

Probabilità 1

esperimento \rightarrow è un processo il cui risultato è soggetto ad incertezza

$S \rightarrow$ Spazio dei campioni

$S \rightarrow$ insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento

$\#(A) = n \rightarrow$ CARDINALITÀ di un insieme \rightarrow numero di elementi dell'insieme

- Lo spazio dei campioni varia in caso di **reinserimento** e in caso di **ordinamento** (diverso ordine diverso risultato es. $(1,2) \neq (2,1)$)

Evento $\rightarrow E$

\rightarrow è un insieme di risultati, cioè un sottospazio dello spazio dei campioni

$$A \subseteq S$$

↑
sottoinsieme

Unione $\rightarrow C = A \cup B$. Un elemento $v \in C$ se $v \in A$ oppure $v \in B$

Intersezione $\rightarrow C = A \cap B$. Un elemento $v \in C$ se $v \in A$ e $v \in B$

Differenza $\rightarrow C = A - B$. Un elemento $v \in C$ se $v \in A$ e $v \notin B$

Probabilità \rightarrow L'obiettivo della probabilità è assegnare ad ogni evento A un numero $P(A)$, detto probabilità dell'evento A che dia misura della possibilità che si verifichi l'evento A .

$$P: S(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A$

2) $P(S) = 1$

3) Se A_1, A_2, \dots, A_n sono eventi disgiunti

$$A_i \cup A_j = \emptyset$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \forall n$$

$A^c \rightarrow$ insieme complementare di A nello spazio dei campioni S .

$$1) P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$2) P(\emptyset) = 0$$

3) Se $A \subset B$ allora $P(A) < P(B)$

$$4) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

modello ELM \rightarrow Equal Likely Model

\hookrightarrow tutti gli eventi hanno uguale probabilità di accadere

\hookrightarrow es. lancio di moneta, dado

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

Importante (numero casi favorevoli)

$n \rightarrow$ numero palline $K \rightarrow$ estrazioni

Insiemi ordinati con reimmissione n^K

$\square \square \square$
6 6 6

Insiemi ordinati senza reimmissione $n(n-1)(n-2)\dots(n-K+1)$

$\square \square \square$
6 5 4

Insiemi non ordinati con reimmissione

$$\frac{(n-1+k)!}{(n-1)! k!}$$

Insiemi non ordinati senza reimmissione

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$n \subset K$

Probabilità condizionata ed eventi indipendenti

La seconda probabilità è quindi condizionata dal precedente evento

Dati due eventi A e B , si definisce probabilità condizionata di B dato A e si scrive $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{se } P(A) > 0$$

Eventi indipendenti

A e B sono detti indipendenti se:

$$P(A|B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Quando il verificarsi di uno non influenza la probabilità di verificarsi dell'altro.
 - A e B^c sono indipendenti
 - A^c e B sono indipendenti
 - A^c e B^c sono indipendenti
 - Analogamente in caso di più eventi
- In caso contrario, sono detti dipendenti.

Eventi disgiunti → si riferiscono alla relazione tra eventi che non possono verificarsi contemporaneamente.

Probabilità II

Variabile Aleatoria

Una variabile aleatoria X è una funzione:

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}$$

che associa ad ogni elemento $w \in S$ un numero $X(w) = x$

Variabili aleatorie \rightarrow Lettere Maiuscole e il loro valore con lettere minuscole

Supporto di una variabile aleatoria \rightarrow indica l'insieme di tutti i possibili valori casuali di un dato esperimento e si indica con S_x .
Esempi:

Variabili Aleatorie Discrete:

\hookrightarrow Supporto composto da insieme numerabile (contabile) di elementi

Casi: 1) L'insieme è costituito da un numero finito di elementi
es. Esperimento di lanciare una moneta $S_x = \{0, 1, 2\}$
due volte, esce testa

2) L'insieme è costituito da un numero infinito di elementi
es. Lancio ripetuto di un dado finché non si ottiene un 6. $S_y = \{0, 1, \dots\}$

Variabili aleatoria continua:

\hookrightarrow Supporto composto da insieme non numerabile di elementi

• L'insieme è un intervallo continuo.

es. Esperimento l'arcoivo di un cliente in banca. $S_z = (0, \infty)$

Funzione di densità di probabilità

S_x di una variabile aleatoria Discreta \rightarrow insieme numerabile

PMF \rightarrow funzione di massa di X

La PMF (Probability mass function) è una funzione matematica che descrive la distribuzione probabilità di una variabile aleatoria discreta. Assegna a ogni possibile valore della variabile la probabilità che essa assuma esattamente quel valore.

