Tecniche Algoritmiche / 2
Algoritmi *Greedy*

Jocelyne Elias
https://www.unibo.it/sitoweb/jocelyne.elias
Moreno Marzolla
https://www.moreno.marzolla.name/

Dipartimento di Informatica—Scienza e Ingegneria (DISI)
Università di Bologna

Un algoritmo greedy fa sempre la scelta ottima in un determinato momento, ovvero fa una scelta localmente ottima

Introduzione

- Quando applicare la tecnica greedy?
  - Quando è possibile *dimostrare* che esiste una *scelta ingorda/greedy*
    - Fra le molte scelte possibili, se ne può facilmente individuare una che porta sicuramente alla soluzione ottima
  - Quando il problema ha sottostruttura ottima
    - “Fatta tale scelta, resta un sottoproblema con la stessa struttura del problema principale”

- Non tutti i problemi hanno una scelta ingorda
  - Quindi non tutti i problemi si possono risolvere con una tecnica greedy
  - in alcuni casi, soluzioni non ottime possono essere comunque interessanti

Schema di un algoritmo greedy generico

```
Greedy(insieme di candidati C) → soluzione
    S ← Ø
    while ( (not ottimo(S)) and (C ≠ Ø) ) do
        x ← seleziona(C)
        C ← C – {x}
        if (ammissibile(S union {x})) then
            S ← S  union {x}
        endif
    endwhile
    if (ottimo(S)) then
        return S
    else
        errore ottimo non trovato
    endif
```

Ritorna *true* sse la soluzione S è ottima

Estrae un candidato dall'insieme C

Ritorna *true* sse la soluzione candidata è una soluzione ammissibile (anche se non necessariamente ottima)

Nota importante: questo **NON** è un algoritmo vero e proprio! questo è solo uno schema di algoritmo, che deve essere opportunamente modificato per adattarlo allo specifico problema da risolvere

Problema del resto

Problema del resto

- Input
  - Un insieme di n tagli di monete/banconote $T[1..n]$
    - Disponiamo un numero infinito di monete di ciascun taglio
  - Un numero intero positivo R che rappresenta un importo (in centesimi di euro) da erogare
- Output
  - Il minimo numero (intero) di monete necessarie per erogare il resto di R

- Esempi:

$T[\,] = \{50, 20, 10, 5, 2, 1\}$, $R = 78 \rightarrow$ 5 pezzi: 50+20+5+2+1

$T[\,] = \{50, 20, 10, 5, 2, 1\}$, $R = 19 \rightarrow$ 4 pezzi: 10+5+2+2

Algoritmo greedy per il resto

- Insieme dei candidati *C*
  - Insieme dei tagli di monete a disposizione
- Soluzione *S*
  - Insieme delle monete da restituire
- **`ottimo(S)`**
  - *true* se la somma dei valori in *S* è uguale al resto
- **`ammissibile(S)`**
  - true se la somma dei valori in *S* è minore o uguale al resto
- **`seleziona(C)`**
  - eroga una moneta del massimo taglio minore o uguale al resto ancora da erogare
  - Nota: in questo algoritmo non bisogna modificare l'insieme *C*

Algoritmo greedy per il resto

```
// R = resto da erogare
// T[1..n] = gli n tagli di monete a disposizione
// output = numero totale di monete da erogare
RestoGreedy(integer R, integer T[1..n]) → integer
    ordina-decrescente(T); // ordina i tagli in senso decrescente
    integer nm ← 0;          // numero monete da erogare
    integer i ← 1;
    while ( R > 0 and i ≤ n ) do
        if ( R ≥ T[i] ) then
            R ← R – T[i];
            nm ← nm + 1;
        else
            i ← i + 1;
        endif
    endwhile
    if (R > 0) then
        errore: resto non erogabile
    else
        return nm;
    endif
```

Se il taglio più piccolo disponibile è maggiore di 1c, allora potrebbe non esistere sempre un modo per erogare il resto R (esempio: R=13 usando i tagli T=[10, 5, 2])

Osservazione

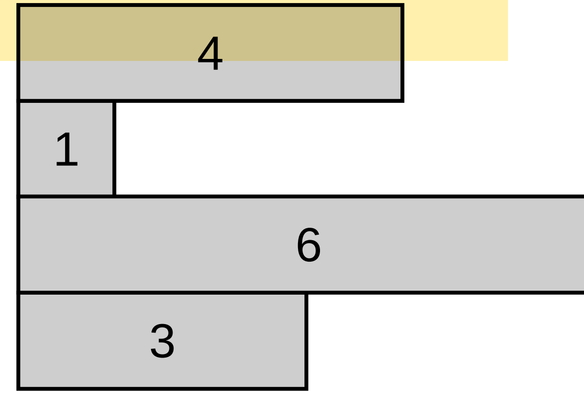
- I sistemi monetari per i quali l'algoritmo greedy fornisce la soluzione ottima si chiamano sistemi monetari canonici
  - Xuan Cai (2009). "***Canonical Coin Systems for CHANGE-MAKING Problems***". Proc. Ninth Int. Conf. on Hybrid Intelligent Systems 1: 499–504. doi:10.1109/HIS.2009.103.

