Tecniche Algoritmiche / 1
Divide et Impera

Jocelyne Elias
https://www.unibo.it/sitoweb/jocelyne.elias
Moreno Marzolla
https://www.moreno.marzolla.name/

Dipartimento di Informatica—Scienza e Ingegneria (DISI)
Università di Bologna

Tecniche algoritmiche

- Divide-et-impera
  - Un problema viene suddiviso in sotto-problemi *indipendenti*, che vengono risolti *ricorsivamente* (top-down)
  - Ambito: problemi di decisione, ricerca
- Programmazione dinamica
  - La soluzione viene costruita (bottom-up) a partire da un insieme di sotto-problemi *potenzialmente ripetuti*
  - Ambito: problemi di ottimizzazione
- Algoritmi greedy
  - Ad ogni passo si fa sempre la scelta che in quel momento appare ottima; le scelte fatte non vengono mai disfatte
  - Ambito: problemi di ottimizzazione

Divide-et-impera

- Tre fasi:
  - *Divide*: Dividi il problema in sotto-problemi indipendenti, di dimensioni “minori”
  - *Impera*: Risolvi i sotto-problemi ricorsivamente
  - *Combina*: Unisci le soluzioni dei sottoproblemi per costruire la soluzione del problema di partenza
- Non esiste una “ricetta” unica per implementare un algoritmo divide-et-impera:
  - Ricerca binaria: “divide” banale, niente fase di “combina”
  - Quick Sort: “divide” complesso, niente fase di “combina”
  - Merge Sort: “divide” banale, “combina” complesso

Ricerca del minimo

Ricerca del minimo

- Dato un array $A[1..n]$ di $n > 0$ valori reali arbitrari, determinare il valore minimo
  - Nota che in questo esempio l'approccio divide-et-impera non è vantaggioso rispetto alla soluzione diretta
- **Idea**:
  - Dívido l'array in due sottovettori di lunghezza (circa) uguale
    - Determino ricorsivamente i valori minimi dei due sottovettori
    - Il minimo dell'array di partenza è il più piccolo dei due minimi
  - Caso base: array di un singolo elemento
    - Il minimo in questo caso è il singolo elemento

Algoritmo molto simile al merge-sort

Implementazione

```
double MinDivideEtImpera(double A[1..n], integer i, integer j)
    if ( i > j ) then
        return +∞;
    elseif ( i = j ) then
        return A[i];
    else
        integer m ← Floor((i + j) / 2);
        double min1 ← MinDivideEtImpera( A, i,   m );
        double min2 ← MinDivideEtImpera( A, m+1, j );
        if ( min1 < min2 ) then
            return min1;
        else
            return min2;
        endif
    endif
```

→ Se l'indice iniziale i è maggiore dell'indice finale j (cioè intervallo vuoto), resitcisce (+∞) perché non esiste un minimo in un insieme vuoto

→ Se l'indice iniziale i è uguale all'indice finale j (cioè un solo elemento), restituisce direttamente quell'elemento A[i] come minimo

→ trova il minimo della prima metà

→ tro il minimo della seconda metà

→ Confronta i due minimi trovati e restituisce il più piccolo tra i due

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \le 1 \\ 2T(n/2) + c_2 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Soluzione della ricorrenza

- Master Theorem (formulazione leggermente diversa rispetto a quella vista nel modulo 1):
L'equazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ a\,T(n/b) + c\,n^{\beta} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- posto α = (log *a*) / (log *b*) ha soluzione:
  - $T(n) = O(n^{\alpha})$ se $\alpha > \beta$
  - $T(n) = O(n^{\alpha} \log n)$ se $\alpha = \beta$
  - $T(n) = O(n^{\beta})$ se $\alpha < \beta$

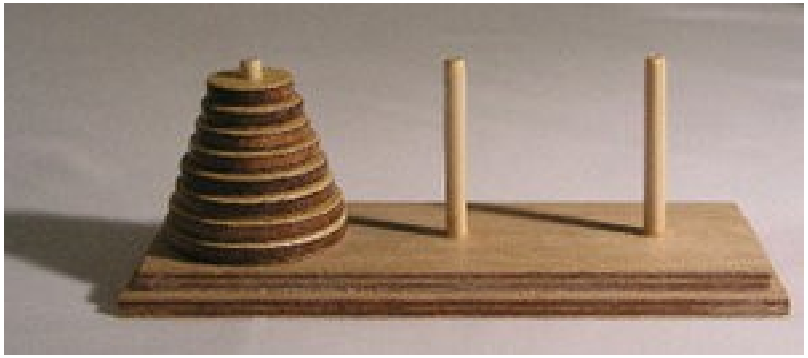
Le torri di Hanoi

Le torri di Hanoi

Narra la leggenda che in un tempio indiano si trovi una stanza contenente una lastra di bronzo con sopra tre pioli di diamante. Dopo la creazione dell'universo, 64 dischi d'oro sono stati infilati in uno dei pioli in ordine decrescente di diametro, con il disco più largo appoggiato al piano di bronzo. Da allora, i monaci del tempio si alternano per spostare i dischi dal piolo originario in un altro piolo, seguendo le rigide regole di Brahma: i dischi vanno maneggiati uno alla volta, e non si deve mai verificare che un disco più largo sovrasti uno più piccolo sullo stesso piolo. Quando tutti i dischi saranno spostati su un altro piolo, l'universo avrà fine.

Fonte: George Gamow, *One, two, tree... infinity!*, Dover Publications, 1947

Le torri di Hanoi



http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

- Gioco matematico
  - tre pioli
  - *n* dischi di dimensioni diverse
  - Inizialmente tutti i dischi sono impilati in ordine decrescente (più piccolo in alto) nel piolo di sinistra
- Scopo del gioco
  - Impilare in ordine decrescente i dischi sul piolo di destra
  - Senza mai impilare un disco più grande su uno più piccolo
  - Muovendo un disco alla volta
  - Utilizzando se serve anche il piolo centrale

Le torri di Hanoi
Soluzione divide-et-impera

http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

```
Hanoi(Stack p1, Stack p2, Stack p3, integer n)
  if (n == 1) then
    p3.push(p1.pop())
  else
    Hanoi(p1, p3, p2, n-1)
    p3.push(p1.pop())
    Hanoi(p2, p1, p3, n-1)
  endif
```

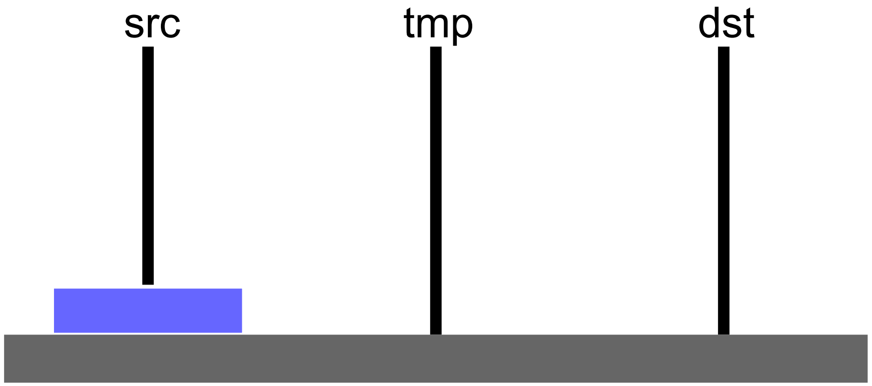
Sposta *n* dischi da p1 a p3 usando p2 come appoggio

- Divide:
  - *n* - 1 dischi da p1 a p2
  - 1 disco da p1 a p3
  - *n* - 1 dischi da p2 a p3
- Impera
  - Esegui ricorsivamente gli spostamenti

Idea

Per spostare *n* dischi dal piolo src al piolo dst, usando tmp come appoggio

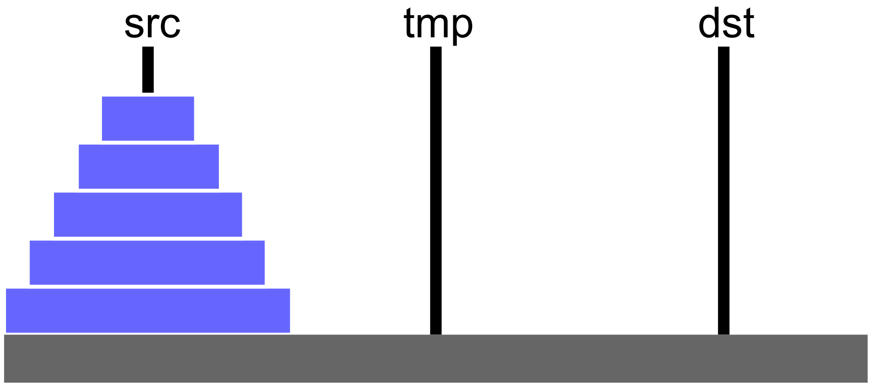
- Se c'è un solo disco
  - Spostalo da src a dst
- Se ci sono *n* > 1 dischi
  - Sposta gli *n* - 1 dischi in cima a src verso tmp, usando *dst* come appoggio
  - Sposta un disco da src a dst
  - Sposta *n* - 1 dischi in cima a tmp verso dst, usando *src* come appoggio



