ANALISI MATEMATICA 1
ESERCITAZIONI

Appunti del Corso

Analisi Matematica 1, Corso di Laurea in Informatica

Anno Accademico 2023 - 2024

Indice

1 Lezione 1 **1**

1.1 Polinomi: definizioni di base 1

1.2 Divisione fra polinomi 3

1.3 Fattorizzazione dei polinomi 7

1.4 Disequazioni con funzioni polinomiali e razionali 9

2 Lezione 2 **11**

2.1 Ripasso: maggioranti, minoranti, estremo superiore e inferiore 11

2.2 Esercizi 12

3 Lezione 3 **21**

3.1 Ripasso: i numeri complessi 21

3.2 Esercizi: esercizi di base sui numeri complessi 24

3.3 Ripasso: polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ 25

3.4 Esercizi: polinomi ed equazioni in $\mathbb{C}$ 26

4 Lezione 4 **34**

4.1 Ripasso: successioni 34

4.2 Esercizi: convergenza di successioni, aritmetica dei limiti 35

5 Lezione 5 **47**

5.1 Ripasso: limiti di funzioni 47

5.2 Esercizi: limiti di funzioni 47

5.3 Ripasso: continuità 55

5.4 Esercizi: continuità 56

6 Lezione 6 **57**

6.1 Ripasso: simboli di Landau (o-piccolo) 57

6.2 Esercizi: limiti con i simboli di Landau 57

6.3 Ripasso: derivabilità e differenziabilità, interpretazione geometrica della derivata 60

6.4 Esercizi: derivabilità e differenziabilità 67

7 Lezione 7 **71**

7.1 Ripasso: teorema di de l'Hôpital 71

7.2 Esercizi: teorema di de l'Hôpital 71

7.3 Ripasso: sviluppo di Taylor 73

7.4 Esercizi: sviluppi di Taylor 73

8 Lezione 8 **80**

8.1 Ripasso: massimi e minimi locali, punti stazionari 80

8.2 Ripasso: teorema di Weierstraß 82

8.3 Esercizi: teoremi di Weierstraß e di Lagrange 83

8.4 Applicazione: regressione lineare 84
8.5 Ripasso: funzioni Lipschitz continue 88
8.6 Esercizi: funzioni Lipschitz continue 90

9 Lezione 9 **93**
9.1 Approfondimento: formula di Taylor con resto di Lagrange 93
9.2 Approfondimento: funzioni convesse 97
9.3 Introduzione all'ottimizzazione convessa 101

10 Lezione 10 **109**
10.1 Ripasso e approfondimento: teoria dell'integrazione secondo Riemann . . . 109
10.2 Esercizi: ricerca delle primitive 117

11 Lezione 11 **129**
11.1 Esercizi: funzioni integrali 129

12 Lezione 12 **140**
12.1 Ripasso: integrazione di Riemann impropria 140
12.2 Esercizi: integrazione di Riemann impropria 142

13 Lezione 13 **154**
13.1 Ripasso: equazioni differenziali ordinarie 154
13.2 Diverse tipologie di equazioni differenziali ordinarie di ordine 1 156
13.3 Esercizi: equazioni differenziali ordinarie e problemi di Cauchy 161

14 Lezione 14 **165**
14.1 Ripasso ed esercizi: equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti 165
14.2 Approfondimento: introduzione ai metodi numerici per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie 168

Riferimenti bibliografici **174**

1 Lezione 1

1.1 Polinomi: definizioni di base

Definizione 1.1. Un *polinomio* $P(x)$ nella variabile x di grado n a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ (nel nostro caso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) è un'espressione algebrica del tipo

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k, \qquad a_n \neq 0,\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$$

Gli elementi $a_k x^k$ sono detti *monomi*, e se $a_k \neq 0$ vengono chiamati anche *termini*.

Osservazione. Solitamente il grado di un polinomio $P(x)$ viene indicato con $\deg(P)$.
I coefficienti di un polinomio di grado n, $\{a_k\}_{0\le k\le n}$, possono anche essere scritti come, dato $m > n$,

$$\{a_k\}_{0\le k\le m}, \qquad a_k = 0 \text{ per ogni } n < k \le m$$

I simboli x^k sono, per l'appunto, simboli: non hanno, per ora, alcun significato particolare.

Esempio.

$$\begin{aligned} P(x) = a_5x^5 + a_3x^3 + a_0 &\qquad \deg(P) = 5 \\ P(x) = 0x^b + a_1x^1,\ b > 1 &\qquad \deg(P) = 1 \\ P(x) = a_0 = a_0x^0 &\qquad \deg(P) = 0 \\ P(x) = 0 &\qquad \deg(P) = -\infty \text{ per convenzione} \end{aligned}$$

Definizione 1.2. Siano $P(x)$ un polinomio di grado n i cui coefficienti sono $\{a_k\}_{0\le k\le n} = \{a_0, \dots, a_n\}$ e $Q(x)$ un polinomio di grado m i cui coefficenti sono $\{b_i\}_{0\le i\le m} = \{b_0, \dots, b_m\}$. La *somma algebrica* di P e Q, indicata con $P+Q$, è il polinomio di grado $d \le \max\{n, m\}$

$$(P+Q)(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{d} c_k x^k$$

i cui coefficienti $\{c_k\}_{0\le k\le d}$ sono dati da:

(i) nel caso $n = m$,
$$c_k = a_k + b_k \text{ per ogni } 0 \le k \le n$$

(ii) nel caso $n > m$,
$$c_k = \begin{cases} a_k + b_k & 0 \le k \le m \\ a_k & m < k \le n \end{cases}$$

(iii) nel caso $m > n$
$$c_k = \begin{cases} a_k + b_k & 0 \le k \le n \\ b_k & n < k \le m \end{cases}$$

Osservazione. Può accadere che il grado d di $P+Q$ sia minore di $\max\{n,m\}$, ad esempio se $n=m$ e $b_n=-a_n$.
Si può facilmente verificare che la somma algebrica così definita è commutativa, associativa e che il polinomio $P(x)=0$ è l'elemento neutro della somma algebrica. Inoltre, per ogni polinomio $P(x)$ esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $(P+Q)(x)=0$.

Definizione 1.3. Dato un polinomio $P(x)$ di grado n avente coefficienti $\{a_k\}_{0\le k\le n}$ e un numero (detto *scalare*) $\lambda\in\mathbb{K}$, la *moltiplicazione per scalare* di λ e P è il polinomio λP di grado $d\le n$ i cui coefficienti $\{c_k\}_{0\le k\le d}$ sono dati da

$$c_k=\lambda a_k \text{ per ogni } 0\le k\le n$$

Osservazione. Si può facilmente verificare che la moltiplicazione per scalare è distributiva rispetto alla somma algebrica di polinomi.

In realtà, poiché possiamo intendere un elemento del campo $\mathbb{K}$ come un polinomio di grado 0, la moltiplicazione per scalare è un caso particolare della moltiplicazione tra polinomi:

Definizione 1.4. Dati un polinomio $P(x)$ di grado n e coefficienti $\{a_k\}_{0\le k\le n}$ e un polinomio $Q(x)$ di grado m e coefficienti $\{b_k\}_{0\le k\le m}$, il *prodotto di P e Q*, indicato con PQ, è un polinomio di grado $n+m$ i cui coefficienti $\{c_k\}_{0\le k\le n+m}$ sono dati da

$$c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$$

ossia

$$c_0=a_0b_0,\quad c_1=a_0b_1+a_1b_0,\quad c_2=a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2\ \dots$$

Osservazione. Si può verificare che il prodotto fra polinomi è associativo, commutativo e che è distributivo rispetto alla somma algebrica. Inoltre, il polinomio $P(x)=1$ è l'elemento neutro del prodotto fra polinomi.
Le operazioni così definite fanno sì che i simboli x^k soddisfino le usuali proprietà delle potenze: $x^kx^l=x^{k+l}$ etc.

Sino ad ora, abbiamo parlato dei polinomi come oggetti astratti su cui abbiamo definito delle operazioni (che rendono l'insieme dei polinomi su un dato campo un anello commutativo, che si indica con $\mathbb{K}[x]$). Possiamo però pensare di *valutare i polinomi sugli elementi del campo* $\mathbb{K}$: dati un numero $a\in\mathbb{K}$ e un polinomio $P(x)$, possiamo calcolare il numero $P(a)$ sostituendo alla x il numero a, in simboli

$$\mathbb{K}\ni a\overset{P(x)}{\mapsto}P(a)\in\mathbb{K}$$

$P(x)$ quindi induce un modo per assegnare ad ogni elemento del campo $\mathbb{K}$ un elemento del campo $\mathbb{K}$, ossia $P(x)$ induce una *funzione polinomiale.*

Esempio. Questo modo di intendere i polinomi consente di visualizzare meglio le operazioni fra polinomi precedentemente definite in modo molto astratto, applicando ai vari termini dei polinomi (che risultano essere numeri nell'accezione illustrata) le solite manipolazioni algebriche; ad esempio,

$$\begin{aligned}(x^2+5x+2)(x^3+6x) &\overset{\text{prop. associativa}}{=} (x^2+5x+2)\Big((x^3)+(6x)\Big) \overset{\text{prop. distributiva}}{=} \\ &= (x^2+5x+2)x^3+(x^2+5x+2)6x \overset{\text{prop. distributiva}}{=} \\ &= x^5+5x^4+2x^3+6x^3+30x^2+12x = \\ &= x^5+5x^4+8x^3+30x^2+12x\end{aligned}$$

1.2 Divisione fra polinomi

Teorema 1.1. *Siano $P_1(x)$ e $P_2(x)$ due polinomi di grado rispettivamente n e m con $n \geq m$, e $P_2(x) \not\equiv 0$ (ossia $P_2(x)$ diverso dal polinomio nullo). Esistono due polinomi $Q(x)$ (detto* quoziente*) e $R(x)$ (detto* resto*) tali che*

$$P_1(x) = P_2(x)Q(x) + R(x)$$

con $\deg(Q) = \deg(P_1) - \deg(P_2)$ *e* $\deg(R) < m$.

Esempio. Esiste un algoritmo che consente di determinare agilmente i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$. Lo illustriamo nel caso esempio

$$P_1(x) = x^5 + 2x^3 + x + 3 \qquad P_2(x) = x^3 + 3$$

(i) Scriviamo i polinomi mettendo i termini in ordine *decrescente* e lasciando lo spazio per eventuali termini mancanti

$$\begin{array}{cccc|l} x^5 & +2x^3 & & +x+3 & x^3+3 \\ \cline{5-5} & & & & \end{array}$$

(ii) Effettuiamo la divisione fra i monomi di grado maggiore di $P_1(x)$ e $P_2(x)$, nel nostro caso x^5 e x^3, ottenendo x^2

$$\begin{array}{cccc|l} x^5 & +2x^3 & & +x+3 & x^3+3 \\ \cline{5-5} & & & & x^2 \end{array}$$

(iii) Moltiplichiamo il polinomio $P_2(x) = x^3 + 3$ per il risultato ottenuto e sottraiamolo a $P_1(x)$

$$\begin{array}{cccc|l} x^5 & +2x^3 & & +x+3 & x^3+3 \\ \cline{5-5} -x^5 & & -3x^2 & & x^2 \\ \cline{1-3} & 2x^3 & -3x^2 & +x+3 & \end{array}$$

ottenendo il polinomio $R_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 3$;

(iv) poiché $\deg(R_1) \geq \deg(P_2)$, ripetiamo la procedura precedente per i polinomi $R_1(x)$ e $P_2(x)$: effettuiamo la divisione fra i termini di grado maggiore, $2x^3$ e x^3

$$\begin{array}{rrrr|l} x^5 & +2x^3 & & +x+3 & x^3+3 \\ \cline{5-5} -x^5 & & -3x^2 & & x^2+2 \\ \cline{1-3} & 2x^3 & -3x^2 & +x+3 & \end{array}$$

moltiplichiamo $P_2(x)$ per il risultato ottenuto e sottraiamolo al polinomio $R_1(x)$,

$$\begin{array}{rrrr|l} x^5 & +2x^3 & & +x+3 & x^3+3 \\ \cline{5-5} -x^5 & & -3x^2 & & x^2+2 \\ \cline{1-3} & 2x^3 & -3x^2 & +x+3 & \\ & -2x^3 & & -6 & \\ \cline{2-4} & & -3x^2 & +x-3 & \end{array}$$

ottenendo così $R_2(x) = -3x^2 + x - 3$;

(v) in questo caso $\deg(R_2) < \deg(P_2)$, e abbiamo quindi finito. Il polinomio $Q(x)$ sarà il polinomio ottenuto sommando i quozienti intermedi, nel nostro caso $Q(x) = x^2+2$, e il polinomio $R(x)$ sarà il polinomio ottenuto dall'ultima sottrazione, nel nostro caso $R(x) = R_2(x)$.

Quindi

$$P_1(x) = P_2(x)(x^2 + 2) + (-3x^2 + x - 3)$$

Definizione 1.5. Dati due polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$ che soddisfano le ipotesi del teorema 1.1, diremo che $P_1(x)$ è *divisibile* per $P_2(x)$ se il polinomio di resto $R(x)$ è il polinomio nullo, ossia se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P_1(x) = P_2(x)Q(x)$$

Nel caso in cui il polinomio divisore $P_2(x)$ sia un polinomio del tipo $P_2(x) = x - c$ con $c \in \mathbb{K}$, esiste un comodo criterio per determinare se $P_1(x)$ con $\deg(P_1) \geq 1$ è divisibile per P_2:

Proposizione 1.1. *Dati due polinomi $P_1(x)$ e $P_2(x)$ con $P_2(x) = x-c$, $c \in \mathbb{K}$ e $\deg(P_1) \geq 1$, P_1 è divisibile per P_2 se e solo se $P_1(c) = 0$.*

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni.

(i) Supponiamo che P_1 sia divisibile per P_2; allora per la definizione 1.5 esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P_1(x) = (x - c)Q(x)$$

Se valutiamo ambo i membri dell'uguaglianza in c otteniamo

$$P_1(c) = (c - c)Q(x) = 0$$

ossia $P_1(c) = 0$.

(ii) Supponiamo ora che $P_1(c) = 0$. Poiché P_1 e P_2 soddisfano le ipotesi del teorema 1.1, sappiamo che esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$P_1(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$$

con $\deg(R) < \deg(P_2) = 1$, ossia $R(x) = r_0$ per qualche $r_0 \in \mathbb{K}$; quindi

$$P_1(x) = (x - c)Q(x) + r_0$$

Sappiamo che $P_1(c) = 0$; valutando ambo i membri dell'espressione precedente in $x = c$ otteniamo

$$0 = P_1(c) = (c - c)Q(x) + r_0 = r_0$$

ossia $0 = r_0 = R(x)$. Quindi per la definizione 1.5 P_1 è divisibile per $P_2(x) = x - c$. □

Definizione 1.6. Se $a \in \mathbb{K}$ è tale per cui $P(a) = 0$, a è detto *radice* del polinomio P.

Proposizione 1.2. *Dato un polinomio $P(x)$ di grado n, questo ammette al massimo n radici distinte.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione:

(i) *Passo base* $n = 0$: se $P(x)$ è un polinomio di grado 0 allora $P(x) = a_0$ con $a_0 \neq 0$; di conseguenza $P(x)$ non ammette radici, e il risultato è verificato.

(ii) *Passo induttivo*: supponiamo che il risultato valga per polinomi di grado n, e dimostriamo che vale anche per polinomi di grado $n + 1$. Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n+1$. Esistono due possibilità: $P(x)$ può non ammettere radici, nel qual caso il risultato è verificato, oppure può ammettere almeno una radice, sia essa $a \in \mathbb{K}$. Per la definizione 1.6, sappiamo che $P(a) = 0$; per la proposizione 1.1 allora vale che $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$, ossia

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

con $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = n$. Per ipotesi induttiva, sappiamo che $\deg(Q)$ ammette al massimo n radici distinte; di conseguenza $P(x)$ ammette come radici le radici di $Q(x)$, al massimo n distinte, e a, e quindi ammette al massimo $n + 1$ radici distinte. □

Esempio. Nel caso della divisione fra polinomi in cui il divisore è della forma $P_1(x) = x-c$, esiste un altro algoritmo, più veloce, che consente di effettuare la divisione, l'*algoritmo di Ruffini.* Consideriamo i polinomi

$$P_1(x) = x^3 + 4x + 1 \qquad P_2(x) = x - 2$$

(i) Scriviamo i polinomi mettendo i termini in ordine *decrescente*;

(ii) Inseriamo in uno schema simile a quello seguente i coefficienti $\{1, 0, 4, 1\}$ di $P_1(x)$, nella riga superiore, avendo cura di inserire degli zeri per i coefficienti dei termini mancanti, e la radice $x = 2$ del polinomio $P_2(x)$ nella riga inferiore

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

(iii) Abbassiamo il primo coefficiente, 1, sotto la riga orizzontale; questo sarà il coefficiente del termine di grado $\deg(P_1) - 1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

(iv) Moltiplichiamo il coefficiente, 1, ottenuto in questo modo per la radice di $P_1(x)$, 2, e scriviamo il risultato sopra la linea di demarcazione sotto il coefficiente successivo a quello precedentemente utilizzato, in questo caso lo 0.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 \nearrow^{\cdot 2} & & & \end{array}$$

(v) Sommiamo i due numeri incolonnati, riportando il risultato sotto la linea di demarcazione orizzontale

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & & 2+ & & \\ \hline & 1 & 2 & & \end{array}$$

(vi) Ripetiamo la procedura precedente, ossia moltiplichiamo il numero ottenuto, 2, per la radice di $P_2(x)$ 2, e riportiamo il risultato sotto il coefficiente successivo

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 \nearrow^{\cdot 2} & & \end{array}$$

ed effettuiamo la somma dei numeri incolonnati

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & & 2 & 4+ & \\ \hline & 1 & 2 & 8 & \end{array}$$

finché non terminiamo lo scorrimento dei coefficienti superiori:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 4 & 1 \\
2 & & 2 & 4 & 16 \\
\hline
 & 1 & 2 & 8 &
\end{array}
$$

e infine

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 4 & 1 \\
2 & & 2 & 4 & 16 \\
\hline
 & 1 & 2 & 8 & 17
\end{array}
$$

(vii) Il numero sotto la linea di demarcazione orizzontale a destra del separatore verticale è il resto $R(x)$ della divisione, nel nostro caso 17, mentre i numeri a sinistra del separatore verticale sono i coefficienti dei termini del quoziente $Q(x)$: quindi

$$P_1(x) = P_2(x)(x^2 + 2x + 8) + 17$$

1.3 Fattorizzazione dei polinomi

Definizione 1.7. Un polinomio $P(x)$ di grado $n \geq 1$ è detto *irriducibile* se non esiste un polinomio $D(x)$ di grado m con $0 < m < n$ che divide esattamente P.

Teorema 1.2. *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ossia nel caso di polinomi a coefficienti reali, gli unici polinomi irriducibili sono i polinomi di grado 1 e i polinomi di grado 2 con discriminante*[1] *negativo.*

Come possiamo fattorizzare un polinomio $P(x)$ a coefficienti reali? Idealmente, procediamo nel modo seguente: cerchiamo una radice $a \in \mathbb{R}$, dividiamo $P(x)$ per $x - a$ e ripetiamo il passaggio finché non otteniamo un polinomio irriducibile, ossia una delle due tipologie indicate dal teorema 1.2. Ci sono delle scorciatoie che agevolano il processo:

(i) Se i coefficienti del polinomio sono numeri *interi*, le radici *intere*, *se esistono*, sono da cercarsi fra i sottomultipli *interi* del termine noto.

Esempio. Ad esempio, consideriamo il polinomio

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$$

Tutti i coefficienti appartengono a $\mathbb{Z}$, e quindi le radici intere, se esistono, sono da cercarsi nell'insieme

$$\{1, -1, 3, -3, 7, -7, 21, -21\}$$

Per trovare le radici intere è quindi sufficiente valutare il polinomio $P(x)$ sui numeri dell'insieme precedente. Si verifica facilmente che

$$P(1) = 0, \qquad P(3) = 0, \qquad P(-7) = 0$$

[1] Ricordiamo che dato un polinomio di grado 2 $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, il discriminante è definito essere $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0$

Per la proposizione 1.2 possiamo quindi fermarci, poiché abbiamo trovato 3 radici distinte; abbiamo quindi che

$$P(x) = (x-3)(x-1)(x+7)$$

Questo è vero per il motivo seguente: supponiamo che $P(x)$ sia un polinomio a coefficienti interi $\{a_k\}_{0\leq k\leq n}$, e sia $r \in \mathbb{Z}$ una sua radice intera; vale che

$$0 = P(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

ossia

$$-a_0 = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r = \overbrace{r}^{\in\mathbb{Z}} \underbrace{(a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1)}_{\in\mathbb{Z}}$$

Risulta quindi evidente che r è un sottomultiplo intero di a_0.

(ii) Formule di calcolo di vario tipo:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\
&(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)\\
&(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)\\
&(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\\
&(x^2+sx+p) = (x+n_1)(x+n_2) \text{ con } s = n_1+n_2 \text{ e } p = n_1n_2
\end{aligned}$$

Esempio. Consideriamo il polinomio $P(x) = x^4+1$. Osserviamo che $P(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi non ammette radici; tuttavia per il teorema 1.2 *non* è irriducibile: infatti,

$$\begin{aligned}
P(x) = x^4+1 = x^4+1+ \underbrace{2x^2-2x^2}_{\text{abbiamo aggiunto 0}} &=\\
= (x^4+2x^2+1) - 2x^2 &\overset{\text{quadrato di binomio}}{=}\\
= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 &\overset{\text{differenza di quadrati}}{=}\\
= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+2-\sqrt{2}x)&
\end{aligned}$$

Esempio. Consideriamo il polinomio $P(x) = x^3-(a+b)x^2+(ab+b^2)x-ab^2$ ove a, b sono due parametri reali. Vogliamo fattorizzarlo in funzione di a, b:

(i) se $a = b = 0$ allora $P(x) = x^3$ ed è già fattorizzato;

(ii) se $a = 0,\ b \neq 0$ allora $P(x) = x^3 - bx^2 + b^2x$;

$$P(x) = x^3 - bx^2 + b^2x = x\underbrace{(x^2 - bx + b^2)}_{\Delta<0}$$

e quindi risulta fattorizzato;

(iii) se $a \neq 0,\ b = 0$ allora $P(x) = x^3 - ax^2$, ossia

$$P(x) = x^2(x - a)$$

e lo abbiamo fattorizzato;

(iv) infine, se $a \neq 0,\ b \neq 0$. Notiamo che, poiché il termine x^3 ha come coefficiente 1, se cerchiamo radici costituite da numeri o contenenti termini numerici non riusciamo più a cancellare gli elementi di $\mathbb{R}$; di conseguenza, cerchiamo radici contenenti solo i parametri: proviamo con

$$P(b) = b^3 - (a+b)b^2 + (ab + b^2)b - ab^2 = -ab^2 + b^3 \neq 0$$

$$P(a) = a^3 - (a+b)a^2 + (ab + b^2)a - ab^2 = 0$$

Quindi $(x - a)$ è divisore esatto di $P(x)$, ed effettuando la divisione con Ruffini otteniamo

$$P(x) = (x - a)\underbrace{(x^2 - bx + b^2)}_{\Delta<0}$$

1.4 Disequazioni con funzioni polinomiali e razionali

Esercizio 1.1. *Determinare l'insieme delle soluzioni di*

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 1} \geq 0 \tag{1.1}$$

Soluzione. Cerchiamo di fattorizzare il numeratore ed il denominatore della funzione razionale:

(i) notiamo che $P(x) = x^2 - x + 1$ è irriducibile per il teorema 1.2, infatti

$$\Delta = 1 - 4 < -3$$

Inoltre, $P(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $Q(x) = x^3 - 1$ è invece una differenza di cubi, che possiamo decomporre come

$$Q(x) = (x - 1)\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta<0}$$

Notiamo che, poiché Q è a denominatore, le sue radici vanno escluse dal dominio di esistenza della funzione razionale, e quindi eventualmente dalle soluzioni della disequazione.

Quindi la disequazione (1.1) risulta essere

$$\frac{\overbrace{x^2 - x + 1}^{>0\ \forall x \in \mathbb{R}}}{(x-1)(x^2+x+1)} \geq 0$$

e la positività della funzione razionale dipende unicamente dalla quantità a denominatore; andiamo quindi a studiarne il segno:

		1	
$(x-1)$	$-$	$\bullet$	$+$
(x^2+x+1)	$+$		$+$
$Q(x)$	$-$	$\circ$	$+$

Di conseguenza l'insieme delle soluzioni di (1.1) è

$$\{x \in \mathbb{R} : \ x > 1\}$$

$\square$

2 Lezione 2

2.1 Ripasso: maggioranti, minoranti, estremo superiore e inferiore

Definizione 2.1. Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$. Diremo che $x \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di S se

$$x \geq y \text{ per ogni } y \in S$$

Diremo invece che $x \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di S se

$$x \leq y \text{ per ogni } y \in S$$

Se S ammette un minorante o un maggiorante, diremo rispettivamente che S è *limitato inferiormente* o *superiormente*.

Definizione 2.2. Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$ un sottoinsieme limitato superiormente. Se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

(i) α è maggiorante di S

(ii) se $\gamma < \alpha$ allora γ *non* è maggiorante di S

allora α è unico ed è detto *estremo superiore* di S, e scriveremo $\alpha = \sup S$.
Analogamente, se S è limitato inferiormente ed esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che

(i) β è minorante di S

(ii) se $\gamma > \beta$ allora γ *non* è minorante di S

allora β è unico ed è detto *estremo inferiore* di S, in notazione $\beta = \inf S$.
Se $\alpha = \sup S \in S$, allora α verrà detto *massimo*, e se $\beta = \inf S \in S$, β verrà detto *minimo*.

Teorema 2.1 (Least-upper-bound property)**.** *Se $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$ è limitato superiormente, allora S ammette un estremo superiore.*

Corollario 2.1. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$ limitato inferiormente. Se denotiamo con L l'insieme dei minoranti di L, avremo che*

$$\beta = \sup L$$

esiste e $\beta = \inf S$.

Dimostrazione. Per ipotesi, sappiamo che S è limitato inferiormente, e di conseguenza S ammette almeno un minorante; abbiamo quindi che $L \neq \varnothing$. Inoltre, fissato un qualsiasi $y \in S$,

$$x \leq y \text{ per ogni } x \in L$$

poiché L è l'insieme dei minoranti di S (cfr. definizione 2.1). Di conseguenza y è un maggiorante di L e L è limitato superiormente, e per il teorema 2.1 ammette un estremo superiore; sia $\beta = \sup L$.
Vogliamo ora mostrare che β è l'estremo inferiore di S, ossia che β soddisfa i punti (i) e (ii) della seconda parte della definizione 2.2.

(i) Consideriamo la definizione 2.2 di estremo superiore; per il punto (ii) vale che se $\gamma < \beta$ allora γ non è maggiorante di L. Abbiamo notato prima che se $y \in S$, allora y è un maggiorante di L, scritto in simboli

$$\gamma \in S \implies \gamma \text{ è un maggiorante di } L$$

Questa scrittura è equivalente[2] a

$$\gamma \text{ non è un maggiorante di } L \implies \gamma \notin S$$

Di conseguenza,

$$\gamma < \beta \implies \gamma \text{ non è un maggiornate di } L \implies \gamma \notin S$$

che è equivalente a

$$\gamma \in S \implies \gamma \geq \beta$$

ossia β è un minorante di S.

(ii) Consideriamo ora $\gamma > \beta$; vogliamo mostrare che γ non è un minorante di S. Ricordiamo che $\beta = \sup L$; di conseguenza se $\gamma > \beta$, allora

$$\gamma > x \text{ per ogni } x \in L$$

In particolare ne consegue che $\gamma \notin L$; ma ricordiamo che L è l'insieme dei minoranti di S, e quindi γ non è un minorante di S. □

2.2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Determinare* $\sup$ *e* $\inf$*, ed eventualmente massimo e minimo, dell'insieme*

$$A = \left\{ a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Soluzione. Per cercare di capire com'è fatto l'insieme, scriviamone i primi elementi:

$$a_0 = \frac{\cos(0)}{0^2+1} = 1 \quad a_1 = \frac{\cos(\pi)}{1^2+1} = -\frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{\cos(2\pi)}{2^2+1} = \frac{1}{5} \quad a_3 = \frac{\cos(3\pi)}{3^2+1} = -\frac{1}{10} \quad \dots$$

Notiamo quindi che

$$a_0, a_2 > 0 \text{ e } a_1, a_3 < 0 \qquad |a_0| > |a_1| > |a_2| > |a_3|$$

ossia sembrerebbe che per n pari gli elementi dell'insieme siano positivi e che per n dispari siano negativi, e che in valore assoluto questi decrescano al crescere di n. Vogliamo provare a dimostrare queste due proprietà.