La PMF di X denotata $\mathbf{f}_X(x)$ è definita come:

$$\mathbf{f}_X: S_X \rightarrow [0,1], \quad f_X(x) = P(X=x), \quad x \in S_X$$

Proprietà:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in S_X$$

$$\sum_{x \in S_X} f_X(x) = 1 \rightarrow \text{Somma totale 1 per rispetto a } S_X$$

Per una PMF

$$\underline{\text{media}} \rightarrow \mu = E[X] = \sum_{x \in S_X} x f_X(x)$$

$$\underline{\text{varianza}} \rightarrow \sigma^2 = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 f_X(x)$$

$$\underline{\text{dev. std}} \rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

CDF (cumulative distribution function)

La CDF descrive la probabilità che una variabile aleatoria (discreta o continua) assuma un certo valore minore o uguale a un certo x . È definita come:

$$F_X(t) = P(X \leq t), \quad -\infty < t < +\infty$$

Distribuzione Uniforme

Distribuzione discreta più comune \rightarrow distribuzione discreta uniforme

• Es. Dado

$$\text{PMF} \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{n}$$

$$\text{media} \quad \mu = \sum_{x=1}^n x f_X(x) = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{varianza} \quad \sigma^2 = \sum_{x=1}^n x^2 f_X(x) - \mu^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Distribuzione Binomiale si basa sul:

- Processo di Bernoulli \rightarrow un esperimento casuale che ha solo due possibili risultati

$P \rightarrow$ prob. succ. singolo processo

$$\text{PMF Bernoulli} \rightarrow f_X(x) = P^x (1-P)^{1-x}$$

$$\text{media } \mu = P$$

$$\text{varianza } \sigma^2 = np(1-p)$$

Distribuzione Binomiale

3 Principi: • E' costituito da n processi di Bernoulli

• i processi sono fra loro indipendenti

• ogni processo ha la stessa probabilità P di successo

X e' la variabile che conta i successi degli n processi

$$\text{PMF Binomiale } f_X(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x}$$

$$\text{media } \mu = np$$

$$\text{varianza } \sigma^2 = n(n-s)p^2$$

es. famiglia di 5 figli, sia $X = \{\text{numero di femmine}\} \dots$

Distribuzione di Poisson (abbiamo un intervallo di tempo)

• Variabile aleatoria continua

• Eventi rari

• $\lambda \rightarrow$ media dell'evento nell'intervallo di tempo $[0, t]$

$X \rightarrow \{\text{numero di eventi che accadono nell'intervallo } [c, t]\}$

$$\text{PMF distr. di Poisson} \quad f_X(x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} \quad e \rightarrow \text{eulero } 2,78$$

media e varianza coincidono $\mu = \sigma^2 = \lambda$

Distribuzioni continue → V. aleatorie Continue (es. altezza)

Probability Density Function (PDF)

Si definisce funzione di densità di probabilità (PDF), f_x associata a X la funzione

$$f_x: S_x \rightarrow \mathbb{R}$$

t.c.

A come $[a,b]$

$$P(x \in A) = \int_A f_x(x) dx$$

esempio

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f_x(x) dx \rightarrow \text{area sottesa dalla funzione } f_x \text{ nell'intervallo } [c,d]$$

Definizione

La PDF descrive la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria continua. A differenza della PMF (che assegna probabilità a valori discreti), la PDF rappresenta la densità di un punto ma non la probabilità diretta.

