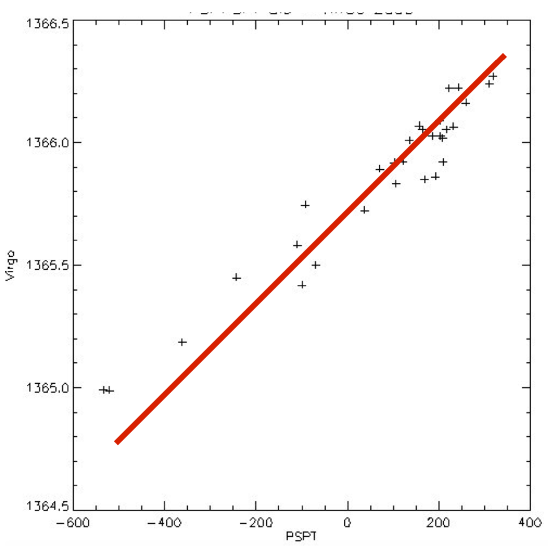


In questo caso a livelli bassi e alti di X corrispondono livelli bassi di Y; mentre a livelli intermedi di X corrispondono livelli alti di Y.

Ad esempio, il tempo impiegato per risolvere un problema è alto quando l'ansia è bassa o alta, è elevato quando l'ansia ha livelli medi.

Forma della relazione fra due variabili

Per quanto riguarda la **forma della relazione**, si distinguono l'*entità* e la *direzione*.
La **direzione** può essere: *positiva*, se all'aumentare di una variabile aumenta anche l'altra.

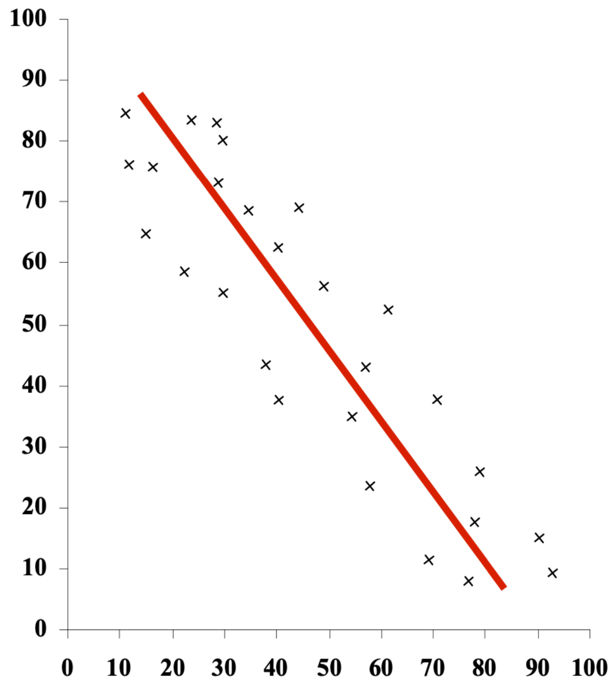


La **direzione** può essere: *positiva*, se all'aumentare di una variabile aumenta anche l'altra.

Ad esempio, all'aumentare dell'altezza di una persona aumenta anche il suo peso.

direttamente proporzionale

Forma della relazione fra due variabili



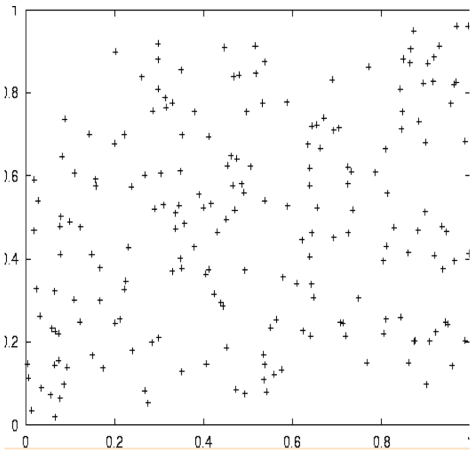
La direzione è *negativa* se all'aumentare di una variabile diminuisce l'atra.

inversamente proporzionale

Forma della relazione fra due variabili

L'**entità** si riferisce alla forza della relazione esistente tra due variabili.

Quanto più i punteggi sono raggruppati attorno ad una retta, tanto *più forte* è la relazione tra due variabili.



Se i valori sono dispersi in maniera uniforme, invece, tra le due variabili *non esiste* alcuna relazione.

