Tecniche Algoritmiche / 2
Algoritmi *Greedy*

Jocelyne Elias
https://www.unibo.it/sitoweb/jocelyne.elias
Moreno Marzolla
https://www.moreno.marzolla.name/

Dipartimento di Informatica—Scienza e Ingegneria (DISI)
Università di Bologna

Introduzione

- Quando applicare la tecnica greedy?
  - Quando è possibile *dimostrare* che esiste una *scelta ingorda/greedy*
    - Fra le molte scelte possibili, se ne può facilmente individuare una che porta sicuramente alla soluzione ottima
  - Quando il problema ha sottostruttura ottima
    - “Fatta tale scelta, resta un sottoproblema con la stessa struttura del problema principale”
- Non tutti i problemi hanno una scelta ingorda
  - Quindi non tutti i problemi si possono risolvere con una tecnica greedy
  - in alcuni casi, soluzioni non ottime possono essere comunque interessanti

Schema di un algoritmo greedy generico

```
Greedy(insieme di candidati C) → soluzione
    S ← Ø
    while ( (not ottimo(S)) and (C ≠ Ø) ) do
        x ← seleziona(C)
        C ← C – {x}
        if (ammissibile(S union {x})) then
            S ← S  union {x}
        endif
    endwhile
    if (ottimo(S)) then
        return S
    else
        errore ottimo non trovato
    endif
```

Ritorna *true* sse la soluzione S è ottima

Estrae un candidato dall'insieme C

Ritorna *true* sse la soluzione candidata è una soluzione ammissibile (anche se non necessariamente ottima)

Nota importante: questo **NON** è un algoritmo vero e proprio! questo è solo uno schema di algoritmo, che deve essere opportunamente modificato per adattarlo allo specifico problema da risolvere

Problema del resto

Problema del resto

- Input
  - Un insieme di *n* tagli di monete/banconote *T*[1..*n*]
    - Disponiamo un numero infinito di monete di ciascun taglio
  - Un numero intero positivo *R* che rappresenta un importo (in centesimi di euro) da erogare
- Output
  - Il minimo numero (intero) di monete necessarie per erogare il resto di *R*

- Esempi:

T [ ] = {50, 20, 10, 5, 2, 1}, *R* = 78 → 5 pezzi: 50+20+5+2+1

T [ ] = {50, 20, 10, 5, 2, 1}, *R* = 19 → 4 pezzi: 10+5+2+2

Algoritmo greedy per il resto

- Insieme dei candidati *C*
  - Insieme dei tagli di monete a disposizione
- Soluzione *S*
  - Insieme delle monete da restituire
- **`ottimo(S)`**
  - *true* se la somma dei valori in *S* è uguale al resto
- **`ammissibile(S)`**
  - true se la somma dei valori in *S* è minore o uguale al resto
- **`seleziona(C)`**
  - eroga una moneta del massimo taglio minore o uguale al resto ancora da erogare
  - Nota: in questo algoritmo non bisogna modificare l'insieme *C*

Algoritmo greedy per il resto

```
// R = resto da erogare
// T[1..n] = gli n tagli di monete a disposizione
// output = numero totale di monete da erogare
RestoGreedy(integer R, integer T[1..n]) → integer
    ordina-decrescente(T); // ordina i tagli in senso decrescente
    integer nm ← 0;          // numero monete da erogare
    integer i ← 1;
    while ( R > 0 and i ≤ n ) do
        if ( R ≥ T[i] ) then
            R ← R – T[i];
            nm ← nm + 1;
        else
            i ← i + 1;
        endif
    endwhile
    if (R > 0) then
        errore: resto non erogabile
    else
        return nm;
    endif
```

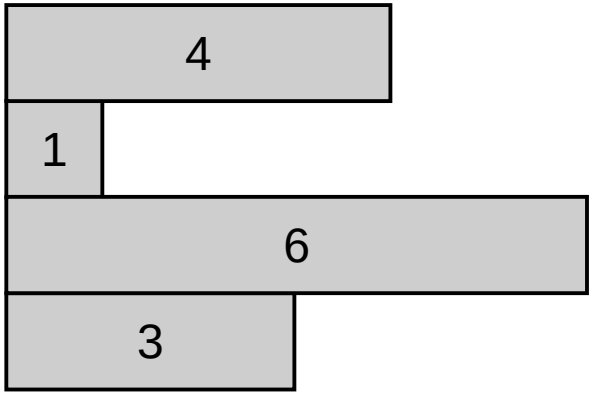
Se il taglio più piccolo disponibile è maggiore di 1c, allora potrebbe non esistere sempre un modo per erogare il resto R (esempio: R=13 usando i tagli T=[10, 5, 2])