Idea

Per spostare *n* dischi dal piolo src al piolo dst, usando tmp come appoggio

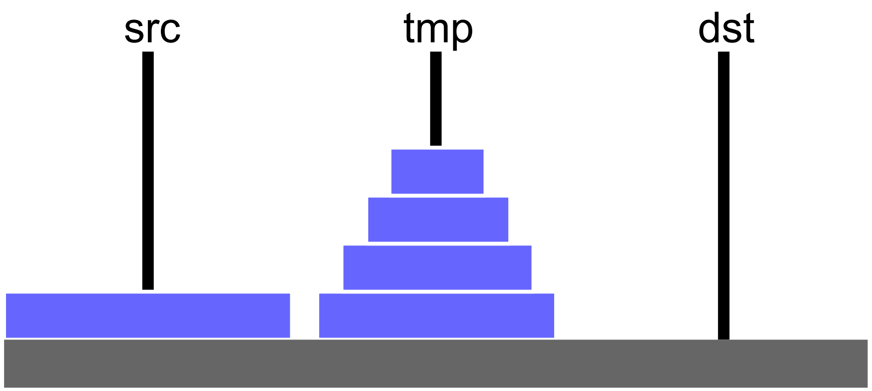
- Se c'è un solo disco
  - Spostalo da src a dst
- Se ci sono $n > 1$ dischi
  - Sposta gli $n - 1$ dischi in cima a src verso tmp, usando *dst* come appoggio
  - Sposta un disco da src a dst
  - Sposta $n - 1$ dischi in cima a tmp verso dst, usando *src* come appoggio



Idea

Per spostare *n* dischi dal piolo src al piolo dst, usando tmp come appoggio

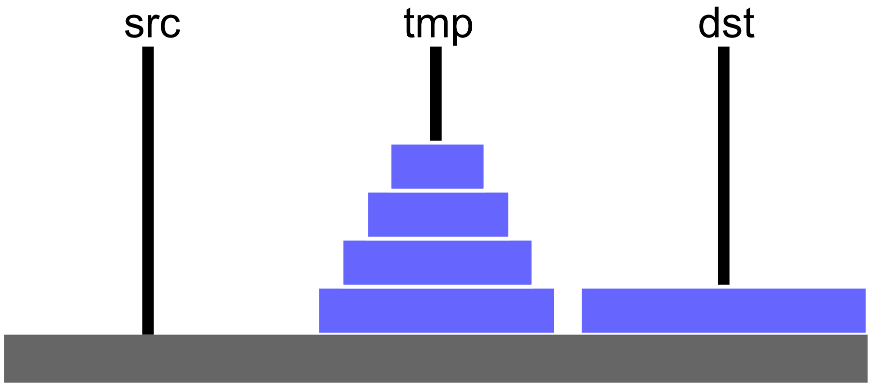
- Se c'è un solo disco
  - Spostalo da src a dst
- Se ci sono *n* > 1 dischi
  - Sposta gli *n* - 1 dischi in cima a src verso tmp, usando *dst* come appoggio
  - Sposta un disco da src a dst
  - Sposta *n* - 1 dischi in cima a tmp verso dst, usando *src* come appoggio



Idea

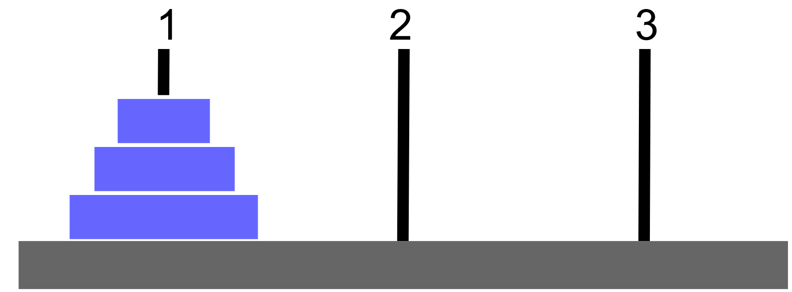
Per spostare *n* dischi dal piolo src al piolo dst, usando tmp come appoggio

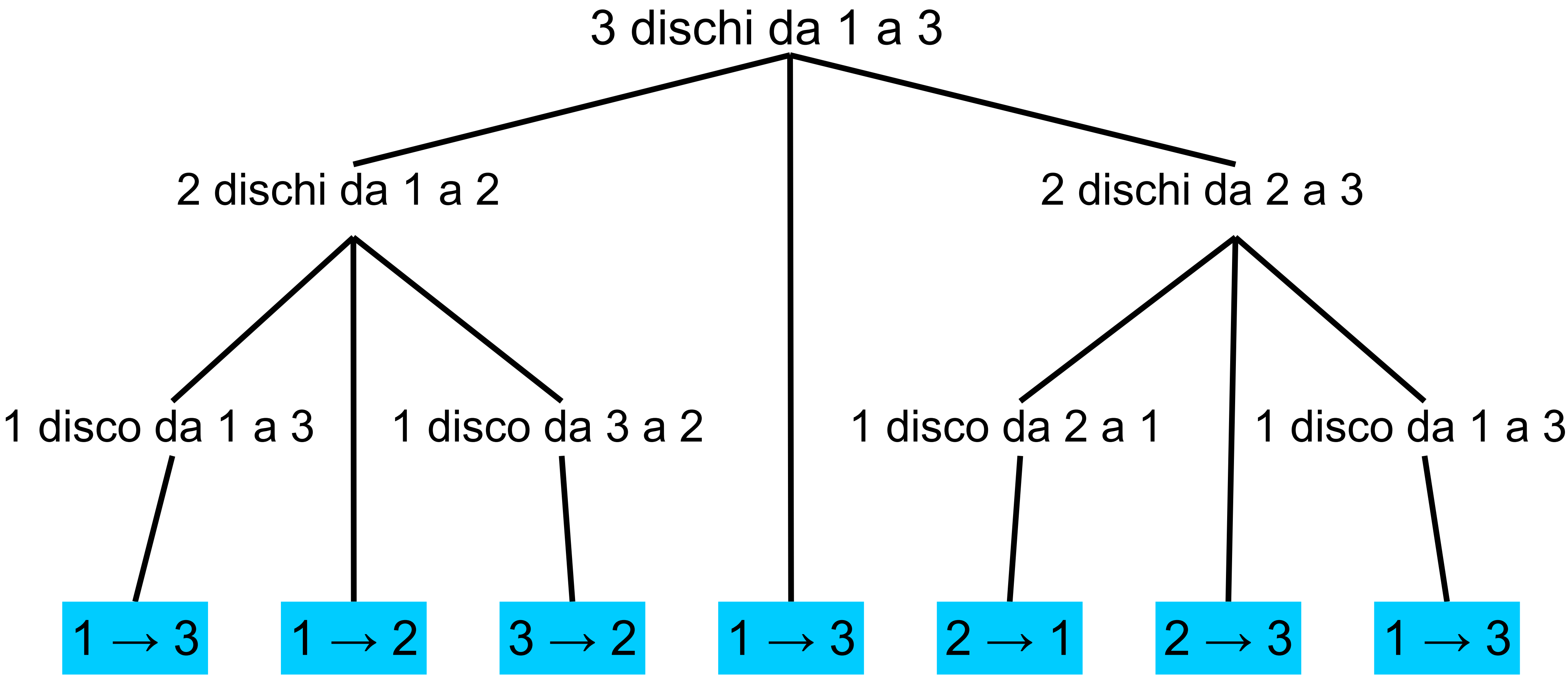
- Se c'è un solo disco
  - Spostalo da src a dst
- Se ci sono *n* > 1 dischi
  - Sposta gli *n* - 1 dischi in cima a src verso tmp, usando *dst* come appoggio
  - Sposta un disco da src a dst
  - Sposta *n* - 1 dischi in cima a tmp verso dst, usando *src* come appoggio



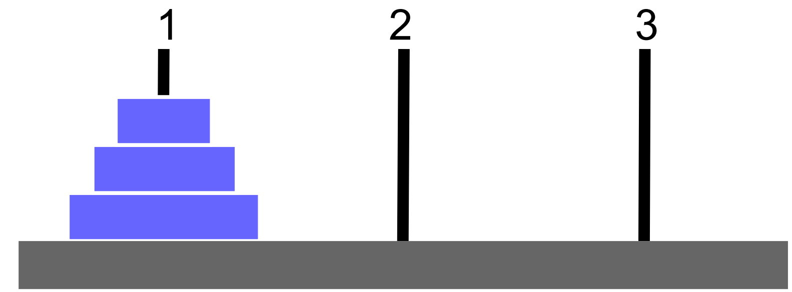
$$\begin{tikzcd} src \arrow[r, bend left, "\underset{n-1}{1}"] \arrow[rr, bend right, "\underset{2}{1}"'] & tmp \arrow[r, bend left, "\underset{n-1}{3}"] & dst \end{tikzcd}$$