Covarianza fra due variabili: definizione

Un indicatore che misura la forza della relazione tra due variabili è la **covarianza**.
Si noti che la covarianza è simmetrica, ovvero: cov(x,y) = cov(y,x).

$$\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

La covarianza pertanto assume valori **positivi** se la maggior parte dei termini ($xi - \bar{x}$) e ($yi - \bar{y}$) sono concordi, ovvero se hanno lo stesso segno.
La covarianza assume invece valori **negativi** se la maggior parte dei termini ($xi - \bar{x}$) e ($yi - \bar{y}$) sono discordi, ovvero se hanno segni diversi.
Infine, la covarianza assume valori **prossimi a zero** se i termini ($xi - \bar{x}$) e ($yi - \bar{y}$) sono in ugual misura concordi e discordi.

Covarianza fra due variabili: proprietà

- La covarianza tra la variabile *x* e *x* stessa è pari alla varianza di *x*, ovvero

ricordarsi la formula della varianza (diversa dalla var campionaria)

$$\mathrm{cov}(x,x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \mathrm{var}(x) \geq 0.$$

Poiché i termini ($xi - \bar{x}$) e ($xi - \bar{x}$) sono necessariamente sempre concordi, in questo caso la covarianza è grande e positiva.

- La covarianza tra la variabile *x* e −*x* stessa è pari alla varianza di *x* cambiata di segno, ovvero

ricordarsi la formula

$$\mathrm{cov}(x,-x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(-x_i+\bar{x}) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = -\mathrm{var}(x) \leq 0.$$

Poiché i termini ($xi - \bar{x}$) e $-(xi - \bar{x})$ sono necessariamente sempre discordi, in questo caso la covarianza è grande e negativa.

Matrici di covarianza

Nel caso in esame, troviamo che:

cov(fertilità, agricoltura) = 98.0,
cov(fertilità, istruzione) = −5.1,
cov(agricoltura, istruzione) = −11.9.

Tipicamente, le varianze e le covarianze di tutte le coppie di variabili vengono organizzate in una matrice, chiamata **matrice delle varianze e covarianze**.

	fertilità	agricoltura	istruzione
fertilità	152.7	98.0	-5.1
agricoltura	98.0	504.8	-11.9
istruzione	-5.1	-11.9	0.6

Matrici di covarianza

- In tale matrice, l'elemento in posizione (i,j) rappresenta la covarianza tra la variabile i-esima e la variabile j-esima.

- Nella diagonale ci sono le varianze, poiché cov(x,x) = var(x).

- Inoltre, poichè cov(x,y) = cov(y,x), la matrice è **simmetrica**.

Correlazione fra due variabili

Per affermare se la covarianza è piccola o grande dobbiamo confrontarla con il prodotto degli scarti quadratici medi.

~~Di conseguenza~~, solitamente la covarianza viene presentata direttamente nella sua forma **normalizzata**, chiamata correlazione.

Tale coefficiente è standardizzato e può assumere valori che vanno da **–1.00** (correlazione perfetta negativa) e **+1.00** (correlazione perfetta positiva). Una correlazione uguale a **0** indica che tra le due variabili non vi è alcuna relazione.

Nota. La correlazione non include il concetto di causa-effetto, ma solo quello di rapporto tra variabili. La correlazione ci permette di affermare che tra due variabili c'è una *relazione sistematica*, ma non che una causa l'altra.

Il coefficiente di correlazione r di Pearson

Tale coefficiente serve a misurare la correlazione tra variabili a intervalli o a rapporti equivalenti. Dette X e Y le due variabili e $\bar{X}$, $\bar{Y}$ le loro medie , il coefficiente di correlazione Pearson si definisce come(denomiato *r* oppure *cor*).

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Tale coefficiente può assumere valori che vanno da –1.00 (tra le due variabili vi è una correlazione perfetta negativa) e + 1.00 (tra le due variabili vi è una correlazione perfetta positiva). Una correlazione uguale a 0 indica che tra le due variabili non vi è alcuna relazione.

Il coefficiente di correlazione r di Pearson

Nel caso precedente, troviamo che:

cor(fertilità, agricoltura) = 0.35,
cor(fertilità, istruzione) = −0.52,
cor(agricoltura, istruzione) = −0.68.