[2] In logica proposizionale $A \implies B$ è equivalente a $\neg B \implies \neg A$.

(i) Notiamo che
$$\cos(\pi n) = \begin{cases} 1 & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ -1 & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases} = (-1)^n$$
e di conseguenza la prima ipotesi sul comportamento dei termini dell'insieme è verificata.

(ii) Vogliamo mostrare che
$$|a_n| > |a_{n+1}| \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$
Notiamo che grazie al punto (i) vale che
$$a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2+1} = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$
ossia
$$|a_n| = \frac{1}{n^2+1}$$
Vogliamo quindi mostrare che
$$\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$
Consideriamo quindi la disequazione
$$\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} \iff \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} > 0$$
di cui cerchiamo le soluzioni in $\mathbb{N}$. Abbiamo che
$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{(n+1)^2+1-(n^2+1)}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} = \frac{2n+1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)}$$
e quindi la disequazione risulta essere
$$\frac{\overbrace{2n+1}^{>0\ \forall n\in\mathbb{N}}}{\underbrace{(n^2+1)}_{>0\ \forall n\in\mathbb{N}}\underbrace{((n+1)^2+1)}_{>0\ \forall n\in\mathbb{N}}} > 0$$
che è soddisfatta per ogni $n \in \mathbb{N}$; di conseguenza $|a_n| > |a_{n+1}|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In conseguenza del punto (ii) concludiamo immediatamente che
$$|a_n| < |a_{n-1}| < \cdots < |a_0| = 1$$
ossia $1 > a_n > -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi $A \subseteq [-1, 1]$ è limitato superiormente e inferiormente, ed ammette quindi estremo superiore ed inferiore per il teorema 2.1 e il

corollario 2.1.
Notiamo che possiamo restringere l'intervallo in cui A è incluso notando che

$$a_1 = -\frac{1}{2} < a_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Infatti, chiaramente $a_1 < a_{2k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, mentre vale che

$$|a_1| \geq |a_{2k+1}| \iff a_1 \leq a_{2k+1} \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}$$

ossia $A \subseteq \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$; poiché $1 = a_0 \in A$ e $-\frac{1}{2} = a_1 \in A$, vale che

$$1 = \sup A = \max A \qquad -\frac{1}{2} = \inf A = \min A$$

□

Esercizio 2.2. *Determinare* sup *e* inf*, ed eventualmente massimo e minimo, dell'insieme*

$$A = \left\{ a_n = \frac{n^2-5}{n^2+2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Soluzione. Anche in questo caso per cercare di capire com'è fatto l'insieme scriviamone i primi elementi:

$$a_0 = \frac{0^2-5}{0^2+2} = -\frac{5}{2} \quad a_1 = \frac{1^2-5}{1^2+2} = -\frac{4}{3} \quad a_3 = \frac{3^2-5}{3^2+2} = \frac{4}{11} \quad a_4 = \frac{4^2-5}{4^2+2} = \frac{11}{18} \ \ldots$$

In questo caso sembrerebbe che $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; lo possiamo dimostrare come prima, ossia considerando la disequazione

$$\frac{(n+1)^2-5}{(n+1)^2+2} > \frac{n^2-5}{n^2+2} \iff \frac{(n+1)^2-5}{(n+1)^2+2} - \frac{n^2-5}{n^2+2} > 0$$

e cercandone le soluzioni in $n \in \mathbb{N}$. Vale che

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^2-5}{(n+1)^2+2} - \frac{n^2-5}{n^2+2} &= \frac{((n+1)^2-5)(n^2+2)-(n^2-5)((n+1)^2+2)}{(n^2+2)((n+1)^2+2)} = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2+2(n+1)^2-5n^2-10-n^2(n+1)^2-2n^2+5(n+1)^2+10}{(n^2+2)((n+1)^2+2)} = \\ &= \frac{2n^2+4n+2-7n^2+5n^2+10n+5}{(n^2+2)((n+1)^2+2)} = \frac{14n+7}{(n^2+2)((n+1)^2+2)}\end{aligned}$$

e quindi la disequazione risulta essere

$$\frac{\overbrace{14n+7}^{>0\ \forall n \in \mathbb{N}}}{\underbrace{(n^2+2)}_{>0\ \forall n \in \mathbb{N}}\underbrace{((n+1)^2+2)}_{>0\ \forall n \in \mathbb{N}}} > 0$$

che è soddisfatta per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza sappiamo che $A \subseteq \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$, ed A è quindi limitato inferiormente. Per quanto riguarda eventuali maggioranti invece, possiamo notare come gli elementi a_n dell'insieme si avvicinino ad 1 al crescere di n. Ragionando in maniera non rigorosa, al crescere di n il contributo dei termini -5 a numeratore e $+2$ a denominatore diminuisce, e pertanto dominerebbero i termini di n^2; inoltre, poiché a numeratore abbiamo $n^2 - 5$ e a denominatore abbiamo invece $n^2 + 2$, il denominatore sarà sempre più grande del denominatore, e quindi i termini saranno sempre minori di 1. Vogliamo quindi mostrare che

$$\frac{n^2 - 5}{n^2 + 2} < 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Notiamo che la disequazione è equivalente a

$$\frac{n^2 - 5}{n^2 + 2} - 1 < 0$$

Consideriamo quindi

$$\frac{n^2 - 5}{n^2 + 2} - 1 = \frac{n^2 - 5 - n^2 - 2}{n^2 + 2} = -\frac{7}{\underbrace{n^2 + 2}_{>0\ \forall n \in \mathbb{N}}}$$

che effettivamente è minore di 0 per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi abbiamo che $A \subseteq \left[-\frac{5}{2}, 1\right)$, e di conseguenza A è anche limitato superiormente; per il teorema 2.1 e per il corollario 2.1 A ammette di conseguenza estremo superiore ed inferiore.
Ragionando come nell'esercizio 2.1 si può mostrare che $-\frac{5}{2} = a_0 \in A$ è estremo inferiore e minimo di A; per quanto riguarda l'estremo superiore, ragionando sempre in modo non formale, al crescere di n la frazione assomiglia sempre più ad un oggetto del tipo $\frac{n^2}{n^2}$, ossia si avvicina sempre più ad 1. La nostra ipotesi è quindi che 1 sia l'estremo superiore di A. Come facciamo a dimostrarlo? Sfruttiamo la seguente caratterizzazione dell'estremo superiore:

> **Teorema 2.2** (Caratterizzazione dell'estremo superiore). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$ un insieme limitato superiormente; $\alpha \in \mathbb{R}$ maggiornate di S è l'estremo superiore di S se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $s_\varepsilon \in A$ tale che $s_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.*

Fissiamo quindi un generico $\varepsilon > 0$; vogliamo mostrare che esiste un elemento $a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon > 1 - \varepsilon$. Poiché gli elementi di A sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, $a_\varepsilon = a_{n_\varepsilon}$ per un qualche $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$; dobbiamo quindi risolvere il seguente problema: dato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon^2 - 5}{n_\varepsilon^2 + 2} \ ?$$

Consideriamo quindi la disequazione

$$1-\varepsilon < \frac{n_\varepsilon^2-5}{n_\varepsilon^2+2} \iff 1-\varepsilon-\frac{n_\varepsilon^2-5}{n_\varepsilon^2+2}<0$$

Possiamo scrivere

$$1-\varepsilon-\frac{n_\varepsilon^2-5}{n_\varepsilon^2+2}=\frac{(1-\varepsilon)(n_\varepsilon^2+2)-n_\varepsilon^2+5}{n_\varepsilon^2+2}=\frac{-\varepsilon n_\varepsilon^2+7-2\varepsilon}{n_\varepsilon^2+2}$$

e la disequazione è

$$\frac{-\varepsilon n_\varepsilon^2+7-2\varepsilon}{\underbrace{n_\varepsilon^2+2}_{>0\ \forall n_\varepsilon\in\mathbb{N}}}<0$$

Notiamo che se $7-2\varepsilon<0$, ossia se $\varepsilon>\frac{7}{2}$, il numeratore è sempre negativo, e quindi la disuguaglianza è verificata per ogni $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$; quindi

$$a_0>1-\varepsilon$$

Se invece $\varepsilon\le\frac{7}{2}$ bisogna scegliere n_ε in maniera più oculata. Notiamo che il polinomio $-\varepsilon n_\varepsilon^2+7-2\varepsilon$ ammette due radici, eventualmente coincidenti nel caso $\varepsilon=\frac{7}{2}$,

$$r_1=-\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}-2}\qquad r_2=+\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}-2}$$

e che possiamo scrivere

$$-\varepsilon n_\varepsilon^2+7-2\varepsilon=-\varepsilon(n_\varepsilon-r_1)(n_\varepsilon-r_2)$$

Studiamo quindi il segno del polinomio

		r_1		r_2	
$(n_\varepsilon - r_1)$	$-$	•	$+$		$+$
$(n_\varepsilon - r_2)$	$-$		$-$	•	$+$
$-\varepsilon(n_\varepsilon-r_1)(n_\varepsilon-r_2)$	-	•	$+$	•	-

ossia $-\varepsilon n_\varepsilon^2+7-2\varepsilon$ è negativo se $n_\varepsilon<r_1$ o $n_\varepsilon>r_2$; poiché i numeri naturali sono contenuti nei numeri reali positivi, l'unica possibilità è che

$$n_\varepsilon>\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}-2}$$

Quindi se prendiamo un numero naturale $n_\varepsilon>\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}-2}$ vale che $1-\varepsilon<a_{n_\varepsilon}$; ad esempio, possiamo considerare

$$n_\varepsilon=\left\lfloor\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}-2}\right\rfloor+1$$

ove $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor$ è la cosiddetta *floor function*, che restituisce la parte intera di un numero reale ("approssimando verso $-\infty$")[3]. Per concludere quindi

$$-\frac{5}{2} = \inf A = \min A \qquad 1 = \sup A$$

e A non ammette massimo, poiché non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = 1$. $\square$

Esercizio 2.3. *Determinare* $\sup$ *e* $\inf$*, ed eventualmente massimo e minimo, dell'insieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon 2^{\frac{x+1}{x-1}} > 4^x \right\}$$

Soluzione. Notiamo che la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2^{\frac{x+1}{x-1}}$ è la composizione di un'esponenziale con una funzione razionale definita su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; pertanto sicuramente $1 \notin A$. Inoltre, ricordiamo che

> Dato $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ è monotona strettamente crescente, ossia
> $$x > y \implies f(x) > f(y)$$

ossia equivalentemente $f(x) < f(y) \implies x < y$. Di conseguenza,

$$2^{\frac{x+1}{x-1}} > 2^{2x} \iff \frac{x+1}{x-1} > 2x$$

Per determinare A è quindi necessario studiare la disequazione

$$\frac{x+1}{x-1} > 2x \iff \frac{x+1}{x-1} - 2x > 0$$

che possiamo scrivere come

$$\frac{x+1-2x^2+2x}{x-1} > 0; \qquad \frac{-2x^2+3x+1}{x-1} \tag{2.1}$$

Le radici del polinomio $-2x^2+3x+1$ sono

$$r_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \qquad r_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$$

tramite cui possiamo scrivere $-2x^2+3x+1 = -2(x-r_1)(x-r_2)$; notiamo che $r_1 < 0$ e $r_2 > 1$. Studiamo quindi il segno della funzione razionale in (2.1):

[3] Per i numeri reali positivi è analogo a fare il casting `n=(int)x` di una variabile `float` su C/C++. Come esempio, se consideriamo $\varepsilon = 0.1$ abbiamo che $n_\varepsilon = \lfloor \sqrt{68} \rfloor + 1 = 9$; $a_9 = \frac{76}{83} \simeq 0.91 > 0.9$.

		r_1		1		r_2	
$(x - r_1)$	$-$	•	$+$		$+$		$+$
$(x - r_2)$	$-$		$-$		$-$	•	$+$
$-2x^2+3x+1$	$-$	•	$+$		$+$	•	$-$
$(x - 1)$	$-$		$-$	•	$+$		$+$
$\frac{-2x^2+3x+1}{x-1}$	$+$	•	$-$	○	$+$	•	$-$

Le soluzioni della disequazione in (2.1) sono quindi

$$x < \frac{3-\sqrt{17}}{4} \quad \vee \quad 1 < x < \frac{3+\sqrt{17}}{4}$$

ossia possiamo scrivere l'insieme A come

$$A = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$$

Osserviamo quindi che A non è limitato inferiormente; pertanto convenzionalmente diciamo che $\inf A = -\infty$. A è invece limitato superiormente, e vale che $\sup A = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$; poiché $\sup A \notin A$, A non ammette massimo. $\square$

Esercizio 2.4. *Determinare* sup *e* inf*, ed eventualmente massimo e minimo, dell'insieme*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \sin(x) + 3\cos(x) + 1 \leq 0\right\}$$

Soluzione. Il metodo più immediato per risolvere il problema è utilizzare le formule parametriche

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.2}$$

Notiamo che, mentre $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(x)$ e $\mathbb{R} \ni x \mapsto \cos(x)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$, la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; pertanto se riscriviamo la funzione che descrive l'insieme A usando (2.2), escluderemo di default i punti del tipo $\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, che bisognerà controllare manualmente. Procediamo quindi con la risoluzione dell'esercizio:

(i) iniziamo a verificare i punti dell'insieme $\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; avremo

$$\sin(\pi + 2k\pi) + 3\cos(\pi + 2k\pi) + 1 = -3 + 1 = -2 < 0$$

e quindi

$$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \subseteq A$$

(ii) cerchiamo le soluzioni di

$$\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \leq 0, \qquad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.3}$$

in $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Possiamo riscrivere la disequazione in (2.3) come

$$\frac{2t + 3 - 3t^2 + 1 + t^2}{1+t^2} \leq 0; \qquad \frac{-2t^2 + 2t + 4}{1+t^2} \leq 0; \qquad \frac{-2(t^2 - t - 2)}{1+t^2} \leq 0$$

e infine come

$$\frac{-2(t-2)(t+1)}{\underbrace{1+t^2}_{>0\ \forall t \in \mathbb{R}}} \leq 0$$

Studiamo come prima il segno della funzione razionale:

	$-\infty$ … -1	-1 … 2	2 … $+\infty$
$(t+1)$	$-$	$+$	$+$
$(t-2)$	$-$	$-$	$+$
$-2t^2+2t+4$	$-$	$+$	$-$
$\frac{-2t^2+2t+4}{1+t^2}$	-	$+$	-

Le soluzioni di (2.3) sono quindi

$$t \leq -1 \quad \vee \quad t \geq 2$$

e di conseguenza l'insieme A conterrà gli insiemi

$$\underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) \leq -1\right\}}_{(2.4)} \cup \underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) \geq 2\right\}}_{(2.5)}$$

ove per brevità notazionale abbiamo trascurato le condizioni di esistenza della tangente. Le soluzioni di (2.4) sono

$$\left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

mentre le soluzioni di (2.5) sono

$$\left\{x \in \mathbb{R}\colon\ \arctan(2) + k\pi \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Riscrivendo i due insiemi in termini di disuguaglianze per x abbiamo

$$\left\{x \in \mathbb{R}\colon \pi + 2k\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right\} \qquad \{x \in \mathbb{R}\colon 2\arctan(2) + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi\}$$

con k che varia in $\mathbb{Z}$. A risulta quindi essere

$$\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \colon \pi + 2k\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{R} \colon 2\arctan(2) + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ossia

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 2\arctan(2) + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Notiamo quindi che A è illimitato[4]; pertanto per convenzione

$$\sup A = +\infty \qquad \inf A = -\infty$$

$\square$

[4] Questo lo si poteva notare già dal punto (i): infatti l'insieme $\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ è illimitato, e poiché $A \supseteq \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ anche A è illimitato.

3 Lezione 3

3.1 Ripasso: i numeri complessi

Definizione 3.1. Un *numero complesso* z è una coppia **ordinata** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Diremo che $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ sono uguali se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Osservazione. Sembra un punto secondario, ma la definizione di uguaglianza riveste un'importanza cruciale. La cosa è apparente se consideriamo altri insiemi numerici. Ad esempio, i numeri interi $\mathbb{Z}$ si definiscono a partire da coppie ordinate $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, e in questo caso la definizione di uguaglianza cambia: diremo infatti che $x_1 = (n_1, m_1)$ e $x_2 = (n_2, m_2)$ sono uguali se

$$n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

Definizione 3.2. Su $\mathbb{R}^2$ definiamo due operazioni: la *somma*

$$\begin{aligned} +\colon \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) &\mapsto (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \end{aligned}$$

e il *prodotto*

$$\begin{aligned} \cdot\colon \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) &\mapsto (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Teorema 3.1. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *è un campo che indichiamo con* $\mathbb{C}$*, e chiamiamo* campo dei numeri complessi. $(0, 0)$ *è l'elemento neutro della somma e lo indichiamo con* 0*, mentre* $(1, 0)$ *è l'elemento neutro del prodotto e lo indichiamo con* 1.

Osservazione. Notiamo che l'insieme

$$S = \Big\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}\Big\}$$

è stabile sotto la somma e il prodotto: infatti

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \qquad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

Si può inoltre mostrare che la restrizione ad S della somma e del prodotto così come definiti nella definizione 3.2 soddisfano gli assiomi di campo; definendo pertanto una funzione

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R} &\to S \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

otteniamo un omomorfismo di campi che è anche biiettivo; possiamo pertanto identificare $\mathbb{R}$ e S, ossia scrivere $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ e dire che $\mathbb{R}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$.

Definizione 3.3. Definiamo l'*unità immaginaria* $i = (0, 1)$, e notiamo che $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

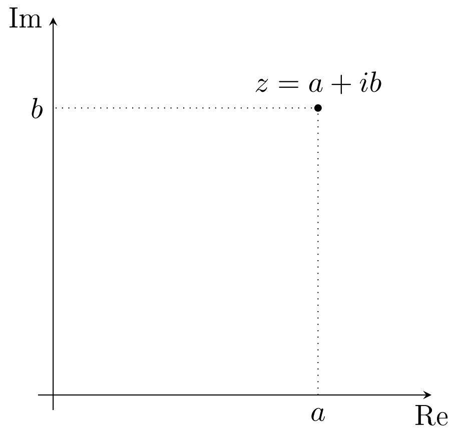
Osservazione. Notiamo che, dato $b \in \mathbb{R}$ e identificandolo con $(b, 0) \in \mathbb{C}$ vale che

$$bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b) = (0, 1) \cdot (b, 0) = ib$$

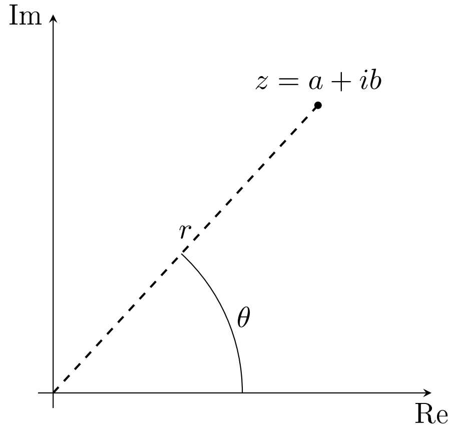
Poiché la coppia $(a, b) \in \mathbb{C}$ può essere scritta come $(a, 0) + (0, b)$, modulo identificazione di $(a, 0)$ con a possiamo scrivere

$$(a, b) = a + ib$$

Se indichiamo la coppia (a, b) con z, il numero **reale** a è detto *parte reale* di z, $a = \mathrm{Re}(z)$, mentre il numero **reale** b è detto *parte immaginaria* di z, $b = \mathrm{Im}(z)$. La scrittura $z = a+ib$ viene detta *rappresentazione algebrica* o *cartesiana* di z; questo perché se pensiamo a $\mathbb{C}$ come alle coppie ordinate di $\mathbb{R}^2$, la scrittura $z = a + ib$ consente immediatamente di determinare le coordinate della coppia nel piano:



Un punto nel piano può essere descritto, oltre che tramite le coordinate rispetto ad un sistema di assi cartesiani (*coordinate cartesiane*), anche con la distanza dall'origine del sistema di assi cartesiani r e con l'angolo che la retta congiungente il punto e l'origine forma con una delle due rette del sistema di assi cartesiani θ (*coordinate polari*)[5], ossia



[5]Notiamo che essendo r una distanza deve essere un numero positivo o al più nullo, mentre essendo θ un angolo deve essere un numero compreso tra $-\pi$ e π.

Si può passare agilmente da un sistema di coordinate ad un altro: infatti, conoscendo la coppia $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ che descrive un dato numero complesso z si può ottenere la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ considerando

$$a = r\cos(\theta) \qquad b = r\sin(\theta) \tag{3.1}$$

Allo stesso modo, si può determinare la coppia $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ a partire dalla coppia $(a, b) \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{|z|}_{\text{modulo di } z} = r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \underbrace{\mathrm{Arg}(z)}_{\text{argomento di } z} = \theta \simeq \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.2}$$

Notiamo che nell'equazione in (3.2) per determinare l'argomento di z non vi è il segno di uguaglianza; infatti, vale che

(i) se $a = 0$ il rapporto $\frac{b}{a}$ non è definito. In questo caso, se $b \neq 0$ si pone

$$\mathrm{Arg}(z) = \pm\frac{\pi}{2}$$

ove $\pm$ indica il segno di b (se $b > 0$ avremo $+\frac{\pi}{2}$, mentre se $b < 0$ avremo $-\frac{\pi}{2}$), mentre se $b = 0$ $\mathrm{Arg}(z)$ non è ben definito;

(ii) poiché l'argomento di arctan nella seconda equazione in (3.2) è il rapporto di b e a, l'arctangente non riesce a distinguere fra I e III quadrante e fra II e IV quadrante. Di conseguenza, dato che l'immagine di $\mathbb{R} \ni x \mapsto \arctan(x)$ è $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, un'applicazione bovina della formula restituirà sempre un angolo che descriverà un numero nel I o nel IV quadrante. Si può però operare la seguente correzione:

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & a > 0,\ b \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & a < 0,\ b \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi & a < 0,\ b < 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & a > 0,\ b < 0 \end{cases}$$

Usando la formula (3.1) è possibile scrivere $z = a + ib$ come

$$z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Teorema 3.2 (Formula di Eulero)**.** *Per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$ *vale che*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Alla luce del teorema 3.2 possiamo quindi scrivere, dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$

$$z = re^{i\theta} \tag{3.3}$$

ove (r, θ) sono dati o sono calcolati tramite (3.2). Questa notazione è detta *rappresentazione polare* o *esponenziale* di z.

Definizione 3.4. Dato un numero complesso $z = a + bi$, il suo *coniugato* è il numero

$$\overline{z} = a - ib$$

Osservazione. Notiamo che

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

e quindi $r = \sqrt{z\overline{z}}$. In particolare, se $z = a$ vale che $r = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{z^2} = \sqrt{a^2} = |a|$; per questo r viene detto modulo di z.
Cosa accade alla rappresentazione polare di $\overline{z}$? Notiamo che

$$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

e che

$$\mathrm{Arg}(\overline{z}) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) & a > 0,\ b \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) + \pi & a < 0,\ b \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) - \pi & a < 0,\ b > 0 \\ \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) & a > 0,\ b > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0,\ b \leq 0 \\ -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi + 2\pi & a < 0,\ b \leq 0 \\ -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) - 2\pi + \pi & a < 0,\ b > 0 \\ -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0,\ b > 0 \end{cases}$$

ossia

$$\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$$

Infine, si può facilmente mostrare che

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ per ogni } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

3.2 Esercizi: esercizi di base sui numeri complessi

Esercizio 3.1. *Calcolare i^i.*

Soluzione. In generale, sappiamo che quando abbiamo a che fare con elevamenti a potenza conviene maneggiare gli esponenziali; scriviamo quindi i in rappresentazione polare. Ricordiamo che $i = (0, 1)$; pertanto

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \qquad \mathrm{Arg}(z) \overset{\text{Punto (i) osservazione}}{=} \frac{\pi}{2}$$

ossia $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Per calcolare i^i, ricordiamo il seguente risultato:

Teorema 3.3. *Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; vale che*

$$e^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \frac{1}{e^z} = e^{-z} \qquad e^{z+i2k\pi} = e^z \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre, per ogni numero intero $n \in \mathbb{Z}$, z^n è ben definito e unico, mentre se consideriamo numeri $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Arg}(z_1), \operatorname{Arg}(z_2) \in (-\pi, \pi]$ e che $\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \in (-\pi, \pi]$ definiamo

$$(z_1)^{z_2} = e^{z_2\left(\log|z_1| + i\operatorname{Arg}(z_1)\right)} \tag{3.4}$$

$$(z_1 z_2)^z = z_1^z z_2^z \tag{3.5}$$

Se $\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \notin (-\pi, \pi]$, avremo che

$$(z_1 z_2)^z = z_1^z z_2^z e^{z(i2k\pi)}, \ k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2k\pi \in (-\pi, \pi] \tag{3.6}$$

Nel nostro caso, vale l'equazione (3.4): quindi

$$i^i = e^{i\left(\log|i| + i\operatorname{Arg}(i)\right)} = e^{i\left(\log(1) + i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

□

Esercizio 3.2. *Calcolare*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(1-i)^2 - (1+2i)^2}{(2+3i)^2 + (1+i)^3}\right)$$

Soluzione. In questo caso il metodo più conveniente è effettuare i conti:

$$\frac{(1-i)^2 - (1+2i)^2}{(2+3i)^2 + (1+i)^2} = \frac{(1-1-2i) - (1-4+4i)}{(4-9+12i) + (1-i+3i-3)} = \frac{3-6i}{-7+14i} = -\frac{3}{7}\frac{1-2i}{1-2i} = -\frac{3}{7}$$

Quindi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(1-i)^2 - (1+2i)^2}{(2+3i)^2 + (1+i)^3}\right) = \frac{(1-i)^2 - (1+2i)^2}{(2+3i)^2 + (1+i)^3} = -\frac{3}{7}$$

□

3.3 Ripasso: polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$

Teorema 3.4 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Dato un polinomio $P(x)$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$, questo ammette sempre una radice in $\mathbb{C}$.*

Corollario 3.1. *Un polinomio $P(x)$ a coefficienti complessi di grado n ammette n radici in $\mathbb{C}$, contate con la loro molteplicità algebrica.*

Osservazione. Poiché abbiamo visto che $\mathbb{R}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$, possiamo considerare un polinomio a coefficienti reali come un polinomio a coefficienti complessi, e cercarne le radici in $\mathbb{C}$. In particolare, se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio $P(x)$ a coefficienti reali, allora $\overline{\alpha}$ è anch'esso radice di $P(x)$: infatti, notiamo che se

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

allora $0 = P(\alpha) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha^k$; ma

$$0 = \overline{0} = \overline{P(\alpha)} = \overline{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k \alpha}^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{\alpha}^k$$

dato che $\{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$.

Esempio. Consideriamo ad esempio il polinomio $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$; ispezionando il polinomio si vede che $z_1 = i$ è radice di P, e per l'osservazione precedente anche $z_1 = -i$ è soluzione di P. Quindi per la proposizione 1.1 e per la definizione 1.5 vale che

$$P(x) = Q(x)(x - i)(x + i) = Q(x)(x^2 + 1)$$

Il polinomio $Q(x)$ può essere ottenuto effettuando la divisione fra polinomi:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^4 + 2x^2 + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{3-3}
 -\, x^4 & -\, x^2 & x^2 + 1 \\ \cline{1-2}
 & x^2 + 1 & \\
 & -\, x^2 - 1 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Quindi

$$P(x) = (x^2 + 1)^2$$

e $P(x)$, come polinomio a coefficienti complessi, ammette due radici, i e $-i$, ciascuna con molteplicità due.