Osservazione

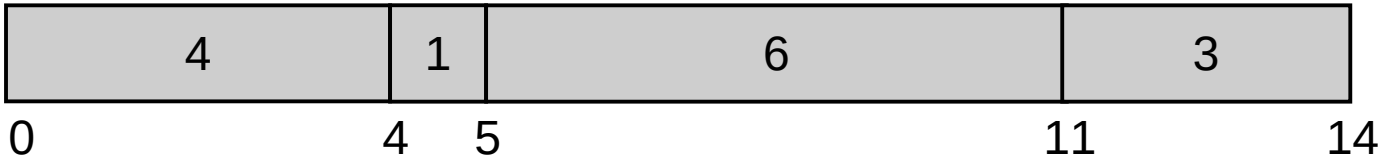
- I sistemi monetari per i quali l'algoritmo greedy fornisce la soluzione ottima si chiamano sistemi monetari canonici
  - Xuan Cai (2009). "***Canonical Coin Systems for CHANGE-MAKING Problems***". Proc. Ninth Int. Conf. on Hybrid Intelligent Systems 1: 499–504. doi:10.1109/HIS.2009.103.
- L'algoritmo greedy può fallire con sistemi non canonici
  - Es: erogare 6 con tagli 4, 3, 1 (greedy: 4+1+1, ottimo: 3+3)
  - Es: erogare 6 con tagli 5, 2 (sceglie 5 e poi non può erogare 1, la soluzione 2+2+2 risolverebbe il problema)
- Vedremo più avanti un approccio diverso che produce sempre la soluzione ottima

Problema di scheduling (Shortest Job First)

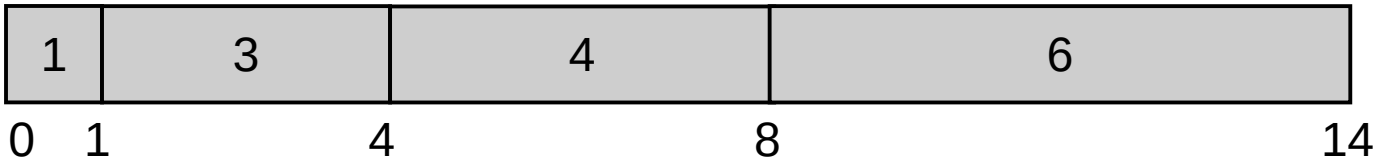
Algoritmo di scheduling—Shortest Job First



- Definizione:
  - 1 processore, *n* job p_1, p_2, ..., p_n
  - Ogni job p_i ha un tempo di esecuzione $t[i]$
  - Minimizzare il tempo medio di completamento



(4+5+11+14)/4 = 34/4



(1+4+8+14)/4 = 27/4

Algoritmo greedy di scheduling

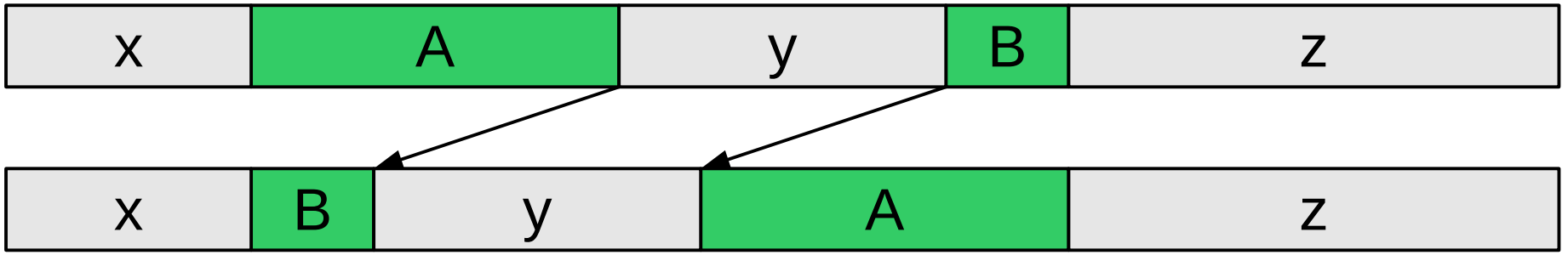
- Siano p_1, p_2, … p_n gli n job che devono essere eseguiti
- L'algoritmo greedy esegue n passi
  - ad ogni passo sceglie e manda in esecuzione il job, tra quelli che rimangono, con il minimo tempo di completamento
- Si puo' dimostrare che questa scelta greedy è ottima (vedi slide #14)

