Algoritmi e Strutture Dati

Divide-et-impera

Alberto Montresor and Davide Rossi

Università di Bologna

12 dicembre 2024

Sommario

Risoluzione problemi

Dato un problema

- Non ci sono "ricette generali" per risolverlo in modo efficiente
- Tuttavia, è possibile evidenziare quattro fasi
  - Classificazione del problema
  - Caratterizzazione della soluzione
  - Tecnica di progetto
  - Utilizzo di strutture dati
- Queste fasi non sono necessariamente sequenziali

Classificazione dei problemi

Problemi decisionali

- Il dato di ingresso soddisfa una certa proprietà?
- Soluzione: risposta sì/no
- Esempio: Stabilire se un grafo è connesso

Problemi di ricerca

- Spazio di ricerca: insieme di "soluzioni" possibili
- Soluzione ammissibile: soluzione che rispetta certi vincoli
- Esempio: posizione di una sottostringa in una stringa

Classificazione dei problemi

Problemi di ottimizzazione

- Ogni soluzione è associata ad una funzione di costo
- Vogliamo trovare la soluzione di costo minimo
- Esempio: cammino più breve fra due nodi

Definizione matematica del problema

È fondamentale definire bene il problema in modo formale

- Spesso la formulazione è banale...
- ... ma può suggerire una prima idea di soluzione
- Esempio: Data una sequenza di n elementi, una permutazione ordinata è data dal minimo seguito da una permutazione ordinata dei restanti $n-1$ elementi (Selection Sort)

La definizione matematica può suggerire una possibile tecnica

- Sottostruttura ottima $\rightarrow$ Programmazione dinamica
- Proprietà greedy $\rightarrow$ Tecnica greedy

Tecniche di soluzione problemi

Divide-et-impera

- Un problema viene suddiviso in sotto-problemi indipendenti, che vengono risolti ricorsivamente (top-down)
- Ambito: problemi di decisione, ricerca

Programmazione dinamica

- La soluzione viene costruita (bottom-up) a partire da un insieme di sotto-problemi potenzialmente ripetuti
- Ambito: problemi di ottimizzazione

Memoization (o annotazione)

- Versione top-down della programmazione dinamica

Tecniche di soluzione problemi

Tecnica greedy

- Approccio "ingordo": si fa sempre la scelta localmente ottima

Backtrack

- Procediamo per "tentativi", tornando ogni tanto sui nostri passi

Ricerca locale

- La soluzione ottima viene trovata "migliorando" via via soluzioni esistenti

Algoritmi probabilistici

- Meglio scegliere con giudizio (ma in maniera costosa) o scegliere a caso ("gratuitamente")

Sommario

Divide-et-impera

Tre fasi

- Divide: Dividi il problema in sotto-problemi più piccoli e indipendenti
- Impera: Risolvi i sotto-problemi ricorsivamente
- Combina: "unisci" le soluzioni dei sottoproblemi

Non esiste una ricetta "unica" per divide-et-impera

- Merge Sort: "divide" banale, "combina" complesso
- Quicksort: "divide" complesso, niente fase di "combina"
- È necessario uno sforzo creativo

Sommario

Quicksort (Hoare, 1961)

Algoritmo di ordinamento basato su divide-et-impera

- Caso medio: $O(n \log n)$
- Caso pessimo: $O(n^2)$

Caso medio vs caso pessimo

- Il fattore costante di Quicksort è migliore di Merge Sort
- "In-place": non utilizza memoria addizionale
- Tecniche "euristiche" per evitare il caso pessimo
- Quindi spesso è preferito ad altri algoritmi

R. Sedgewick, "*Implementing Quicksort Programs*". Communications of the ACM, 21(10):847-857, 1978. `http://portal.acm.org/citation.cfm?id=359631`

Quick Sort Introduction

Il quick sort é un algoritmo di ordinamento il cui tempo di esecuzione nel caso peggiore é $O(n^2)$ su un array di input di n numeri. Nonostante questo tempo di esecuzione nel caso peggiore sia molto alto, il quick sort spesso é la soluzione pratica migliore per effettuare un ordinamento, perché mediamente é molto efficace: il suo tempo di esecuzione atteso é $O(n \log n)$. se tutti i numeri sono diversi e i fattori costanti nascosti nella notazione $O(n \log n)$ sono piccoli.

A differenza del merge sort, ha il vantaggio di ordinare sul posto.