3.4 Esercizi: polinomi ed equazioni in $\mathbb{C}$

Esercizio 3.3. *Scomporre il polinomio $P(x) = x^9 + a^9$, $a \in \mathbb{R}$, in fattori irriducibili (cfr. teorema 1.2).*

Soluzione. Supponiamo $a \neq 0$, altrimenti il polinomio è già scomposto. Possiamo scrivere in maniera semplice

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^9 + a^9 = (x^3)^3 + (a^3)^3 = (x^3 + a^3)(x^6 - a^3x^3 + a^6) \\
&= \underbrace{(x + a)(x^2 - ax + a^2)}_{\text{irriducibili}}(x^6 - a^3x^3 + a^6)
\end{aligned}$$

Il problema è scomporre il polinomio $Q(x) = (x^6 - a^3x^3 + a^6)$ in fattori irriducibili. Per farlo, conviene considerare $Q(x)$ come un polinomio a coefficienti complessi, cercare le 6 radici complesse di Q e, con opportune manipolazioni algebriche, ottenere i polinomi a coefficienti reali. Per cercare le radici di Q, effettuiamo la sostituzione $x^3 = t$, e riscriviamo $Q(x)$ come

$$Q(t) = t^2 - a^3t + a^6$$

Le sue radici sono date da

$$t_{1,2} = \frac{a^3 \pm \sqrt{a^6 - 4a^6}}{2} = \frac{a^3 \pm |a|^3\sqrt{1-4}}{2} = a^3\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Per trovare le radici di $Q(x)$, dobbiamo risolvere

$$x^3 = \underbrace{a^3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{z_1} \qquad x^3 = \underbrace{a^3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{z_2} \tag{3.7}$$

Come prima, quando si ha a che fare con elevamenti a potenza conviene usare la notazione polare:

$$|z_1| = \sqrt{a^6\frac{1}{4} + a^6\frac{3}{4}} = |a|^3 \qquad |z_2| = \sqrt{a^6\frac{1}{4} + a^6\frac{3}{4}} = |a|^3$$

$$\operatorname{Arg}(z_1) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} & a > 0 \\ \dfrac{\pi}{3} + \pi & a < 0 \end{cases} \qquad \operatorname{Arg}(z_2) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} & a > 0 \\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi & a < 0 \end{cases}$$

Quindi, riscrivendo la (3.7), dobbiamo cercare le radici di

$$\underbrace{x^3 = |a|^3\, e^{i\frac{\pi}{3}}}_{(3.8)} \qquad \underbrace{x^3 = |a|^3\, e^{-i\frac{\pi}{3}}}_{(3.9)}$$

se $a > 0$ e di

$$\underbrace{x^3 = |a|^3\, e^{i\frac{4}{3}\pi}}_{(3.10)} \qquad \underbrace{x^3 = |a|^3\, e^{i\frac{2}{3}\pi}}_{(3.11)}$$

se $a < 0$.

Ricordiamo che le soluzioni di

$$w = z^{\frac{1}{n}}, \;\; n \in \mathbb{N}$$

in generale sono date da

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} + i2\frac{k}{n}\pi}, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Notiamo che è sufficiente considerare $k \in \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$.

(i) Caso $a > 0$: le soluzioni di (3.8) sono

$$x_1 = ae^{i\frac{\pi}{9}} \qquad x_2 = ae^{i\frac{\pi}{9}+i\frac{2}{3}\pi} = ae^{i\frac{7}{9}\pi} \qquad x_3 = ae^{i\frac{\pi}{9}+i\frac{4}{3}\pi} = ae^{-i\frac{5}{9}\pi}$$

mentre le soluzioni di (3.9) sono

$$x_4 = ae^{-i\frac{\pi}{9}} \qquad x_5 = ae^{-i\frac{\pi}{9}+i\frac{2}{3}\pi} = ae^{i\frac{5}{9}\pi} \qquad x_6 = ae^{-i\frac{\pi}{9}+i\frac{4}{3}\pi} = ae^{-i\frac{7}{9}\pi}$$

Notiamo che $x_4 = \overline{x_1}$, $x_6 = \overline{x_2}$ e $x_3 = \overline{x_5}$; possiamo scrivere

$$P(x) = (x+a)(x^2 - ax + a^2)\underbrace{(x-x_1)(x-\overline{x_1})(x-x_2)(x-\overline{x_2})(x-x_5)(x-\overline{x_5})}_{Q(x)}$$

Ora,

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-\overline{x_1}) &= x^2 + x_1\overline{x_1} - x(x_1+\overline{x_1}) = x^2 + |x_1|^2 - 2\mathrm{Re}(x_1)x = \\ &= \underbrace{x^2 + a^2 - 2ax\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}_{\text{irriducibile}}\end{aligned}$$

Lo stesso vale per gli altri prodotti di monomi; abbiamo quindi

$$Q(x) = (x^2 - 2ax\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + a^2)(x^2 - 2ax\cos\left(\frac{5}{9}\pi\right) + a^2)(x^2 - 2ax\cos\left(\frac{7}{9}\pi\right) + a^2)$$

(ii) Caso $a < 0$: le soluzioni di (3.10) sono

$$x_1 = |a|\, e^{i\frac{4}{9}\pi} = ae^{-i\frac{5}{9}\pi} \qquad x_2 = |a|\, e^{i\frac{4}{9}\pi+i\frac{2}{3}\pi} = ae^{i\frac{\pi}{9}} \qquad x_3 = |a|\, e^{i\frac{4}{9}\pi+i\frac{4}{3}\pi} = ae^{i\frac{7}{9}\pi}$$

mentre le soluzioni di (3.11) sono

$$x_4 = |a|\, e^{i\frac{2}{9}\pi} = ae^{-i\frac{7}{9}\pi} \qquad x_5 = |a|\, e^{i\frac{2}{9}+i\frac{2}{3}\pi} = ae^{-i\frac{\pi}{9}} \qquad x_6 = |a|\, e^{i\frac{2}{9}\pi+i\frac{4}{3}\pi} = ae^{i\frac{5}{9}\pi}$$

Notiamo che in questo caso $x_5 = \overline{x_2}$, $x_1 = \overline{x_6}$ e $x_4 = \overline{x_3}$; possiamo anche in questo caso scrivere

$$P(x) = (x+a)(x^2 - ax + a^2)\underbrace{(x-x_1)(x-\overline{x_1})(x-x_2)(x-\overline{x_2})(x-x_5)(x-\overline{x_5})}_{Q(x)}$$

Ora,

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-\overline{x_1}) &= x^2 + x_1\overline{x_1} - x(x_1+\overline{x_1}) = x^2 + |x_1|^2 - 2\mathrm{Re}(x_1)x = \\ &= x^2 + a^2 - 2ax\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\end{aligned}$$

Lo stesso vale per gli altri prodotti di monomi; abbiamo quindi, anche nel caso $a < 0$,

$$Q(x) = (x^2 - 2ax\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + a^2)(x^2 - 2ax\cos\left(\frac{5}{9}\pi\right) + a^2)(x^2 - 2ax\cos\left(\frac{7}{9}\pi\right) + a^2)$$

□

Esercizio 3.4. *Risolvere l'equazione* $z^2 + i\overline{z} = 1$.

Soluzione. Ricordiamo (cfr. definizione 3.1) che due numeri complessi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sono uguali se

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \qquad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

Di conseguenza, nel nostro caso l'equazione $z^2 + i\overline{z} = 1$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z^2 + i\overline{z}) = 1 \\ \mathrm{Im}(z^2 + i\overline{z}) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Per scrivere i membri di sinistra delle due equazioni, conviene rappresentare z in forma cartesiana, $z = a + ib$, ed espandere i prodotti:

$$z^2 + i\overline{z} = (a + ib)^2 + i(a - ib) = a^2 - b^2 + i2ab + ia + b = a^2 - b^2 + b + i(a + 2ab)$$

Il sistema in (3.12) risulta quindi essere

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b = 1 \\ a(1 + 2b) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Le soluzioni della seconda equazione in (3.13) sono $a = 0$ e $b = -\frac{1}{2}$; consideriamo quindi i due casi:

(i) $a = 0$: la prima equazione diventa $-b^2 + b - 1 = 0$, che non ammette soluzioni reali in quanto $\Delta = 1 - 4 < 0$; quindi non esistono soluzioni dell'equazione con parte reale nulla;

(ii) $b = -\frac{1}{2}$: la prima equazione diventa $a^2 = \frac{7}{4}$, che ha come soluzioni

$$a_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} \qquad a_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$\left\{ \frac{\sqrt{7}}{2} - i\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2} - i\frac{1}{2} \right\}$$

□

Esercizio 3.5. *Determinare l'insieme*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon 5z^2 + 5\overline{z}^2 - 6z\overline{z} + 8i(\overline{z} - z) = 4 \right\}$$

Soluzione. Anche in questo caso conviene riscrivere l'equazione che descrive l'insieme esprimendo z in forma cartesiana, $z = a + ib$:

$$\begin{aligned}&5(a+ib)^2 + 5(a-ib)^2 - 6(a^2+b^2) + 8i(a - ib - a - ib) = \\ &= 5(a^2 - b^2 + i2ab) + 5(a^2 - b^2 - i2ab) - 6(a^2+b^2) + 16b = 4a^2 - 16b^2 + 16b\end{aligned}$$

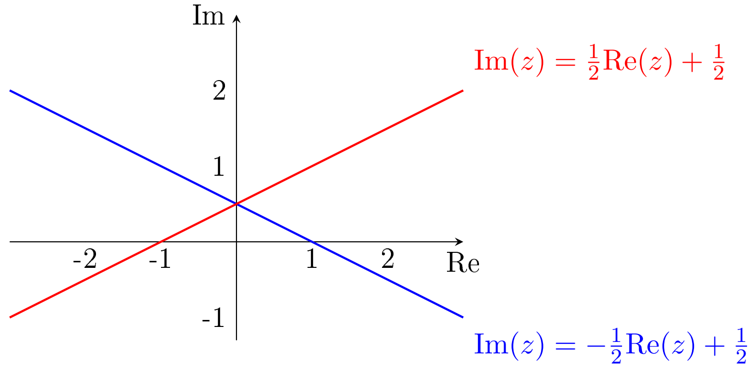
L'equazione è quindi

$$4a^2 - 16b^2 + 16b - 4 = 0 \iff a^2 - 4b^2 + 4b - 1 = 0$$

L'equazione può essere riscritta come

$$(a + 2b - 1)(a - 2b + 1) = 0$$

le cui soluzioni se rappresentate graficamente sono



L'insieme descritto è quindi costituito da due rette intersecantisi (un cono nel piano complesso). □

Esercizio 3.6. *Determinare l'insieme*

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| \leq |z+i|\} \cap \{z \in \mathbb{C} \colon |z - 2i| \geq 1\}$$

Soluzione. Anche in questo caso scriviamo z in forma algebrica come $z = a + ib$; consideriamo quindi $|z-1| \leq |z+i|$:

$$|z-1| = \big|(a-1) + ib\big| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \qquad |z+i| = \big|a + i(b+1)\big| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$$

e quindi la disequazione risulta essere

$$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$$

Ricordiamo che la funzione $\sqrt{\cdot} \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è monotona strettamente crescente, ossia

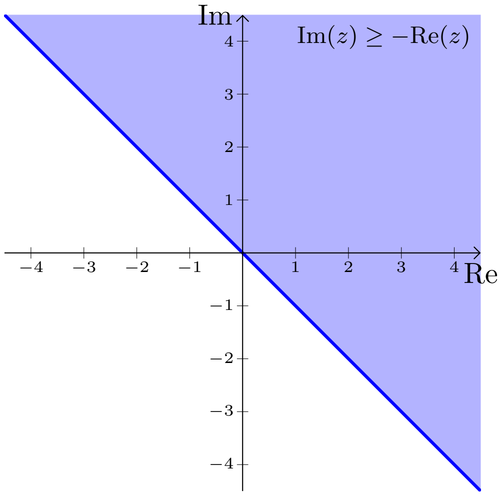
$$x > y \implies \sqrt{x} > \sqrt{y}$$

Di conseguenza, se $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$, allora $x \leq y$.

Quindi la procedente disequazione è equivalente a

$$(a-1)^2 + b^2 \leq a^2 + (b+1)^2 \iff -2a \leq 2b \iff b \geq -a$$

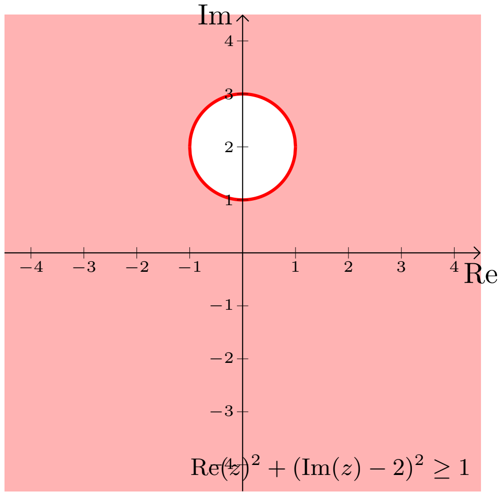
Di conseguenza il primo insieme è il semipiano generato dalla retta $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(z)$, ossia



Consideriamo ora il secondo insieme, e operiamo come prima: la disequazione risulta essere

$$\left|a + i(b-2)\right| \geq 1 \iff \sqrt{a^2 + (b-2)^2} \geq 1 \iff a^2 + (b-2)^2 \geq 1$$

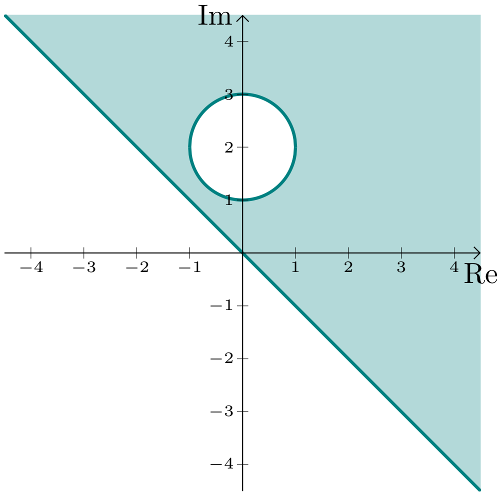
Ricordiamo che $(a-a_0)^2 + (b-b_0)^2 \leq 1$ descrive un cerchio di raggio 1 e centro (a_0, b_0); pertanto la disequazione descrive la regione di piano esterna ad una circonferenza di raggio 1 e cento $(0, 2) \in \mathbb{C}$, circonferenza inclusa, ossia



La retta e la circonferenza sembrerebbero non intersecarsi; per verificare che sia effettivamente così, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} b = -a \\ a^2 + (b-2)^2 = 1 \end{cases}$$

La seconda equazione diventa $a^2 + (a+2)^2 = 2a^2 + 4a + 3 = 0$ che non ammette soluzioni reali, in quanto $\Delta = 16 - 24 < 0$. A questo punto, l'intersezione dei due insiemi risulta essere



Di conseguenza l'insieme è un semipiano meno un disco aperto. □

Esercizio 3.7. *Determinare l'insieme*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1 \right\}$$

Soluzione. Innanzitutto, notiamo che necessariamente $z \neq -1$; inoltre, possiamo scrivere

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$$

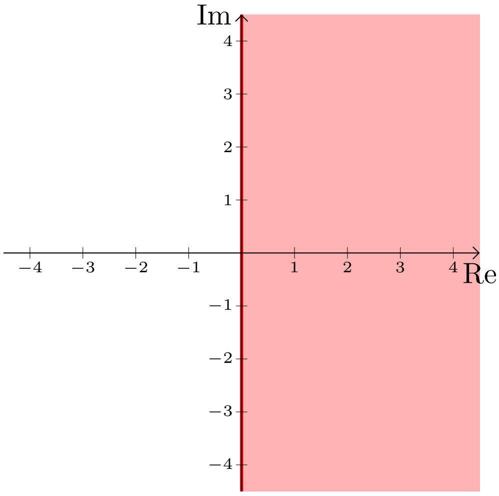
Poiché $|z+1| \geq 0$ e l'uguaglianza vale solo se $z+1 = 0$, caso escluso, possiamo moltiplicare ambo i membri della disuguaglianza per $|z+1|$, ottenendo così

$$|z-1| \leq |z+1|$$

Scriviamo ora z in forma algebrica come $z = a + ib$, ottenendo

$$\begin{aligned} \big|(a-1) + ib\big| \leq \big|(a+1) + ib\big| &\iff \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \leq \sqrt{(a+1)^2 + b^2} \\ &\iff (a-1)^2 + b^2 \leq (a+1)^2 + b^2 \\ &\iff -2a \leq 2a \iff a \geq 0 \end{aligned}$$

L'insieme è quindi



ossia un sempiano. □

Esercizio 3.8. *Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti reali tale che*

(i) $a_0 = 0$, *ossia* $P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$;

(ii) $z_0 = a + ib$, $b \neq 0$ *è radice di* P *con molteplicità 2.*

Cosa possiamo concludere di P*?*

Soluzione. Sappiamo che P ha coefficienti reali; di conseguenza se z_0 è radice di P lo è anche $\overline{z_0}$. Inoltre, poiché z_0 ha molteplicità algebrica 2, anche $\overline{z_0}$ ha molteplicità algebrica 2. Di conseguenza,

$$P(z) = (z - z_0)^2 (z - \overline{z_0})^2 Q(z)$$

Inoltre, poiché $a_0 = 0$, vale che

$$P(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = z(a_1 + a_2 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-2} + a_n z^{n-1})$$

ossia $P(z)$ è divisibile per z. Poiché $\mathrm{Im}(z_0) \neq 0$ sicuramente $(z - z_0)^2$ e $(z - \overline{z_0})^2$ non sono divisibili per z; di conseguenza $Q(z)$ è divisibile per z, i.e. per la definizione 1.5 $Q(z) = zT(z)$; quindi

$$P(z) = z(z - z_0)^2 (z - \overline{z_0})^2 T(z)$$

ossia $\deg(P) \geq 5$. □

4 Lezione 4

4.1 Ripasso: successioni

Definizione 4.1. Una *successione* è una funzione $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Denoteremo con s_n il numero reale $s(n)$, $n \in \mathbb{N}$, e indicheremo la mappa $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $(s_n)_n$. L'immagine della successione verrà indicata con $\{s_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Osservazione. Data una successione $(s_n)_n$, se la sua immagine $\{s_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ è limitata come sottinsieme di $\mathbb{R}$, diremo che $(s_n)_n$ è limitata.

Definizione 4.2. Diremo che $(s_n)_n$ *converge a* $s \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ per ogni } n > n_\varepsilon$$

In caso contrario, diremo che $(s_n)_n$ diverge. Se s_n converge a s, scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{o} \quad s_n \to s$$

Osservazione. Nel caso in cui $(s_n)_n$ diverge, possiamo isolare due casi particolari:

(i) $(s_n)_n$ *tende a* $+\infty$:

$$\text{per ogni } M \in \mathbb{N} \text{ esiste } n_M \in \mathbb{N} : s_n > M \text{ per ogni } n > n_M \tag{4.1}$$

(ii) $(s_n)_n$ *tende a* $-\infty$:

$$\text{per ogni } M \in \mathbb{N} \text{ esiste } n_M \in \mathbb{N} : s_n < -M \text{ per ogni } n > n_M \tag{4.2}$$

Teorema 4.1. *Data una successione $(s_n)_n$, consideriamo il sottoinsieme illimitato dei naturali $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, con $n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$. Questo insieme è in biiezione con $\mathbb{N}$, ossia esiste una funzione iniettiva e suriettiva $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k$; possiamo quindi considerare la composizione $\mathbb{N} \ni k \mapsto s_{n_k} \in \mathbb{R}$; questa è detta essere una* sottosuccessione *di $(s_n)_n$, e viene indicata con $(s_{n_k})_k$.*
$(s_n)_n$ converge a $s \in \mathbb{R}$ se e solo se ogni sua sottosuccessione $(s_{n_k})_k$ converge a s

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni:

(i) data una successione $(s_n)_n$, questa è una sottosuccessione di se stessa: infatti, se consideriamo l'insieme $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $n_k = k$, allora $(s_{n_k})_k = (s_n)_n$. Di conseguenza, se ogni sottosuccessione di $(s_n)_n$ converge a s, anche la sottosuccessione $(s_{n_k})_k$ sopra descritta converge a s; ma poiché questa coincide con $(s_n)_n$, abbiamo l'asserto;

(ii) supponiamo ora che $(s_n)_n$ converga ad s; per la definizione 4.2, per ogni scelta di $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|s_n - s| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Sia $(s_{n_k})_k$ una sottosuccessione di $(s_n)_n$; vale quindi che $n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$.
Per quanto detto antecedentemente, fissato un $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

$$\left|s_{n_k} - s\right| < \varepsilon \text{ se } n_k > n_\varepsilon$$

Poiché l'insieme $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è illimitato ed è crescente in k, esiste sicuramente un k_ε tale che

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \quad \text{e} \quad n_k > n_{k_\varepsilon} \text{ per ogni } k > k_\varepsilon$$

Di conseguenza, dato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| s_{n_k} - s \right| < \varepsilon \text{ per ogni } k > k_\varepsilon$$

ossia $(s_{n_k})_k$ converge ad s.

□

4.2 Esercizi: convergenza di successioni, aritmetica dei limiti

Esercizio 4.1. *Determinare se la successione $(s_n)_n$ con*

$$s_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

converge o meno.

Soluzione. Per cercare di stimare il comportamento della successione, scriviamo esplicitamente i primi termini:

$$s_0 = 0 \quad s_1 = -\frac{1}{2} \quad s_2 = \frac{2}{3} \quad s_3 = -\frac{3}{4} \quad s_4 = \frac{4}{5} \ \ldots$$

Notiamo quindi che sembrerebbero esistere due tendenze: s_n tende a 1 per n pari e s_n tende a -1 per n dispari. Se riusciamo a mostrare che questo accade effettivamente, grazie al teorema 4.1 potremo affermare che la successione $(s_n)_n$ non converge.
Consideriamo quindi i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$

$$\{n_k = 2k,\ k \in \mathbb{N}\} \qquad \{n_l = 2l+1,\ l \in \mathbb{N}\}$$

e le relative sottosuccessioni $(s_{n_k})_k$ e $(s_{n_l})_l$. I termini della successione $(s_{n_k})_k$ sono dati da

$$s_{n_k} = (-1)^{2k} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+1} - \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$$

mentre i termini della successione $(s_{n_l})_l$ sono dati da

$$s_{n_l} = (-1)^{2l+1} \frac{2l+1}{2l+2} = -\frac{2l+1}{2l+2} = -\frac{2l+2}{2l+2} + \frac{1}{2l+2} = -1 + \frac{1}{2l+2}$$

Ricordiamo che

Teorema 4.2. *Date due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ tali che $a_n \to a$ e $b_n \to b$, allora*

$$a_n \pm b_n \to a \pm b$$

Pertanto se la successione $\left(b_k = \frac{1}{2k+1}\right)_k$ converge a qualche numero reale b, allora $s_{n_k} \to 1 - b$. In particolare, vale che $b_k \to 0$: infatti, fissato $\varepsilon > 0$, se prendiamo

$$k_\varepsilon = \max\left\{\left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1, 0\right\} \tag{4.3}$$

e consideriamo $k > k_\varepsilon$, vale che $k > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$; ma allora $2k+1 > \varepsilon^{-1}$, ossia $\frac{1}{2k+1} < \varepsilon$. Di conseguenza, per ogni $\epsilon > 0$ esiste k_ε, dato da (4.3), tale che $b_k < \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$; quindi $b_k \to 0$, e per il teorema 4.2 $s_{n_k} \to 1$. Allo stesso modo si può dimostrare che $s_{n_l} \to -1$. Esistono quindi due sottosuccessioni di $(s_n)_n$ che convergono a due limiti distinti; pertanto per il teorema 4.1 $(s_n)_n$ non converge.
Notiamo infine che

$$|s_n| = \left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \leq 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

pertanto (s_n) non può divergere a $\pm\infty$. □

Esercizio 4.2. *Determinare se la successione* $(s_n)_n$ *con*

$$s_n = n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) - \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$$

converge o meno.

Soluzione. In questo caso, la successione s_n è data dalla differenza di due successioni

$$a_n = n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) \qquad b_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$$

Per applicare il teorema 4.2, verifichiamo se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ convergono separatamente ad a e b.

(i) Notiamo che

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Quindi $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e di conseguenza $a_n \to 0$.

(ii) Nel caso di b_n invece

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)\sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cdots = (-1)^n$$

e quindi $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Procediamo come prima per mostrare che $b_n \to 0$: fissiamo $\varepsilon > 0$, e cerchiamo di trovare n_ε tale che $|b_n| < \varepsilon$ se $n > n_\varepsilon$.

$$\varepsilon > \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Se fissiamo $n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ e consideriamo $n > n_\varepsilon$ vale che

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{n} = |b_n|$$

Di conseguenza $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$, e quindi $s_n = a_n - b_n \to 0$. □

Esercizio 4.3. *Determinare se la successione $(s_n)_n$ con*

$$s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

converge o meno.

Soluzione. In questo caso il teorema 4.2 non aiuta, in quanto le successioni $a_n = \sqrt{n+1}$ e $b_n = \sqrt{n}$ divergono entrambe a $+\infty$. Possiamo però riscrivere s_n tramite manipolazioni algebriche:

$$s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

A questo punto, ricordiamo i seguenti risultati:

Teorema 4.3. *Date due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ tali che $a_n \to a$ e $b_n \to b$, allora*

$$a_n b_n \to ab$$

Teorema 4.4. *Date due successioni $(a_n)_n$ e (b_n) tali che $a_n \to a$ e $b_n \to b \neq 0$, con $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale che*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

Consideriamo quindi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad b_n = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

Ragionando come prima si dimostra agilmente che $a_n \to 0$, mentre per b_n si può dimostrare che

$$1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 2$$

e quindi $b_n \to \frac{1}{2}$ per il teorema 4.4. Di conseguenza grazie al teorema 4.3 possiamo dire che $s_n \to 0$. □

Osservazione. Quando $s_n \to s$, ci possono essere due casi particolari:

$$s_n \to s^+ \text{ se } s_n > s \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e

$$s_n \to s^- \text{ se } s_n < s \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Ci chiediamo se nel caso dell'esercizio 4.3 vale che $s_n \to 0^\pm$, ossia bisogna verificare se

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0 \text{ oppure } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Avevamo già ricordato che $\sqrt{\cdot}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è monotona strettamente crescente; quindi, dato che $n+1 > n$, $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, e quindi $s_n \to 0^+$.

Esercizio 4.4. *Determinare se la successione $(s_n)_n$ con*

$$s_n = \frac{\sqrt[3]{n}\sin(n)}{n+1}$$

converge o meno.

Soluzione. Anche in questo caso proviamo a calcolare i primi termini della successione:

$$s_0 = 0 \quad s_1 = \frac{\sin(1)}{2} \quad s_2 = \frac{\sqrt[3]{2}\sin(2)}{3} \quad s_3 = \frac{\sqrt[3]{3}\sin(3)}{4} \quad \dots$$

Ricordiamo che $\left|\sin(x)\right| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; di conseguenza, vale che

$$|s_n| = \left|\frac{\sqrt[3]{n}\sin(n)}{n+1}\right| \leq \underbrace{\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}}_{a_n}$$

Consideriamo la successione $(a_n)_n$; vale che

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1} = \sqrt[3]{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Come nei casi precedenti, usando la definizione 4.2 e il teorema 4.4 si dimostra che

$$\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \to 0 \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

e quindi per il teorema 4.3 vale che $a_n \to 0$. Possiamo quindi applicare il teorema del confronto:

Teorema 4.5. *Date tre successioni $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ e $(c_n)_n$ tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $a_n \to l$, $c_n \to l$, allora $b_n \to l$.*

Infatti, $0 \leq |s_n| \leq a_n$, e $a_n \to 0$; di conseguenza $|s_n| \to 0$. Cosa possiamo dire di $(s_n)_n$?

Teorema 4.6. *Data una successione $(a_n)_n$, $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$.*

Dimostrazione. (i) Supponiamo che $a_n \to 0$; per la definizione 4.2 sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

$$\varepsilon > |a_n| = \big||a_n|\big| \quad \text{per ogni } n > n_\varepsilon$$

ossia $|a_n| \to 0$.

(ii) Supponiamo ora che $|a_n| \to 0$. Chiaramente vale che $|a_n| \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; di conseguenza, per il teorema del confronto a due, sappiamo che, se a_n ammette limite l, allora $l \leq 0$. Allo stesso modo, $|a_n| \geq -a_n$, ossia $a_n \geq -|a_n|$, e sempre grazie al teorema del confronto a due possiamo dire che se a_n ammette limite l, vale che $l \geq 0$; di conseguenza $0 \leq l \leq 0$, e quindi $l = 0$, se esiste.
A questo punto mostriamo che $a_n \to 0$: fissato $\varepsilon > 0$, sappiamo che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$, dato che $|a_n| \to 0$. Di conseguenza

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

se $n > n_\varepsilon$, e quindi $a_n \to 0$.

□

Per il teorema 4.6 abbiamo quindi che $s_n \to 0$. □

Osservazione. Il teorema 4.6 funziona solamente nel caso in cui $|a_n| \to 0$: infatti, se consideriamo $a_n = (-1)^n$, vale che $|a_n| \to 1$, ma chiaramente $a_n \not\to 1$.

Esercizio 4.5. *Determinare se la successione $(s_n)_n$ con*

$$s_n = \frac{n \sin(n)}{\sqrt{n^2+1}}$$

converge o meno.