Algoritmo greedy per lo scheduling Shortest-job-first

- Insieme dei candidati C
  - Job da schedulare, inizialmente { p_1, p_2, … p_n }
- Soluzione S
  - Ordine dei job da schedulare: p_{i1}, p_{i2}, … p_{in}
- **`ottimo(S)`**
  - True se e solo se l'insieme S contiene tutti i job
- **`ammissibile(S)`**
  - Restituisce sempre true
- **`seleziona(C)`**
  - Sceglie il job di durata minima in C

Dimostrazione di ottimalità della scelta Greedy

- Consideriamo un ordinamento dei job in cui un job "lungo" A viene schedulato prima di uno "corto" B
  - x, y e z sono sequenze di altri job



- Osserviamo:
  - Il tempo di completamento dei job in x e in z non cambia
  - Il tempo di completamento di A nella seconda soluzione è uguale al tempo di completamento di B nella prima soluzione
  - Il tempo di completamento di B nella seconda soluzione è minore del tempo di completamento di A nella prima soluzione
  - Il tempo di completamento dei job in y si riduce

Problema della compressione (alberi di Huffman)

Problema della compressione

- Rappresentare i dati in modo efficiente
  - Impiegare il numero minore di bit per la rappresentazione dei dati
  - Scopo: risparmio spazio su disco e tempo di trasferimento su un canale di trasmissione

- Una possibile tecnica di compressione: *codifica di caratteri*
  - Tramite *funzione di codifica f: f(c) = x*
    - *c* è un carattere preso da un alfabeto Σ
    - *x* è una rappresentazione binaria del carattere c
    - "*c* è rappresentato da *x*"

Codici di Huffman

- Supponiamo di avere un file di *N* caratteri
  - caratteri: **'a'** **'b'** **'c'** **'d'** **'e'** **'f'**
  - frequenze: **45%** **13%** **12%** **16%** **9%** **5%**
- Codifica tramite ASCII (8 bit per carattere)
  - Dimensione totale: $8N$ bit
- Codifica basata sull'alfabeto (3 bit per carattere)
  - Codifica: **000** **001** **010** **011** **100** **101**
  - Dimensione totale: $3N$ bit

- Possiamo fare di meglio?

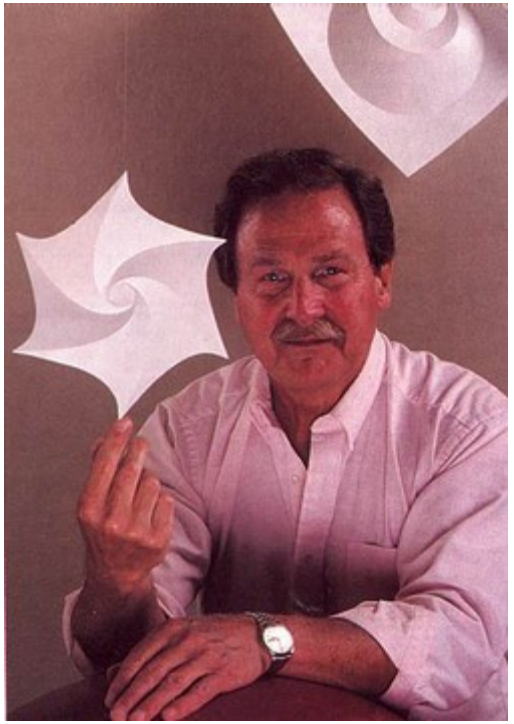
Codici di Huffman

- Codifica a lunghezza variabile
  - Caratteri: **'a'** **'b'** **'c'** **'d'** **'e'** **'f'**
  - Codifica: **0** **101** **100** **111** **1101** **1100**
  - Dimensione totale: $(0.45\times1+0.13\times3+0.12\times3+0.16\times3+0.09\times4+0.05\times4)\times N=2.24N$
- Codice “a prefisso” (“senza prefissi”):
  - Nessun codice è un prefisso di un altro codice
  - Condizione sufficiente per permettere la decodifica
- Esempio: **addaabca**
  - 0·111·111·0·0·101·100·0

f(a) = 1, f(b)=10, f(c)=101
Come decodificare 101? come “c” o “ba”?