Proprietà PDF:

$$f_x(x) \geq 0 \quad \forall x \in S_x$$

$$\int_{x \in S_x} f_x(x) = 1$$

CDF → Cumulative Distribution Function $\rightarrow F_x(t)$

La funzione di ripartizione o di distribuzione di X , $F_x(t)$, descrive la probabilità che una variabile aleatoria (discreta o continua) assuma un valore minore o uguale a un certo punto t . È definita come:

$$F_x(t) = P(X \leq t) = -\infty < t < +\infty$$

$F_x(t)$ è non decrescente

Formule Generali PDF

$$\text{media } \mu = E X = \int_{x \in S_X} x f_X(x)$$

$$\text{varianza } \delta^2 = \int_{x \in S_X} (x - \mu)^2 f_X(x)$$

Distribuzione Continua Uniforme

sull'intervallo $[a, b]$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

Sono eventi che seguono ELM

$$\mu = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Distribuzione Normale

La variabile aleatoria casuale ha distribuzione normale

PDF \rightarrow $f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad -\infty < x < \infty$

di una distribuzione normale

La distribuzione normale viene identificata da due parametri

\hookrightarrow media μ e dev. standard σ

PDF
della distru.
norm. standard
 $(0, 1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}$$

CDF
distru. norm.

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx, \quad -\infty < t < \infty$$

Distribuzioni di variabili aleatorie di misura di un tempo di attesa

Variabile aleatoria che rappresenta un tempo prima che accada un evento (RATO)

Distribuzioni per variabili aleatorie di una distribuzione di un evento raro

Distribuzione esponenziale

PDF
distr. esponenziale

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0, \lambda > 0$$

$S_x(0, \infty)$

CDF
distr. esponenziale

$$F_x(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\text{media } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{varianza } \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuzione gamma

↪ Generalizzazione di una distribuzione esponenziale.

PDF
distr. Gamma

$$f_x(x) = \frac{\lambda^\alpha}{T(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0, \alpha > 0$$

$$\text{media } \mu = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\text{varianza } \sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Distribuzione Chi quadro

↪ è una distribuzione di probabilità continua utilizzata in statistica per verificare ipotesi, stimare varianze e confrontare le frequenze osservate con quelle stesse.

$$\text{PDF } f_x(x) = \frac{1}{\Gamma(P/2) 2^{P/2}} x^{\frac{P}{2}-1} e^{-x/2}, \quad x > 0, P > 0$$

$$T(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Distribuzione di t-Student

↪ è una distribuzione di probabilità continua che governa il rapporto tra due variabili aleatorie, la prima con distribuzione normale standard e la seconda al quadrato, segue una distribuzione chi quadrato.

PDF
distr. t-Student

$$f_x(x) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\nu/\nu}}$$

$Z \sim N(0,1)$ (normale std)
 $\chi^2 \sim \chi^2(\nu)$ (chi-quadrato con ν gradi di libertà)
indipendente da Z

Riassunto

Variabile aleatoria discreta

Caso generale

$$\mu = \sum_{x \in S_X} x f_X(x)$$

$$\sigma^2 = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 f_X(x)$$

Distribuzione Uniforme $f_{\bar{X}}(x) = \frac{1}{n}$

$$\mu = \sum_{x \in S_X} x f_{\bar{X}}(x) \rightarrow \sum_{x \in S_X} x \frac{1}{n} = \dots = \frac{n+1}{2}$$

$$\sigma^2 = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 f_{\bar{X}}(x) \rightarrow \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 \frac{1}{n} = \dots = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Distribuzione di Bernoulli ($p \rightarrow$ probabilità successo singolo evento)

$$f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

$$\mu = p$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

Distribuzione binomiale (n processi chi Bernoulli)

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = n(n-1)p^2$$

stats. binom. (pmf/mean/var) intervallo di tempo $[0, t]$

Distribuzione di Poisson

$\lambda \rightarrow$ media dell'evento

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{nell'intervalllo di tempo}$$

$$\mu = \sigma^2 = \lambda$$

Distribuzioni continue