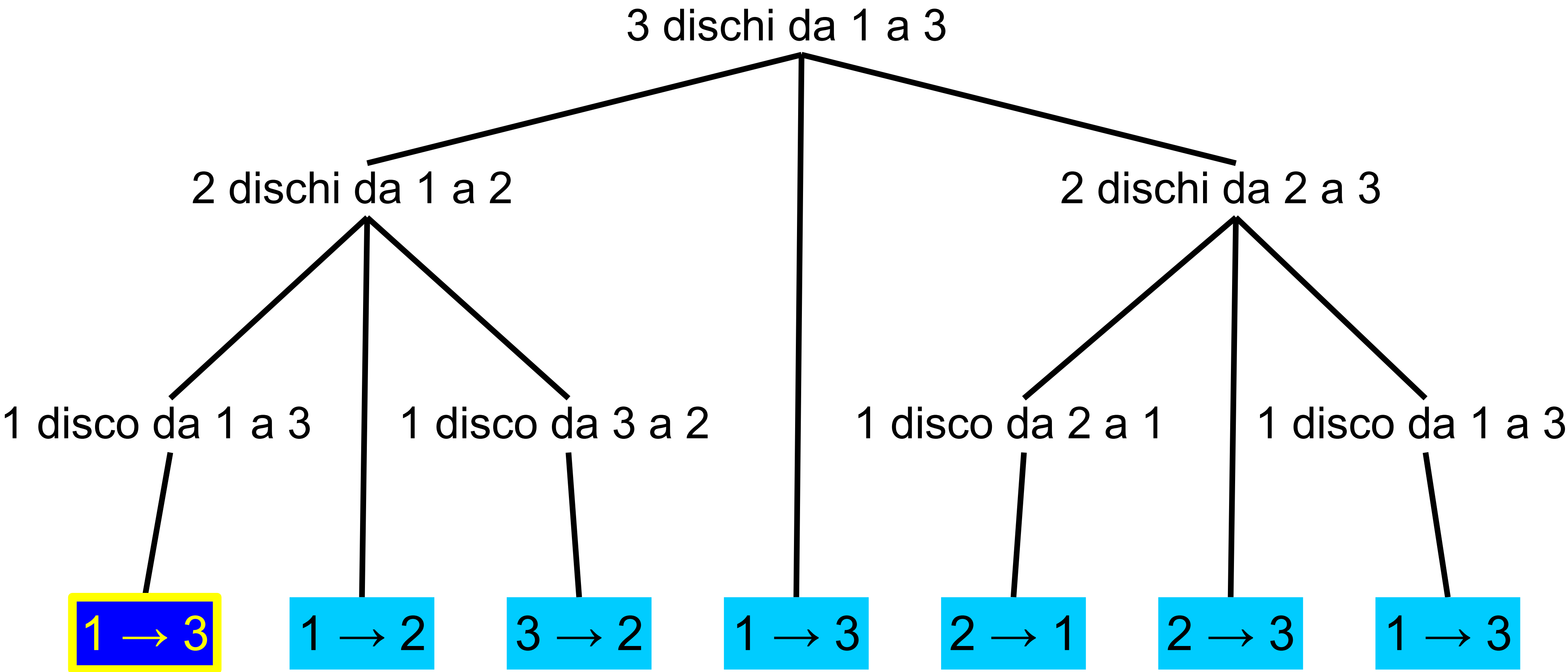
Esempio con 3 dischi



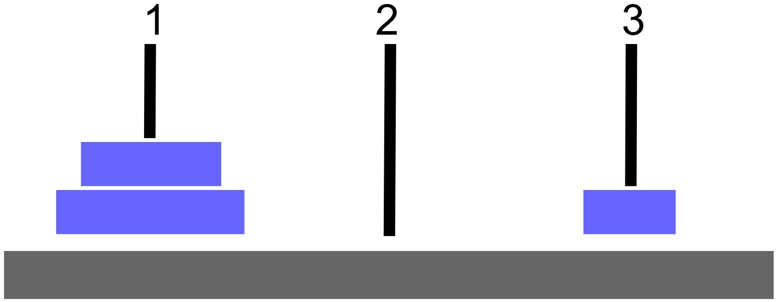


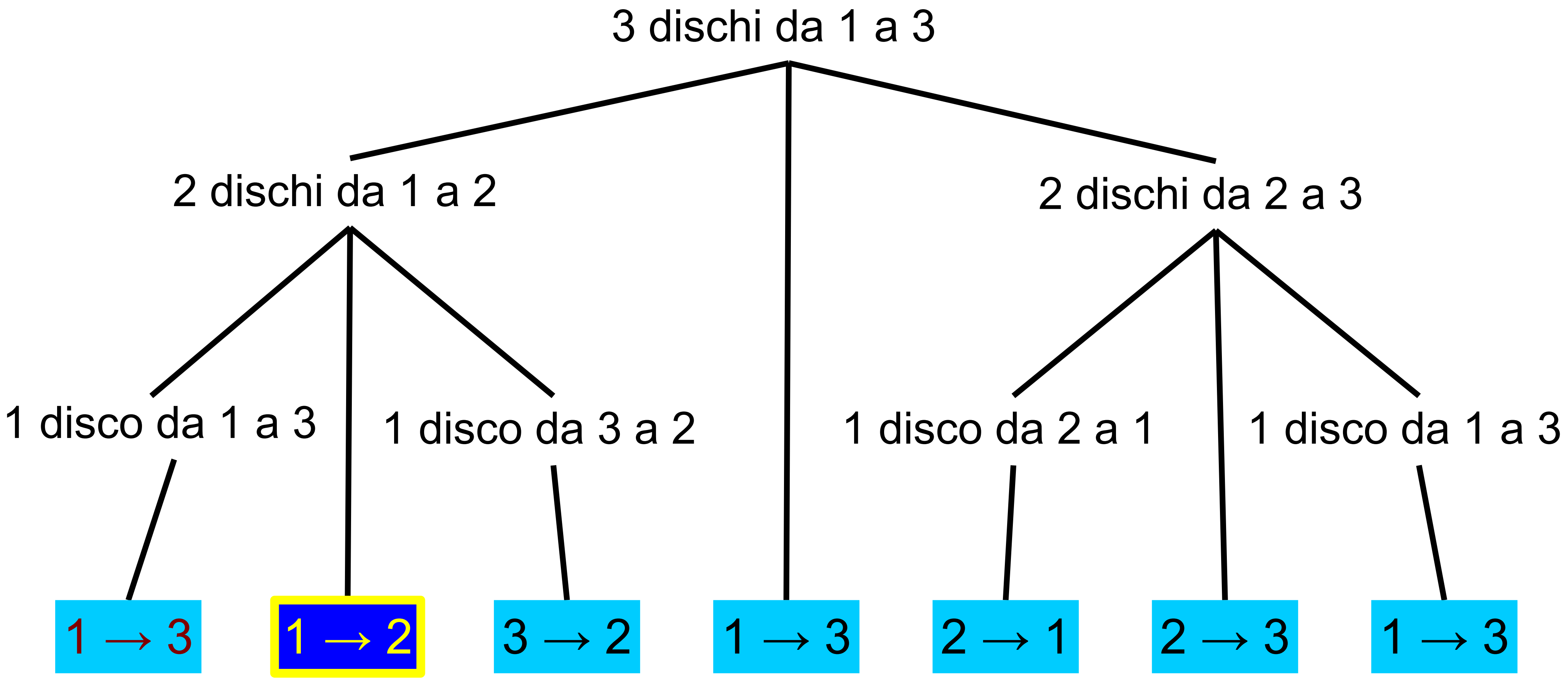
Esempio con 3 dischi



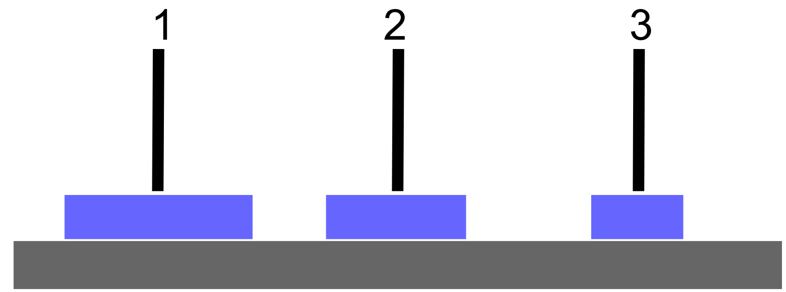


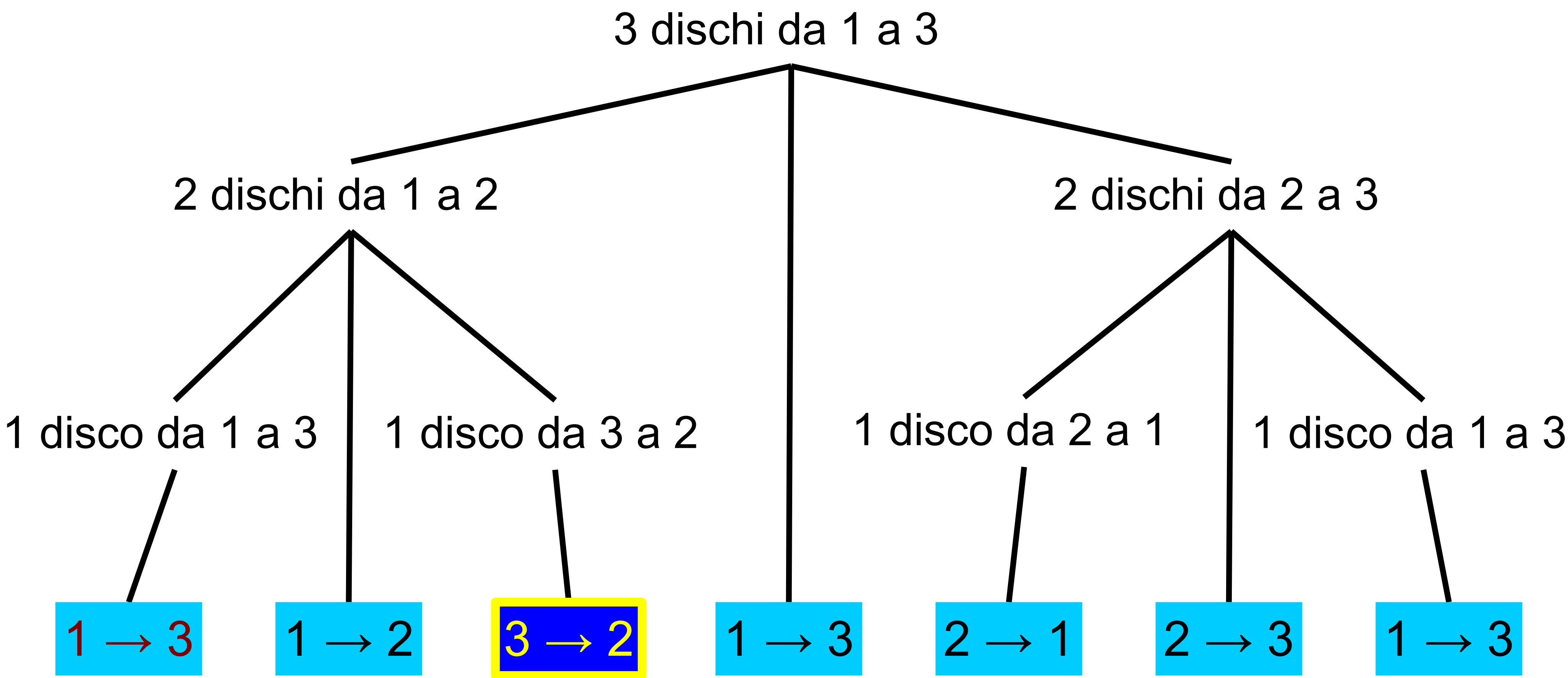
Esempio con 3 dischi



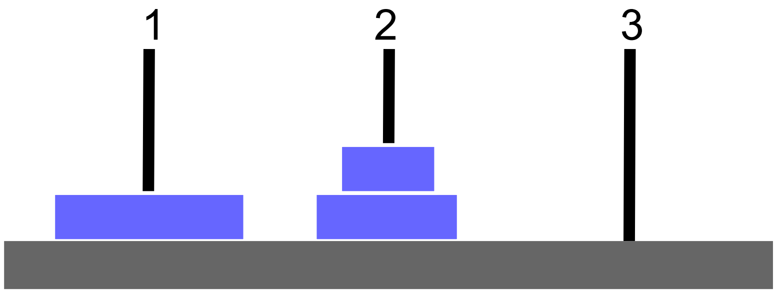


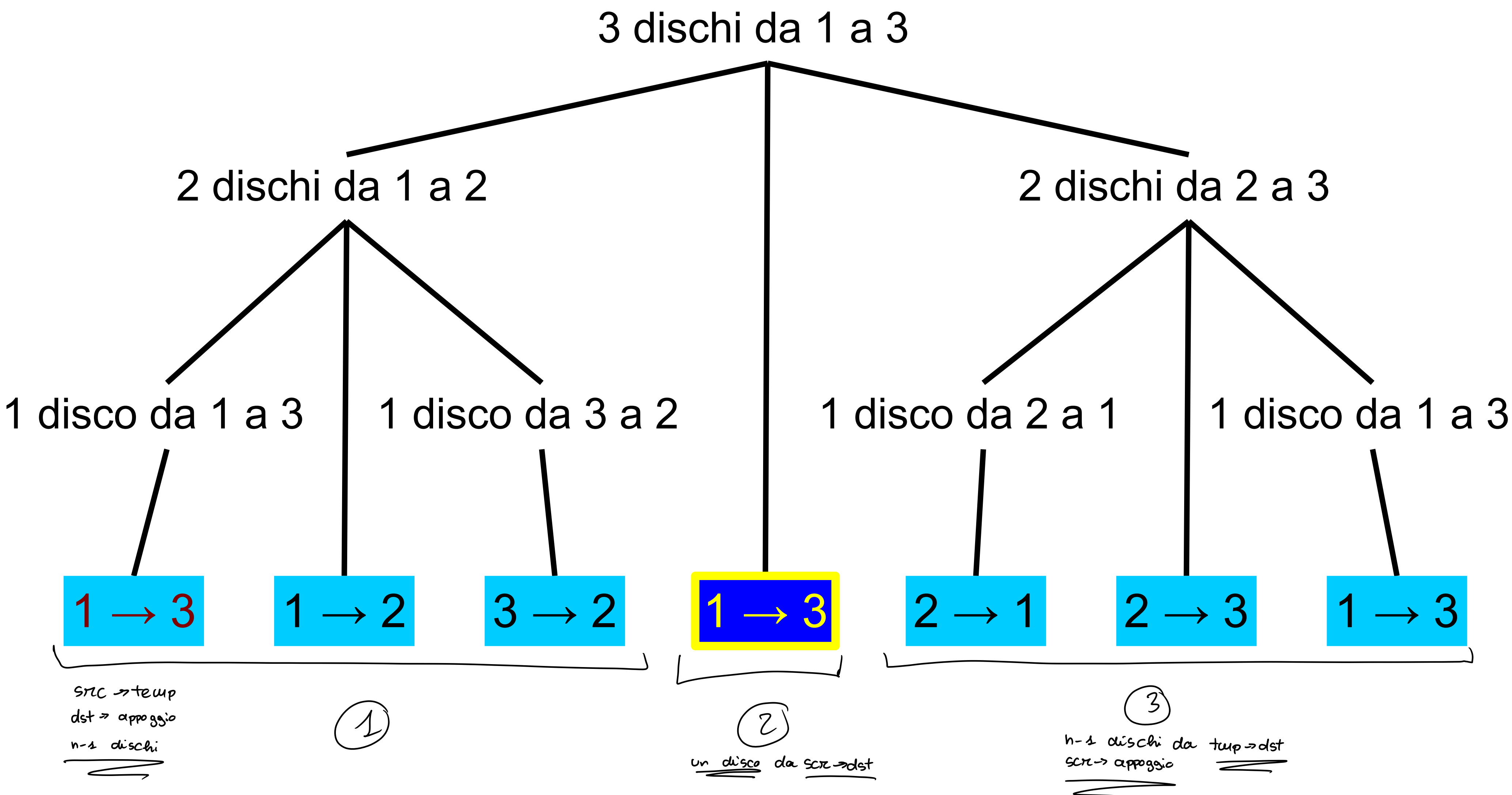
Esempio con 3 dischi



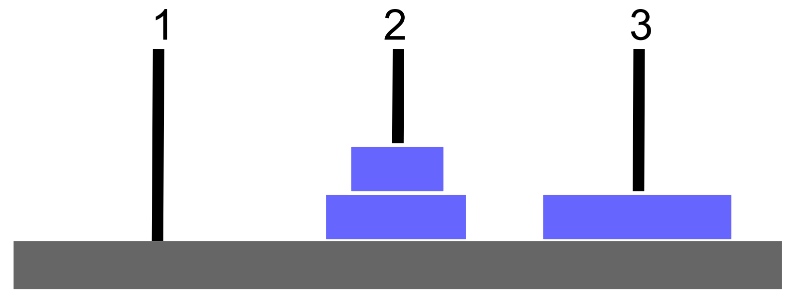