Codici di Huffman

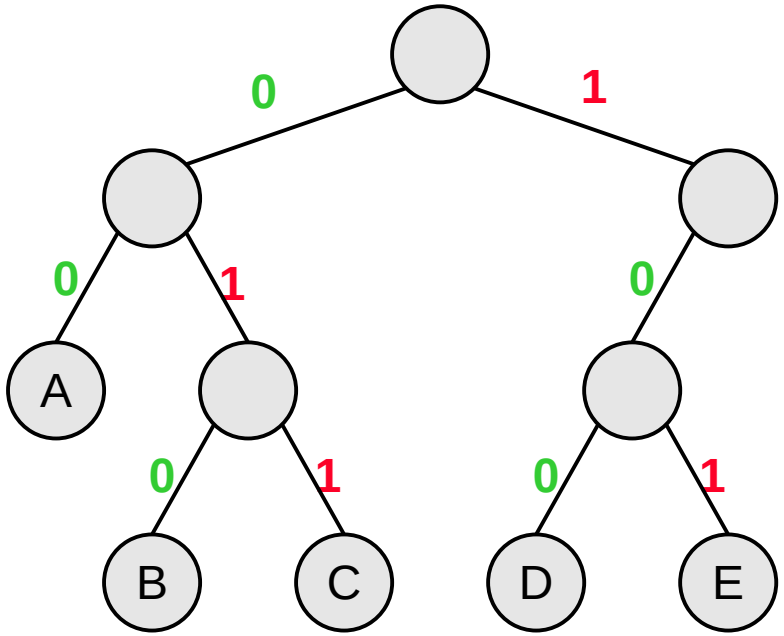
- Definire un algoritmo per la codifica è il tema dei lucidi seguenti
- Huffman, D.A., "*A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes*," Proc. of the IRE, vol. 40, no. 9, pp. 1098—1101, Sept. 1952, doi: 10.1109/JRPROC.1952.273898
  - Algoritmo ottimo per costruire codici prefissi



David Albert Huffman
(9 agosto 1925 – 7 ottobre 1999)

Rappresentazione ad albero

- Rappresentazione del codice come un albero binario
  - Figlio sinistro: 0 Figlio destro: 1
  - Caratteri dell'alfabeto sulle foglie