Anche le correlazioni vengono tipicamente organizzate in una matrice, chiamata **matrice di correlazione**.

	fertilità	agricoltura	istruzione
fertilità	1	0.35	-0.52
agricoltura	0.35	1	-0.68
istruzione	-0.52	-0.68	1

Il coefficiente di correlazione r di Pearson

rapporti equivalenti

- La covarianza e la correlazione misurano esclusivamente **relazioni lineari**. Questo ha importanti conseguenze.
- Se la relazione tra x ed y è monotona ma non lineare, allora cor(x,y) < 1.

Esempio. Si considerino i dati $x1,\ldots,x5$ pari a −2,−1,...,2 e si consideri

$$y_i = e^{x_i}, \qquad i = 1, \ldots, 5.$$

Nonostante la relazione tra le variabili x ed y sia monotona, cor(x,y) = 0.89 < 1.

- Il fatto che cor(x,y) = 0 non permette di escludere la presenza di relazioni non-monotone nei dati.

Esempio. Si considerino i dati $x1,\ldots,x5$ pari a −2,−1,...,2 e si consideri

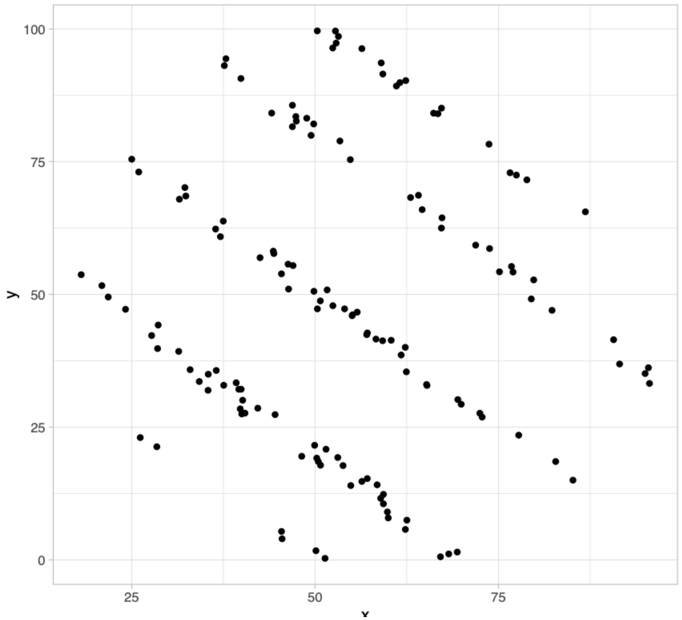
$$y_i = x_i^2, \qquad i = 1, \ldots, 5.$$

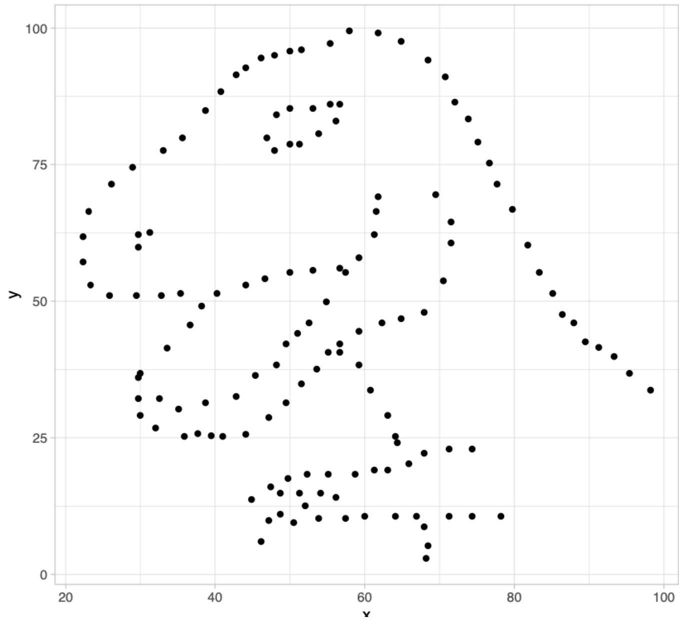
Nonostante ci sia una relazione ben precisa tra le variabili x ed y, cor(x,y) = 0.

MONOTONA → Una relazione è monotona quando, all'aumentare di una variabile, l'altra si muove esclusivamente in una direzione. Non importa come lo faccia, l'importante è che non cambi direzione.

LINEARE → Una relazione è lineare quando il tasso di cambiamento è costante. Rappresentata graficamente, è una linea retta. L'aumento della variabile Y è sempre proporzionale all'aumento della variabile x.

Il coefficiente di correlazione r di Pearson





Questi insiemi di dati hanno **correlazione nulla**