Quicksort

Input

- Vettore $A[1 \dots n]$,
- Indici lo, hi tali che $1 \leq lo \leq hi \leq n$

Divide

- Sceglie un valore $p \in A[lo \dots hi]$ detto perno (pivot)
- Sposta gli elementi del vettore $A[lo \dots hi]$ in modo che:

13	14	15	12	20	27	29	30	21	25	28

$A[lo \dots j-1]$ $\quad$ j $\quad$ $A[j+1 \dots hi]$

$A[i] < A[j]$ $\quad$ $p = A[j]$ $\quad$ $A[j] < A[i]$

- L'indice j del perno va calcolato opportunamente

Quicksort

Impera

Ordina i due sottovettori $A[lo \ldots j-1]$ e $A[j+1 \ldots hi]$ richiamando ricorsivamente Quicksort

Combina

Non fa nulla: infatti,

- il primo sottovettore,
- $A[j]$,
- il secondo sottovettore

formano già un vettore ordinato

il pivot viene
scelto a priori

Quicksort – pivot()

int pivot(Item[ ] A, **int** lo, **int** hi)

```
int pivotIndex = lo
for i = lo + 1 to hi do
    if A[i] < A[pivotIndex] then
        pivotIndex = pivotIndex + 1
        swap(A, i, pivotIndex)
swap(A, lo, pivotIndex)
return pivotIndex
```

swap(Item[ ] A, **int** i, **int** j)

```
Item temp = A[i]
A[i] = A[j]
A[j] = temp
```

Funzionamento pivot()

i										
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
j										

$A[i] \geq x$

	i									
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
j										

$A[i] < x$: $j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

		i								
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
	j									

$A[i] \geq x$

			i							
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
	j									

$A[i] \geq x$

				i						
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
	j									

$A[i] < x$: $j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

					i					
20	14	15	29	28	27	12	30	21	25	13
		j								

$A[i] \geq x$

Funzionamento pivot()

						i				
20	14	15	29	28	27	12	30	21	25	13
		j								

$A[i] < x$: $\quad j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

							i			
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

$A[i] \geq x$

								i		
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

$A[i] \geq x$

									i	
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

$A[i] \geq x$

										i
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

$A[i] < x$: $\quad j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

$A[lo] \leftarrow A[j]$; $A[j] \leftarrow x$

13	14	15	12	20	27	29	30	21	25	28
				j						

Hoare Partition Scheme

int pivot(ITEM[] A, **int** lo, **int** hi)

```
pivotValue = A[lo]
left = lo + 1
right = hi
while left <= right do
    while left <= right and A[left] < pivotValue do
        left = left + 1
    while left <= right and A[right] > pivotValue do
        right = right - 1
    if left < right then
        swap(A, left, right)
        left = left + 1
        right = right - 1
swap(A, low, right)
return right
```

Esempio Concreto

Supponiamo di avere l'array: `[5, 3, 8, 4, 2]` e di partizionare l'intero array (`lo=0`, `hi=4`).

- **Pivot**: `A[0] = 5`.
- **Inizializzazione**: `left = 1`, `right = 4`.

Passaggi:

1. `left=1`: `A[1]=3 < 5` → avanza a `left=2`.
2. `left=2`: `A[2]=8 > 5` → fermo.
3. `right=4`: `A[4]=2 < 5` → fermo (perché deve essere spostato a sinistra).
4. Poiché `left=2 < right=4`, scambia `A[2]` e `A[4]`: array diventa `[5, 3, 2, 4, 8]`.
5. Aggiorna: `left=3`, `right=3`.
6. `left=3`: `A[3]=4 < 5` → avanza a `left=4` (ora `left= 4 > right=3` → esce dal ciclo principale).
7. Scambia `A[0]` con `A[right=3]`: array diventa `[4, 3, 2, 5, 8]`.
8. Restituisce `3` (posizione del pivot `5`).

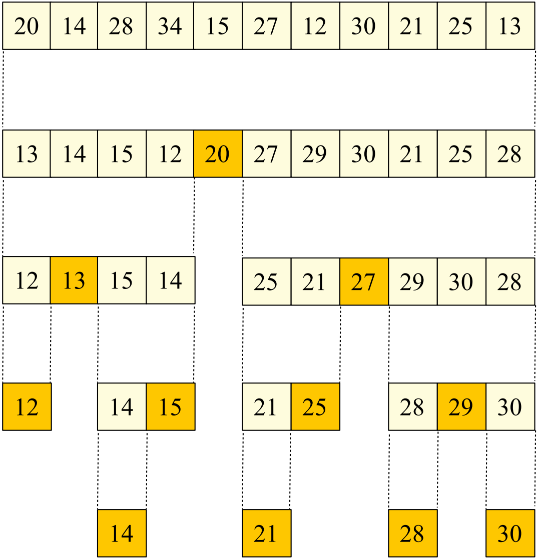
Risultato:

- Sinistra: `[4, 3, 2]` (tutti ≤ 5).
- Destra: `[8]` (> 5).
- Pivot `5` è nella posizione corretta (indice 3).