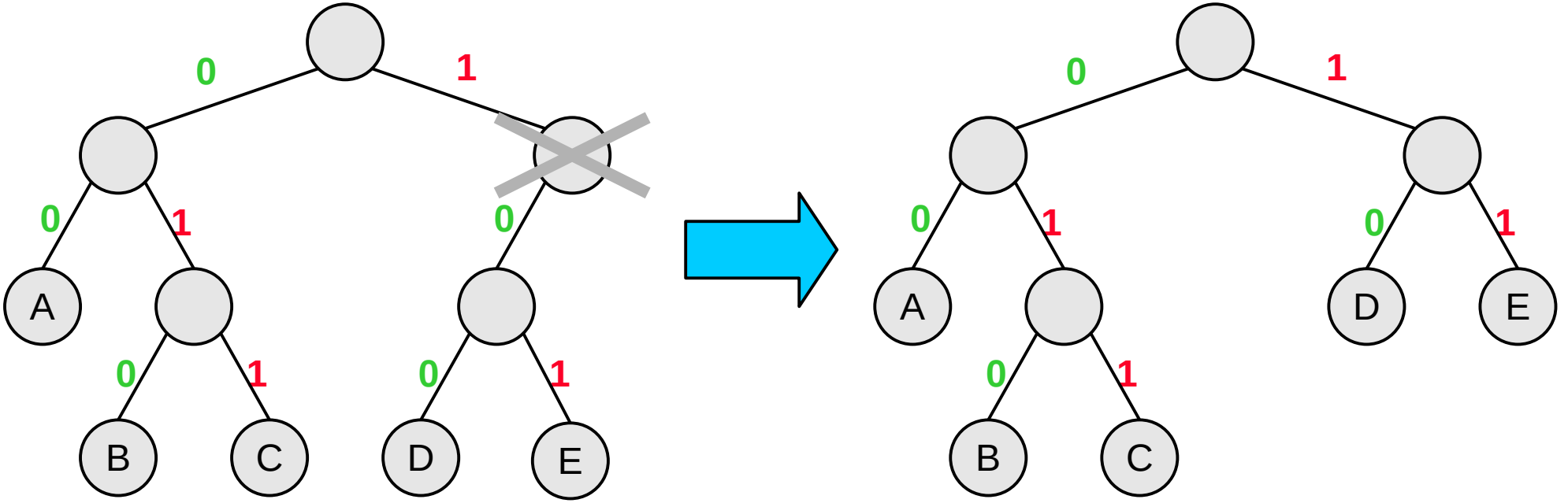
A: 00
B: 010
C: 011
D: 100
E: 101

Algoritmo di decodifica:

1. parti dalla radice
2. leggi un bit alla volta percorrendo l'albero:
   0: sinistra
   1: destra
3. stampa il carattere della foglia
4. torna a 1

Rappresentazione ad albero per la decodifica

- Non c'è motivo per avere un nodo interno con un solo figlio



A: 00
B: 010
C: 011
D: 100
E: 101

A: 00
B: 010
C: 011
D: 10
E: 11

Definizione formale del problema

- Definizione: codice ottimo
  - Dato un file *F*, una funzione di codifica *f* è ottima per *F* se non esiste un'altra funzione di codifica tramite la quale *F* possa essere compresso in un numero inferiore di bit.
- Nota:
  - La funzione di codifica ottima dipende dal file
  - Possono esistere più funzioni di codifica ottima

Algoritmo di Huffman

- Principio del codice di Huffman
  - Minimizzare la lunghezza delle codifiche dei caratteri che compaiono più frequentemente
  - Assegnare ai caratteri con la frequenza minore i codici corrispondenti ai percorsi più lunghi all'interno dell'albero
- Un codice è progettato per un file specifico
  - Si calcolano le frequenze di ciascun carattere
  - Si costruisce il codice
  - Si rappresenta il file tramite il codice
  - Si aggiunge al file una rappresentazione del codice

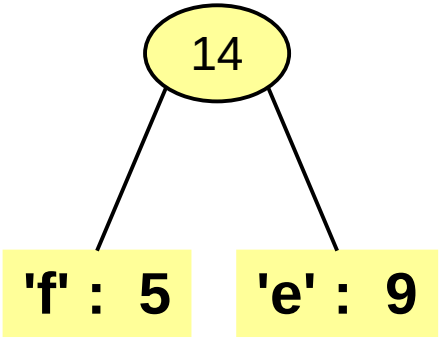
Costruzione del codice

- Passo 1: Costruire una lista ordinata di nodi, in cui ogni nodo contiene un carattere e il numero di volte in cui quel carattere compare nel file

'f' : 5 **'e' : 9** **'c' : 12** **'b' : 13** **'d' : 16** **'a' : 45**

Costruzione del codice

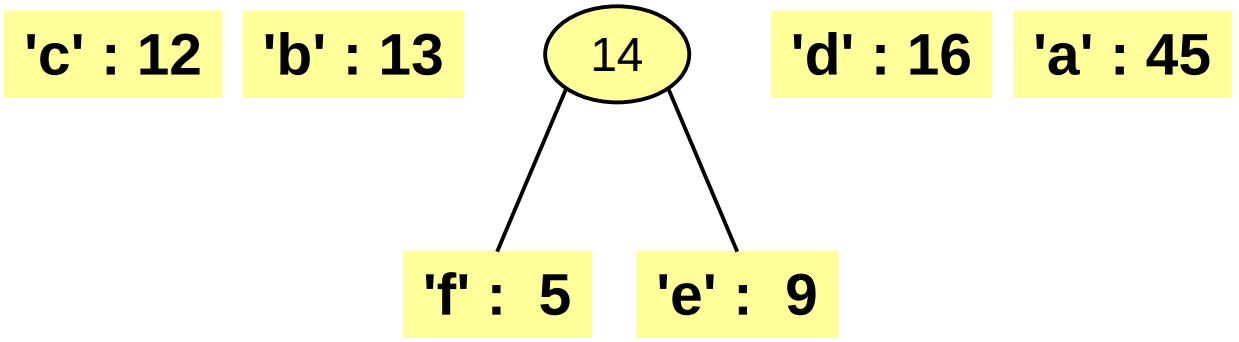
- Passo 2: Rimuovere i due nodi con frequenze minori
- Passo 3: Collegarli ad un nodo padre etichettato con la frequenza combinata (sommata)