esiste almeno un caso in cui il greedy fallisce o non e' ottimale

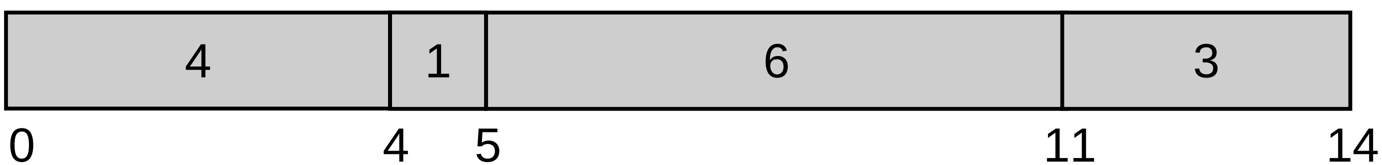
- L'algoritmo greedy può fallire con sistemi non canonici
  - Es: erogare 6 con tagli 4, 3, 1 (greedy: 4+1+1, ottimo: 3+3)
  - Es: erogare 6 con tagli 5, 2 (sceglie 5 e poi non può erogare 1, la soluzione 2+2+2 risolverebbe il problema)
- Vedremo più avanti un approccio diverso che produce sempre la soluzione ottima

Problema di scheduling (Shortest Job First)

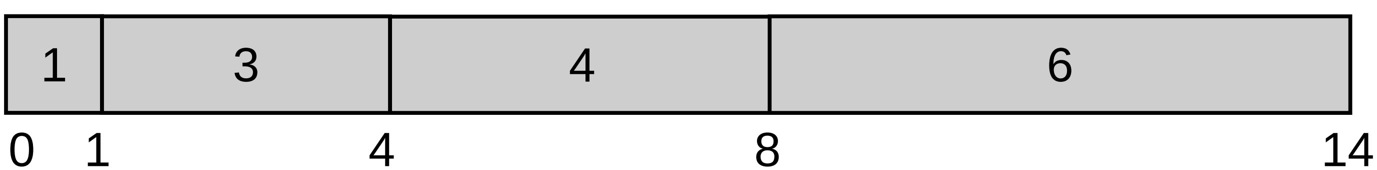
Algoritmo di scheduling—Shortest Job First



- Definizione:
  - 1 processore, n job p_1, p_2, ..., p_n
  - Ogni job p_i ha un tempo di esecuzione $t[i]$
  - Minimizzare il tempo medio di completamento



$(4+5+11+14)/4 = 34/4$



$(1+4+8+14)/4 = 27/4$

Algoritmo greedy di scheduling

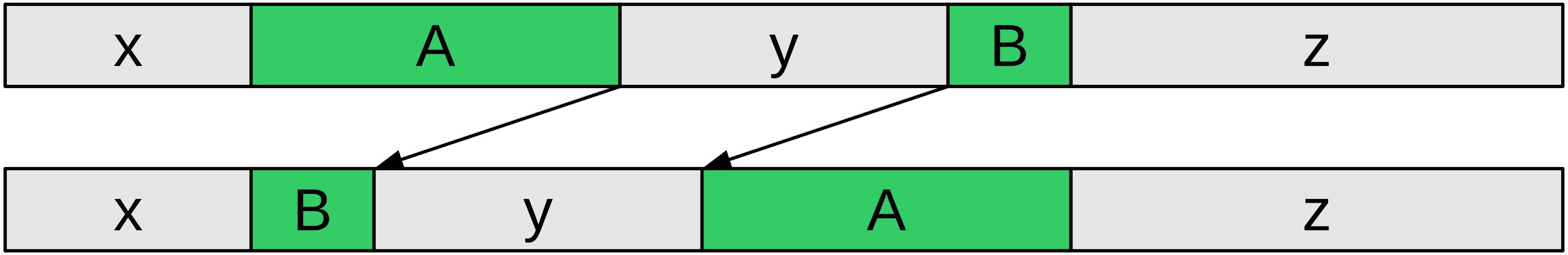
- Siano p_1, p_2, … p_n gli *n* job che devono essere eseguiti
- L'algoritmo greedy esegue *n* passi
  - ad ogni passo sceglie e manda in esecuzione il job, tra quelli che rimangono, con il minimo tempo di completamento
- Si puo' dimostrare che questa scelta greedy è ottima (vedi slide #14)