Soluzione. In questo caso non riusciamo a determinare il limite della successione $|s_n|$, in quanto

$$0 \leq |s_n| \leq \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{converge a 1}} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e non possiamo quindi sfruttare il teorema 4.6. Facciamo però la seguente osservazione: sappiamo che $\sin(x) > 0$ se $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, mentre $\sin(x) < 0$ se $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$. Questi intervalli sono sufficientemente ampi per contenere degli interi; consideriamo quindi i seguenti sottoinsiemi illimitati di $\mathbb{N}$:

$$\big\{n_k,\ n_k \in (2k\pi, \pi + 2k\pi) \cap \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\big\} \qquad \big\{n_l,\ n_l \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \cap \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\big\}$$

e le sottosuccessioni $(s_{n_l})_l$ e $(s_{n_k})_k$; per la proprietà di $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(x)$ enunciata prima vale che $\sin(n_k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e $\sin(n_l) < 0$ per ogni $l \in \mathbb{N}$. Quindi

$$s_{n_k} > 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{N} \qquad s_{n_l} < 0 \text{ per ogni } l \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza per il teorema del confronto a due vale che, se i limiti esistono,

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k} \geq 0 \qquad \lim_{l\to\infty} s_{n_l} \leq 0$$

e quindi se il limite l di $(s_n)_n$ esiste questo deve necessariamente essere 0.
Supponiamo quindi che $s_n \to 0$; se consideriamo la successione $(a_n)_n$ con

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

vale che $a_n \to 1$, e di conseguenza per il teorema 4.4

$$\sin(n) = \frac{s_n}{a_n} \to 0$$

ove la successione $\frac{s_n}{a_n}$ è definita su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Per il teorema 4.1, ogni sottosuccessione di $(\sin(n))_n$ converge quindi a 0; in particolare vale per $\sin(n+1)$ e $\sin(n-1)$; ma

$$\begin{aligned}\sin(n+1) - \sin(n-1) &= \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1) - \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1) = \\ &= 2\cos(n)\sin(1)\end{aligned}$$

Ma questo è impossibile: infatti sappiamo che $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e chiaramente se $\sin(n) \to 0$ e $\cos(n) \to 0$ abbiamo un assurdo. Quindi $(s_n)_n$ non converge a 0 e di conseguenza non converge. $\square$

Esercizio 4.6. *Determinare se la successione $(s_n)_n$ con*

$$s_n = n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right)$$

converge o meno.

Soluzione. Possiamo sfruttare le proprietà del logaritmo per scrivere

$$s_n = n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) = \log\left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n\right)$$

Ricordiamo che

Definizione 4.3. Il numero di Nepero e è definito essere

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e l'argomento del logaritmo nel nostro caso ci assomiglia molto; infatti,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n}\right)^{\frac{3n}{3}}$$

Se definiamo $m = 3n$ abbiamo che $m \to \infty$ se $n \to \infty$, e

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^{\frac{m}{3}}$$

Manipolando l'argomento del logaritmo otteniamo

$$s_n = \log\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right) = \log\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n\frac{3}{3}}\right) = 3\log\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 3\log\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right) = 3\log(e) = 3$$

$\square$

Osservazione. Nell'ultimo passaggio del precedente esercizio abbiamo in qualche modo scambiato limite e logaritmo; ci è consentito farlo?
Innanzitutto, notiamo che è sufficiente mostrare che se $a_n \to 1$, allora $\log(a_n) \to 0$: infatti se $a_n \to a$, $a > 0$, allora $\frac{a}{a_n} \to 1$, e

$$\log\left(\frac{a}{a_n}\right) \to 0 \iff \log(a) - \log(a_n) \to 0 \iff \log(a_n) \to \log(a)$$

Consideriamo quindi $a_n \to 1$; per la definizione 4.2 vale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

$$1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon \text{ per ogni } n > n_\varepsilon$$

Poiché $\log(\cdot)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è monotona strettamente crescente, vale che

$$\log(1-\varepsilon) < \log(a_n) < \log(1+\varepsilon) \text{ per ogni } n > n_\varepsilon$$

Fissiamo ora $\delta > 0$, e definiamo $\varepsilon_1 = 1 - e^{-\delta}$; dato che $\delta > 0$ vale che $\varepsilon_1 > 0$, e per quanto detto prima esiste n_1 tale che

$$\log(1-\varepsilon_1) = \log(e^{-\delta}) = -\delta < \log(a_n) \text{ per ogni } n > n_1$$

Allo stesso modo, se definiamo $\varepsilon_2 = e^\delta - 1$, $\varepsilon_2 > 0$ ed esiste n_2 tale che

$$\log(a_n) < \log(1+\varepsilon_2) = \log(e^\delta) = \delta \text{ per ogni } n > n_2$$

Se definiamo $n_\delta = \max\{n_1, n_2\}$ abbiamo che

$$-\delta < \log(a_n) < \delta \iff \left|\log(a_n)\right| < \delta \text{ per ogni } n > n_\delta$$

ossia $\log(a_n) \to 0$. Abbiamo essenzialmente dimostrato che $\log(\cdot)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è continua.

Esercizio 4.7. *Determinare se la successione* $(s_n)_n$ *con*

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}, \qquad n \geq 1$$

converge o meno.

Soluzione. Questa è una successione particolare: infatti al crescere di n i termini che sommati danno s_n decrescono e tendono a 0, però il loro numero aumenta; di conseguenza non possiamo appellarci al teorema 4.2.
Osserviamo però la cosa seguente: sappiamo che $\sqrt{\cdot} \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è monotona crescente, e di conseguenza

$$\sqrt{n^2+m} \geq \sqrt{n^2} \text{ per ogni } m \in \mathbb{N}$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+m}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} \text{ per ogni } m \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Allo stesso modo, $n^2 + 2n \geq n^2 + 2n - m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, e quindi $\sqrt{n^2+2n} \geq \sqrt{n^2+2n-m}$; ragionando allo stesso modo di prima possiamo scrivere

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-m}} \text{ per ogni } m \in \mathbb{N},\ m > n^2+2n, n \geq 1$$

Di conseguenza possiamo stimare dall'alto nel modo seguente:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2}}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}} + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}^{\leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}} + \cdots + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}^{\leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}}$$

ossia

$$s_n \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2}}}_{2n+1 \text{ termini}} = \frac{2n+1}{\sqrt{n^2}}$$

Allo stesso modo, possiamo stimare dal basso:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2}}}_{\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}} + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}^{\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}}_{\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}} + \cdots + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}^{\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}$$

ossia

$$s_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}}_{2n+1 \text{ termini}} = \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

Quindi abbiamo
$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq s_n \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2}} \text{ per ogni } n \geq 1$$
Consideriamo ora le successioni
$$a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} \qquad b_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^2}}$$
e verifichiamo se convergono. Vale che
$$a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 2\frac{\overbrace{1+\frac{1}{2n}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}_{\to 1}} \overset{\text{Th. 4.4}}{\longrightarrow} 2$$
e allo stesso modo
$$b_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{n} = 2\overbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}^{\to 1} \longrightarrow 2$$
Possiamo quindi applicare il teorema 4.5, e concludere che $s_n \to 2$. □

Esercizio 4.8. *Determinare se la successione* $(s_n)_n$ *con*
$$s_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1+\sqrt{s_{n-1}} & n \geq 1 \end{cases}$$
converge o meno.

Soluzione. Scriviamo i primi termini della successione per cercare di capirne l'andamento:
$$s_0 = 1 \quad s_1 = 2 \quad s_2 = 1+\sqrt{2} \quad s_3 = 1+\sqrt{1+\sqrt{2}} \ \dots$$
Sembrerebbe che la successione sia monotona crescente; vale in generale che
$$s_{n-1} \leq s_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}?$$
Notiamo che nel nostro caso vale[6] che per $n \geq 1$
$$s_n = 1+\sqrt{s_{n-1}} \iff s_n - 1 = \sqrt{s_{n-1}} \iff (s_n-1)^2 = s_{n-1}$$
Vogliamo capire quindi se $(s_n-1)^2 \leq s_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; la disequazione risulta essere
$$s_n^2 - 3s_n + 1 \leq 0$$
il cui segno è dato da

[6] Dalla definizione, sappiamo che $s_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$(s_n - \frac{3-\sqrt{5}}{2})$	$-$	$+$	$+$
$(s_n - \frac{3+\sqrt{5}}{2})$	$-$	$-$	$+$
$s_n^2 - 3s_n + 1$	$+$	$-$	$+$

Di conseguenza la successione $(s_n)_n$ è monotona crescente finché $s_n \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Ora, $s_0 = 1 > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, e quindi la successione è effettivamente monotona crescente se $s_n \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per dimostrarlo, procediamo per induzione:

(i) *caso base* $n = 0$: banalmente verificato dato che $s_0 = 1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(ii) *passo induttivo*: supponiamo che $s_k \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ per ogni $0 \leq k \leq n-1$, e mostriamo che vale per n: sappiamo che

$$(s_n - 1)^2 = s_{n-1} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Per la monotonia della radice quadrata vale che

$$|s_n - 1| \leq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

E poiché $s_n = 1 + \sqrt{s_{n-1}}$ abbiamo che $s_n - 1 \geq 0$, quindi possiamo scrivere

$$s_n - 1 \leq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \iff s_n \leq 1 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Vale che

$$1 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}?$$

Per farlo, capiamo quando vale la disuguaglianza $1 + \sqrt{t} \leq t$, che possiamo riscrivere, per $t \geq 1$ (come nel caso che ci interessa), come $t \leq (t-1)^2$, ossia $t^2 - 3t + 1 \geq 0$:

	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$(t - \frac{3-\sqrt{5}}{2})$	$-$	$+$	$+$
$(t - \frac{3+\sqrt{5}}{2})$	$-$	$-$	$+$
$t^2 - 3t + 1$	$+$	$-$	$+$

La disuguaglianza $1+\sqrt{t} \leq t$ vale quindi per $t \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; di conseguenza abbiamo che

$$s_n \leq 1 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Abbiamo quindi che

$$s_n \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e di conseguenza $(s_n)_n$ è monotona crescente ed è anche limitata. Ricordiamo il seguente teorema:

Teorema 4.7. *Sia $(s_n)_n$ una successione monotona; questa converge se e solo se è limitata.*

Di conseguenza sappiamo che $\lim_{n\to\infty} s_n$ esiste, ed è uguale ad $s \in \mathbb{R}$. Per determinarne il valore, notiamo che

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\sqrt{s_{n-1}}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \sqrt{s_{n-1}} = 1+\sqrt{s}$$

Risolvendo l'equazione $s = 1+\sqrt{s}$ possiamo quindi trovare il valore del limite: in particolare risulta che l'equazione ha due soluzioni

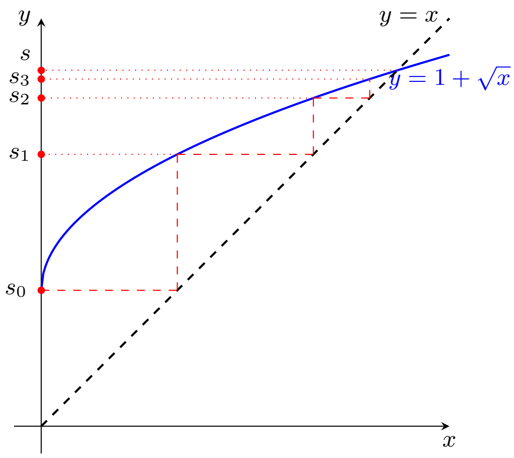
$$\xi_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \xi_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

ma la seconda è da scartare in quanto $s_0 > \xi_1$ e $(s_n)_n$ è monotona crescente; quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

□

Osservazione. Questo problema ammette un'interessante rappresentazione grafica:



ossia la successione tende verso la coordinata y (equivalentemente x) del *punto fisso* di $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.

5 Lezione 5

5.1 Ripasso: limiti di funzioni

Definizione 5.1. Data una funzione $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato y un punto di accumulazione[7] di I, diremo che

$$\lim_{x\to y} f(x) = q$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\big|f(x) - q\big| < \varepsilon$ se $|x-y| < \delta_\varepsilon$.

Teorema 5.1. *Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, vale che*

$$\lim_{x\to y} f(x) = q$$

se e solo se ***per ogni*** *successione $(x_n)_n$ con $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\} \subseteq I$, $x_n \neq y$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $x_n \to y$ vale che la successione $(f(x_n))_n$ converge a q.*

Definizione 5.2. Data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e $y \in [a,b)$, diremo che

$$\lim_{x\to y^+} f(x) = q$$

se per ogni successione $(x_n)_n$ tale che $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\} \subseteq (y,b)$ e $x_n \to y$ la successione $(f(x_n))_n$ tende a q.
Dato $y \in (a,b]$, diremo invece che

$$\lim_{x\to y^-} f(x) = q$$

se per ogni successione $(x_n)_n$ tale che $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\} \subseteq (a,y)$ e $x_n \to y$ la successione $(f(x_n))_n$ tende a q.

Teorema 5.2. *Dato $y \in (a,b)$, $\lim_{x\to y} f(x) = q$ se e solo se*

$$\lim_{x\to y^+} f(x) = \lim_{x\to y^-} f(x) = q$$

5.2 Esercizi: limiti di funzioni

Esercizio 5.1. *Calcolare, se esiste*

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

[7]Un punto di accumulazione per $I \subseteq \mathbb{R}$ è un punto $y \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste $x_\delta \in I$ tale che $x_\delta \in (y-\delta, y+\delta)$. In questo modo possiamo dare senso al tendere ad y tramite elementi di I.

Soluzione. Notiamo che per $x > 1$ e x prossimo a 1 la funzione $\frac{1}{x-1}$ assume valori molto grandi e positivi, e di conseguenza $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ tende ad essere molto piccolo; invece per $x < 1$ e x prossimo a 1 la funzione $\frac{1}{x-1}$ assume valori molto grandi (in modulo) e negativi, e di conseguenza $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ tende ad essere molto grande. Questo ragionamento euristico ci porta a dire che il limite non esiste.
Per dimostrare che effettivamente è così, possiamo sfruttare il teorema 5.1: consideriamo quindi due successioni,

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \qquad b_n = 1 - \frac{1}{n}$$

notiamo che $a_n \to 1$ e $b_n \to 1$, e che $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq (1, +\infty)$ e $\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq (-\infty, 1)$; calcoliamo quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a_n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{b_n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{-\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = +\infty$$

Abbiamo trovato quindi due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ con $a_n \to 1$ e $b_n \to 1$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a_n-1}} \neq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{b_n-1}}$$

e di conseguenza per il teorema 5.1 il limite non esiste. □

Esercizio 5.2. *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\cos(x)-1}}{\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))} - 1}$$

Soluzione. Per calcolare il limite, cerchiamo di ricondurci ai limiti notevoli

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}_{(5.1)} \quad \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}}_{(5.2)} \quad \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}_{(5.3)} \quad \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}_{(5.4)}$$

(i) Notiamo che per $x \to 0$ $\cos(x) - 1 \to 0$; pertanto se definiamo $y = \cos(x) - 1$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\cos(x)-1}}{\cos(x) - 1} \overset{y=\cos(x)-1}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1 - e^y}{y} \overset{(5.1)}{=} -1$$

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}-1}=\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}-1}$$

(ii) Focalizziamoci ora sul denominatore: notiamo che possiamo razionalizzarlo moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1$, ottenendo

$$\begin{aligned}&\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}-1}=\\&=\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1)\end{aligned}$$

(iii) Notiamo che $\log(1+\sin(x))\to 0$ per $x\to 0$; pertanto se definiamo $y=\log(1+\sin(x))$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log^2(1+\sin(x))}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}\overset{y=\log(1+\sin(x))}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\cos(y)-1}\overset{(5.2)}{=}-2$$

Quindi scriviamo

$$\begin{aligned}&\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1)=\\&=\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\log^2(1+\sin(x))}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}\frac{\cos(x)-1}{\log^2(1+\sin(x))}(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1)\end{aligned}$$

(iv) Vale che $\sin(x)\to 0$ per $x\to 0$; pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\log(1+\sin(x))}\overset{y=\sin(x)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)}\overset{(5.3)}{=}1$$

Quindi scriviamo

$$\begin{aligned}&\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\log^2(1+\sin(x))}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}\frac{\cos(x)-1}{\log^2(1+\sin(x))}(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1)=\\&=\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\log^2(1+\sin(x))}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}\frac{\sin^2(x)}{\log^2(1+\sin(x))}\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}\times\\&\times(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1)\end{aligned}$$

(v) Infine, notiamo che $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=(1+\cos(x))(1-\cos(x))$; possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}&\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\log^2(1+\sin(x))}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}\frac{\sin^2(x)}{\log^2(1+\sin(x))}\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}\times\\&\times(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1)=\\&=\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}\frac{\log^2(1+\sin(x))}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}\frac{\sin^2(x)}{\log^2(1+\sin(x))}\frac{1}{-1-\cos(x)}\times\\&\times(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1)\end{aligned}$$

Notiamo che, grazie al teorema 5.1, le regole aritmetiche per i limiti di successioni (teoremi 4.2, 4.3 e 4.4) valgono anche per i limiti di funzioni. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\cos(x)-1}}^{\to -1} \overbrace{\frac{\log^2(1+\sin(x))}{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}}^{\to -2} \overbrace{\frac{\sin^2(x)}{\log^2(1+\sin(x))}}^{\to 1} \overbrace{\frac{1}{-1-\cos(x)}}^{\to -\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \underbrace{\left(\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))}+1\right)}_{\to 2} = -2$$

$\square$

Esercizio 5.3. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per procedere, conviene separare due casi: $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$.

(i) se $\alpha = 0$, vale che $x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi $\log(1+\sin(1)) > 0$; bisogna quindi calcolare
$$\lim_{x\to 0} e^{3x^4} - \cos(x^2)$$
Come prima, le regole aritmetiche per i limiti di successioni valgono anche per i limiti di funzioni. Di conseguenza possiamo calcolare separatamente
$$\lim_{x\to 0} e^{3x^4} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \cos(x^2) = 1$$
ove i risultati sono dovuti alla continuità delle funzioni esponenziale, coseno ed elevamento a potenza.
Quindi se $\alpha = 0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(1))} = 0$$

(ii) Supponiamo quindi $\alpha > 0$; notiamo che se $\alpha \notin \mathbb{N}$ la funzione è definita solamente sui numeri reali positivi, e di conseguenza il limite sarà in realtà un limite destro. Per ricondurci ai limiti (5.1) e (5.2), aggiungiamo e sottraiamo 1 a numeratore:
$$\frac{e^{3x^4}-1+1-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))} = \frac{e^{3x^4}-1}{\log(1+\sin(x^\alpha))} + \frac{1-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}$$
e moltiplichiamo in entrambi i casi numeratore e denominatore per $\sin(x^\alpha)$:
$$\frac{e^{3x^4}-1}{\log(1+\sin(x^\alpha))}+\frac{1-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))} = \frac{(e^{3x^4}-1)\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)}+\frac{(1-\cos(x^2))\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)}$$

Poi nella prima frazione moltiplichiamo e dividiamo per $3x^4$, e nella seconda per x^4:

$$\frac{(e^{3x^4}-1)\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)}+\frac{(1-\cos(x^2))\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)}=$$
$$=\frac{(e^{3x^4}-1)\sin(x^\alpha)3x^4}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)3x^4}+\frac{(1-\cos(x^2))\sin(x^\alpha)x^4}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)x^4}$$

e infine moltiplichiamo e dividiamo per x^α ambo le frazioni:

$$\frac{(e^{3x^4}-1)\sin(x^\alpha)3x^4}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)3x^4}+\frac{(1-\cos(x^2))\sin(x^\alpha)x^4}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)x^4}=$$
$$\frac{(e^{3x^4}-1)\sin(x^\alpha)3x^4x^\alpha}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)3x^4x^\alpha}+\frac{(1-\cos(x^2))\sin(x^\alpha)x^4x^\alpha}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)x^4x^\alpha}$$

Notiamo ora che se $\alpha>0$, per $x\to 0$ la funzione $\sin(x^\alpha)\to 0$; di conseguenza possiamo considerare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin(x^\alpha))}{\sin(x^\alpha)}\overset{y=\sin(x^\alpha)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}\overset{(5.3)}{=}1$$

allo stesso modo $3x^4\to 0$, $x^6\to 0$ e $x^\alpha\to 0$per $x\to 0$, e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^4}-1}{3x^4}\overset{y=3x^4}{=}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\overset{(5.1)}{=}1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\overset{y=x^2}{=}\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos(y)}{y^2}\overset{(5.2)}{=}\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^\alpha)}{x^\alpha}\overset{y=x^\alpha}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}\overset{(5.4)}{=}1$$

Quindi

$$\frac{(e^{3x^4}-1)\sin(x^\alpha)3x^4x^\alpha}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)3x^4x^\alpha}+\frac{(1-\cos(x^2))\sin(x^\alpha)x^4x^\alpha}{\log(1+\sin(x^\alpha))\sin(x^\alpha)x^4x^\alpha}=$$
$$=\frac{e^{3x^4}-1}{3x^4}\frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}\frac{x^\alpha}{\sin(x^\alpha)}3x^{4-\alpha}+\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha)}\frac{x^\alpha}{\sin(x^\alpha)}x^{4-\alpha}$$

Per applicare il teorema 4.3 per i limiti dobbiamo solamente determinare il valore di

$$\lim_{x\to 0}3x^{4-\alpha}\qquad \lim_{x\to 0}x^{4-\alpha}$$

Chiaramente se $4-\alpha>0$ le due funzioni tendono a 0 per la continuità dell'elevamento a potenza, e di conseguenza sempre per il teorema 4.3 e 4.2 abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}=\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{e^{3x^4}-1}{3x^4}}^{\to 1}\overbrace{\frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}}^{\to 1}\overbrace{\frac{x^\alpha}{\sin(x^\alpha)}}^{\to 1}\overbrace{3x^{4-\alpha}}^{\to 0}+$$
$$+\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}}_{\to\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha)}}_{\to 1}\underbrace{\frac{x^\alpha}{\sin(x^\alpha)}}_{\to 1}\underbrace{x^{4-\alpha}}_{\to 0}=0$$

se invece $4-\alpha=0$ le funzioni tendono a 3 e 1 rispettivamente, e di conseguenza

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))} &= \lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{e^{3x^4}-1}{3x^4}}^{\to 1}\overbrace{\frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}}^{\to 1}\overbrace{\frac{x^\alpha}{\sin(x^\alpha)}}^{\to 1}\overbrace{3x^{4-\alpha}}^{\to 3}+\\ &+\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}}_{\to\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}}_{\to 1}\underbrace{\frac{x^\alpha}{\sin(x^\alpha)}}_{\to 1}\underbrace{x^{4-\alpha}}_{\to 1}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

Infine, se $4-\alpha<0$ dobbiamo considerare separatamente il caso $4-\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ e $4-\alpha\in\mathbb{Z}$. Nel primo caso la funzione è definita su $\mathbb{R}^+$ e

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}$$

In questo caso ($4-\alpha<0$, $4-\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$)

$$\lim_{x\to 0^+}3x^{4-\alpha}=\lim_{x\to 0^+}x^{4-\alpha}=+\infty$$

e di conseguenza

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}=+\infty$$

Altrimenti, ossia nel caso $4-\alpha\in\mathbb{Z}$, se $|4-\alpha|$ è pari vale che

$$\lim_{x\to 0}3x^{4-\alpha}=\lim_{x\to 0}x^{4-\alpha}=+\infty$$

altrimenti se $|4-\alpha|$ è dispari le funzioni $3x^{4-\alpha}$ e $x^{4-\alpha}$ non hanno limite per $x\to 0$. Quindi possiamo concludere il caso $\alpha\geq 0$ dicendo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^4}-\cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}=\begin{cases}0 & 0\leq\alpha<4\\ \frac{7}{2} & \alpha=4\\ +\infty & \alpha>4,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\vee\alpha\in\mathbb{N},\ \alpha\text{ pari}\\ \text{non esiste} & \alpha>4,\ \alpha\in\mathbb{N},\ \alpha\text{ dispari}\end{cases}$$

(iii) nel caso $\alpha<0$, la funzione ha *molti* problemi (vi invito ad utilizzare Desmos per capire meglio la gravità della situazione). Infatti,

(a) la funzione non è definita se $\sin(x^\alpha)=0$, ossia se

$$x^\alpha=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\iff x_k=\sqrt[|\alpha|]{\left(\frac{1}{k\pi}\right)}$$

(eventualmente con $k\in\mathbb{N}$ se α è un numero reale non intero);

(b) la funzione non è definita se $\sin(x^\alpha) = -1$, ossia se

$$x^\alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \hat{x}_k = \sqrt[|\alpha|]{\frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}}$$

(anche in questo caso con $k \in \mathbb{N}$ se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

ossia man mano che ci avviciniamo all'origine troviamo sempre più punti in cui la funzione non è definita. Concentriamoci ora su $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$; vale che

(a) $e^{3x^4} - \cos(x^2) > 0$ per ogni $x > 0$: infatti $e^{3x^4} > 1$ se $x > 0$, e $\left|\cos(x^2)\right| \leq 1$; di conseguenza $-\cos(x) \geq -1$, e

$$e^{3x^4} - \cos(x) \geq e^{3x^4} - 1 > 0$$

(b) fissato $k \in \mathbb{N}$,

$$2k\pi + \pi < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi < 2k\pi + 2\pi \iff \frac{1}{2k\pi + \pi} > \frac{1}{2k\pi + \frac{3}{2}\pi} > \frac{1}{2k\pi + 2\pi}$$

e per la monotonia di $\sqrt[|\alpha|]{\cdot} \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vale che

$$\sqrt[|\alpha|]{\frac{1}{2k\pi + \pi}} > \sqrt[|\alpha|]{\frac{1}{2k\pi + \frac{3}{2}\pi}} > \sqrt[|\alpha|]{\frac{1}{2k\pi + 2\pi}}$$

ossia

$$x_{2k+1} > \hat{x}_k > x_{2k+2}$$

(c) $\sin(x^\alpha)$ è positivo per $x \in (x_{2k+1}, x_{2k})$ e negativo per $x \in (x_{2k+2}, x_{2k+1})$; quindi

$$\frac{1}{\log(1 + \sin(x^\alpha))} > 0 \text{ per } x \in (x_{2k+1}, x_{2k})\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

e

$$\frac{1}{\log(1 + \sin(x^\alpha))} < 0 \text{ per } x \in (x_{2k+2}, x_{2k+1})\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Questo significa che

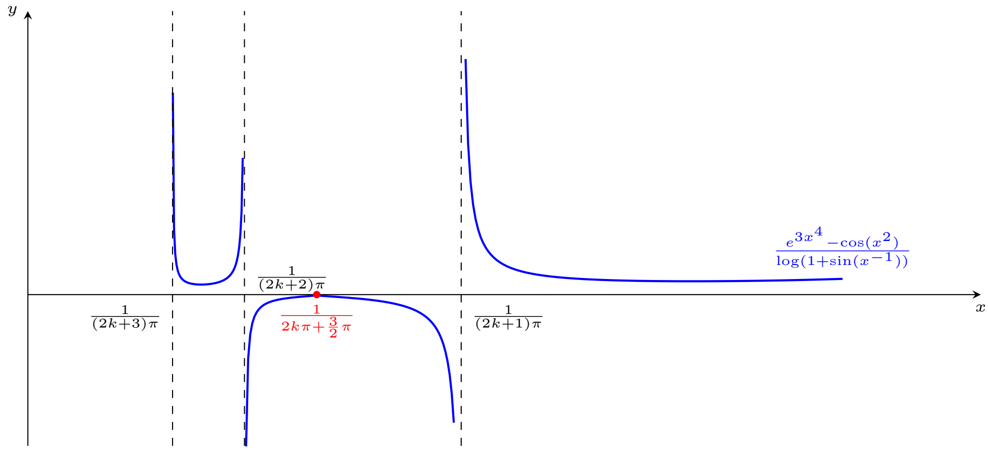
$$\lim_{x \to x_{2k+1}^+} \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1 + \sin(x^\alpha))} = +\infty \qquad \lim_{x \to x_{2k+2}^-} \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1 + \sin(x^\alpha))} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to x_{2k+1}^-} \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1 + \sin(x^\alpha))} = -\infty \qquad \lim_{x \to x_{2k+2}^+} \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1 + \sin(x^\alpha))} = -\infty$$

in quanto il denominatore tende a $0^\pm$; inoltre, dato che per $x \to \hat{x}_k$ il denominatore tende a $-\infty$ abbiamo che

$$\lim_{x \to \hat{x}_k} \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1 + \sin(x^\alpha))} = 0^-$$



Abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare che la funzione non ammette limite per $x \to 0$ se $\alpha < 0$; per farlo, notiamo che la funzione

$$(x_{2k+2}, \hat{x}_k) \ni x \mapsto \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1 + \sin(x^\alpha))}$$

è continua, essendo composizione di funzioni continue; vale pertanto il teorema dei valori intermedi

Teorema 5.3. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < f(b)$ (vale un risultato analogo se $f(a) > f(b)$). Se $c \in (f(a), f(b))$ allora esiste $x \in (a,b)$ tale che $f(x) = c$.*

Quindi per ogni $y \in (-\infty, 0)$ esiste $\xi_k \in (x_{2k+2}, \hat{x}_k)$ tale che

$$\frac{e^{3\xi_k^4} - \cos(\xi_k^2)}{\log(1 + \sin(\xi_k^\alpha))} = y$$

Fissiamo quindi y_1 e y_2 in $(-\infty, 0,$ con $y_1 \neq y_2$. Possiamo quindi associare ad ogni intervallo $(x_{2k+2}, \hat{x}_k)$ uno ξ_k e uno ζ_k tali che la funzione se valutata in ξ_k dia sempre y_1 e se valutata in ζ_k dia sempre y_2. Notiamo che, poiché

$$\sqrt[|\alpha|]{\frac{1}{(2k+2)\pi}} = x_{2k+1} < \xi_k < \hat{x}_k = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}}$$

e sia x_{2k+1}, sia $\hat{x}_k$ tendono a 0 per $k \to \infty$ per il teorema 4.5 vale che $\xi_k \to 0$ per $k \to \infty$, e lo stesso vale per ζ_k. Abbiamo quindi due successioni, $(\xi_k)_k$ e $(\zeta_k)_k$, tali che

$$\frac{e^{3\xi_k^4} - \cos(\xi_k^2)}{\log(1 + \sin(\xi_k^\alpha))} \to y_1 \qquad \frac{e^{3\zeta_k^4} - \cos(\zeta_k^2)}{\log(1 + \sin(\zeta_k^\alpha))} \to y_2$$

essendo le due successioni costanti. Di conseguenza per la definizione 5.2 il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}$$

non esiste se $\alpha < 0$, e di conseguenza per il teorema 5.2 non esiste nemmeno

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^4} - \cos(x^2)}{\log(1+\sin(x^\alpha))}$$

se $\alpha \in \mathbb{Z}$.

