

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 10- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 10.1. [10.6] Determinare il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che i vettori

$$v = (1, 3, 7, -1), \quad w = (3, 5, 1, k)$$

siano ortogonali.

Esercizio 10.2. [10.9] Siano $u = (4, 2, -2)$ e $v = (3, -3, 2)$ vettori di \mathbb{R}^3 .

- Calcolare le lunghezze di u e di v (rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3).
- Trovare tutti i vettori w di lunghezza 1 ortogonali a u e a v .

Esercizio 10.3. [10.7] Siano assegnati i seguenti vettori di \mathbb{R}^4 :

$$v = (2, -1, 0, 1), \quad w = (-1, 2, 0, 2)$$

- Si calcoli l'angolo tra i due vettori.
- Si determini la proiezione ortogonale di v su w .
- Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w .

Esercizio 10.4. [10.8] Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di \mathbb{R}^3

$$v = (3, 4, -2), \quad w = (2, 1, -1)$$

Esercizio 10.5. [10.11] Data la base

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, 1)\}$$

di \mathbb{R}^3 , si determini una base ortonormale di \mathbb{R}^3 utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da \mathcal{B} .

Esercizio 10.6. [10.12] Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

Esercizio 10.7. [10.15] Si considerino i vettori di \mathbb{R}^3

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

- Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2 .
- Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2 .
- Trovare una base ortonormale del sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dai vettori v_1 e v_2 .

Esercizio 10.8. [10.16] Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^3 costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 10.9. [10.21] Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione lineare tale che

$$T(1, -2, 1) = (2, 1), \quad T(1, 0, 0) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$

- Che dimensione ha l'immagine di T ?
- Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3) del nucleo di T .

Esercizio 10.10. [11.1] [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato.] Calcolare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 formata da autovettori per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 10.11. [11.2] Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale $P^T A P$ sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 10.12. [11.3] Sia T l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 con matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

- Stabilire se l'endomorfismo T è diagonalizzabile.
- Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3).
- Trovare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di T .

Esercizio 10.13. [11.5] Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di A .

Esercizio 10.14. [11.9] Si consideri il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3

$$T(x, y, z) = (ax, bx + y + z, y + z)$$

con a e b parametri reali.

- Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in \mathbb{R} .
- Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di T .

Esercizio 10.15. [11.13] Sia T l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2 + \sqrt{3}x_3, \sqrt{3}x_2)$$

- Stabilire se T è invertibile.
- Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.
- Trovare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 che diagonalizza T .