'c' : 12 **'b' : 13** **'d' : 16** **'a' : 45**

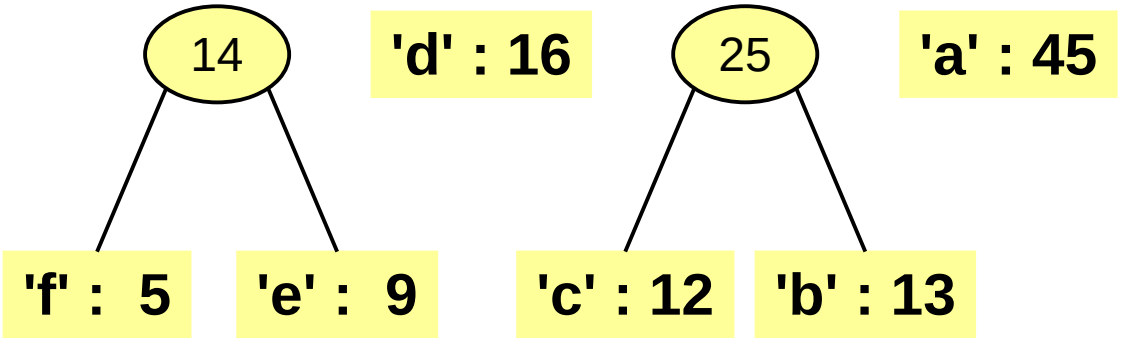
Costruzione del codice

- Passo 4: Aggiungere il nodo combinato alla lista, mantenendola ordinata in base alle frequenze



