CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 8– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 8.1. *[8.1]* Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.

Esercizio 8.2. *[8.2]* Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici $M_{2\times 2}$ a valori in $\mathbb{R}$ non è lineare.

Esercizio 8.3. *[8.3]* Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1, 2) = (3, 0), \qquad T(2, 7) = (4, 5), \qquad T(1, 5) = (1, 4)$$

Esercizio 8.4. *[8.4]* Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1, 2) = (3, 0), \qquad T(2, 4) = (5, 0), \qquad T(0, 1) = (1, 1)$$

Esercizio 8.5. *[8.5]* Determinare una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1, 1) = (1, 2), \qquad T(0, 2) = (4, 4)$$

Esercizio 8.6. *[v. 8.6]* Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.

a) Verificare che T è lineare.
b) Determinare Nucleo e Immagine di T.
d) Determinare $T(1, 2)$.

Esercizio 8.7. *[v. 8.7]* Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, -1)$.

a) Esplicitare $T(x, y)$.
c) Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 8.8. *[8.11]* Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2)$$

a) Trovare una base del nucleo $\mathrm{N}(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.
b) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
c) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?

Esercizio 8.9. *[8.12]* Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.
b) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3, 3, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T.

Esercizio 8.10. *[8.17]*

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1, 1, 1) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (0, 4), \quad T(1, 1, 0) = (2, 1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.
b) *Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.*
c) *Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.*

Esercizio 8.11. *[8.30]* Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stabilire se T invertibile.
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.

Esercizio 8.12. *[8.16]* Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$

$$T(x, y, z, w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.

b) Si determini l'inversa T^{-1}.

Esercizio 8.13. *[8.34]* Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ 3x - z,\ 2x - y + z)$$

e sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x, y, z) = (x + z,\ x - y + z,\ y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Esercizio 8.14. *[8.32]* Si consideri la funzione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.
b) Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.

Esercizio 8.15. *[8.15]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.
b) Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.

Esercizio 8.16. *[8.9]* Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : \quad x + 2y = 0$.

Esercizio 8.17. *[8.22]* Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y) = (kx + 4y,\ x + ky,\ y)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro k.

Esercizio 8.18. *[8.23]* Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare del parametro reale k.
b) Determinare la dimensione di immagine e nucleo di T al variare di k.

Esercizio 8.19. *[8.24]* Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w,\ -x + 2y - z,\ -x + y + 3z - 3w)$$

a) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
b) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $Im(T) \subseteq \mathbb{R}^3$.
c) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbb{R}^4$

Esercizio 8.20. *[8.26]* Sia $T\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

a) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
b) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.

Esercizio 8.21. *[8.53]* Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che:

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad $\mathcal{E}$.
b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.