Algoritmo greedy per lo scheduling Shortest-job-first

- Insieme dei candidati C
  - Job da schedulare, inizialmente { p_1, p_2, … p_n }
- Soluzione S
  - Ordine dei job da schedulare: p_{i1}, p_{i2}, … p_{in}
- **`ottimo(S)`**
  - True se e solo se l'insieme S contiene tutti i job
- **`ammissibile(S)`**
  - Restituisce sempre true
- **`seleziona(C)`**
  - Sceglie il job di durata <u>minima</u> in C

Dimostrazione di ottimalità della scelta Greedy

- Consideriamo un ordinamento dei job in cui un job "lungo" A viene schedulato prima di uno "corto" B
  - x, y e z sono sequenze di altri job



- Osserviamo:
  - Il tempo di completamento dei job in x e in z non cambia
  - Il tempo di completamento di A nella seconda soluzione è uguale al tempo di completamento di B nella prima soluzione
  - Il tempo di completamento di B nella seconda soluzione è minore del tempo di completamento di A nella prima soluzione
  - Il tempo di completamento dei job in y si riduce

Problema della compressione (alberi di Huffman)

Problema della compressione

- Rappresentare i dati in modo efficiente
  - Impiegare il numero minore di bit per la rappresentazione dei dati
  - Scopo: risparmio spazio su disco e tempo di trasferimento su un canale di trasmissione

- Una possibile tecnica di compressione: *codifica di caratteri*
  - Tramite *funzione di codifica f: f(c) = x*
    - *c* è un carattere preso da un alfabeto Σ
    - *x* è una rappresentazione binaria del carattere c
    - "*c* è rappresentato da *x*"

Codici di Huffman

- Supponiamo di avere un file di *N* caratteri
  - caratteri: **'a' 'b' 'c' 'd' 'e' 'f'**
  - frequenze: **45% 13% 12% 16% 9% 5%**
- Codifica tramite ASCII (8 bit per carattere)
  - Dimensione totale: 8*N* bit
- Codifica basata sull'alfabeto (3 bit per carattere)
  - Codifica: **000 001 010 011 100 101**
  - Dimensione totale: 3*N* bit

- Possiamo fare di meglio?

Codici di Huffman

- Codifica a lunghezza variabile
  - Caratteri: **'a'** **'b'** **'c'** **'d'** **'e'** **'f'**
  - Codifica: **0** **101** **100** **111** **1101** **1100**
  - Dimensione totale: $(0.45\times1+0.13\times3+0.12\times3+0.16\times3+0.09\times4+0.05\times4)\times N=2.24N$
- Codice "a prefisso" ("senza prefissi"):
  - Nessun codice è un prefisso di un altro codice
  - Condizione sufficiente per permettere la decodifica
- Esempio: **addaabca**
  - 0·111·111·0·0·101·100·0

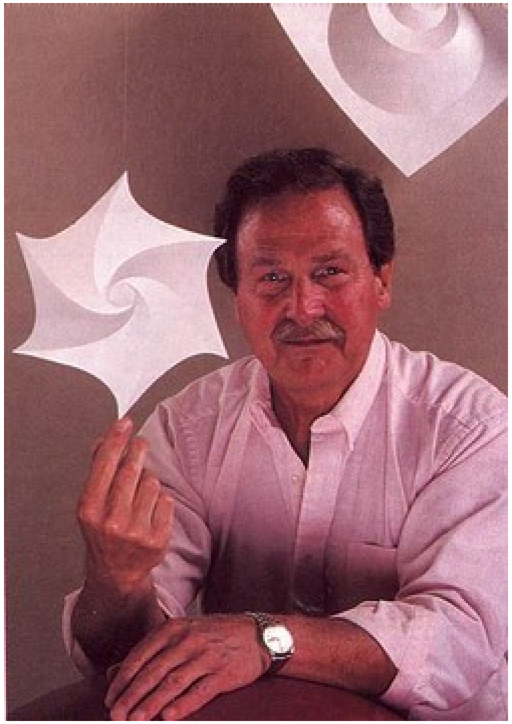
f(a) = 1, f(b)=10, f(c)=101
Come decodificare 101? come "c" o "ba"?