□

5.3 Ripasso: continuità

Definizione 5.3. Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, diremo che f è *continua* in $x_0 \in I$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Osservazione. Notiamo che affinché la definizione abbia senso, la funzione f deve essere definita in x_0.
$f\colon I \to \mathbb{R}$ si dirà continua su I se f è continua in ogni punto di I.

Esempio. Vogliamo mostrare che $\exp(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è continua in $\mathbb{R}$. Notiamo che è sufficiente dimostrare la continuità in $x = 0$; infatti, dato $x \neq 0$, se consideriamo una successione $(x_n)_n$ con $x_n \to x$, definendo la successione $(\hat{x}_n = x_n - x)_n$ abbiamo che $\hat{x}_n \to 0$ e, se exp è continua in 0, per il teorema 5.1

$$1 = \lim_{n\to\infty} e^{\hat{x}_n} = \lim_{n\to\infty} e^{x_n - x} \iff \lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^x$$

Consideriamo quindi, sempre per il teorema 5.1, una generica successione $(x_n)_n$ tale che $x_n \to 0$; per la definizione 4.2 sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

$$|x_n| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n < \varepsilon \text{ se } n > n_\varepsilon$$

Fissiamo ora $\delta > 0$, e consideriamo $\varepsilon_1 = \log(1+\delta)$; notiamo che $\varepsilon_1 > 0$ in quanto $\delta > 0$, e di conseguenza per quanto detto prima esiste n_{ε_1} tale che

$$-\varepsilon_1 < x_n < \varepsilon_1 \text{ se } n > n_{\varepsilon_1}$$

In particolare, poiché $\exp(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è monotona strettamente crescente, vale che

$$e^{x_n} < e^{\varepsilon_1} = 1 + \delta \text{ se } n > n_{\varepsilon_1} \tag{5.5}$$

Allo stesso modo, se fissiamo $\varepsilon_2 = -\log(1-\delta)$; anche in questo caso $\varepsilon_2 > 0$, in quanto $\log(1-\delta) < 0$ per $\delta > 0$; anche in questo caso quindi possiamo trovare n_{ε_2} tale che

$$-\varepsilon_2 < x_n < \varepsilon_2 \text{ se } n > n_{\varepsilon_2}$$

Sempre sfruttando la monotonia di $\exp(\cdot)$ possiamo quindi scrivere

$$e^{x_n} > e^{-\varepsilon_2} = e^{-(-\log(1-\delta))} = 1-\delta \text{ se } n > n_{\varepsilon_2} \tag{5.6}$$

Definiamo ora $n_\delta = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$; per (5.5) e (5.6) vale che, se prendiamo $n > n_\delta$,

$$1-\delta < e^{x_n} < 1+\delta$$

ossia dato un generico $\delta > 0$ abbiamo trovato n_δ tale che $|e^{x_n} - 1| < \delta$ se $n > n_\delta$; quindi $e^{x_n} \to 1$. Poiché la successione che abbiamo considerato è generica abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 = e^0$$

e quindi $\exp(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è continua in 0.

5.4 Esercizi: continuità

Esercizio 5.4. *Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2(x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \arctan(x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Soluzione. Notiamo innanzitutto che $(0,1) \ni x \mapsto x^\alpha \sin^2(x)$ è continua, essendo composizione e prodotto di funzioni continue. Allo stesso modo, $(-1,0) \ni x \mapsto |x|^\beta \arctan(x)$ è continua, per lo stesso motivo. L'unico punto problematico può quindi essere $x = 0$. Per la definizione 5.3 e per il teorema 5.2, f è continua in $x = 0$ se

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} f(x)}_{(5.7)} = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} f(x)}_{(5.8)} = f(0) = 0$$

Calcoliamo quindi i due limiti, sfruttando il teorema 4.3:

(i) per quanto riguarda (5.7), sappiamo che in $(0,1)$ la funzione è definita da $x^\alpha \sin^2(x)$; quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin^2(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+2}\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \begin{cases} 0 & \alpha > -2 \\ 1 & \alpha = -2 \\ +\infty & \alpha < -2 \end{cases}$$

(ii) per (5.8) vale invece che, essendo f definita come $|x|^\beta \arctan(x)$ in $(-1,0)$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x|^\beta \arctan(x) = \lim_{x\to 0^-} -(-x)^{\beta+1}\frac{\arctan(x)}{x} = \begin{cases} 0 & \beta > -1 \\ -1 & \beta = -1 \\ -\infty & \beta < -1 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione f è continua in $x = 0$ (e quindi è continua sul suo insieme di definizione) se $\alpha > -2$ e $\beta > -1$. □

6 Lezione 6

6.1 Ripasso: simboli di Landau (o-piccolo)

Definizione 6.1. Date $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $g\colon I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per I (o eventualmente $+\infty$), diremo che f *è un o-piccolo di* g *per* $x \to x_0$, scritto $f = o(g)$, se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

6.2 Esercizi: limiti con i simboli di Landau

Esercizio 6.1. *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[4]{1 + \arctan\left(\frac{5}{x^2}\right)} - \cos\left(\frac{3}{x}\right) \right) x^2$$

Soluzione. Notiamo che se definiamo $y = \frac{5}{x^2}$, abbiamo che $y \to 0$ in quanto $x \to +\infty$; di conseguenza, ricordando che, per $\xi \to 0$,

$$\underbrace{\arctan(\xi) = \xi + o(\xi)}_{(6.1)} \qquad \underbrace{\sqrt[4]{1+\xi} = 1 + \frac{\xi}{4} + o(\xi)}_{(6.2)} \qquad \underbrace{\cos(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2} + o(\xi^2)}_{(6.3)}$$

possiamo scrivere

$$\sqrt[4]{1 + \arctan\left(\frac{5}{x^2}\right)} = \sqrt[4]{1 + \arctan(y)} \overset{(6.2)}{=} 1 + \frac{\arctan(y)}{4} + o(\arctan(y)) \overset{(6.1)}{=}$$
$$= 1 + \frac{y + o(y)}{4} + o(y + o(y)) = 1 + \frac{y}{4} + o(y)$$

ove abbiamo usato il fatto che $\arctan(y) \to 0$ per $y \to 0$ e le proprietà dei simboli di Landau

$$o(y + o(y)) = o(y) \qquad o(y) + o(y) = o(y)$$

Riscrivendo in funzione di x abbiamo che per $x \to +\infty$

$$\sqrt[4]{1 + \arctan\left(\frac{5}{x^2}\right)} = 1 + \frac{5}{4}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Allo stesso modo, definendo $y = \frac{3}{y}$ abbiamo

$$\cos\left(\frac{3}{x}\right) = \cos(y) \overset{(6.3)}{=} 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

che riscritta in funzione di x diventa

$$\cos\left(\frac{3}{x}\right) = 1 - \frac{9}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x \to +\infty$$

Il limite diventa quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{1+\arctan\left(\frac{5}{x^2}\right)} - \cos\left(\frac{3}{x}\right)\right)x^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{5}{4}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 + \frac{9}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{9}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x^2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{23}{4} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)x^2$$

Ricordiamo che, per la definizione 6.1, una funzione f è $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}x^2 f(x) = 0$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)x^2 = 0$$

e di conseguenza

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{1+\arctan\left(\frac{5}{x^2}\right)} - \cos\left(\frac{3}{x}\right)\right)x^2 = \frac{23}{4}$$

□

Esercizio 6.2. *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\cos(x)-1}}{\sqrt{\cos(\log(1+\sin(x)))-1}}$$

Soluzione. Per svolgere l'esercizio, consideriamo i seguenti sviluppi in termini di simboli di Landau per $\xi \to 0$:

$$\underbrace{e^\xi = 1+\xi+o(\xi)}_{(6.4)} \quad \underbrace{\log(1+\xi) = \xi + o(\xi)}_{(6.5)} \quad \underbrace{\sin(\xi) = \xi + o(\xi)}_{(6.6)} \quad \underbrace{\sqrt{1+\xi} = 1 + \frac{\xi}{2} + o(\xi)}_{(6.7)}$$

Consideriamo separatamente numeratore e denominatore:

(i) Per il numeratore, notiamo che se definiamo $y = \cos(x) - 1$ vale che $y \to 0$ per $x \to 0$; quindi

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)-1} &= e^y \overset{(6.4)}{=} 1 + y + o(y) = 1 + (\cos(x) - 1) + o(\cos(x) - 1) = \\ &= \cos(x) + o(\cos(x) - 1) \overset{(6.3)}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(1 - \frac{x^2}{2} - 1\right) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

e di conseguenza per $x \to 0$ il numeratore è

$$1 - e^{\cos(x)-1} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

(ii) Notiamo che $y = \sin(x) \to 0$ per $x \to 0$, che $z = \log(1 + y) \to 0$ per $y \to 0$ e che $\xi = \cos(z) - 1 \to 0$ per $z \to 0$; quindi

$$\begin{aligned} &\sqrt{\cos(\log(1 + \sin(x)))} - 1 = \sqrt{1 + (\cos(z) - 1)} - 1 = \sqrt{1 + \xi} - 1 \overset{(6.7)}{=} \\ &= 1 + \frac{\xi}{2} + o(\xi) - 1 = \frac{\cos(z) - 1}{2} + o(\cos(z) - 1) \overset{(6.3)}{=} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2) - 1\right) + o\left(\frac{z^2}{2} + o(z^2)\right) = -\frac{z^2}{4} + o(z^2) = \\ &= -\frac{\log^2(1 + y)}{4} + o(\log^2(1 + y)) \overset{(6.5)}{=} -\frac{(y + o(y))^2}{4} + o((y + o(y))^2) = \\ &= -\frac{y^2 + 2yo(y) + o(y)^2}{4} + o(y^2 + 2yo(y) + o(y)^2) = -\frac{y^2}{4} + o(y^2) = \\ &= -\frac{\sin^2(x)}{4} + o(\sin^2(x)) \overset{(6.6)}{=} -\frac{(x + o(x))^2}{4} + o((x + o(x))^2) = -\frac{x^2}{4} + o(x^2) \end{aligned}$$

Quindi per $x \to 0$

$$\frac{1 - e^{\cos(x)-1}}{\sqrt{\cos(\log(1 + \sin(x)))} - 1} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = -\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{4}} \frac{\left(1 + 2\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\left(1 - 4\frac{o(x^2)}{x^2}\right)} = -2\frac{\left(1 + 2\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\left(1 - 4\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}$$

Come prima, per definizione di o-piccolo, $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$; di conseguenza, sfruttando i teoremi 4.2, 4.3 e 4.4 vale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\cos(x)-1}}{\sqrt{\cos(\log(1 + \sin(x)))} - 1} = \lim_{x\to 0} -2\frac{\left(1 + 2\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\left(1 - 4\frac{o(x^2)}{x^2}\right)} = -2$$

□

6.3 Ripasso: derivabilità e differenziabilità, interpretazione geometrica della derivata

Definizione 6.2. Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, e sia $x \in (a,b)$; definiamo il *rapporto incrementale di f in x* come la funzione $\phi_x\colon (a,b) \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$,

$$\phi_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Diremo che f è *derivabile in x* se esiste finito

$$\lim_{t\to x} \phi_x(t) = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x) \tag{6.8}$$

Osservazione. Detto $I \subseteq (a,b)$ l'insieme dei punti in cui f è derivabile, possiamo definire una funzione $I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$, detta *derivata prima* di f, che si indica con il simbolo f'.

Definizione 6.3. Dati $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x \in (a,b)$, diremo che f è *differenziabile in x* se esiste un'applicazione lineare $A_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\bigl|f(x+h) - f(x) - A_x h\bigr|}{|h|} = 0 \tag{6.9}$$

Osservazione. Ricordiamo che vale il teorema 4.6, e che quindi $|h| \to 0$ se e solo se $h \to 0$ e $\bigl|f(h)\bigr| \to 0$ se e solo se $f(h) \to 0$. Possiamo quindi riscrivere la (6.8) come

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - A_x h}{h} = 0$$

Per la definizione 6.1 vale quindi che

$$f(x+h) - f(x) - A_x h = o(h) \iff f(x+h) = f(x) + A_x h + o(h)$$

ossia f è differenziabile in x se in un intorno di h possiamo approssimare f con un'applicazione lineare A_x commettendo un errore contenuto ($o(h)$).

Osservazione. Dai corsi di geometria sappiamo che, fissata una base di $\mathbb{R}$, esiste una corrispondenza biunivoca fra applicazioni lineari $A_x \in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e matrici 1×1 a coefficienti reali, ossia numeri reali: in particolare, data l'applicazione lineare $A_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esiste $m_{A_x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$A_x(h) = m_{A_x} h \text{ per ogni } h \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.1. *Data $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, f è differenziabile in x se e solo se f è derivabile in x.*

Dimostrazione. Dimostriamo le due implicazioni.

(i) Supponiamo che f sia differenziabile in x, e mostriamo che f è derivabile in x. Sappiamo che

$$f(x+h) = f(x) + A_x h + o(h) = f(x) + m_{A_x} h + o(h)$$

e di conseguenza

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)+m_{A_x}h+o(h)-f(x)}{h} = m_{A_x} + \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = m_{A_x}$$

Notiamo che il limite in (6.8) può essere scritto come

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{f(t-x+x)-f(x)}{t-x} \overset{h=t-x}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

in quanto $h \to 0$ se $t \to x$. Abbiamo quindi che il limite (6.8) esiste finito, e che $f'(x) = m_{A_x}$.

(ii) Supponiamo ora che f sia derivabile in x e mostriamo che f è differenziabile in x. Per definizione vale che

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

ossia

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = 0$$

Possiamo riscrivere il precedente limite come

$$0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h}$$

Per il teorema 4.6 sappiamo che

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{\left|f(x+h)-f(x)-f'(x)h\right|}{|h|} = 0$$

e di conseguenza l'applicazione lineare $\mathbb{R} \ni h \mapsto f'(x)h$ indotta da $f'(x) \in \mathbb{R}$ soddisfa la definizione 6.3.

□

Osservazione. Questo teorema ci dice che per funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabilità e derivabilità sono due concetti equivalenti. Non è così per funzioni $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$! Ci sono esempi[8] di funzioni derivabili ma non differenziabili.

Teorema 6.2. *Siano $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili in $x \in (a,b)$; allora*

[8] Ad esempio, la funzione $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ è derivabile (direzionalmente) in $(0,0)$ ma non è differenziabile.

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(ii) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$;

(iii) *(Regola di Leibniz)*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{6.10}$$

Inoltre, se $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ *è tale per cui* $f((a,b)) \subseteq (c,d)$ *e* g *è differenziabile in* $f(x) \in (c,d)$*, allora* $g \circ f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in* x *e vale la regola della catena*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{6.11}$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

e cerchiamo di determinare l'insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ in cui è differenziabile. In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la funzione è prodotto e composizione di funzioni differenziabili, e quindi per il teorema 6.2 vale che f è differenziabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e la sua derivata prima in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è data da

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\overset{(6.10)}{=} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \overset{(6.11)}{=} \\ = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) &= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Per la derivabilità in 0, bisogna considerare invece il rapporto incrementale (6.8),

$$\phi_0(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{1}{t}t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) = t\sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

e calcolare $\lim_{t\to 0} \phi_0(t)$. Notiamo che, poiché $\left|\sin(x)\right| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \left|\phi_0(t)\right| = \left|t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq |t|$$

e quindi per il teorema 4.5 vale che $\left|\phi_0(t)\right| \to 0$ per $t \to 0$, e per il teorema 4.6 vale che

$$\lim_{t\to 0} \phi_0(t) = 0 = f'(0)$$

Quindi f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Notiamo che f' è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, essendo composizione e prodotto di funzioni continue, ma non è continua in 0: infatti, considerando le due successioni

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

che tendono a 0 per $n \to \infty$ vale che

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi)) - \cos(2n\pi) = \lim_{n\to\infty} -\cos(2n\pi) = -1$$

e che

$$\lim_{n\to\infty} f'(b_n) = \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi)) - \cos((2n+1)\pi) = \lim_{n\to\infty} -\cos((2n+1)\pi) = 1$$

Per il teorema 5.1 quindi $\lim_{t\to 0} f'(t)$ non esiste, e quindi f' non può essere continua in 0.

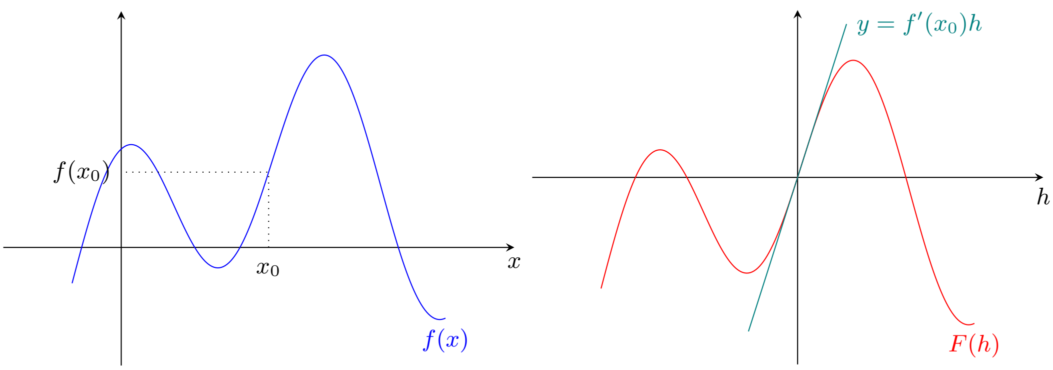
Data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, sappiamo che f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ se

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$$

Consideriamo quindi $F\colon h \mapsto f(x_0+h) - f(x_0)$; sappiamo che

$$F(h) = f'(x_0)h + o(h)$$

ossia $h \mapsto f'(x_0)h$ è l'applicazione lineare che meglio approssima F in prossimità dell'origine.



Notiamo che il grafico, riportato a destra, di F, altro non è se non il grafico di $f(x)$ traslato di $(-x_0, -f(x_0))$: infatti, se consideriamo la coppia $(h, F(h))$ e la trasliamo di $(x_0, f(x_0))$ otteniamo

$$(h, F(h)) \longrightarrow (h+x_0, F(h) + f(x_0)) = (h + x_0, f(h+x_0))$$

Possiamo sempre scrivere $h = x - x_0$ per un qualche $x \in \mathbb{R}$; di conseguenza il punto $(h, F(h))$ viene mandato dalla traslazione in $(x, f(x))$. Poiché h scorre su tutto $\mathbb{R}$, così fa x, e quindi abbiamo

$$\{(h, F(h)),\ h \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$$

Consideriamo invece la retta $\{(h, f'(x_0)h),\ h \in \mathbb{R}\}$: la traslazione rigida per il vettore $(x_0, f(x_0))$ agisce come

$$(h, f'(x_0)h) \longrightarrow (h + x_0, f'(x_0)h + f(x_0))$$

e scrivendo $h = x - x_0$ come fatto precedentemente otteniamo

$$(h, f'(x_0)h) \longrightarrow (x, f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$$

Quindi

$$\{(h, f'(x_0)h),\ h \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \underbrace{\{(x, f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)),\ x \in \mathbb{R}\}}_{\text{retta passante per } (x_0, f(x_0)) \text{ con coeff. angolare } f'(x_0)}$$

ossia la retta che meglio approssima la funzione F in un intorno dell'origine viene trasformata nella retta che meglio approssima il grafico della funzione f in un intorno del punto $(x_0, f(x_0))$. La derivata prima $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare di questa retta; ora, dalla definizione 6.2 e dall'equazione (6.8) sappiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{t \to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

ossia per calcolare $f'(x_0)$ stiamo considerando il coefficiente angolare della secante passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(t, f(t))$ e ne valutiamo il comportamento nel limite in cui i due punti coincidono; possiamo cioè immaginarci di tendere alla retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Alla luce della precedente discussione, nel caso in cui f sia differenziabile in x_0 possiamo quindi definire la retta tangente come

$$\{(x, f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)),\ x \in \mathbb{R}\}$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = \log(\arctan(x^2))$; vogliamo determinarne l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $\left(1, \log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Per quanto detto precedentemente, sappiamo che questa è definita da

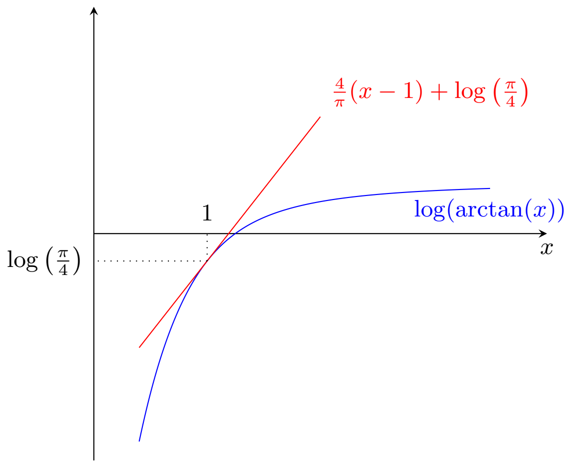
$$\left\{\left(x, f'(1)(x-1) + \log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

Dobbiamo quindi calcolare $f'(1)$:

$$f'(1) = \frac{d}{dx} f(x)\bigg|_{x=1} = \frac{d}{dx}\left(\log(\arctan(x^2))\right)\bigg|_{x=1} \overset{(6.11)}{=} \left(\frac{1}{\arctan(x^2)} \frac{1}{1+x^2} 2x\right)\bigg|_{x=1} =$$
$$= \frac{1}{\arctan(1)} = \frac{4}{\pi}$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $\left(1, \log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ è quindi data da

$$y = \frac{4}{\pi}(x-1) + \log\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}x + \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\pi}$$



Se avessimo invece voluto sapere l'equazione della retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel punto $\left(\log\left(\frac{\pi}{4}\right), 1\right)$?
Notiamo innanzitutto che $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ è pari; pertanto questa non è iniettiva su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Possiamo però restringerci a $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; in questo caso notiamo che $\log(\cdot)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è monotona strettamente crescente, e lo stesso vale per $\arctan(\cdot)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; pertanto

$$f(x) < f(y) \iff x < y \text{ su } \mathbb{R}^+$$

e l'iniettività segue. Per quanto riguarda la suriettività, notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \log\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

e che f è continua, essendo composizione di funzioni continue; vale pertanto il teorema dei valori intermedi 5.3: di conseguenza $f\colon \mathbb{R}^+ \to \left(-\infty, \log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ è iniettiva e suriettiva, e pertanto invertibile.
A questo punto, la retta tangente al grafico di f^{-1} in $\left(\log\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)\right)$ sarà data da

$$\left\{\left(x, (f^{-1})'\left(\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(x-\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+1\right),\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

Per calcolare $(f^{-1})'\left(\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ abbiamo diverse possibilità:

(i) Ci ricordiamo che vale la regola della catena (6.11), ossia se f è derivabile in x e f^{-1} è derivabile in $f(x)$ vale che

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(f^{-1}(f(x)) = (f^{-1})'(f(x))f'(x)$$

Notiamo che se $f'(x) = 0$ non possiamo usare questo metodo per calcolare $(f^{-1})'(f(x))$; se invece $f'(x) \neq 0$ vale che

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \iff (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Nel nostro caso vale che $f'(1) \neq 0$, e quindi

$$(f^{-1})'\left(\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{\pi}{4}$$

e quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} in $\left(\log\left(\frac{\pi}{4}\right), 1\right)$ è data da

$$y = \frac{\pi}{4}x + 1 - \frac{\pi}{4}\log\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

(ii) Osserviamo le equazioni delle due rette:

$$y = \frac{4}{\pi}x + \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\pi} \qquad y = \frac{\pi}{4}x + 1 - \frac{\pi}{4}\log\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Notiamo che se nella prima scambiamo x e y ottenendo

$$x = \frac{4}{\pi}y + \log\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\pi}$$

ed esplicitiamo la y in funzione di x otteniamo

$$x - \log\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}y \iff y = \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\log\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1$$

cioè la seconda equazione.
Perché funziona? Supponiamo di avere una funzione $f\colon D_f \to I_f$ invertibile; la sua funzione $f^{-1}\colon D_{f^{-1}} \to I_{f^{-1}}$ avrà grafico

$$\mathrm{Graph}(f^{-1}) = \left\{(x, f^{-1}(x)) \in \mathbb{R}^2,\ x \in D_{f^{-1}}\right\}$$

Ricordiamo che nel caso di funzioni invertibili $D_{f^{-1}} = I_f$; quindi per ogni $x \in D_{f^{-1}}$ esiste un unico $t \in D_f$ tale che $x = f(t)$; quindi

$$\mathrm{Graph}(f^{-1}) = \left\{(f(t), f^{-1}(f(t))),\ t \in D_f\right\} = \left\{(f(t), t),\ t \in D_f\right\}$$

ossia possiamo disegnare il grafico di f^{-1} tracciando il grafico di f invertendo gli assi. Supponiamo ora che la retta

$$r = \{(t, r(t)),\ x \in \mathbb{R}\}$$

sia tangente al grafico di f in $(t_0, f(t_0))$; allora necessariamente la retta

$$r' = \{(r(t), t),\ t \in \mathbb{R}\}$$

sarà tangente a

$$\{(f(t), t),\ t \in D_f\} = \left\{(x, f^{-1}(x)),\ x \in D_{f^{-1}}\right\} = \mathrm{Graph}(f^{-1})$$

in $(f(t_0), t_0)$.

(iii) Talvolta possiamo calcolare direttamente $f^{-1}(x)$; in questo caso ad esempio la funzione inversa $f^{-1}\colon \left(-\infty, \log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \to \mathbb{R}^+$ è data da

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\tan(e^x)}$$

A questo punto è sufficiente derivare f^{-1} per calcolare la derivata prima in $\log\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x))\Big|_{x=\log\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\tan(e^x)}}\frac{1}{\cos^2(e^x)}e^x\Big|_{x=\log\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\frac{4}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

e procedere come prima.

6.4 Esercizi: derivabilità e differenziabilità

Esercizio 6.3. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(\beta x + \alpha)^3 & x \leq 0 \\ 2e^{\beta x} - \pi\cos\left(\dfrac{2\alpha}{\pi}x\right) & x > 0 \end{cases}$$

determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile in 0.

Soluzione. Ricordiamo il seguente risultato

Teorema 6.3. *Se $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x \in (a, b)$, allora f è continua in x.*

che è equivalente a

Se $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ non è continua in $x \in (a, b)$, allora f non è differenziabile in x.

Cerchiamo allora per quali valori dei parametri la funzione è continua in $x = 0$, ricordando che vale il teorema 5.2: dobbiamo quindi verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \alpha^4$$

Sicuramente per la continuità delle funzioni che contribuiscono alla definizione di f in $(-\infty, 0]$ vale che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \alpha^4$$

Consideriamo quindi $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: poiché le funzioni che definiscono f in $(0, +\infty)$ sono la restrizione a questo intervallo illimitato di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, vale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2e^{\beta x} - \pi \cos\left(\frac{2\alpha}{\pi} x\right) = 2e^0 - \pi\cos(0) = 2 - \pi$$

Per avere una funzione continua dobbiamo quindi trovare i valori del parametro α tali che

$$\alpha^4 = 2 - \pi$$

Questa equazione però non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, in quanto $2 - \pi < 0$. Pertanto non esiste scelta dei parametri α, β tale da rendere f differenziabile in 0. $\square$

Osservazione. L'unico legame fra continuità e differenziabilità è quello descritto nel teorema 6.3. Il fatto che una funzione sia continua non implica nulla sul fatto che una funzione sia derivabil: esistono infatti esempi di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ non derivabili in nessun punto ([5, Teorema 7.18]).

Esercizio 6.4. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin(\pi e^{\beta(x-e)}) + \beta & x \le e \\ (x-e)^3 - \alpha e^{-\alpha(x-e)} & x > e \end{cases}$$

determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile in e.