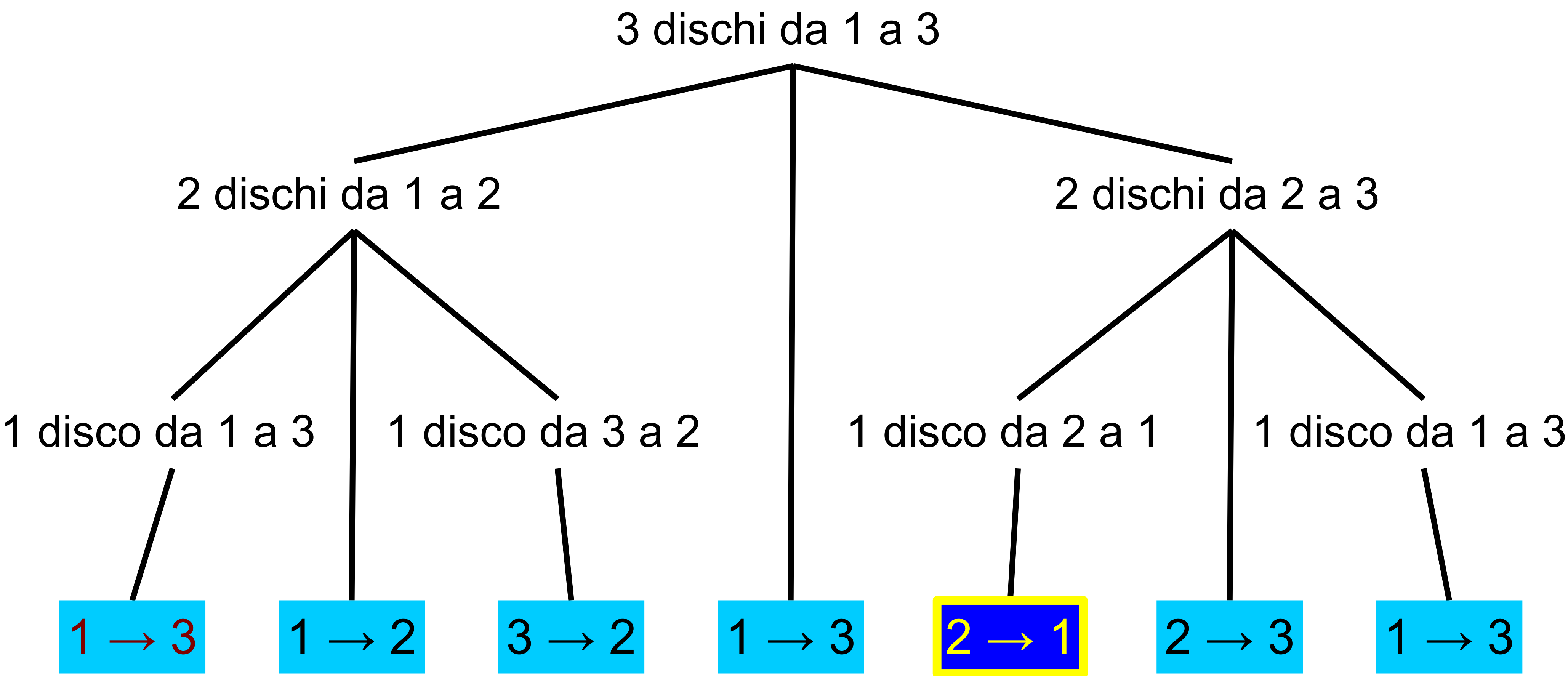
Esempio con 3 dischi



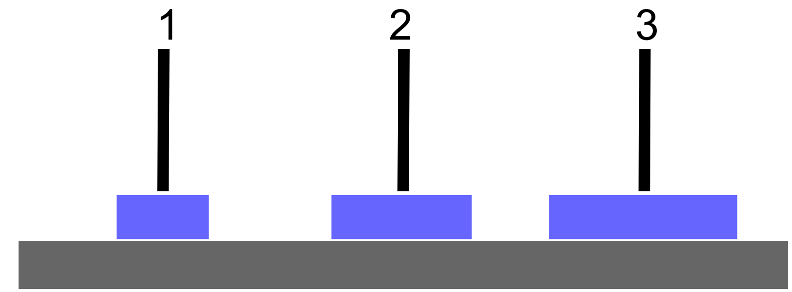


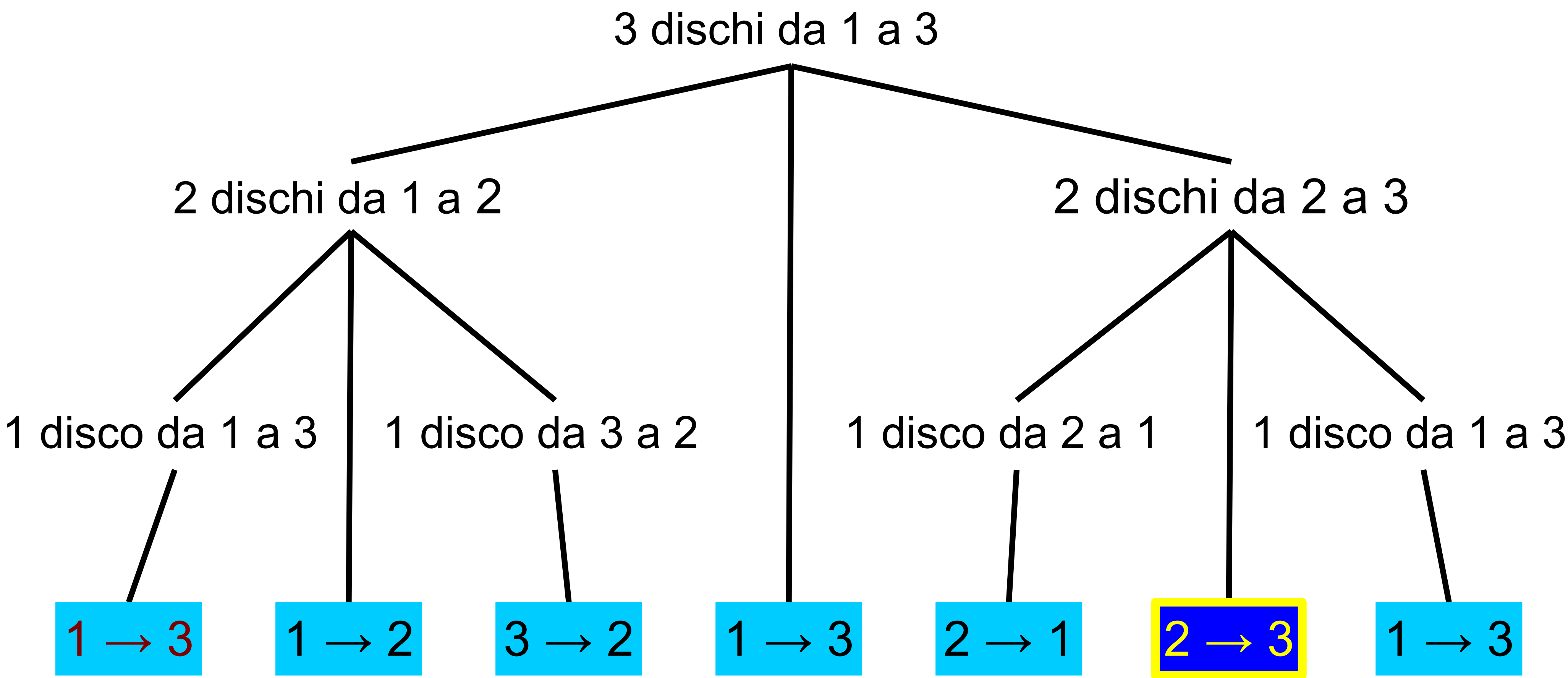
Esempio con 3 dischi



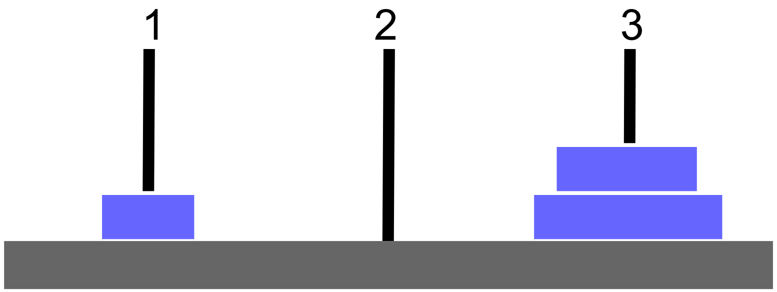


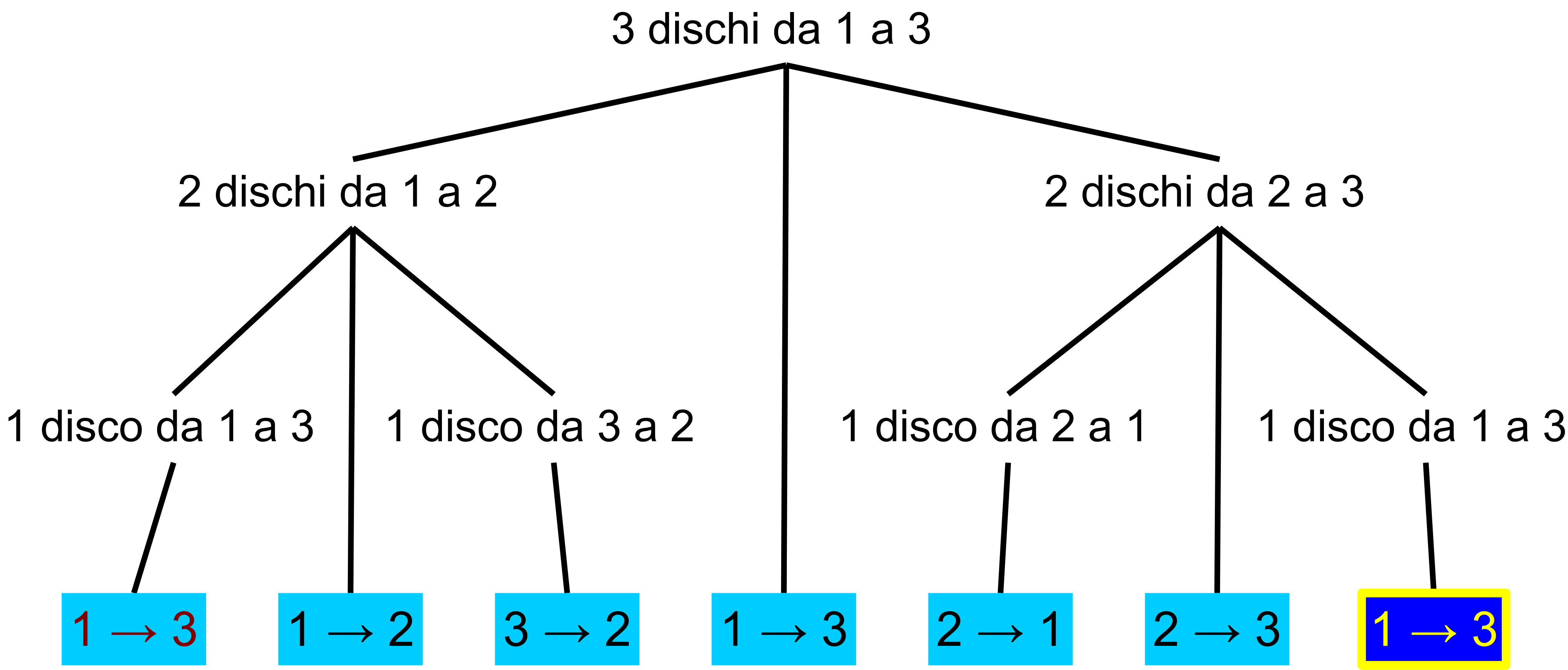
Esempio con 3 dischi





Esempio con 3 dischi





Le torri di Hanoi
Soluzione divide-et-impera

```
                 inizio src        appoggio temp        fine/arrivo dst
Hanoi(Stack p1, Stack p2, Stack p3, integer n)
  if (n = 1) then
    p3.push(p1.pop())                caso in cui
                                     abbiamo solo un disco nella pila
  else
    Hanoi(p1, p3, p2, n-1) → fase 1   src → temp (n-1) (app = dst)
    p3.push(p1.pop()) → fase 2
    Hanoi(p2, p1, p3, n-1) → fase 3   temp → dst (n-1) (app = src)
  endif
```