Un codice a prefisso e' un tipo di codifica in cui nessuna parola codice e' il prefisso di un altra.
Decodificare una stringa di bit senza sapere dove finisce un codice e inizia il successivo, il codice a prefisso risolve questo problema.
- Se hai due codici, nessuno dei due inizia con la stessa sequenza di bit dell'altro.
  ↳ elimina ambiguita' di decodifica

Codici di Huffman

- Definire un algoritmo per la codifica è il tema dei lucidi seguenti

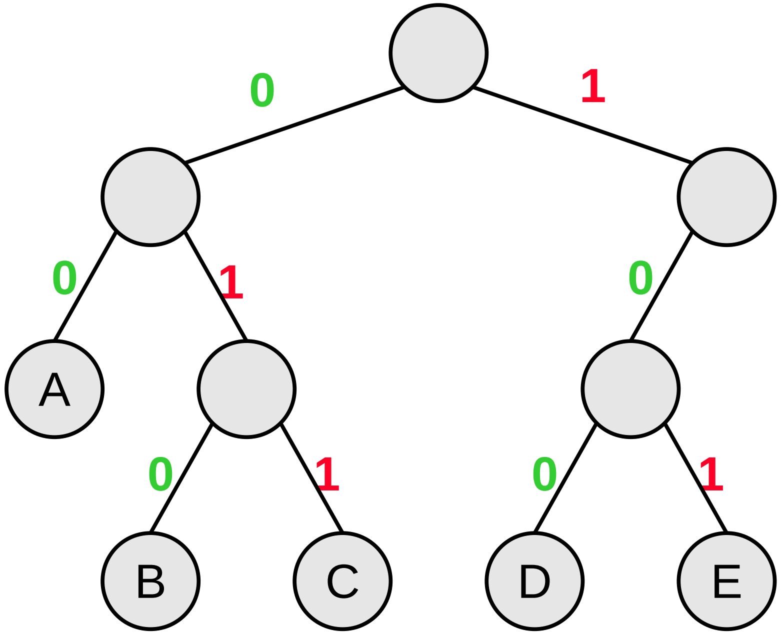
- Huffman, D.A., "*A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes*," Proc. of the IRE, vol. 40, no. 9, pp. 1098—1101, Sept. 1952, doi: 10.1109/JRPROC.1952.273898
  - Algoritmo ottimo per costruire codici prefissi



David Albert Huffman
(9 agosto 1925 – 7 ottobre 1999)

Rappresentazione ad albero

- Rappresentazione del codice come un albero binario
  - Figlio sinistro: 0 Figlio destro: 1
  - Caratteri dell'alfabeto sulle foglie



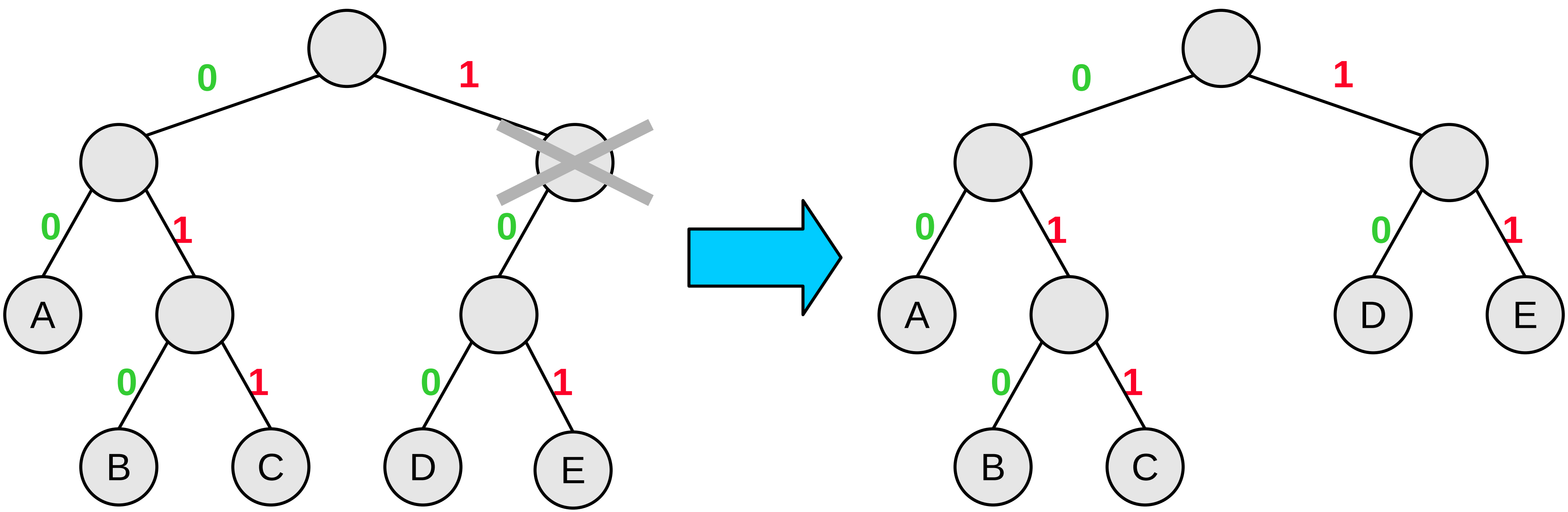
A:	00
B:	010
C:	011
D:	100
E:	101

Algoritmo di decodifica:

1. parti dalla radice
2. leggi un bit alla volta percorrendo l'albero:
   0: sinistra
   1: destra
3. stampa il carattere della foglia
4. torna a 1

Rappresentazione ad albero per la decodifica

- Non c'è motivo per avere un nodo interno con un solo figlio



A: 00
B: 010
C: 011
D: 100
E: 101

A: 00
B: 010
C: 011
D: 10
E: 11

Definizione formale del problema

- Definizione: codice ottimo
  - Dato un file *F*, una funzione di codifica *f* è ottima per *F* se non esiste un'altra funzione di codifica tramite la quale *F* possa essere compresso in un numero inferiore di bit.
- Nota:
  - La funzione di codifica ottima dipende dal file
  - Possono esistere più funzioni di codifica ottima

Algoritmo di Huffman

- Principio del codice di Huffman
  - Minimizzare la lunghezza delle codifiche dei caratteri che compaiono più frequentemente
  - Assegnare ai caratteri con la frequenza minore i codici corrispondenti ai percorsi più lunghi all'interno dell'albero
- Un codice è progettato per un file specifico
  1. Si calcolano le frequenze di ciascun carattere
  2. Si costruisce il codice
  3. Si rappresenta il file tramite il codice
  4. Si aggiunge al file una rappresentazione del codice

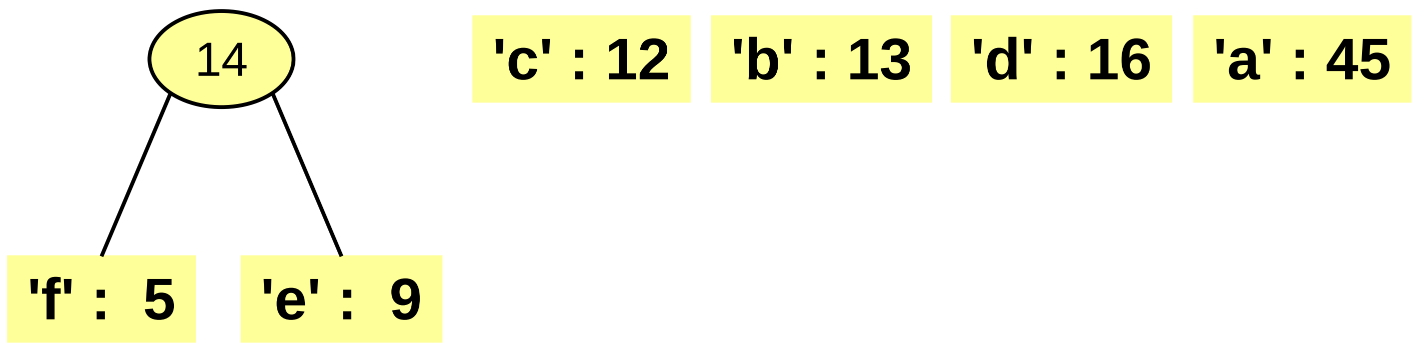
Costruzione del codice

- Passo 1: Costruire una lista ordinata di nodi, in cui ogni nodo contiene un carattere e il numero di volte in cui quel carattere compare nel file