Soluzione. Come prima, alla luce del teorema 6.3 verifichiamo per quali valori dei parametri f è continua in e, e grazie al teorema 5.2 possiamo vedere se

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^-} f(x) = f(e) = \beta$$

Poiché $f\colon (-\infty, e] \to \mathbb{R}$ è data dalla restrizione di $\alpha\sin(\pi e^{\beta(x-e)}) + \beta$, che è composizione di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, vale che

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = f(e) = \beta$$

Per quanto riguarda $f\colon (e, +\infty)$, anche in questo caso f è data dalla restrizione all'intervallo di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$; quindi

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} (x-e)^3 - \alpha e^{-\alpha(x-e)} = -\alpha$$

Quindi affinché f sia continua in e deve valere che $\beta = -\alpha$.
Per quanto riguarda invece la differenziabilità, in questo caso possiamo operare in due modi diversi:

(i) Possiamo usare la definizione 6.2, in particolare l'equazione (6.8), e il teorema 5.2 per dire che f è differenziabile in e se

$$\underbrace{\lim_{t\to e^+}\frac{f(t)-f(e)}{t-e}}_{(6.12)} = \underbrace{\lim_{t\to e^-}\frac{f(t)-f(e)}{t-e}}_{(6.13)}$$

ed entrambi i limiti esistono finiti. Consideriamo il limite (6.12): ricordando che necessariamente $\alpha = -\beta$,

$$\lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{x\to e^+}\frac{(x-e)^3-\alpha e^{-\alpha(x-e)}-\beta}{x-e} \overset{t=x-e}{=}$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{t^3-\alpha e^{-\alpha t}-\beta}{t} \overset{(6.4)}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{t^3-\alpha(1-\alpha t+o(t))+\alpha}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0^+} t^2+\alpha^2+\frac{o(t)}{t} = \alpha^2$$

Allo stesso modo, se consideriamo il limite (6.13) abbiamo che

$$\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{x\to e^-}\frac{\alpha\sin(\pi e^{\beta(x-e)})+\beta-\beta}{x-e} = \lim_{x\to e^-}\frac{\alpha\sin(\pi e^{\beta(x-e)}+\pi-\pi)}{x-e} =$$
$$= \lim_{x\to e^-}\frac{-\alpha\sin(\pi e^{\beta(x-e)}-\pi)}{x-e} \overset{t=e^{\beta(x-e)}-1}{=} \lim_{t\to 0^-}\frac{-\alpha\sin(\pi t)}{\frac{1}{\beta}\log(1+t)} \overset{(6.6)+(6.5)}{=}$$
$$= \lim_{t\to 0^-} -\alpha\frac{-\alpha\pi t+o(t)}{t+o(t)} = -\alpha\lim_{t\to 0^-}\frac{-\alpha\pi t}{t}\frac{1+\frac{o(t)}{t}}{1+\frac{o(t)}{t}} = \pi\alpha^2\lim_{t\to 0^-}\frac{1+\frac{o(t)}{t}}{1+\frac{o(t)}{t}} = \pi\alpha^2$$

ove abbiamo usato il teorema 4.4 e la definizione 6.1. Quindi f è differenziabile in e se

$$\begin{cases}\alpha^2 = \pi\alpha^2\\ \beta = -\alpha\end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

(ii) Notiamo che f è derivabile separatamente nei due tratti $(-\infty, e)$ e $(e, +\infty)$. Possiamo quindi provare a derivare f separatamente nei due tratti, ottenendo una funzione

$$f'(x) = \begin{cases}\alpha\cos(\pi e^{\beta(x-e)})\pi\beta e^{\beta(x-e)} & x<e\\ 3(x-e)^2+\alpha^2 e^{-\alpha(x-e)} & x>e\end{cases}$$

Resta da capire cosa succede nel punto $x = e$. Se consideriamo il limite sinistro del rapporto incrementale abbiamo che

$$\lim_{t\to e^-}\frac{f(t)-f(e)}{t-e} = \lim_{t\to e^-}\frac{(\alpha\sin(\pi e^{\beta(t-e)})+\beta)-(\alpha\sin(\pi e^{\beta(e-e)})+\beta)}{t-e}$$

Notiamo che la funzione $\alpha \sin(\pi e^{\beta(x-e)}) + \beta$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e la sua derivata è continua; pertanto

$$\lim_{t \to e^-} \frac{(\alpha \sin(\pi e^{\beta(t-e)}) + \beta) - (\alpha \sin(\pi e^{\beta(e-e)}) + \beta)}{t - e} = \frac{d}{dt}\Big(\alpha \sin(\pi e^{\beta(t-e)}) + \beta\Big)\Big|_{t=e} =$$
$$= \lim_{t \to e^-} \frac{d}{dt}\Big(\alpha \sin(\pi e^{\beta(t-e)}) + \beta\Big)$$

Quindi vale che

$$\lim_{t \to e^-} \frac{f(t) - f(e)}{t - e} = \lim_{t \to e^-} f'(t)$$

Dato che abbiamo imposto che f sia continua in e con $\beta = -\alpha$, vale che

$$f(e) = \lim_{x \to e^+} (x - e)^3 - \alpha e^{-\alpha(x-e)} = (e - e)^3 - \alpha e^{-\alpha(e-e)}$$

Procedendo come prima si può quindi mostrare che

$$\lim_{t \to e^+} \frac{f(t) - f(e)}{t - e} = \lim_{t \to e^+} f'(t)$$

Se calcoliamo i due limiti, per la continuità delle funzioni abbiamo

$$\lim_{t \to e^-} f'(t) = \lim_{t \to e^-} \alpha \cos(\pi e^{\beta(t-e)}) \pi \beta e^{\beta(t-e)} = \alpha \cos(\pi) \pi \beta = \pi \alpha^2$$

e

$$\lim_{t \to e^+} f'(t) = \lim_{t \to e^+} 3(t - e)^2 + \alpha^2 e^{-\alpha(t-e)} = \alpha^2$$

Ci siamo quindi ricondotti allo stesso sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 = \pi \alpha^2 \\ \beta = -\alpha \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

$\square$

7 Lezione 7

7.1 Ripasso: teorema di de l'Hôpital

Teorema 7.1. *Siano $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni definite sull'intervallo (a, b) con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ tali che*

(i) f, g siano differenziabili su (a, b);

(ii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;

(iii) $f, g \to 0$ o $f, g \to \pm\infty$ per $x \to a$ o per $x \to b$.

Allora se

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ o } \lim_{x\to b} \frac{f'(b)}{g'(b)} = l$$

con l che può essere anche $\pm\infty$, allora

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \text{ o } \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

7.2 Esercizi: teorema di de l'Hôpital

Esercizio 7.1. *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to+\infty} x \left(\arctan(\log(x)) - \arctan(x)\right)$$

Soluzione. Notiamo che per continuità vale che

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(\log(x)) - \arctan(x)) = 0$$

e di conseguenza

$$\lim_{x\to+\infty} x \left(\arctan(\log(x)) - \arctan(x)\right) = [0 \cdot \infty] \text{ F.I.}$$

Notiamo che possiamo ricondurci ad una forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$ scrivendo

$$x \left(\arctan(\log(x)) - \arctan(x)\right) = \frac{\arctan(\log(x)) - \arctan(x)}{\frac{1}{x}}$$

Possiamo quindi provare ad applicare il teorema di de l'Hôpital 7.1, verificando le altre ipotesi:

(i) sia $f = \arctan(\log(x)) - \arctan(x)$, sia $g = \frac{1}{x}$ sono differenziabili su $(0, +\infty)$;

(ii) la derivata prima di g è

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \text{ per ogni } x \in (0, +\infty)$$

Se calcoliamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\log^2(x)}\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x}{1+\log^2(x)}\right)\end{aligned}$$

Notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\log^2(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ F.I.}$$

e quindi possiamo provare ad applicare nuovamente il teorema di de l'Hôpital:

(i) $u = x$ e $v = 1+\log^2(x)$ sono differenziabili in $(0,+\infty)$;

(ii) $v'(x) = \frac{2\log(x)}{x} = 0$ se $x = 1$; possiamo però risolvere il problema restringendoci all'intervallo $(1+\infty)$, in quanto stiamo considerando il limite per $x \to +\infty$. Poiché u e v sono differenziabili in $(0,+\infty)$ lo sono anche in $(1,+\infty)$, e quindi tutti i requisiti del teorema 7.1 sono soddisfatti.

Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2\log(x)}$$

A questo punto possiamo di nuovo applicare il teorema di de l'Hôpital, oppure possiamo appellarci alle gerarchie degli infiniti, per concludere che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)} = +\infty \overset{\text{d.H.}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\log^2(x)} = +\infty$$

Di conseguenza, poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

abbiamo che

$$-\infty = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x}{1+\log^2(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{d.H.}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(\arctan(\log(x)) - \arctan(x)\big) = -\infty$$

$\square$

Osservazione. Mostriamo che date due funzioni f, g tali che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

allora $f - g \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

(i) Supponiamo che $g(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$; allora per ogni $M \in \mathbb{N}$ esiste $x_M \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) > M$ se $x > x_M$. Se moltiplichiamo ambo i membri della disuguaglianza $g(x) > M$ per -1 otteniamo che, fissato $M \in \mathbb{N}$, esiste x_M tale che

$$-g(x) < -M \text{ per ogni } x > x_M$$

ossia $-g(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

(ii) Se $f(x) \to l$ per $x \to +\infty$, vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \text{ per ogni } x > x_\varepsilon$$

Fissiamo ora $M \in \mathbb{N}$, e consideriamo il numero reale $M + l + \varepsilon$; per la proprietà archimedea dei numeri reali esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $N > M + l + \varepsilon$. A questo punto per il punto (i) sappiamo che esiste $x_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$-g(x) < -N \text{ per ogni } x > x_2$$

Se consideriamo $x_M = \max\{x_1, x_2\}$ vale che

$$f(x) < l + \varepsilon \text{ e } -g(x) < -N \text{ per ogni } x > x_M$$

quindi

$$f(x) - g(x) < l + \varepsilon - N < -M - l - \varepsilon + l + \varepsilon$$

Ossia fissato $M \in \mathbb{N}$ abbiamo trovato x_M tale che

$$f(x) - g(x) < -M \text{ per ogni } x > x_M$$

7.3 Ripasso: sviluppo di Taylor

Teorema 7.2. *Data $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile n volte in $x_0 \in (a,b)$, esiste un polinomio $P(x)$ di grado n tale che*

$$f(x) = P(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Tale polinomio viene detto polinomio di Taylor *ed è dato da*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \quad f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} f(x)\bigg|_{x=x_0} \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0) \tag{7.1}$$

7.4 Esercizi: sviluppi di Taylor

Esercizio 7.2. *Calcolare lo sviluppo di Taylor centrato in* 0 *di*

$$f(x) = \sinh(x)$$

fino al quarto ordine.

Soluzione. Dall'equazione (7.1) sappiamo che nel caso di $\sinh(x)$ il polinomio di Taylor centrato in 0 è dato da

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sinh^{(k)}(0)x^k + o(x^k)$$

Dobbiamo quindi calcolare $\sinh^{(k)}(0)$ per $k = 0, \dots, 4$. Ricordiamo che

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e quindi

$$\sinh(0) = 0 \quad \frac{d}{dx}\sinh(x)\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\bigg|_{x=0} = \cosh(0) = 1$$

Notiamo che

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

Di conseguenza

$$\sinh(0) = 0 \quad \sinh'(0) = 1 \quad \sinh^{(2)}(0) = 0 \quad \sinh^{(3)}(0) = 1 \quad \sinh^{(4)}(0) = 0$$

e il polinomio di Taylor di $\sinh(x)$ di ordine 4 è dato da

$$P(x) = 0 + x + 0\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 0\frac{1}{24}x^4$$

Concludiamo che

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

□

Esercizio 7.3. *Calcolare lo sviluppo di Taylor centrato in* 0 *di*

$$f(x) = \log(1 + \sinh(x)) - x$$

fino al quarto ordine.

Soluzione. Notiamo che $\sinh(0) = 0$; di conseguenza, se effettuiamo la sostituzione $\xi = \sinh(x)$, la funzione f sarà data da

$$f(\xi) = \log(1 + \xi) - x(\xi)$$

Possiamo quindi considerare lo sviluppo di Taylor di $\log(1+\xi)$ centrato in 0: questo sarà dato fino al quarto ordine da

$$
\begin{aligned}
P(\xi) &= \log(1+0) + (\log(1+\xi))'\Big|_{\xi=0}\xi + (\log(1+\xi))^{(2)}\Big|_{\xi=0}\frac{\xi^2}{2} + (\log(1+\xi))^{(3)}\Big|_{\xi=0}\frac{\xi^3}{6} + \\
&+ (\log(1+\xi))^{(4)}\Big|_{\xi=0}\frac{\xi^4}{24} + o(\xi^4) = 0 + \frac{1}{1+\xi}\Big|_{\xi=0}\xi - \frac{1}{(1+\xi)^2}\Big|_{\xi=0}\frac{\xi^2}{2} + \\
&+ \frac{2}{(1+\xi)^3}\Big|_{\xi=0}\frac{\xi^3}{6} - \frac{6}{(1+\xi)^4}\Big|_{\xi=0}\frac{\xi^4}{24} + o(\xi^4) = \\
&= \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} + o(\xi^4)
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\log(1+\sinh(x)) = \sinh(x) - \frac{\sinh^2(x)}{2} + \frac{\sinh^3(x)}{3} - \frac{\sinh^4(x)}{4} + o(\sinh^4(x))
$$

Possiamo ora usare l'esercizio 7.2 per sviluppare $\sinh(x)$ fino al quarto ordine all'interno dell'espressione precedente

$$
\begin{aligned}
\log(1+\sinh(x)) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 - \\
- \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o\left(\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4\right)
\end{aligned}
$$

Espandendo le potenze di trinomio otteniamo, sfruttando le proprietà dei simboli di Landau,

$$
\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^8) + \frac{x^4}{3} + o(x^5) + o(x^7) = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)
$$

$$
\begin{aligned}
\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 &= (x + o(x^4))^3 + \frac{x^9}{6^3} + \frac{x^6}{12}(x + o(x^4)) + \frac{x^3}{2}(x + o(x^4))^2 = \\
&= x^3 + o(x^{12}) + o(x^9) + o(x^6) + \frac{x^9}{6^3} + o(x^7) + o(x^{10}) + \frac{x^5}{2} + \\
&+ o(x^{11}) + o(x^8) = x^3 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

e infine

$$
\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 = x^4 + o(x^4)
$$

Quindi

$$\begin{aligned}\log(1+\sinh(x)) &= x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}+o(x^4)+\frac{x^3}{3}+o(x^4)-\frac{x^4}{4}+o(x^4)=\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}f(x)=\log(1+\sinh(x))-x &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)-x=\\ &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.4. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\arctan(x)-x\sqrt[3]{1+3x}}{x^3}$$

Soluzione. In questo caso utilizziamo lo sviluppo di Taylor per calcolare il limite, in quanto ci consentono di stimare il comportamento di una funzione in un intorno di un punto (in questo caso di 0) con polinomi, che sono semplici da maneggiare.
Poiché a denominatore abbiamo il monomio x^3, a numeratore andremo a sviluppare con Taylor fino al terzo ordine: infatti, gli ordini superiori a 3 una volta divisi per x^3 tenderanno a 0 per $x\to 0$, e quindi non influiranno sul limite. Ci ricordiamo quindi che

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

e calcoliamo gli altri sviluppi:

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan(0)+\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0}x-\left.\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}\frac{x^2}{2}-\\ &-\left.\left(\frac{2}{(1+x^2)^2}-2\frac{(2x)^2}{(1+x^2)^3}\right)\right|_{x=0}\frac{x^3}{6}+o(x^3)=\\ &= x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+3x} &= \sqrt[3]{1+0}+\left.\frac{1}{3}3(1+3x)^{-\frac{2}{3}}\right|_{x=0}x-\left.\frac{2}{3}3(1+3x)^{-\frac{5}{3}}\right|_{x=0}\frac{x^2}{2}+\\ &+2\frac{5}{3}3(1+3x)^{-\frac{8}{3}}\frac{x^3}{6}+o(x^3)=\\ &= 1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

A questo punto possiamo calcolare lo sviluppo di Taylor del numeratore semplicemente effettuando i prodotti:

$$\begin{aligned}
e^x \arctan(x) - x\sqrt[3]{1+3x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \\
&- x\left(1 + x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \\
&= x - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x - x^2 + x^3 + o(x^3) = \\
&= \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan(x) - x\sqrt[3]{1+3x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \frac{7}{6} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{7}{6}$$

□

Esercizio 7.5. *Determinare il valore dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[x]{x} + \frac{\sqrt[x]{x}}{x}\right)^x + \alpha x + \beta = 0$$

Soluzione. Innanzitutto, notiamo che la funzione di cui stiamo cercando di calcolare il limite è ben definita se $x \in [0, +\infty)$; inoltre, la possiamo riscrivere come

$$\left(\sqrt[x]{x} + \frac{\sqrt[x]{x}}{x}\right)^x + \alpha x + \beta = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + \alpha x + \beta$$

Sappiamo che (cfr. Definizione 4.3)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

e di conseguenza ci si potrebbe aspettare che per $\alpha = -e$, $\beta = 0$ si ottenga il risultato desiderato. *Questo è tuttavia falso*: infatti per $\alpha = -e$ otteniamo una forma indeterminata $\infty - \infty$, e bisogna quindi agire diversamente.
Possiamo effettuare i seguenti passaggi:

$$x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + \alpha x + \beta = xe^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \alpha x + \beta$$

Notiamo che effettuando la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ abbiamo che $t \to 0^+$ per $x \to +\infty$; possiamo quindi considerare lo sviluppo di Taylor di $\log(1+t)$ in un intorno di $t = 0$:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

e di conseguenza abbiamo che

$$
\begin{aligned}
& xe^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \alpha x + \beta = xe^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)} + \alpha x + \beta = \\
& = xe^{\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} + \alpha x + \beta = exe^{\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} + \alpha x + \beta
\end{aligned}
$$

per $x \to +\infty$. Notiamo che $\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \to 0$ per $x \to +\infty$, e quindi effettuando la sostituzione $\xi = \left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ possiamo usare lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale per scrivere

$$
\begin{aligned}
& exe^{\xi} + \alpha x + \beta = ex\left(1+\xi+\frac{\xi^2}{2}+o(\xi^2)\right) + \alpha x + \beta = \\
& = (e+\alpha)x + \beta + ex\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\
& = (e+\alpha)x + \beta - \frac{e}{2} + \frac{11e}{24x} + exo\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

Quindi per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{x}+\frac{\sqrt[x]{x}}{x}\right)^x + \alpha x + \beta = \lim_{x\to+\infty}(e+\alpha)x + \beta - \frac{e}{2} + \frac{11e}{24x} + exo\left(\frac{1}{x^2}\right)
$$

Notiamo che, come abbiamo ipotizzato inizialmente, se $\alpha = -e$ eliminiamo la divergenza, e di conseguenza possiamo sperare che il limite sia finito; in questo caso avremo

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{x}+\frac{\sqrt[x]{x}}{x}\right)^x + \alpha x + \beta = \lim_{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\beta - \frac{e}{2} + \frac{11e}{24x} + exo\left(\frac{1}{x^2}\right) = \beta - \frac{e}{2}
$$

Quindi affinché il limite sia 0 è necessario che $\beta = \frac{e}{2}$. □

Esercizio 7.6. *Calcolare, data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$
f(x) = 2x - x^3\cos(2x) + |x|\, x^5 e^{-x}\cos(x)
$$

il valore di $f^{(5)}(0)$.

Soluzione. Dal teorema 7.2 sappiamo che il polinomio di Taylor di f di centro $x_0 = 0$ e di ordine n è dato da

$$
P(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + o(x^n)
$$

Pertanto se riusciamo a determinare il coefficiente c_5 del monomio x^5 del polinomio di Taylor di f, abbiamo che
$$f^{(5)}(0) = 5!c_5$$
Possiamo determinare agilmente il polinomio di Taylor di f usando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari:

$$\underbrace{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}_{(7.2)} \qquad \underbrace{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1})}_{(7.3)}$$

Sostituendo $(x)t = 2x$, $u(x) = -x$ abbiamo che $t, u \to 0$ per $x \to 0$; quindi usando gli sviluppi (7.2) e (7.3) vale che, in un intorno di 0,

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x - x^3 \left(1 - \frac{t^2(x)}{2} + o(t^2(x))\right) + |x|\, x^5 \left(1 + u(x) + o(u(x))\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \\
&= 2x - x^3 \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) + \underbrace{|x|\, x^5 \left(1 - x + o(x)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}_{|x| x^5 + o(x^5)} = \\
&= 2x - x^3 + 2x^5 + o(x^5) + |x|\, x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Notiamo che $|x|\, x^5$ è un o-piccolo di x^5 per $x \to 0$: infatti,

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|\, x^5}{x^5} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

e quindi
$$f(x) = 2x - x^3 + 2x^5 + o(x^5)$$
Pertanto sappiamo che $c_5 = 2$, e di conseguenza

$$f^{(5)}(0) = 5!c_5 = 240$$

□

8 Lezione 8

8.1 Ripasso: massimi e minimi locali, punti stazionari

Definizione 8.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$; $x \in [a,b]$ è un punto di *minimo locale* per f se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(t) \text{ per ogni } t \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$$

Analogamente, diremo che x è un punto di *massimo locale* per f se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(t) \text{ per ogni } t \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$$

Teorema 8.1 (di Fermat)**.** *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ha un punto di minimo o massimo locale in x e f è derivabile in x, allora x è un* punto stazionario*, ossia $f'(x) = 0$.*

Osservazione. Osserviamo che l'enunciato del teorema è il seguente:

x punto di minimo o massimo per f e f derivabile in $x \implies f'(x) = 0$

che è equivalente a

f derivabile in x e $f'(x) \neq 0 \implies x$ non è punto di minimo o massimo locale per f

Questo significa che

(i) *se f non è derivabile in x allora f potrebbe avere un minimo o massimo locale in x*: consideriamo ad esempio la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|$, che possiamo scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che f è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Per il teorema 8.1 vale dunque che nessun punto di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ può essere un punto di minimo/massimo locale. Consideriamo quindi $x = 0$: sappiamo che

$$f(x) = |x| \geq 0 = |0| = f(0) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

ossia $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. 0 è quindi un punto di minimo *globale* per f (e di conseguenza locale).

(ii) *Se f è derivabile in x, $f'(x) = 0$ è condizione necessaria ma non sufficiente affinché x sia un punto di massimo/minimo globale*: consideriamo ad esempio $f(x) = x^3$; vale che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, e che $f'(x) = 3x^2$. Di conseguenza $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con l'uguaglianza verificata se e solo se $x = 0$. Di conseguenza l'unico punto che può essere massimo o minimo locale è $x = 0$. Consideriamo quindi un generico $\delta > 0$, e consideriamo l'intervallo $(-\delta, \delta)$: esistono due punti, $-\frac{\delta}{2}$ e $\frac{\delta}{2}$, tali che
$$f\left(-\frac{\delta}{2}\right) = -\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 < f(0) \qquad f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 > f(0)$$
Di conseguenza x non è né un punto di minimo, né un punto di massimo locale.

Teorema 8.2 (di Lagrange)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e differenziabile in (a,b); allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che*
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Corollario 8.1. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e differenziabile in (a,b), tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora f è costante su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Consideriamo $x \in (a,b]$, e consideriamo la restrizione della funzione f all'intervallo $[a,x]$:
$$f|_{[a,x]}\colon [a,x] \to \mathbb{R}$$
Dato che f è continua in $[a,b]$ allora $f|_{[a,x]}$ è continua in $[a,x]$, e dato che f è differenziabile in (a,b) allora $f|_{[a,x]}$ è differenziabile in (a,x). Possiamo quindi applicare il teorema di Lagrange 8.2: esiste $\xi \in (a,x)$ tale che
$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$$
Ma per ipotesi $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in (a,b)$; quindi in conclusione abbiamo che
$$f(x) - f(a) = 0 \iff f(x) = f(a)$$
Poiché $x \in (a,b]$ è generico, vale che $f(x) = f(a)$ per ogni $x \in [a,b]$, ossia f è costante su $[a,b]$. $\square$

Osservazione. Attenzione alle ipotesi del teorema: chiediamo che f sia definita su di un intervallo, ossia un insieme connesso. Infatti, in generale se $f' \equiv 0$ diremo che f è localmente costante.
Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ definita su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; vogliamo capire se f sia o meno costante.
Notiamo che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, con
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{(x+1)^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}\left(\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2x^2+2} = 0 \end{aligned}$$

Quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Possiamo concludere che f è costante? No, perché l'insieme di definizione di f non è un intervallo! Il suo dominio è dato da $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, ossia è l'unione di due intervalli aperti (connessi).
Infatti, se consideriamo

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

e teniamo a mente che

$$\lim_{x \to -1^-} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \overset{t=x+1}{=} \lim_{t \to 0^-} \arctan\left(\frac{-2+t}{t}\right) = \lim_{t \to 0^-} \arctan\left(1 - \frac{2}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

e che

$$\lim_{x \to -1^+} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \overset{t=x+1}{=} \lim_{t \to 0^+} \arctan\left(\frac{-2+t}{t}\right) = \lim_{t \to 0^+} \arctan\left(1 - \frac{2}{t}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

otteniamo che i due limiti precedenti valgono

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \overset{\text{Th. 4.2}}{=} -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{4}\pi$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \overset{\text{Th. 4.2}}{=} -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

A questo punto, se definiamo la funzione

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) & x > -1 \\ \frac{\pi}{4} & x = -1 \end{cases}$$

otteniamo una funzione definita su $[-1, +\infty)$ che è continua in $[-1, +\infty)$ e differenziabile in $(1, +\infty)$. Se consideriamo un qualsiasi $x \in (1, +\infty)$ e consideriamo la restrizione $\widehat{f}\colon [-1, x] \to \mathbb{R}$ abbiamo che questa funzione soddisfa le ipotesi del corollario 8.1; pertanto $\widehat{f}$ è costante su $[-1, x]$, e quindi $f(x) = \widehat{f}(x) = \frac{\pi}{4}$. Poiché $x \in (-1, +\infty)$ è generico vale che $f(x) = \frac{\pi}{4}$ per ogni $x > -1$. Allo stesso modo, se consideriamo l'estensione

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} \arctan(x) - \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) & x < -1 \\ -\dfrac{3}{4}\pi & x = -1 \end{cases}$$

otteniamo che $f(x) = -\frac{3}{4}\pi$ per ogni $x < -1$. Quindi f è separatamente costante su $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$.

8.2 Ripasso: teorema di Weierstraß

Teorema 8.3. *Data $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, allora f ammette massimo e minimo globali in $[a, b]$.*

Osservazione. È fondamentale che l'insieme di definizione della funzione sia un intervallo chiuso oppure un unione finita di intervalli chiusi.