- Costo computazionale:
  - $T(1) = 1$ → caso singolo disco
  - $T(n) = 2\,T(n-1) + 1$ per $n > 1$
- **Domanda:** Quale è la soluzione della ricorrenza?
  - Se i monaci effettuano una mossa al secondo, per trasferire tutti i 64 dischi servirebbe un tempo pari a circa 127 volte l'età del nostro sole

Risoluzione Costo computazionale delle Torri di Hanoi

$T(n) = 2T(n-1)+1$

Tecnica delle ricorrenze lineari di ordine costante

$T(n) = \Theta(n^{\beta+1})$ se $a=1$

$T(n) = \Theta(a^n n^\beta)$ se $a \geq 2$

In questo caso $a \geq 2$

$a=2$

$\beta=0$

Costo esponenziale

$$T(n) = \Theta(a^n n^\beta) = \Theta(2^n \overbrace{n^0}^{1}) = \Theta(2^n)$$

se $n=64$

$2^{64} \rightarrow$ mosse

Moltiplicazione di interi

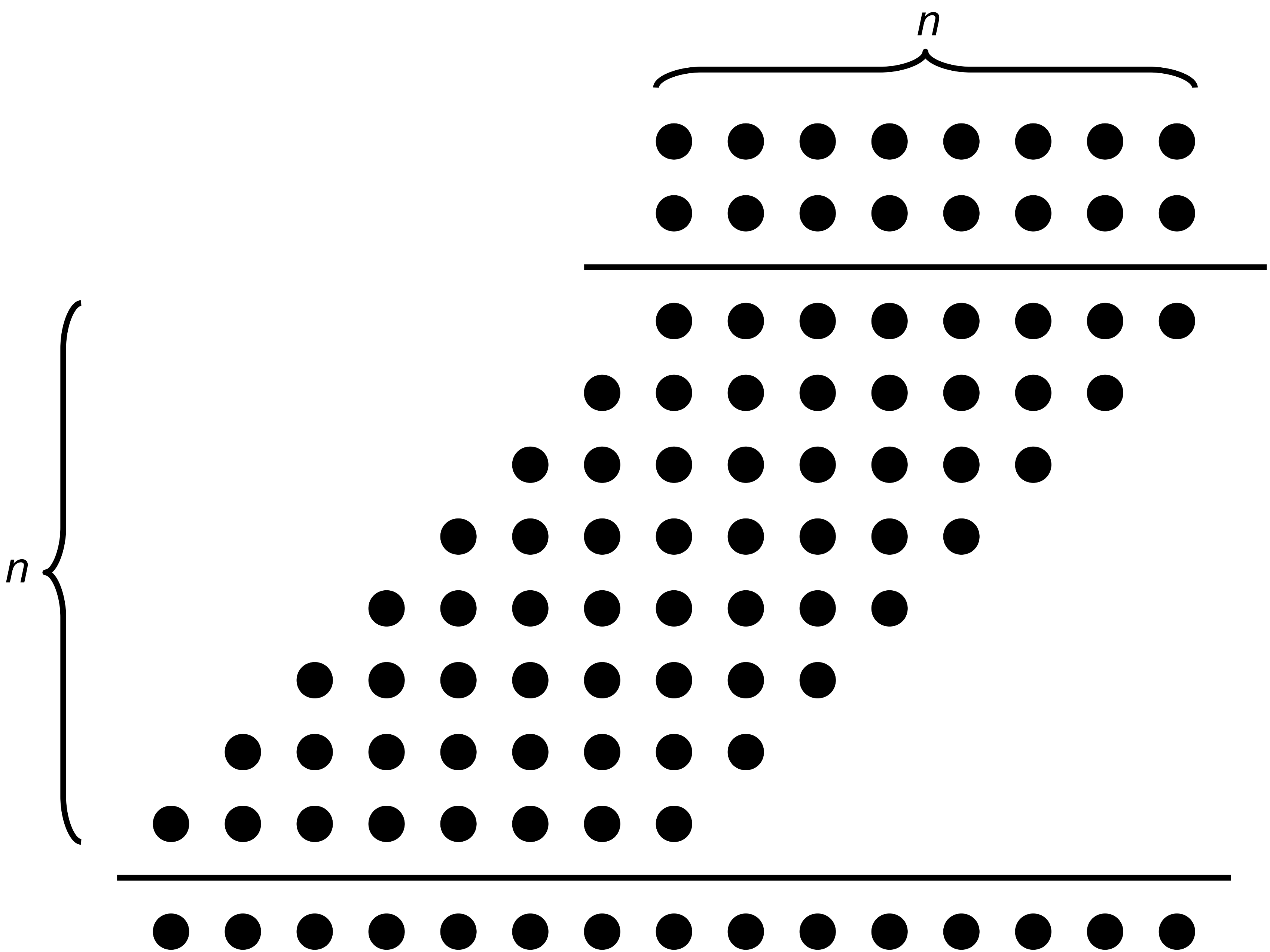
Moltiplicazione di interi di grandezza arbitraria

- Consideriamo due interi di *n* cifre decimali, *X* e *Y*

$$X = x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_1 x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \times 10^i$$

$$Y = y_{n-1} y_{n-2} \ldots y_1 y_0 = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \times 10^i$$

- Vogliamo calcolare il prodotto *XY*
  - L'algoritmo che abbiamo imparato a scuola ha costo $O(n^2)$
  - Proviamo a fare di meglio con un algoritmo di tipo divide et impera


n
n

Idea

- Supponiamo che sia *X* che *Y* abbiano lo stesso numero di cifre (possiamo aggiungere zeri all'inizio)
- Dividiamo le sequenze di cifre in due parti uguali

X_0 e Y_0 immagino che indichino l'altra sequenza di Y con lo stesso numero di cifre

$$
\begin{aligned}
X &= X_1 \times 10^{n/2} + X_0 \\
Y &= Y_1 \times 10^{n/2} + Y_0
\end{aligned}
$$

X_1	X_0
Y_1	Y_0

- Calcoliamo il prodotto come:

$$
\begin{aligned}
X \times Y &= \left(X_1 10^{n/2} + X_0\right) \times \left(Y_1 10^{n/2} + Y_0\right) \\
&= \left(X_1 Y_1\right) \times 10^{n} + \left(X_1 Y_0 + X_0 Y_1\right) \times 10^{n/2} + X_0 Y_0
\end{aligned}
$$

Osservazione

$$X \times Y = (\underline{X_1 Y_1}) \times 10^n + (\underline{X_1 Y_0} + \underline{X_0 Y_1}) \times 10^{n/2} + \underline{X_0 Y_0}$$

- La moltiplicazione per 10^n richiede tempo $O(n)$
  - Equivale ad uno shift a sinistra di *n* posizioni
- Ci sono 4 prodotti di numeri di *n*/2 cifre
- Possiamo scrivere la relazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \leq 1 \\ 4T(n/2) + c_2 n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Soluzione (Master Theorem, caso 1): $\Theta(n^2)$
  - Non abbiamo migliorato nulla rispetto all'algoritmo banale **:-(**

Costo computazionale della Relazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \leq 1 \\ 4T(n/2) + c_2 n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Teorema Master

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & n > 1 \\ \Theta(1) & n = 1 \end{cases}$$

1) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per qualche ε

2) $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

3) $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ per qualche ε

$f(n)$ deve rispettare la condizione di regolarità

$$a \cdot f(n/b) \leq c\, f(n)$$

$\varepsilon > 0$

Tornando all'esercizio

$$T(n) = \begin{cases} 4T(n/2) + \Theta(n) \\ \Theta(n) \end{cases}$$

$f(n) = n$
$a = 4$
$b = 2$

$n = \Theta(n^{\log_b a}) \to \Theta(n^{\overbrace{\log_2 4}^{2}}) \to$ NO!