'f' : 5	**'e' : 9**	**'c' : 12**	**'b' : 13**	**'d' : 16**	**'a' : 45**

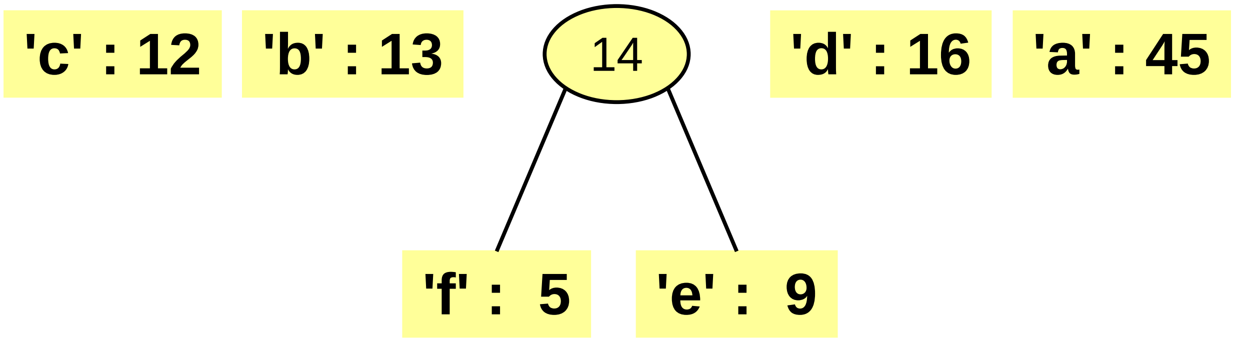
Costruzione del codice

- Passo 2: Rimuovere i due nodi con frequenze minori
- Passo 3: Collegarli ad un nodo padre etichettato con la frequenza combinata (sommata)



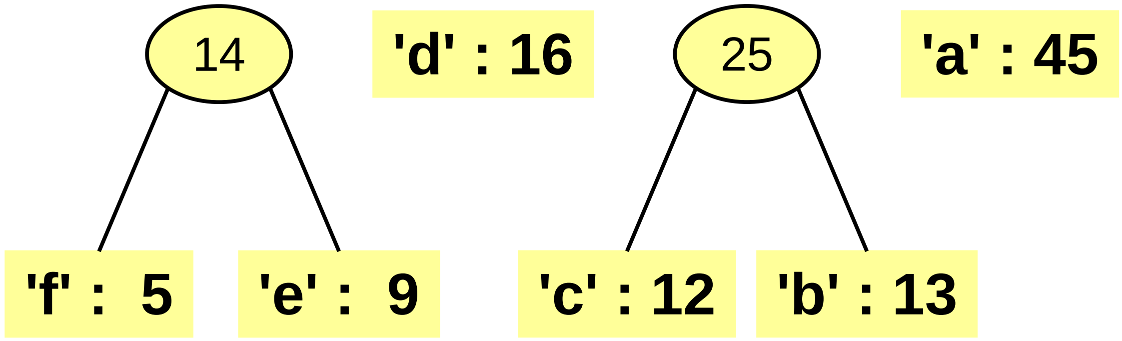
Costruzione del codice

- Passo 4: Aggiungere il nodo combinato alla lista, mantenendola ordinata in base alle frequenze