8.3 Esercizi: teoremi di Weierstraß e di Lagrange

Esercizio 8.1. *Sia* $F: [-1,1] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $\{-1,1\}$ *e tale che*

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \tag{8.1}$$

Determinare il comportamento di F *su* $[-1,1]$ *(i.e. trovare, se esistono, massimi e minimi, locali o globali).*

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che le ipotesi implicano che F sia continua in $[-1,1]$: infatti F è derivabile in $(-1,1)$, come si evince dalla (8.1), e per il teorema 6.3 vale quindi che F è continua in $(-1,1)$. Dato che per ipotesi F è anche continua in $\{-1,1\}$ allora F è continua in $[-1,1]$. Per il teorema di Weierstraß F ammette quindi massimo e minimo globali in $[-1,1]$. Per capire quali punti siano massimo e minimo globali, dobbiamo studiare la derivata prima (8.1). Notiamo che $F'(x) < 0$ per ogni $x \in (-1,1)$; pertanto per il teorema di Fermat 8.1 abbiamo che nessun punto in $(-1,1)$ può essere un punto di minimo/massimo locale (e quindi globale), e di conseguenza questi sono da cercarsi fra gli estremi $\{-1,1\}$. Per capire quale dei due sia il massimo e quale sia il minimo, notiamo che $F'(x) < 0$ in $(-1,1)$, e quindi F è monotona decrescente in $(-1,1)$; la nostra ipotesi è quindi che -1 sia punto di massimo globale e 1 sia punto di minimo globale.
Per dimostrarlo, operiamo nel modo seguente: consideriamo un generico $x \in (-1,1]$, e consideriamo la restrizione

$$F|_{[-1,x]}: [-1,x] \to \mathbb{R}$$

Poiché F è continua in $[-1,1]$ e differenziabile in $(-1,1)$, $F|_{[-1,x]}$ è continua in $[-1,x]$ e differenziabile in $(-1,x)$: vale pertanto il teorema di Lagrange 8.2, ossia esiste $\xi \in (-1,x)$ tale che

$$F(x) - F(-1) = \overbrace{F'(\xi)}^{<0 \text{ per } (8.1)} \qquad \underbrace{(x+1)}_{x\in(-1,1] \implies x>-1 \iff x+1>0}$$

Come indicato, $F'(\xi) < 0$, dato che dall'espressione della derivata prima (8.1) vediamo che $F'(x) < 0$ per ogni $x \in (-1,1)$, e $x+1 > 0$ dato che $x \in (-1,1]$. Di conseguenza

$$F(x) - F(-1) < 0 \iff F(x) < F(-1)$$

Poiché $x \in (-1,1]$ è generico vale che $F(x) \leq F(-1)$ per ogni $x \in [-1,1]$, ossia -1 è punto di massimo globale per F. Quindi 1 è invece punto di minimo globale per F. □

Esercizio 8.2. *Data* $f(x) = 3x - 1 - \cos(x)$*, determinare il numero di zeri di* f*.*

Soluzione. Notiamo innanzitutto che f ammette almeno uno zero: infatti f è somma di funzioni continue, ed è pertanto continua; inoltre,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x - 1 - \cos(x)) = +\infty$$

in quanto $3x - 1 - \cos(x) \geq 3x - 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dato che $3x - 2 \to +\infty$ allora $3x - 1 - \cos(x) \to +\infty$ per il teorema del confronto, e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (3x - 1 - \cos(x)) = -\infty$$

per un ragionamento analogo. Per il teorema dei valori intermedi 5.3 vale quindi che esiste almeno un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$. Dimostriamo che è unico.
Supponiamo per assurdo che esista $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_0$ tale che $f(x_1) = 0$. Possiamo supporre che $x_0 < x_1$; se consideriamo $f|_{[x_0,x_1]} \colon [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, questa è una funzione continua in $[x_0, x_1]$, essendo restrizione di una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, e differenziabile in (x_0, x_1), essendo restrizione di una funzione differenziabile su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo quindi applicare il teorema di Lagrange 8.2: esiste $\xi \in (x_0, x_1)$ tale che

$$f'(\xi)(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0) = 0$$

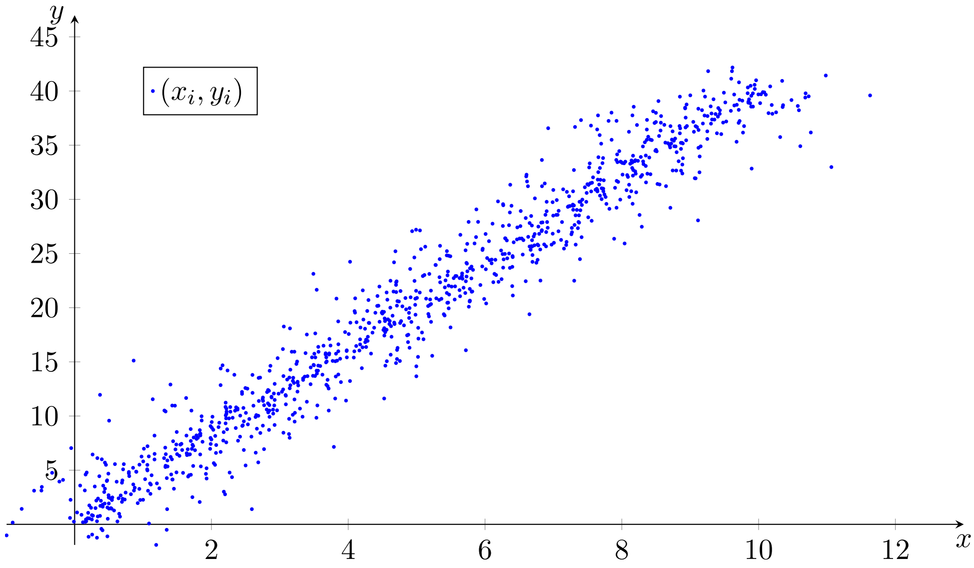
Notiamo che $x_1 - x_0 \neq 0$ visto che abbiamo supposto $x_1 \neq x_0$; di conseguenza abbiamo concluso che esiste $\xi \in (x_0, x_1)$ tale che $f'(\xi) = 0$. Calcoliamo quindi f':

$$f'(x) = 3 + \sin(x) \geq 2 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza abbiamo un assurdo: concludiamo quindi che l'ipotesi iniziale, ovvero l'esistenza di $x_1 \neq x_0$ tale che $f(x_1) = 0$, è errata, e quindi f ammette un unico zero. $\square$

8.4 Applicazione: regressione lineare

La ricerca di minimi e massimi globali o locali di funzioni (un processo detto *ottimizzazione*) ha numerose applicazioni in scienze più applicative, come ad esempio l'ingegneria, la chimica, e anche l'informatica: ad esempio in machine learning i parametri delle reti neurali sono ottenuti minimizzando delle funzioni, dette *loss functions*.
Come esempio di un processo di ottimizzazione, presentiamo la cosiddetta *regressione lineare*.
Supponiamo di fare un qualche esperimento, per esempio di voler misurare una grandezza fisica y che dipende da un'altra grandezza fisica x; noi variamo x in un insieme finito e discreto di valori $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ e misuriamo i valori $\{y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n\}$ della grandezza fisica y. Possiamo costruire delle coppie (x_i, y_i) che associano ad ogni valore della grandezza x su cui abbiamo controllo il corrispettivo valore della grandezza y, e possiamo poi rappresentare le coppie ottenute nel piano cartesiano, ottenendo il grafico seguente:



Sembrerebbe che i punti siano disposti, modulo fluttuazioni, linearmente; possiamo quindi ipotizzare che la grandezza y dipenda linearmente dalla grandezza x, ossia $y = ax$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. Come facciamo a trovare, dati i nostri punti sperimentali $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ il valore di a "ottimale"?
Possiamo agire nel modo seguente: se supponiamo che la relazione lineare sia vera, allora il valore predetto per un valore x_i risulta essere ax_i, e il valore che invece noi abbiamo misurato è y_i. Possiamo quindi considerare la "distanza" fra il valore misurato e il valore predetto

$$y_i - ax_i$$

e sommare tutte queste distanze, ottenendo una funzione del parametro che cerchiamo:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)$$

Il problema di questa funzione però è che tiene conto del segno della distanza, e quindi ci potrebbero essere cancellazioni di varia natura che alterano il comportamento di f desiderato. Per mantenere la differenziabilità consideriamo quindi

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2$$

Questa funzione risolve il problema delle cancellazioni, è differenziabile su tutto $\mathbb{R}$ ed inoltre ha il beneficio di "pesare" in modo diverso le distanze.
Vogliamo ora trovare il valore di a che minimizza questa funzione, ossia che minimizza la somma degli scarti quadratici fra i valori misurati e i valori predetti da un dato modello. Poiché f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}$ possiamo applicare il teorema di Fermat 8.1: sappiamo

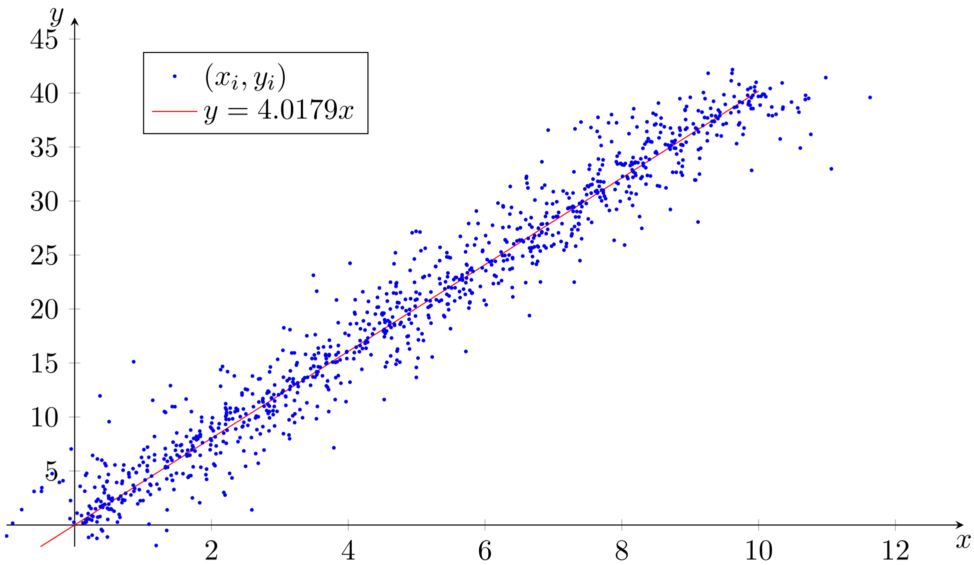
che affinché un punto sia un minimo è necessario che questo sia un punto stazionario di f: consideriamo quindi

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i)x_i = -2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

e vediamo che l'unico zero della derivata prima è dato da

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

È facile verificare che a è effettivamente un punto di minimo; nel caso della point cloud nella figura precedente la retta di regressione ottenuta è la seguente:



Osservazione. Osserviamo che dati i punti sperimentali $\{(x_i, y_i)\}_{1\le i\le n}$, questi possono essere pensati come due vettori in $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \qquad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$$

Vogliamo cercare il vettore nel sottospazio generato da $\mathbf{x}$ che minimizza la distanza (al quadrato) fra tale vettore e $\mathbf{y}$. Ricordiamo che

$$\mathrm{Span}(\mathbf{x}) = \{a\mathbf{x},\ a \in \mathbb{R}\}$$

Quindi cerchiamo il vettore $a\mathbf{x} \in \mathrm{Span}(\mathbf{x})$ che minimizza

$$\|\mathbf{y} - a\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + a^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

ove $(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. Minimizzando come visto a lezione otteniamo che il valore a_0 che minimizza $\|\mathbf{y} - a\mathbf{x}\|^2$ soddisfa

$$-2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 2a_0(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \iff a_0 = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

Notiamo due cose:

(i) l'espressione che abbiamo ottenuto a lezione è la stessa che abbiamo ottenuto ora: infatti,

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

e quindi

$$a_0 = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(ii) L'a_0 così ottenuto ha un'interpretazione geometrica: infatti è il coefficiente di $\mathbf{x}$ quando effettiamo la proiezione ortogonale di $\mathbf{y}$ lungo $\mathbf{x}$. Dato $W = \mathrm{Span}(\mathbf{x})$, sappiamo che $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$, e quindi possiamo decomporre

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^\perp + k\mathbf{x}$$

Poiché $\mathbf{y}^\perp \in W^\perp$, abbiamo che $(\mathbf{y}^\perp, \mathbf{x}) = 0$, e quindi

$$k = \frac{(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}^2\|}$$

Denotando con $P_\mathbf{x}\colon \mathbb{R}^n \to W$ l'operatore (lineare) di proiezione abbiamo

$$P_\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}$$

Quindi la regressione lineare coincide con il coefficiente del vettore in $\mathrm{Span}(\mathbf{x})$ dato dal proiettore ortogonale $P_\mathbf{x}$; tale vettore è il vettore di $\mathrm{Span}(\mathbf{x})$ che minimizza la distanza tra $\mathbf{y}$ e $\mathrm{Span}(\mathbf{x})$ come visto prima.
Si può dare anche una dimostrazione prettamente geometrica di questo fatto: se esistesse $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathrm{Span}(\mathbf{x})$ diverso da $P_\mathbf{x}(\mathbf{y})$ tale che

$$\|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{x}}\| \leq \left\|\mathbf{y} - P_\mathbf{x}(\mathbf{y})\right\|$$

allora avremmo

$$\|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{y} - P_\mathbf{x}(\mathbf{y})}_{\text{ortogonale a Span}(\mathbf{x})} + P_\mathbf{x}(\mathbf{y}) - \widehat{\mathbf{x}}\|^2 = \left\|\mathbf{y} - P_\mathbf{x}(\mathbf{y})\right\|^2 + \left\|P_\mathbf{x}(\mathbf{y}) - \widehat{\mathbf{x}}\right\|^2 >$$
$$> \left\|\mathbf{y} - P_\mathbf{x}(\mathbf{y})\right\|^2$$

ove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che

$$\widehat{\mathbf{x}} - P_\mathbf{x}(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0} \implies \left\|\widehat{\mathbf{x}} - P_\mathbf{x}(\mathbf{y})\right\| \neq 0$$

Quindi effettivamente $P_\mathbf{x}(\mathbf{y})$ minimizza la distanza fra $\mathbf{y}$ e $\mathrm{Span}(\mathbf{x})$.

8.5 Ripasso: funzioni Lipschitz continue

Definizione 8.2. Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, diremo che f è *Lipschitz (continua)* se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq L|x-y| \text{ per ogni } x, y \in [a,b]$$

Osservazione. Notiamo che se una funzione è Lipschitz continua, allora è continua: infatti fissiamo $x_0 \in [a,b]$ e consideriamo il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e consideriamo

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \overset{\text{Def. 8.2}}{\leq} L|x - x_0|$$

Se consideriamo quindi $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$ abbiamo che

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \leq L|x - x_0| < \varepsilon$$

se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, ossia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Poiché $x_0 \in [a,b]$ è generico vale che f è continua in $[a,b]$.

Teorema 8.4. *Se $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è differenziabile in (a,b) e se esiste $M > 0$ tale che $\left|f'(x)\right| \leq M$ per ogni $x \in (a,b)$, allora f è Lipschitz continua.*

Dimostrazione. Dati due punti qualsiasi $x, y \in (a,b)$, sappiamo che la restrizione $f|_{[x,y]}$ è continua in $[x,y]$, essendo f differenziabile in (a,b), ed è inoltre differenziabile in (x,y); possiamo quindi applicare il teorema di Lagrange 8.2 per dire che esiste $\xi \in (x,y)$ tale che

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) \iff \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi)$$

Prendendo il modulo di ambo i membri otteniamo

$$\frac{\left|f(y) - f(x)\right|}{|y-x|} = \left|f'(\xi)\right| \leq M \iff \left|f(y) - f(x)\right| \leq M|y-x|$$

Poiché questo vale per ogni $x, y \in (a,b)$ abbiamo l'asserto. □

Osservazione. Notiamo che vale anche l'implicazione seguente: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è differenziabile in (a,b) ed è Lipschitz continua, allora esiste $L > 0$ tale che $\left|f'(x)\right| \leq L$ per ogni $x \in (a,b)$: infatti fissato $x \in (a,b)$ sappiamo che

$$0 \leq \left|\phi_x(t)\right| = \left|\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\right| \overset{\text{Def. 8.2}}{\leq} L\frac{|t-x|}{|t-x|} = L$$

Per il teorema del confronto 4.5 vale quindi che

$$\left|f'(x)\right| \leq L$$

Poiché $x \in (a,b)$ è generico l'asserto vale.

Osservazione. Nel caso in cui la funzione f soddisfi le ipotesi del teorema 8.4, possiamo dire di più: vale che la costante di Lipschitz ottimale è data da

$$L = \sup_{x\in(a,b)} \left|f'(x)\right|$$

Infatti, notiamo che per ogni $x \in (a,b)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ tale che

$$\left|f(t) - f(x)\right| < (L+\varepsilon)|t-x| \text{ se } |t-x| < \delta_{\varepsilon,x}$$

Consideriamo ora $x, y \in (a,b)$, e un generico $\varepsilon > 0$; poiché l'insieme (a,b) è convesso, l'elemento $x_t = (1-t)x + ty$ appartiene ad (a,b). Consideriamo quindi l'insieme

$$S_\varepsilon = \left\{t \in [0,1] \colon \left|f(x_s) - f(x)\right| \leq (L+\varepsilon)|x_s - x|\, \forall s \in [0,t]\right\}$$

Notiamo che $S_\varepsilon \neq \varnothing$, dato che per quanto visto prima esiste sicuramente $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ tale per cui se

$$|x_s - x| = s|y-x| < \delta_{\varepsilon,x} \iff s < \frac{\delta_{\varepsilon,x}}{|y-x|}$$

la disuguaglianza è soddisfatta. Inoltre, S_ε è limitato dall'alto da 1; pertanto per il teorema 2.1 S_ε ammette un estremo superiore $\widehat{t} = \sup S_\varepsilon$. Notiamo che $\widehat{t}$ è in realtà $\max S_\varepsilon$, in quanto S_ε è un insieme chiuso, e che S_ε ha la forma $[0,\widehat{t}]$.
Chiaramente $x_{\widehat{t}} \in (a,b)$, e pertanto esiste $\delta_{\varepsilon,x_{\widehat{t}}} > 0$ tale che

$$\left|f(y) - f(x_{\widehat{t}})\right| < (L+\varepsilon)\left|y - x_{\widehat{t}}\right| \text{ se } \left|y - x_{\widehat{t}}\right| < \delta_{\varepsilon,x_{\widehat{t}}}$$

Vogliamo mostrare che $\widehat{t} = 1$; in questo modo infatti avremmo che la disuguaglianza che definisce S_ε vale anche per x, y, i.e.

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leq (L+\varepsilon)|y-x| \;\; \forall x, y \in (a,b),\; \forall \varepsilon > 0$$

Per mostrarlo, consideriamo $\widehat{t} + \frac{\delta_{\varepsilon,x_{\widehat{t}}}}{|y-x|} \geq s \geq \widehat{t}$; vale che

$$\begin{aligned}\left|f(x_s) - f(x)\right| &\leq \left|f(x_s) - f(x_{\widehat{t}})\right| + \left|f(x_{\widehat{t}}) - f(x)\right| < (L+\varepsilon)\left|x_s - x_{\widehat{t}}\right| + (L+\varepsilon)\left|x_{\widehat{t}} - x\right| = \\ &= (L+\varepsilon)(s - \widehat{t})|y-x| + (L+\varepsilon)\widehat{t}|y-x| = (L+\varepsilon)s|y-x| = (L+\varepsilon)|x_s - x|\end{aligned}$$

Quindi se supponiamo che $\widehat{t} < 1$, seguendo il ragionamento sopra illustrato riusciamo a dimostrare che esiste $\tilde{t} > \widehat{t}$ tale che

$$\left|f(x_s) - f(x)\right| \leq (L+\varepsilon)|x_s - x| \;\; \forall s \in [0,\tilde{t}]$$

Quindi in realtà $\widehat{t}$ non è l'estremo superiore di S_ε. Di conseguenza vale che $\sup S_\varepsilon = 1$. Abbiamo quindi concludo che per ogni $x, y \in (a,b)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leq (L+\varepsilon)|y-x|$$

Poiché questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo concludere che

$$\big|f(y) - f(x)\big| \leq L|y - x| \ \ \forall x, y \in (a, b)$$

ossia $L = \sup_{x\in(a,b)}\big|f'(x)\big|$ è una costante di Lipschitz per f; il fatto che sia ottimale discende dal fatto che data una qualsiasi costante di Lipschitz K, per l'osservazione precedente vale che

$$\big|f'(x)\big| \leq K$$

e di conseguenza $L \leq K$

8.6 Esercizi: funzioni Lipschitz continue

Esercizio 8.3. *Dimostrare che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è Lipschitz continua.

Dimostrazione. Dall'esempio successivo al teorema 6.2 sappiamo che f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e che

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Per provare che f è Lipschitz possiamo quindi sfruttare il teorema 8.4, e mostrare che

$$\big|f'(x)\big| \leq M \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Concentriamoci sul caso $x \neq 0$. Dobbiamo mostrare che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq M \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

A questo scopo, consideriamo l'espressione a sinistra del segno di disuguaglianza: vale che

$$\left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 2\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 2\underbrace{\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}_{g(x)} + 1$$

Concentriamoci sulla funzione $g(x)$: notiamo innanzitutto che è pari, e di conseguenza possiamo restringerci allo studio del suo comportamento in $\mathbb{R}^+$. Vale che

$$0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

e per il teoremi 4.6 e 4.5 abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \tag{8.2}$$

Per quanto riguarda invece il comportamento asintotico, vale che

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \tag{8.3}$$

Consideriamo la definizione di limite 5.1 per (8.2): vale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \epsilon \text{ se } |x| < \delta_\varepsilon$$

Allo stesso modo, se consideriamo (8.3) vale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1 - \varepsilon \text{ se } x > N_\varepsilon$$

Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$, ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e consideriamo l'intervallo chiuso $[\delta_\varepsilon, N_\varepsilon]$; poiché g è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora la restrizione di g a tale intervallo sarà continua, e per il teorema di Weierstraß g ammette massimo M e minimo m globali in $[\delta_\varepsilon, N_\varepsilon]$. Quindi abbiamo che

$$\left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \begin{cases} \dfrac{1}{2} & x \in (0, \delta_\varepsilon) \\ \max\left\{|M|, |m|\right\} & x \in [\delta_\varepsilon, N_\varepsilon] \\ \dfrac{1}{2} & x > N_\varepsilon \end{cases}$$

Di conseguenza se scegliamo

$$L = \max\left\{\frac{1}{2}, |M|, |m|\right\}$$

abbiamo che

$$\left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le L \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^+$$

e per parità la maggiorazione vale per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Quindi

$$\left|f'(x)\right| = \left| 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 2L + 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e per il teorema 8.4 possiamo concludere che f è Lipschitz. □

Esercizio 8.4. *Dimostrare che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

non è Lipschitz continua.

Soluzione. Innanzitutto mostriamo che f è derivabile su $\mathbb{R}$. Chiaramente f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, essendo prodotto e composizione di funzioni differenziabili, e la sua derivata prima in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è data da

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x}$$

Per quanto riguarda la differenziabilità in 0, come nel caso della funzione dell'esercizio 8.3 consideriamo il rapporto incrementale

$$\phi_0(t) = \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

e osserviamo che

$$0 \leq \left| t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \right| \leq |t| \text{ per ogni } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e di conseguenza per i teoremi 4.6 e 4.5 vale che

$$\lim_{t \to 0} \phi_0(t) = 0$$

Di conseguenza f è differenziabile su $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Vogliamo ora capire il comportamento di $f'(x)$ in prossimità di 0. Notiamo che se consideriamo la successione

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{(2k+1)\pi}}$$

e valutiamo $f'(a_n)$ otteniamo

$$f'(a_n) = 2\sqrt{\frac{1}{(2k+1)\pi}} \sin((2k+1)\pi) - 2\cos((2k+1)\pi)\sqrt{(2k+1)\pi} = 2\sqrt{(2k+1)\pi}$$

Ciò significa che avvicinandoci all'origine riusciamo a trovare dei punti in cui f è derivabile e in cui la sua derivata prima assume valori arbitrariamente grandi; di conseguenza non esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\left| f'(x) \right| \leq M \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza per l'osservazione in seguito al teorema 8.4 f non è Lipschitz continua. $\square$

9 Lezione 9

9.1 Approfondimento: formula di Taylor con resto di Lagrange

Teorema 9.1. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che la derivata n-esima $f^{(n)}$ sia continua su $[a,b]$ e tale che $f^{(n+1)}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sia ben definita. Siano $\alpha, \beta \in [a,b]$ con $\alpha < \beta$; definiamo come in* (7.1) *il polinomio di Taylor $P(x)$ di grado n e centro α,*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$$

Allora esiste $\xi \in (\alpha, \beta)$ tale che

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!}(\beta-\alpha)^{n+1}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, consideriamo la seguente equazione in $k \in \mathbb{R}$:

$$f(\beta) = P(\beta) + k(\beta-\alpha)^{n+1} \tag{9.1}$$

Notiamo che dato che $\beta \neq \alpha$ questa ammette una soluzione $\overline{k}$, ossia esiste $\overline{k} \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(\beta) - P(\beta) - \overline{k}(\beta-\alpha)^{n+1} = 0 \tag{9.2}$$

Per dimostrare il teorema è quindi sufficiente dimostrare che

$$\overline{k} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

per qualche $\xi \in (\alpha, \beta)$. A questo scopo, definiamo la funzione $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(t) - P(t) - \overline{k}(t-\alpha)^{n+1}$$

Dato che $f \in \mathscr{C}^n([a,b])$, allora $g \in \mathscr{C}^n([a,b])$ (i.e. $g^{(n)}$ è continua su $[a,b]$, e quindi esistono e sono continue le derivate precedenti), e inoltre $g^{(n+1)}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è ben definita. Notiamo che, poiché $P(t)$ è un polinomio di grado n, $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}P(t) = 0$; pertanto

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \overline{k}(n+1)!$$

Inoltre, vale che $g^{(i)}(\alpha) = 0$ per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$: infatti,

$$g^{(i)}(\alpha) = f^{(i)}(\alpha) - \frac{d^i}{dt^i}P(t)\bigg|_{t=\alpha} - \overline{k}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(t-\alpha)^{n+1-k}\bigg|_{t=\alpha}$$

Notiamo che

$$\frac{d^i}{dt^i}P(t)\bigg|_{t=\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\frac{d^i}{dt^i}(t-\alpha)^k\bigg|_{t=\alpha}$$

ove

$$\frac{d^i}{dt^i}(t-\alpha)^k = \begin{cases} 0 & k < i \\ i! & k = i \\ \dfrac{k!}{(k-i)!}(t-\alpha)^{k-i} & k > 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{d^i}{dt^i}P(t)\bigg|_{t=\alpha} = f^{(i)}(\alpha) + \sum_{k=i+1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^{k-i}\bigg|_{t=\alpha} = f^{(i)}(\alpha)$$

dato che

$$(\alpha-\alpha)^{k-i} = 0 \text{ per } k > i$$

Concludiamo che

$$g^{(i)}(\alpha) = f^{(i)}(\alpha) - f^{(i)}(\alpha) = 0$$

per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$.
Sappiamo che $g|_{[\alpha,\beta]} \colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ è continua e differenziabile in (α,β), e che $g(\alpha) = 0$; inoltre,

$$g(\beta) = f(\beta) - P(\beta) - \overline{k}(\beta-\alpha)^{n+1} \overset{(9.2)}{=} 0$$

Pertanto per il Teorema di Lagrange 8.2 esiste $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ tale che $g'(\xi_1) = 0$. Allo stesso modo, sappiamo che $g'|_{[\alpha,\xi_1]} \colon [\alpha,\xi_1] \to \mathbb{R}$ è continua e differenziabile in (α,ξ_1), e che $g'(\alpha) = g'(\xi_1) = 0$, Quindi nuovamente grazie al teorema di Lagrange troviamo $\xi_2 \in (\alpha,\xi_1) \subseteq (\alpha,\beta)$ tale che $g''(\xi_2) = 0$. Procedendo in questo modo troviamo quindi una famiglia $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ tale che $g^{(i)}(\xi_i) = 0$; in particolare quindi troviamo $g^{(n)}(\xi_n) = 0$. A questo punto sappiamo che $g^{(n)}|_{[\alpha,\xi_n]} \colon [\alpha,\xi_n] \to \mathbb{R}$ è continua e differenziabile in (α,ξ_n), e vale che $g^{(n)}(\xi_n) = g^{(n)}(\alpha) = 0$. Quindi applicando un'ultima volta il teorema di Lagrange otteniamo $\xi \in (\alpha,\xi_n) \subseteq (\alpha,\beta)$ tale che $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Ma

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \overline{k}(n+1)!$$

ossia $\overline{k} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ per qualche $\xi \in (\alpha,\beta)$. L'asserto è quindi dimostrato. □

Il teorema 9.1 è importante perché ci consente di stimare l'errore che commettiamo approssimando il valore della funzione in un punto β con il valore del polinomio di Taylor di grado n centrato in un altro punto α.

Esempio. Supponiamo di voler calcolare il valore di $\sqrt{e}$ con una certa precisione, nella fattispecie commettendo un errore di al più 10^{-4}. Grazie al teorema 9.1 sappiamo che dato il polinomio di Taylor (7.2), possiamo scrivere

$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{k!} + e^{\xi}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}$$

con $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Notiamo due cose:

(i) possiamo riscrivere l'uguaglianza precedente come

$$\sqrt{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{k!} = e^{\xi}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}$$

e prendendo il modulo di ambo i membri otteniamo

$$\left|\sqrt{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{k!}\right| = e^{\xi}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}$$

(ii) poiché $\exp(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona crescente, vale che

$$e^{\xi} \leq e^{\frac{1}{2}} < e \ \forall \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Pertanto possiamo stimare l'errore con

$$\left|\sqrt{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{k!}\right| \leq e\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}$$

Chiaramente, se vale che

$$e\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$$

allora anche la stima ottenuta con il polinomio di Taylor dista dal valore effettivo di $\sqrt{e}$ al più 10^{-4}. Dalla disequazione precedente possiamo determinare quale sia il valore minimo di n per cui l'errore è minore di 10^{-4}, ovvero l'ordine del polinomio di Taylor a cui dobbiamo spingerci per ottenere una stima con la precisione desiderata. Procedendo per tentativi, otteniamo $n \geq 5$; pertanto considerando il polinomio di Taylor di e^x di grado 5 centrato in 0 possiamo scrivere

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{2}^k \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} = \frac{6331}{3840} \simeq 1.64869$$

Si può verificare che $\sqrt{e} \simeq 1.64872$, e quindi

$$\sqrt{e} - \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{2}^k \frac{1}{k!} \simeq 1.64872 - 1.64869 = 3 \times 10^{-5} < 10^{-4}$$

come richiesto.