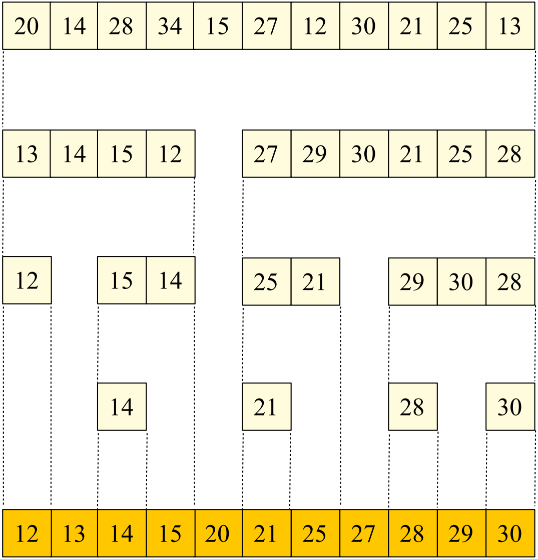
Quicksort – Procedura principale

```
QuickSort(Item[] A, int lo, int hi)
if lo < hi then
    int j = pivot(A, lo, hi)
    QuickSort(A, lo, j − 1)
    QuickSort(A, j + 1, hi)
```

Svolgimento ricorsione



Svolgimento ricorsione



Quicksort: Complessità computazionale

Costo di pivot()?

Quicksort: Complessità computazionale

Costo di pivot()?

- $\Theta(n)$

Costo Quicksort: caso pessimo?

Quicksort: Complessità computazionale

Costo di pivot()?

- $\Theta(n)$

Costo Quicksort: caso pessimo?

Se l'array e' già ordinato
il pivot risulta il minimo e
la partizione e' sbilanciata. 0, n-1
caso PESSIMO!

- Il vettore di dimensione n viene diviso in due sottovettori di dimensione 0 e $n-1$
- $T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$

Costo Quicksort: caso ottimo?

Quicksort: Complessità computazionale

Costo di pivot()?

- $\Theta(n)$

Costo Quicksort: caso pessimo?

- Il vettore di dimensione n viene diviso in due sottovettori di dimensione 0 e $n-1$
- $T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$

Costo Quicksort: caso ottimo?

- Dato un vettore di dimensione n, viene sempre diviso in due sottoproblemi di dimensione $n/2$
- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$

Quicksort: Complessità computazionale

Partizionamenti parzialmente bilanciati

- Il partizionamento nel caso medio di Quicksort è molto più vicino al caso ottimo che al caso peggiore
- Esempio: Partizionamento 9-a-1:

$$T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + cn = \Theta(n \log n)$$

- Esempio: Partizionamento 99-a-1:

$$T(n) = T(n/100) + T(99n/100) + cn = \Theta(n \log n)$$

Note

- In questi esempi, il partizionamento ha proporzionalità limitata
- I fattori moltiplicativi possono essere importanti

Quicksort: Complessità computazionale

Caso medio

- Il costo dipende dall'ordine degli elementi, non dai loro valori
- Dobbiamo considerare tutte le possibili permutazioni
- Difficile dal punto di vista analitico

Caso medio: un'intuizione

- Alcuni partizionamenti saranno parzialmente bilanciati
- Altri saranno pessimi
- In media, questi si alterneranno nella sequenza di partizionamenti
- I partizionamenti parzialmente bilanciati "dominano" quelli pessimi

Quicksort: Selezione pivot euristica

Tecnica euristica: selezionare il valore mediano fra il primo elemento, l'ultimo elemento e il valore nella posizione centrale

---

int pivot(ITEM[ ] A, **int** lo, **int** hi)

---

int $m = \lfloor (lo + hi)/2 \rfloor$
if $A[lo] > A[hi]$ **then** % Sposta il massimo in ultima posizione
  swap(A, lo, hi)
if $A[m] > A[hi]$ **then** % Sposta il massimo in ultima posizione
  swap(A, m, hi)
if $A[m] > A[lo]$ **then** % Sposta il mediano in prima posizione
  swap(A, m, lo)
ITEM $pivot = A[lo]$
[...]