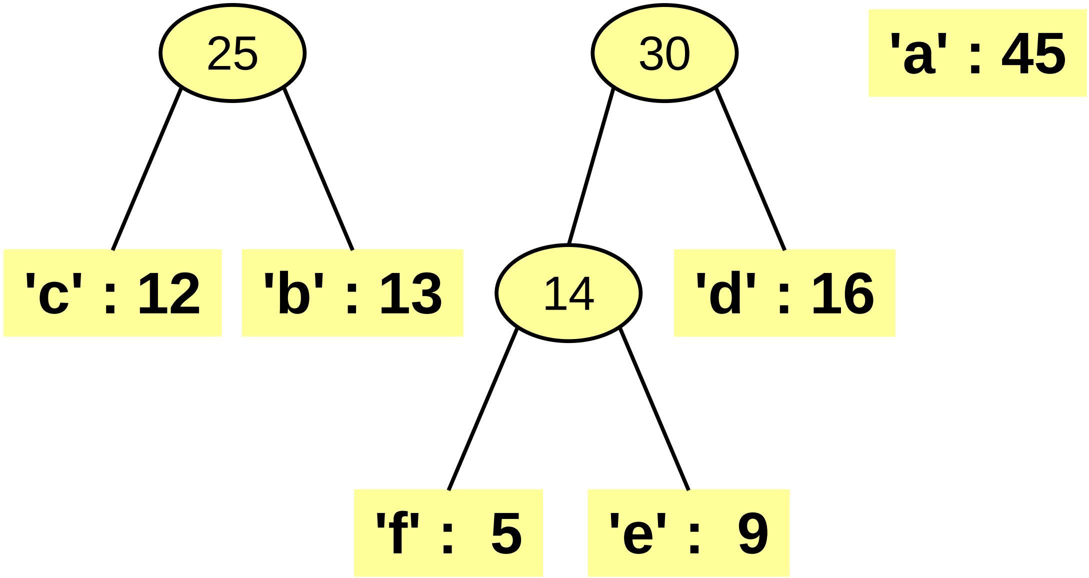
Costruzione del codice

- Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



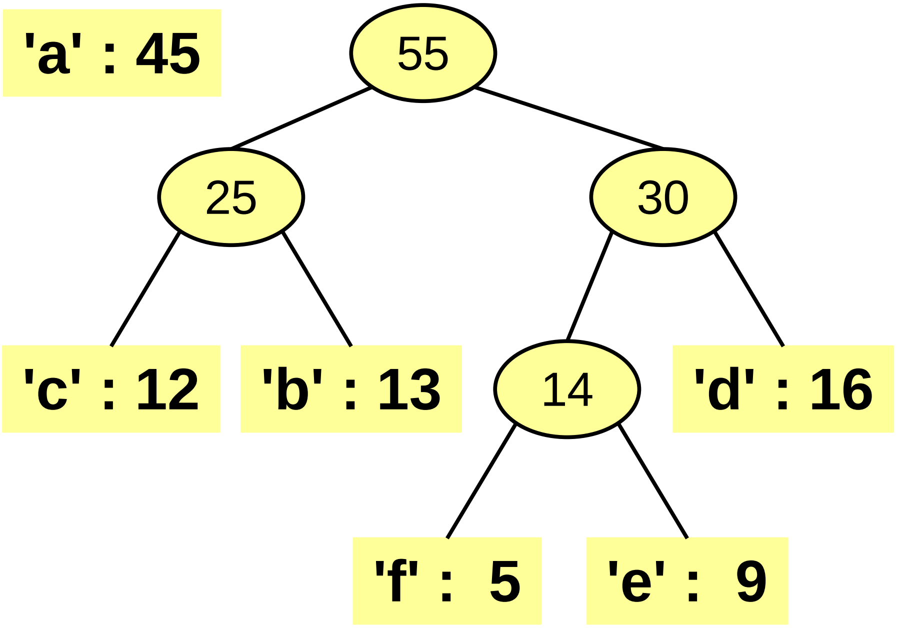
Costruzione del codice

- Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



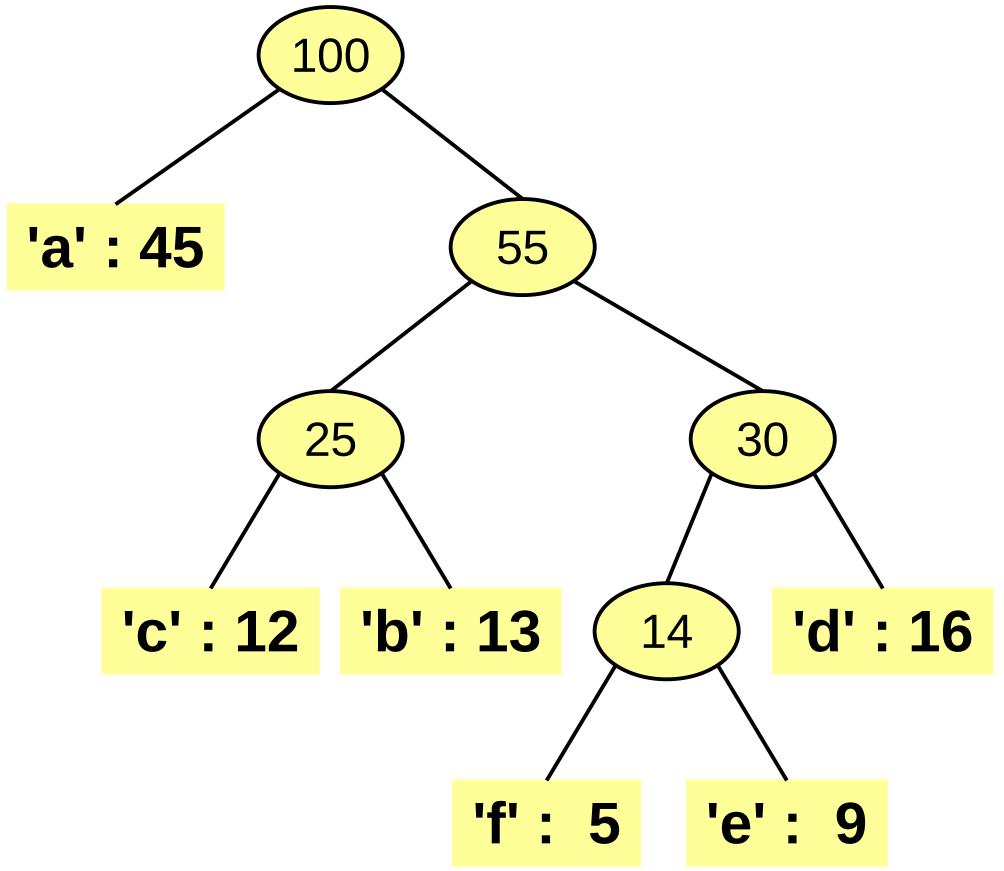
Costruzione del codice

- Ripetere i passi 2-4 fino a quando non resta un solo nodo nella lista



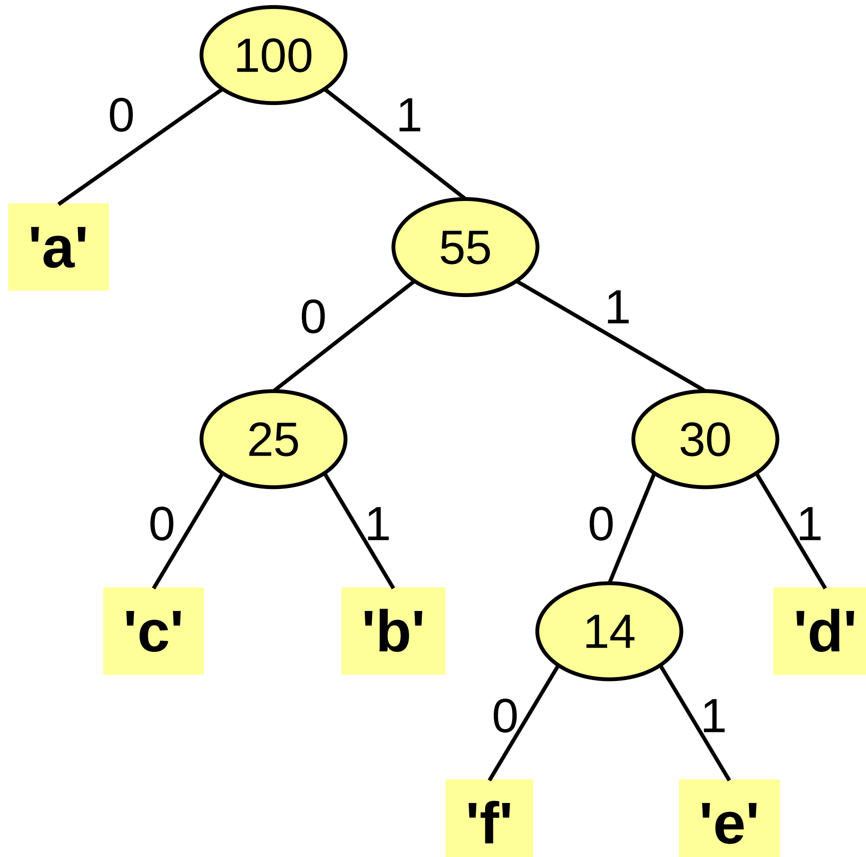
Costruzione del codice

- Al termine si etichettano gli archi dell'albero con 0 / 1



Costruzione del codice

- Al termine si etichettano gli archi dell'albero con 0 / 1



Algoritmo di Huffman

array frequenze   array simboli

```
Huffman(real f[1..n], char c[1..n]) → Tree
    Q ← new MinPriorityQueue()
    integer i;
    for i ← 1 to n do
        z ← new TreeNode(f[i], c[i]);
        Q.insert(f[i], z);
    endfor
    for i ← 1 to n - 1 do
        z1 ← Q.findMin(); Q.deleteMin();
        z2 ← Q.findMin(); Q.deleteMin();
        z ← new TreeNode(z1.f + z2.f, '');
        z.left ← z1;
        z.right ← z2;
        Q.insert(z1.f + z2.f, z);
    endfor
    return Q.findMin();
```

Costo Θ(*n log n*)

→ L'elemento con il valore (frequenza) più piccolo sarà sempre il primo ad essere estratto

→ crea un nodo foglia ∀ simbolo

→ Inserisce il nodo nella coda, priorità = frequenza

Costruzione albero

→ prende il primo poi il prossimo nodo con frequenza minore

→ crea un nuovo nodo interno

figli dx e sx

→ inserisce il nuovo nodo nella coda

→ Dopo n-1 iterazioni, nella coda è rimasto un solo elemento: la radice dell'albero di Huffman. L'algoritmo la restituisce

insert(chiave, valore)

Struttura TreeNode:

f	frequenza
c	carattere
left	figlio sinistro
right	figlio destro

Algoritmi greedy

- **Vantaggi**
  – Semplici da programmare
  – Solitamente efficienti
  – Quando è possibile dimostrare la proprietà di scelta greedy danno la soluzione ottima
  – La soluzione sub-ottima può essere accettabile

- **Svantaggi**
  – Non tutti i problemi ammettono una soluzione greedy
  – Quindi, in certi casi gli algoritmi greedy non possono essere usati se si vuole la soluzione ottima
    - Ma possono essere comunque applicati se ci si accontenta di una soluzione non necessariamente ottima