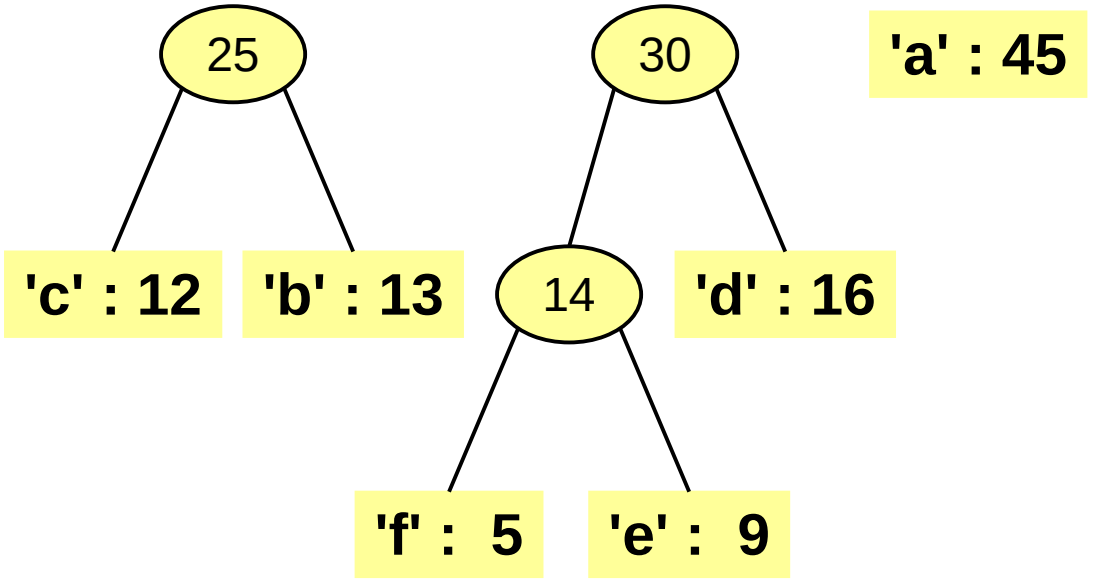
Costruzione del codice

- Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



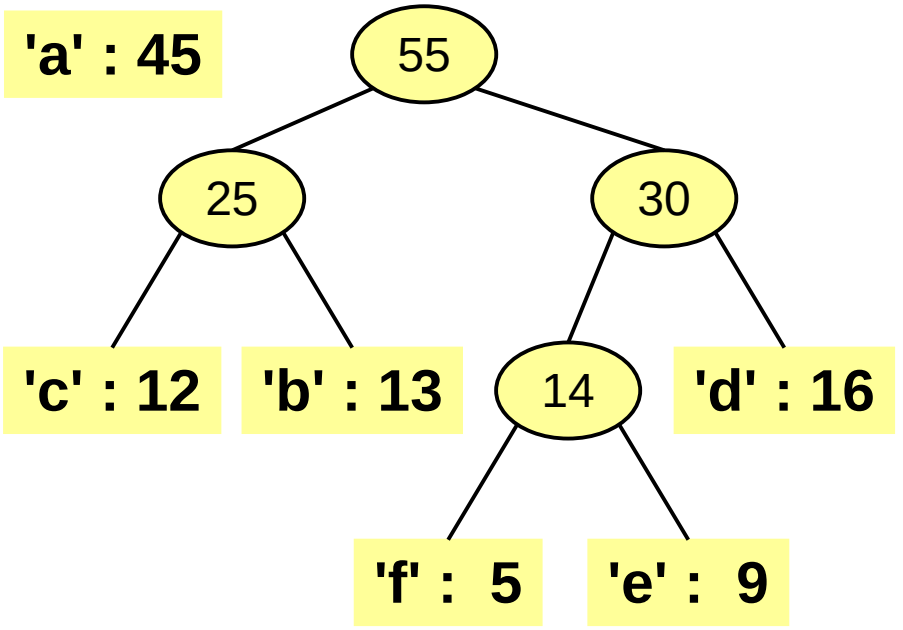
Costruzione del codice

- Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



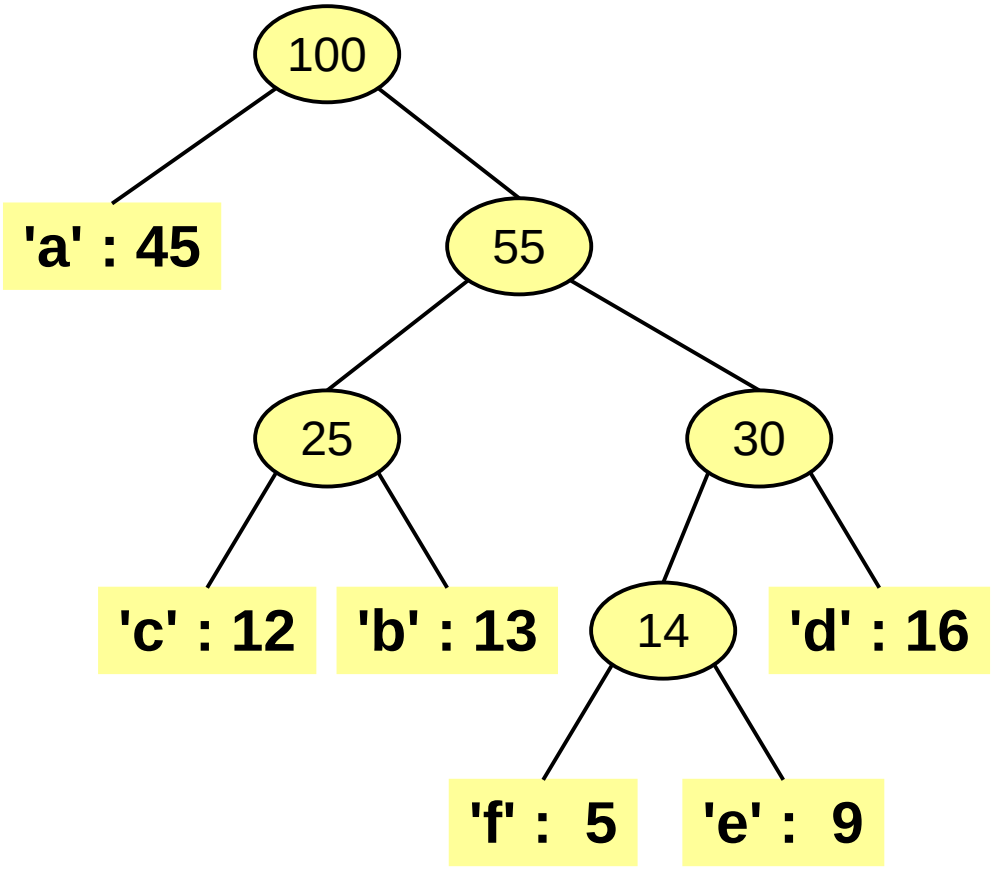
Costruzione del codice

- Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



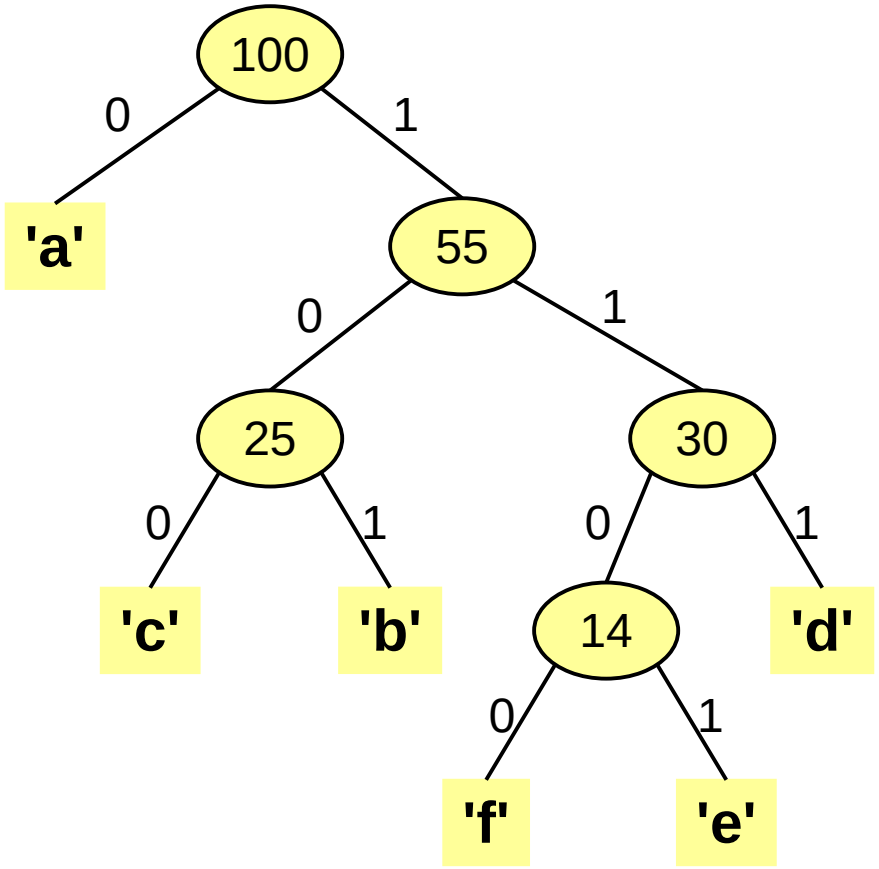
Costruzione del codice

- Al termine si etichettano gli archi dell'albero con 0 / 1



Costruzione del codice

- Al termine si etichettano gli archi dell'albero con 0 / 1



Algoritmo di Huffman

```
Huffman(real f[1..n], char c[1..n]) → Tree
    Q ← new MinPriorityQueue()
    integer i;
    for i ← 1 to n do
        z ← new TreeNode(f[i], c[i]);
        Q.insert(f[i], z);
    endfor
    for i ← 1 to n – 1 do
        z1 ← Q.findMin(); Q.deleteMin();
        z2 ← Q.findMin(); Q.deleteMin();
        z ← new TreeNode(z1.f + z2.f, '');
        z.left ← z1;
        z.right ← z2;
        Q.insert(z1.f + z2.f, z);
    endfor
    return Q.findMin();
```

Costo $\Theta(n \log n)$

insert(chiave, valore)

Struttura TreeNode:

f	frequenza
c	carattere
left	figlio sinistro
right	figlio destro

Algoritmi greedy

- **Vantaggi**
  - Semplici da programmare
  - Solitamente efficienti
  - Quando è possibile dimostrare la proprietà di scelta greedy danno la soluzione ottima
  - La soluzione sub-ottima può essere accettabile

- **Svantaggi**
  - Non tutti i problemi ammettono una soluzione greedy
  - Quindi, in certi casi gli algoritmi greedy non possono essere usati se si vuole la soluzione ottima
    - Ma possono essere comunque applicati se ci si accontenta di una soluzione non necessariamente ottima