$n = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \to O(n^{\overbrace{\log_2 4}^{2} - 1}) \to O(n)$ ✓

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \to \Theta(n^{\log_2 4}) \to \Theta(n^2)$

Miglioramento

- Se poniamo

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (X_1 + X_0) \times (Y_1 + Y_0) \\
P_2 &= (X_1 Y_1) \\
P_3 &= (X_0 Y_0)
\end{aligned}
$$

possiamo scrivere

$$X \times Y = P_2 10^n + (P_1 - P_2 - P_3) \times 10^{n/2} + P_3$$

- Il calcolo di P1, P2 e P3 richiede in tutto solo 3 prodotti tra numeri di *n*/2 cifre

Analisi del miglioramento

- Otteniamo la nuova relazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \leq 1 \\ 3T(n/2) + \underline{c_2 n} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- In base al Master Theorem (caso 1) la soluzione è

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) \approx \Theta\left(n^{1.59}\right)$$

$3T(n/2) + c_2 n$

$f(n) = n$

$a = 3$

$b = 2$

$\varepsilon > 0$

$n = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{\overbrace{\log_2 3}^{1.59} - 0{,}1})$ ✓

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\overbrace{\log_2 3}^{1.59}}) \Rightarrow$ MEGLIO DI PRIMA!

Moltiplicazione di matrici

Moltiplicazione di matrici

Dimensione
p × q

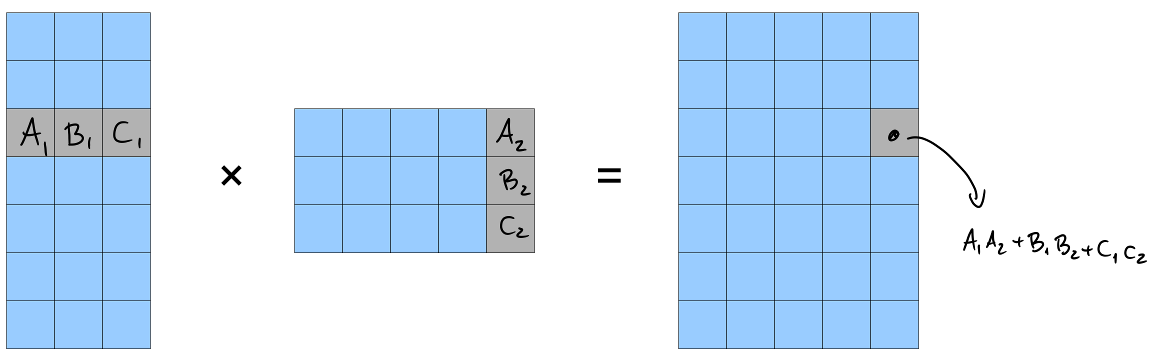
Dimensione
p × c

Dimensione
c × q

$$P[i,j] = \sum_{k=1}^{c} A[i,k] \times B[k,j]$$

```
double[1..p,1..q] mat_prod(double
A[1..p,1..c], double B[1..c,1..q])
  double P[1..p,1..q];
  for integer i ← 1 to p do        n
    for integer j ← 1 to q do      n
      double sum ← 0;
      for integer k ← 1 to c do    n
        sum ← sum + A[i,k]*B[k,j];  somma
      endfor
      P[i,j] ← sum;
    endfor
  endfor
  return P;
```

Complessità
- $T(p,c,q) = p \cdot c \cdot q$
- $T(n) = \Theta(n^3)$



A: 7×3 B: 3×5 P: 7×5

Proviamo a migliorare l'algoritmo

- Suddividiamo le matrici $n \times n$ in quattro matrici $n/2 \times n/2$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

- La matrice prodotto P risulta definita come

$$P = \begin{pmatrix} A_{1,1} B_{1,1} + A_{1,2} B_{2,1} & A_{1,1} B_{1,2} + A_{1,2} B_{2,2} \\ A_{2,1} B_{1,1} + A_{2,2} B_{2,1} & A_{2,1} B_{1,2} + A_{2,2} B_{2,2} \end{pmatrix}$$

- Equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \leq 1 \\ 8T(n/2) + c_2 n^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La soluzione della ricorrenza è
T(n) = Θ(n^3)
cioè non meglio dell'algoritmo “banale”

Come migliorare il prodotto fra matrici

7 moltiplicazioni
di matrici *n*/2 *x* *n*/2

- Calcoliamo alcuni termini intermedi

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (A_{2,1}+A_{2,2}-A_{1,1})\times(B_{2,2}-B_{1,2}+B_{1,1}) \\
M_2 &= A_{1,1}\times B_{1,1} \\
M_3 &= A_{1,2}\times B_{2,1} \\
M_4 &= (A_{1,1}-A_{2,1})\times(B_{2,2}-B_{1,1}) \\
M_5 &= (A_{2,1}+A_{2,2})\times(B_{1,2}-B_{1,1}) \\
M_6 &= (A_{1,2}-A_{2,1}+A_{1,1}-A_{2,2})\times B_{2,2} \\
M_7 &= A_{2,2}\times(B_{1,1}+B_{2,2}-B_{1,2}-B_{2,1})
\end{aligned}
$$

- Matrice finale: $P = \begin{pmatrix} M_2+M_3 & M_1+M_2+M_5+M_6 \\ M_1+M_2+M_4-M_7 & M_1+M_2+M_4+M_5 \end{pmatrix}$

Analisi del miglioramento

- Si ottiene la seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \leq 1 \\ 7T(n/2) + c_2 n^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Dal Master Theorem (caso 1) si ricava

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log 7/\log 2}\right) \approx \Theta\left(n^{2.81}\right)$$

$7T(n/2) + n^2$

$a=7$

$b=2$

$f(n)=n^2$

$f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\overbrace{\log_2 7}^{2,8}})$ NO!

$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{\overbrace{\log_2 7}^{2,8} - 0,1})$ sí

<u>caso 1</u>

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2,8})$ meglio di $\Theta(n^3)$

Sottovettore non vuoto di valore massimo

Sottovettore di valore massimo

- Vettore $V[1..n]$ di n valori reali arbitrari
- Vogliamo individuare un sottovettore non vuoto di V la somma dei cui elementi sia massima

Elementi contigui!

3	-5	10	2	-3	1	4	-8	7	-6	-1

- Domanda: quanti sono i sottovettori di V?
  - 1 sottovettore di lunghezza n
  - 2 sottovettori di lunghezza n - 1
  - 3 sottovettori di lunghezza n - 2
  - ...
  - k sottovettori di lunghezza $n - k + 1$
  - ...
  - n sottovettori di lunghezza 1

Risposta:
$n(n+1)/2 = \Theta(n^2)$ sottovettori

Prima versione

```
double VecSum1( double v[1..n] )
    double smax ← v[1];
    for integer i ← 1 to n do
        for integer j ← i to n do
            double s ← 0;
            for integer k ← i to j do
                s ← s + v[k];
            endfor
            if (s > smax) then
                smax ← s;
            endif
        endfor
    endfor
    return smax;
```

n

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{j} 1$

$\sum_{k=i}^{j} = (j-i+1)$

Costo?

Risoluzione

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=i}^{j} 1$$

$$\sum_{k=i}^{j} 1 = j - i + 1 \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (j-i+1)$$

Semplifichiamo la doppia sommatoria

cambio di variabile sommatorie

semplifichiamo

$\sum_{j=i}^{n} (j-i+1) \rightarrow$ cambio di variabile $u = j-i+1$

intervallo di u

Quando $j=i$, $u=1$

Quando $j=n$, $u=n-i+1$

$\Rightarrow$ intervallo di u $\Rightarrow$ $1 \leq u \leq n-i+1$

La sommatoria in j si trasforma in:

$$\sum_{j=i}^{n} (j-i+1) = \sum_{u=1}^{n-i+1} u = \frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2}$$

solita risoluzione della sommatoria

Ora $T(n)$ diventa

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2}$$

Sostituiamo nuovamente

$p = n-i+1$

Quando $i=1$, $p=n$

Quando $i=n$, $p=1$

L'intervallo di p é $1 \leq p \leq n$

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \sum_{p=1}^{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La sommatoria in i diventa una sommatoria in p:

$$T(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{p(p+1)}{2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2}(p^2+p) = \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n} p^2 + \sum_{p=1}^{n} p\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{6} \Rightarrow \Theta(n^3)$$

Seconda versione

```
double VecSum2( double v[1..n] )
    double smax ← v[1];
    for integer i ← 1 to n do
        double s ← 0;
        for integer j ← i to n do
            s ← s + v[j];
            if (s > smax) then
                smax ← s;
            endif
        endfor
    endfor
    return smax;
```

n

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1$

Costo?

Risoluzione $T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1$

Risolviamo $\sum_{j=i}^{n} 1$

$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) =$

Sostituzione

$\pi = n-i+1$

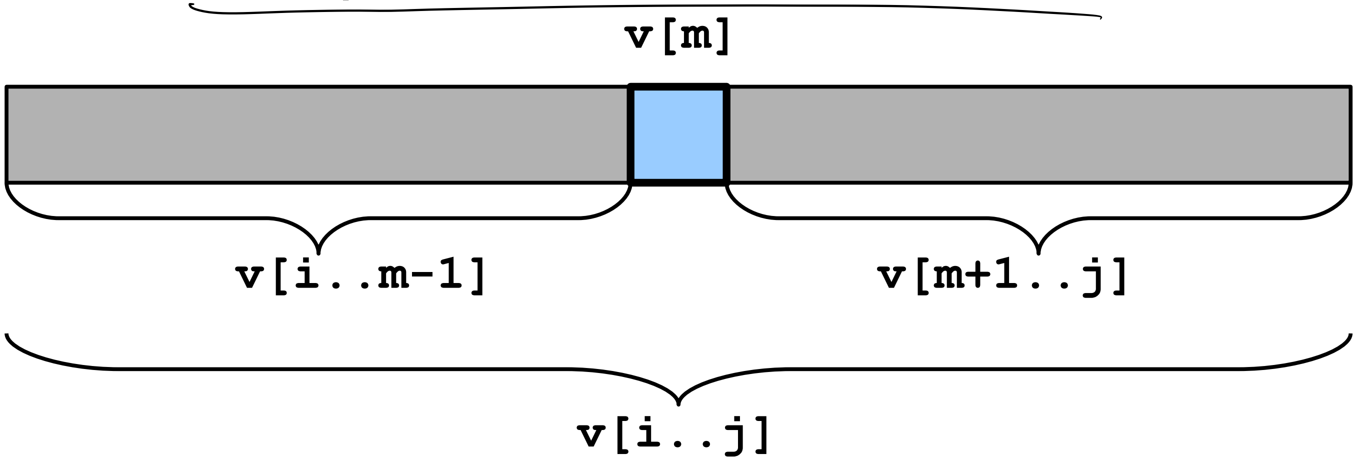
$i = 1 , \pi = n$

$i = n , \pi = 1$ $\quad 1 \leq \pi \leq n$

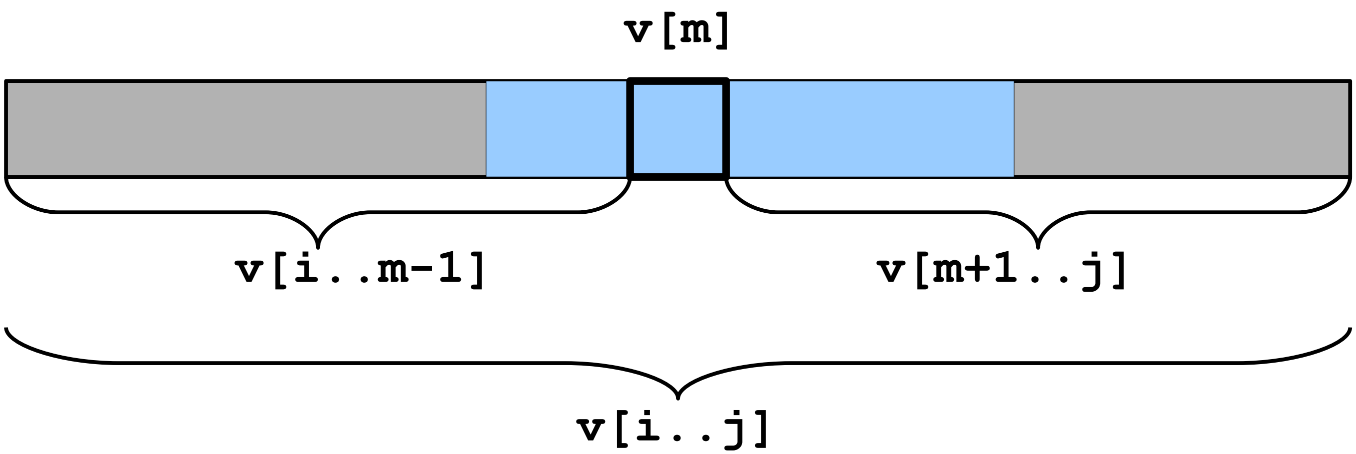
$\sum_{\pi=1}^{n} \pi = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \Theta(n^2)$

Strategia divide-et-impera

- Dividiamo il vettore in due parti, separate dall'elemento in posizione centrale **`v[m]`**
- Il sottovettore di somma massima potrebbe trovarsi:
  - Interamente nella prima metà **`v[i..m-1]`**
  - Interamente nella seconda metà **`v[m+1..j]`**
  - "A cavallo" tra la prima e la seconda metà

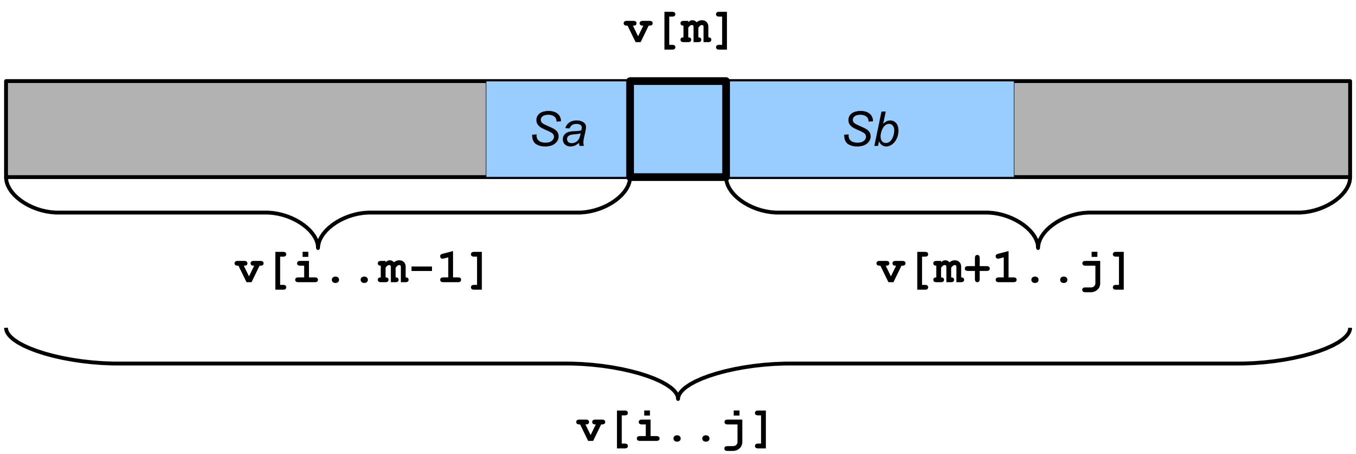


Strategia divide-et-impera



- La parte più complicata è la ricerca del sottovettore di somma massima che contiene **v[m]**
- Tale vettore
  - Può includere una parte prima di **v[m]**
  - Può includere una parte dopo di **v[m]**

Strategia divide-et-impera



- Calcolo la max somma *Sa* tra tutti i sottovettori (incluso quello vuoto) il cui ultimo elemento è **`v[m-1]`**
- Calcolo la max somma *Sb* tra tutti i sottovettori (incluso quello vuoto) il cui primo elemento è **`v[m+1]`**
- Il sottovettore di somma max che include **`v[m]`** avrà somma (*v*[*m*] + *Sa* + *Sb*)

Strategia divide-et-impera

```
double VecSumDI( double v[1..n], integer i, integer j)
    if (i = j) then
        return v[i];
    else
        integer k, m ← (i+j)/2;
        double sleft ← VecSumDI(v,i,m-1);
        double sright ← VecSumDI(v,m+1,j);
        double sa, sb, s;
        sa ← 0; s ← 0;
        for k ← m-1 downto i do
            s ← s + v[k]
            if (s > sa) sa ← s;
        endfor
        sb ← 0; s ← 0;
        for k ← m+1 to j do
            s ← s + v[k];
            if (s > sb) sb ← s;
        endfor
        return max(sleft, sright, v[m] + sa + sb);
    endif
```

Caso Base
l'intervallo [i,j], contiene un solo elemento (i=j), restituisce direttamente quell'elemento

4 1 -2 2

n/2

n/2

v[m] + sa + sb: somma centrale

```
VecSumDI([4,1,-2,2], 1, 4)
├── sleft = VecSumDI([4], 1, 1) = 4
├── sright = VecSumDI([-2,2], 3, 4)
│   ├── sleft = VecSumDI([], 3, 2) = -∞
│   ├── sright = VecSumDI([2], 4, 4) = 2
│   └── somma_centrale = -2 + (-∞) + 2 = -∞ → max(-∞, 2, -∞) = 2
└── somma_centrale = 1 + 4 + 0 = 5 → max (4, 2, 5) = 5
```

Strategia divide-et-impera

- Vedi implementazione Java
- Costo asintotico? → risolviamo l'equazione di ricorrenza per trovare il costo asintotico → risolvo col teorema Master

$$T(n) = \begin{cases} 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1 \\ O(1) & n = 1 \quad \text{caso base} \end{cases}$$

→ Termine ricorsivo $2T(n/2)$
Due chiamate ricorsive su metà dell'array $2T(n/2)$

→ Termine lineare n
Operazione per calcolare la somma centrale
(due cicli for che corrispondono al massimo n elementi in totale)

Metodo divide-et-impera

- Quando applicare divide-et-impera
  - I passi “divide” e “combina” devono essere “semplici”
  - Idealmente, il costo complessivo deve essere migliore del corrispondente algoritmo iterativo
  - Esempio buono: ordinamento
  - Esempio non buono: ricerca del minimo

Esercizio

- Si consideri un array *A*[1..*n*] di *n* valori reali, non necessariamente distinti, ordinato in senso non decrescente. Scrivere un algoritmo divide-et-impera che restituisca *true* se e solo se in *A* sono presenti dei valori duplicati
  - In altre parole l'algoritmo ritorna *true* se esiste almeno un valore di *A* che compare almeno due volte, *false* altrimenti