Esempio. Supponiamo di voler calcolare il valore di $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ con una precisione di 10^{-5}. Il teorema 9.1 applicato alla funzione $\sin\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ restituisce, considerando $\alpha = 0$,

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \frac{1}{10^{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)!} + \sin^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{10^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}$$

con $\xi \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$. Procedendo come prima, possiamo riscrivere

$$\left|\sin\left(\frac{1}{10}\right) - \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \frac{1}{10^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)!}\right| = \left|\sin^{(n+1)}(\xi)\right| \frac{1}{10^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}$$

Notiamo che $\left|\sin^{(n+1)}(\xi)\right| \leq 1$ per ogni $\xi \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$, e quindi possiamo stimare la differenza fra il valore fornito dal polinomio di Taylor di grado n e $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ come

$$\left|\sin\left(\frac{1}{10}\right) - \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \frac{1}{10^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{1}{10^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}$$

e quindi se abbiamo che

$$\frac{1}{10^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

abbiamo che la stima fornita da Taylor ha una precisione maggiore o uguale a 10^{-5}. Procedendo per tentativi verifichiamo che la disuguaglianza è valida per $n \geq 3$; se valutiamo il polinomio di Taylor di grado 3 in $\frac{1}{10}$ otteniamo

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{10^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = \frac{599}{6000} \simeq 0.0998333$$

Si può verificare che $\sin\left(\frac{1}{10}\right) \simeq 0.0998334$, e

$$\left|\sin\left(\frac{1}{10}\right) - \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{10^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)!}\right| \simeq 0.0998334 - 0.0998333 = 10^{-7} < 10^{-5}$$

Esercizio 9.1. *Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$, vale che*

$$\frac{1}{nm} > \sin\left(\frac{1}{m}\right) > \frac{1}{m+1}$$

Soluzione. Grazie al teorema 9.1 possiamo scrivere, per $\sin(\cdot)\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \frac{1}{m^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)!} + \sin^{(n+1)}(\xi) \frac{1}{m^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}$$

con $\xi \in \left(0, \frac{1}{m}\right)$. In particolare se ci fermiamo all'ordine $n = 2$ abbiamo

$$\sin\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} + \sin^{(3)}(\xi) \frac{1}{m^3} \frac{1}{3!}$$

Notiamo che $\sin^{(3)}(\xi) = -\cos(\xi)$, e per $\xi \in \left(0, \frac{1}{m}\right)$ vale che $-\cos(\xi) < 0$. Quindi

$$\sin\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \cos(\xi)\frac{1}{m^3}\frac{1}{3!} < \frac{1}{m}$$

Se ci fermiamo invece all'ordine $n = 3$ abbiamo

$$\sin\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{6m^3} + \sin^{(4)}(\xi)\frac{1}{m^4}\frac{1}{4!}$$

con $\sin^{(4)}(\xi) = \sin(\xi) > 0$ per ogni $\xi \in \left(0, \frac{1}{m}\right)$; di conseguenza possiamo scrivere

$$\sin\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{6m^3} + \sin(\xi)\frac{1}{m^4}\frac{1}{4!} > \frac{1}{m} - \frac{1}{6m^3}$$

Per completare la dimostrazione è sufficiente dimostrare che

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6m^3} \geq \frac{1}{m+1} \ \forall m \in \mathbb{N}$$

Manipolando algebricamente la disequazione ci riconduciamo a

$$\frac{(6m^2-1)(m+1) - 6m^3}{6m^3(m+1)} \geq 0 \iff \frac{6m^2 - n - 1}{6m^3(m+1)} \geq 0$$

che è verificate se $m \geq \frac{1}{2}$ o se $m \leq -\frac{1}{3}$. Poiché $\mathbb{N}$ è contenuto nel primo insieme possiamo quindi scrivere

$$\sin\left(\frac{1}{m}\right) > \frac{1}{m} - \frac{1}{6m^3} \geq \frac{1}{m+1} \ \forall m \in \mathbb{N}$$

e abbiamo quindi dimostrato l'asserto dell'esercizio. □

9.2 Approfondimento: funzioni convesse

Definizione 9.1. Data $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, diremo che f è *convessa* se dati $x, y \in (a,b)$ vale che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \ \forall \lambda \in [0,1]$$

Le funzioni convesse hanno proprietà interessanti; ad esempio

Teorema 9.2. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa e $x_0 \in [a,b]$ è un punto di minimo locale per f, allora x_0 è un punto di minimo globale per f.*

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 non sia punto di minimo globale, ossia che esista $x_1 \in [a,b]$ tale che $f(x_1) < f(x_0)$. Poiché f è convessa, vale che

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_0) = f(x_0) \tag{9.3}$$

Ricordiamo ora la definizione 8.1 di minimo locale:

> x_0 è punto di minimo locale per f se esiste $\delta > 0$ tale che $f(y) \geq f(x_0)$ per ogni $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$.

Consideriamo ora un qualsiasi $\delta > 0$, e consideriamo un punto $x_\lambda = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$ appartenente al segmento che congiunge x_0 e x_1. Ci aspettiamo di trovare punti del segmento arbitrariamente vicini a x_0, ossia che distano da x_0 meno di δ; più formalmente, se consideriamo

$$\delta > |x_\lambda - x_0| = \left|(\lambda - 1)x_0 + (1 - \lambda)x_1\right| = (1 - \lambda)|x_0 - x_1|$$

vediamo che la disuguaglianza è verificata se $\lambda > 1 - \frac{\delta}{|x_0 - x_1|}$. Consideriamo quindi un generico $\overline{\lambda} > 1 - \frac{\delta}{|x_0 - x_1|}$ fissato; vale che $\left|x_{\overline{\lambda}} - x_0\right| < \delta$, ossia

$$x_{\overline{\lambda}} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$$

e per (9.3) vale che

$$f(x_{\overline{\lambda}}) < f(x_0)$$

Di conseguenza non esiste $\delta > 0$ tale che $f(y) \geq f(x_0)$ per ogni $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$, ossia concludiamo che x_0 non soddisfa la definizione di minimo locale. Ma questo è un assurdo: pertanto non esiste $x_1 \neq x_0$ punto di minimo globale, e x_0 è quindi un punto di minimo globale. $\square$

Osservazione. Un risultato analogo vale per funzioni concave e per i relativi massimi locali.

Esempio. Ricordiamo che se data $f\colon I \to \mathbb{R}$ tale che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è convessa. Ad esempio, questo vale anche per $-\log(\cdot)\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$: infatti

$$\frac{d^2}{dx^2}(-\log(x)) = \frac{1}{x^2} > 0 \ \forall x \in (0, +\infty)$$

Inoltre, $-\log(\cdot)\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è anche una funzione monotona decrescente: infatti sappiamo che $\log(x) \leq \log(y)$ se e solo se $x \leq y$, e quindi $-\log(x) \geq -\log(y)$ se e solo se $x \leq y$. Queste due proprietà la rendono un ottimo strumento per dimostrare disuguaglianze, come la disuguaglianza media aritmetica - media geometrica, che asserisce che dati due numeri $a, b > 0$ vale che

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

Per dimostrare la validità della disuguaglianza, consideriamo

$$-\log(\sqrt{ab}) = -\frac{1}{2}\log(ab) = -\frac{1}{2}\log(a) - \frac{1}{2} - \log(b) = \frac{1}{2}(-\log(a)) + \frac{1}{2}(-\log(b))$$

Poiché $-\log(\cdot)$ è convessa vale che

$$\lambda(-\log(a)) + (1 - \lambda)(-\log(b)) \geq -\log(\lambda a + (1 - \lambda)b)$$

Ponendo $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo che

$$\frac{1}{2}(-\log(a)) + \frac{1}{2}(-\log(b)) \geq -\log(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$$

e quindi abbiamo

$$-\log(\sqrt{ab}) \geq -\log\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Usando il fatto che $-\log(\cdot)$ è monotona decrescente vale che

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Procedendo per induzione, è possibile estendere il risultato: considerando $a_1, \dots, a_n > 0$ vale che

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Il caso base $n = 2$ è stato dimostrato precedentemente (il caso $n = 1$ è ovvio); supponiamo quindi che il risultato valga per $n-1$ e mostriamo che vale per n. Notiamo che applicando $-\log(\cdot)$ a $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} -\log(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}) &= -\frac{1}{n}\log(a_1 \cdots a_n) = -\frac{1}{n}\log(a_1 \cdots a_{n-1}) - \frac{1}{n}\log(a_n) = \\ &= -\frac{n-1}{n}\log(\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}}) - \frac{1}{n}\log(a_n) \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva, sappiamo che

$$\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$$

e per la monotonia (decrescente) di $-\log(\cdot)$ abbiamo quindi che

$$-\log(\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}}) \geq -\log\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)$$

Usando questa disuguaglianza nella catena di uguaglianze precedente abbiamo

$$-\log(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}) \geq \frac{n-1}{n}\left(-\log\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)\right) + \frac{1}{n}(-\log(a_n))$$

Appellandoci alla convessità di $-\log(\cdot)$ (notando che $\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$) abbiamo quindi che

$$-\log(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}) \geq \log\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n}\right)$$

Poiché $-\log(\cdot)$ è monotona decrescente vale quindi che

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Osservazione. La dimostrazione della disuguaglianza media aritmetica-media geometrica può essere usata per provare una disuguaglianza più generale, detta *disuguaglianza di Jensen*: questa dice che data una funzione convessa $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ e dati n punti $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$ e n pesi $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, allora vale che

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i)$$

Esercizio 9.2 (Disuguaglianza di Young)**.** *Dati due numeri* $p, q \in (1, +\infty)$ *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e due numeri* $a, b \geq 0$ *, dimostrare che*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

Soluzione. Chiaramente la disuguaglianza è verificata se $a = 0$ e/o $b = 0$. Supponiamo quindi $a, b > 0$. Come nell'esempio della disuguaglianza media aritmetica-media geometrica, sfruttiamo la funzione convessa e monotona decrescente $-\log(\cdot)\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$: abbiamo che

$$-\log(ab) = -\log(a) - \log(b) = -\frac{p}{p}\log(a) - \frac{q}{q}\log(b) = \frac{1}{p}(-\log(a^p)) + \frac{1}{q}(-\log(b^q))$$

Dato che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, per la convessità di $-\log(\cdot)$ abbiamo quindi che

$$-\log(ab) = \frac{1}{p}(-\log(a^p)) + \frac{1}{q}(-\log(b^q)) \geq -\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}\right)$$

e poiché $-\log(\cdot)$ è monotona decrescente, abbiamo che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

come da asserto. $\square$

Osservazione. Dall'esercizio 9.2 segue un'altra importante disuguaglianza, la disuguaglianza di Hölder: date le famiglie $\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$ e $\{b_i\}_{1\leq i\leq n}$ di numeri non-negativi e due numeri $p, q \in (1, +\infty)$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale che

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Per mostrarne la validità, *fissiamo* un $i \in \{1, \dots, n\}$, e consideriamo

$$x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p}} \qquad y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}}$$

x_i e y_i sono entrambi numeri non-negativi, e pertanto per la disuguaglianza di Young abbiamo che

$$x_i y_i \le \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q} = \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^n a_j^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}$$

Sommando al variare di $i \in \{1, \dots, n\}$ i membri della disuguaglianza, abbiamo

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{j=1}^n a_j^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_j^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ossia, inserendo l'espressione esplicita di x_i e y_i,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}} \le 1 \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$$

Nel caso $p = q = 2$, la disuguaglianza è nota come disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Osservazione. É possibile provare una versione generalizzata della disuguaglianza di Young, che dice che dati $\{a_i\}_{1\le i\le n}$ non-negativi e $\{p_i\}_{1\le i\le n} \subseteq \mathbb{R}^+$ tali che $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$, allora

$$\prod_{i=1}^n a_i \le \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i}$$

Come nel caso della disuguaglianza media aritmetica-media geometrica, si procede per induzione sul numero n di termini, usando, nel passo induttivo, la disuguaglianza di Young provata nell'esercizio 9.2 scegliendo opportunamente i valori di a, b, p e q.

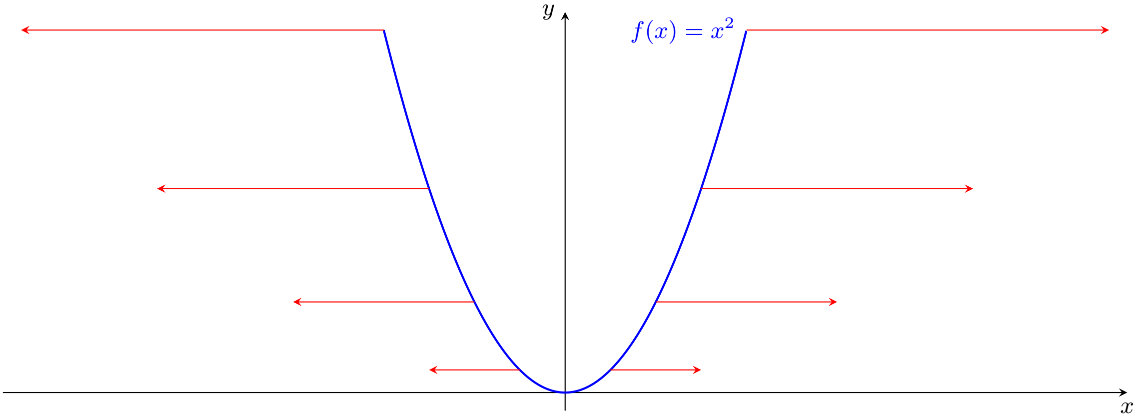
9.3 Introduzione all'ottimizzazione convessa

Abbiamo già visto nella sezione 8.4 che l'ottimizzazione di funzioni, ossia la ricerca dei minimi o dei massimi, specialmente globali, di una funzione, è una procedura che riveste una grande importanza in diverse discipline. In questo contesto, le funzioni convesse sono particolarmente apprezzate per due motivi:

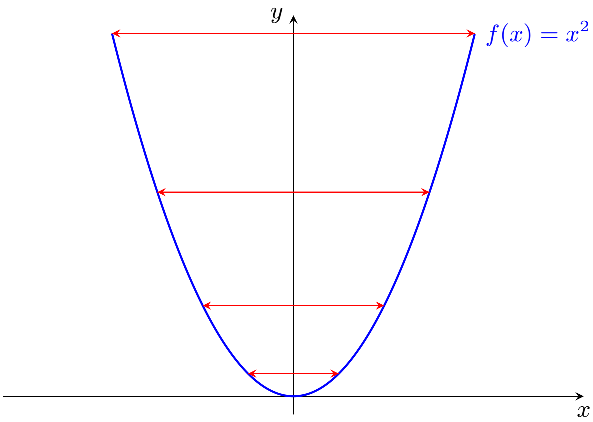
(i) come abbiamo visto nel teorema 9.2, un minimo locale di una funzione convessa è necessariamente un minimo globale;

(ii) come vedremo in seguito, nel caso di funzioni convesse (e sufficientemente regolari, cfr. teorema 9.3) un algoritmo di facile implementazione consente di determinare un punto di minimo e, cosa ancora più importante, il valore che la funzione assume in tale punto.

Possiamo illustrare il metodo ricorsivo citato nel punto precedente con l'esempio seguente: supponiamo di voler determinare il minimo della funzione convessa e liscia $f\colon [-2, 2] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$. Nel grafico di seguito rappresentiamo la funzione in blu e tramite dei vettori orizzontali rossi applicati al punto $(x, f(x))$ il valore (la lunghezza del vettore) e il segno (il verso del vettore) la derivata prima di f in alcuni punti.

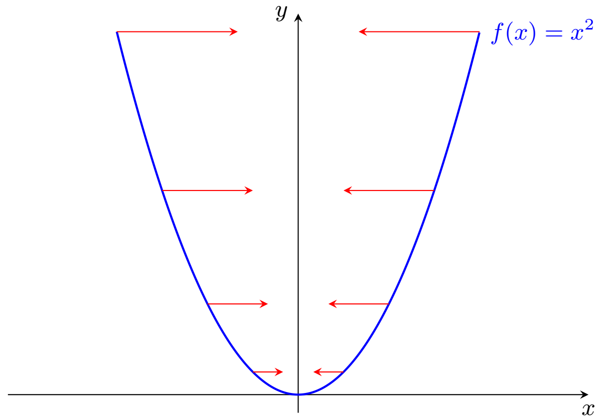


Notiamo che in questa intepretazione grafica la derivata punta "lontano" dal punto di minimo, verso punti del dominio di f in cui questa assume valori maggiori. Se quindi ci immaginiamo di "seguire" la derivata tenderemo ad allontanarci dal valore del minimo. Al contrario, rappresentiamo allo stesso modo $-f'(x)$:



Vediamo che in questo caso se, come prima, ci immaginiamo di "seguire" meno la derivata tendiamo ad oscillare attorno a due valori equidistanti dal punto di minimo. Infine, immaginiamoci di rappresentare[9] $-\frac{1}{k}f(x)$, con $k > 2$ (nel caso raffigurato $k = 3$):

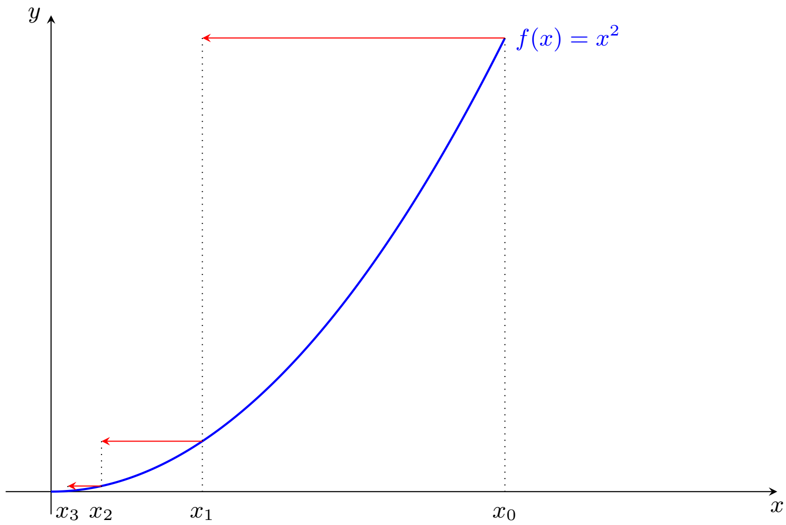
[9] La scelta di rappresentare $-\frac{1}{k}f'(x)$ con $k > 2$ non è casuale: infatti, $L = 2$ rappresenta la costante di Lipschitz di $f'(x) = 2x$, e per il teorema 9.3 è necessario scegliere un passo inferiore a $\frac{1}{L}$.



Vediamo che in questo caso se ci immaginiamo di seguire i vettori rossi, ci avviciniamo progressivamente al punto di minimo globale della funzione. Ossia, se partendo da un certo punto $x_0 \in [-2, 2]$ costruiamo la successione

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{k} f'(x_0) \qquad x_2 = x_1 - \frac{1}{k} f'(x_1) \qquad x_3 = x_2 - \frac{1}{k} f'(x_2) \qquad \dots$$

ci avviciniamo a 0, il punto di minimo globale di f, visivamente



Questa procedura prende il nome di *discesa del gradiente*[10], e nel caso di funzioni convesse sufficientemente regolari fornisce un modo per stimare il valore della funzione in un punto di minimo:

[10] Il gradiente di una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, indicato solitamente con ∇f, è una generalizzazione del concetto di derivata a funzioni definite su $\mathbb{R}^n$; in ogni punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, il gradiente di f in $\mathbf{x}$ è costituito dalle derivate direzionali $\partial_1, \dots, \partial_n$ di f in $\mathbf{x}$. Questo è quindi un vettore in $\mathbb{R}^n$ che descrive la direzione di massima variazione della funzione f nel punto $\mathbf{x}$.

Teorema 9.3. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e differenziabile, con $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitz continua (cfr. definizione 8.2, ossia esiste $L > 0$ tale che*

$$\left|f'(x) - f'(y)\right| \leq L|x-y| \ \ \forall x, y \in (a,b) \ )$$

Supponiamo esista $\overline{x} \in (a,b)$ un punto di minimo locale (quindi per il teorema 9.2 globale) per f; se definiamo la successione per ricorrenza $(x_n)_n$ con

$$x_{n+1} = x_n - \alpha f'(x_n), \ 0 < \alpha < \frac{1}{L}$$

vale che

$$f(x_n) - f(\overline{x}) \leq \frac{|x_0 - \overline{x}|^2}{n} \frac{1}{\left|L\alpha^2 - \alpha\right|}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in vari passaggi.

(i) Poiché f è convessa e differenziabile in (a,b), allora f giace sopra tutte le rette tangenti al grafico di f: infatti, sappiamo che per ogni $x, y \in (a,b)$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$ vale che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Se supponiamo che $\lambda \neq 0$ possiamo riscrivere la disuguaglianza precedente come

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y)$$

che possiamo manipolare nel modo seguente:

$$\frac{f(y + \lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda(x-y)}(x-y) \leq f(x) - f(y)$$

per ogni $\lambda \in (0,1]$. Poiché la disuguaglianza è verificata per ogni $\lambda \in (0,1]$, la disuguaglianza vale per il limite per $\lambda \to 0^+$ della quantità a sinistra del segno di disuguaglianza; ma dato che f è differenziabile in (a,b) la quantità a sinistra, nell'operazione di limite, è data da $f'(y)(x-y)$; concludiamo quindi che

$$f'(y)(x-y) + f(y) \leq f(x) \ \forall x, y \in (a,b)$$

Da questa disuguaglianza deriva

$$f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x) \ \forall x, y \in (a,b) \tag{9.4}$$

(ii) Dato che la derivata è Lipschitz continua, vale che

$$\left|f'(y) - f'(x)\right| \leq L|y-x|$$

ossia

$$f'(y) \leq f'(x) + L|x-y| \ \ \forall x, y \in (a,b) \tag{9.5}$$

Sappiamo che f è differenziabile in (a,b), ed è quindi continua su (a,b). Pertanto dati $x < y \in (a,b)$ la funzione $f|_{[x,y]}\colon [x,y] \to \mathbb{R}$ è continua su $[x,y]$ e differenziabile in (x,y); possiamo applicare il teorema di Lagrange 8.2 per scrivere

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \ \xi \in (x,y)$$

Notiamo che se $y < x$ vale la stessa equazione. Possiamo a questo punto sfruttare la (9.5) per scrivere

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + f'(\xi)(y-x) \leq f(x) + (f'(x) + L|y-x|)(y-x) \leq \\ &\leq f(x) + f'(x)(y-x) + L|x-y|^2 \end{aligned} \tag{9.6}$$

(iii) Usiamo la (9.6) per stimare $f(x_{n+1}) - f(x_n)$:

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) - f(x_n) &= f(x_n - \alpha f'(x_n)) - f(x_n) \overset{(9.6)}{\leq} \\ &\leq f(x_n) + f'(x_n)(-\alpha f'(x_n)) + L\big|-\alpha f'(x_n)\big|^2 - f(x_n) = \\ &= -\alpha f'(x_n)^2 + f'(x_n)^2 L\alpha^2 = f'(x_n)^2 \underbrace{(L\alpha^2 - \alpha)}_{<0 \text{ se } 0<\alpha<\frac{1}{L}} \end{aligned} \tag{9.7}$$

(iv) Possiamo quindi concludere che

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) + f'(x_n)^2(L\alpha^2 - \alpha)$$

Se sottraiamo $f(\overline{x})$ ad ambo i membri della disuguaglianza otteniamo

$$f(x_{n+1}) - f(\overline{x}) \leq f(x_n) - f(\overline{x}) + f'(x_n)^2(L\alpha^2 - \alpha) \tag{9.8}$$

Notiamo che per la convessità (9.4) vale che

$$f(x_n) - f(\overline{x}) \leq f'(x_n)(x_n - \overline{x})$$

Ricordiamo che $\overline{x}$ è punto di minimo globale per f; di conseguenza

$$0 \leq f(x_n) - f(\overline{x}) \leq f'(x_n)(x_n - \overline{x})$$

Possiamo elevare ambo i membri al quadrato per la monotonia di $\cdot^2\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ottenendo

$$(f(x_n) - f(\overline{x}))^2 \leq f'(x_n)^2(x_n - \overline{x})^2 \tag{9.9}$$

(v) Vogliamo stimare la quantità $(x_n - \overline{x})^2$. Notiamo che

$$(x_{n+1} - \overline{x})^2 = (x_n - \alpha f'(x_n) - \overline{x})^2 = (x_n - \overline{x})^2 - 2\alpha \underbrace{f'(x_n)(x_n - \overline{x})}_{(9.10)} + \alpha^2 f'(x_n)^2$$

Vorremmo stimare la quantità (9.10); per farlo, consideriamo che *fissati* due $x, y \in (a,b)$ generici vale che

$$\begin{aligned}f(y) - f(x) = f(y) - f(z) + f(z) - f(x) &\overset{(9.4)}{\leq} f'(y)(y-z) + f(z) - f(x) \overset{(9.6)}{\leq} \\ &\leq f'(y)(y-z) + f'(x)(z-x) + L(z-x)^2\end{aligned}$$

per ogni scelta di $z \in (a,b)$. La funzione in $z \in (a,b)$ a destra della disuguaglianza soddisfa le ipotesi del teorema di Fermat 8.1, e si può mostrare agilmente che ammette un minimo in

$$z_0 = \frac{f'(y) - f'(x)}{2L} + x$$

Inserendo z_0 nella disuguaglianza precedente otteniamo

$$\begin{aligned}f(y) - f(x) &\leq f'(y)\left(y - \frac{f'(y) - f'(x)}{2L} - x\right) + f'(x)\frac{f'(y) - f'(x)}{2L} + \frac{1}{4L}(f'(y) - f'(x))^2 = \\ &= f'(y)(y-x) - \frac{1}{2L}(f'(y) - f'(x))^2 + \frac{1}{4L}(f'(y) - f'(x))^2 = \\ &= f'(y)(y-x) - \frac{1}{4L}(f'(y) - f'(x))^2\end{aligned}$$

Scambiando x e y nella precedente espressione otteniamo

$$f(x) - f(y) \leq f'(x)(x-y) - \frac{1}{4L}(f'(y) - f'(x))^2$$

e sommando termine a termine la nuova espressione a quella precedente abbiamo

$$0 \leq (f'(y) - f'(x))(y-x) - \frac{1}{2L}(f'(y) - f'(x))^2$$

ossia

$$(f'(y) - f'(x))(y-x) \geq \frac{1}{2L}(f'(y) - f'(x))^2 \tag{9.11}$$

Torniamo alla quantità (9.10): notiamo che poiché f è differenziabile in (a,b) e $\overline{x}$ è punto di minimo, per il teorema di Fermat 8.1 deve valere che $f'(\overline{x}) = 0$. Quindi

$$f'(x_n)(x_n - \overline{x}) = (f'(x_n) - f'(\overline{x}))(x_n - \overline{x}) \overset{(9.11)}{\geq} \frac{1}{2L}(-f'(x_n) + f'(\overline{x}))^2 = \frac{1}{2L}f'(x_n)^2$$

Ricordiamo che $\alpha > 0$; pertanto

$$-\alpha f'(x_n)(x_n - \overline{x}) \leq -\frac{\alpha}{2L}f'(x_n)^2$$

Usando quest'ultima disuguaglianza otteniamo

$$\begin{aligned}(x_{n+1} - \overline{x})^2 &\leq (x_n - \overline{x})^2 + \left(-\frac{\alpha}{L} + \alpha^2\right) f'(x_n)^2 = \\ &= (x_n - \overline{x})^2 + \underbrace{\frac{L\alpha^2 - \alpha}{L} f'(x_n)^2}_{<0 \text{ se } 0<\alpha<\frac{1}{L}} \leq (x_n - \overline{x})^2\end{aligned}$$

Quindi
$$(x_n - \overline{x})^2 \leq (x_{n-1} - \overline{x})^2 \leq \cdots \leq (x_0 - \overline{x})^2 \tag{9.12}$$

(vi) Usando la (9.12) nella (9.9) otteniamo
$$(f(x_n) - f(\overline{x}))^2 \leq f'(x_n)^2 (x_0 - \overline{x})^2$$
Ricordando che $L\alpha^2 - \alpha < 0$ per le condizioni imposte su α abbiamo che
$$(L\alpha^2 - \alpha)\frac{(f(x_n) - f(\overline{x}))^2}{(x_0 - \overline{x})^2} \geq (L\alpha^2 - \alpha) f'(x_n)^2$$
Nella (9.8) possiamo quindi scrivere
$$\underbrace{f(x_{n+1}) - f(\overline{x})}_{\Delta_{n+1}} \leq \underbrace{f(x_n) - f(\overline{x})}_{\Delta_n} + \frac{L\alpha^2 - \alpha}{(x_0 - \overline{x})^2} \underbrace{(f(x_n) - f(\overline{x}))^2}_{\Delta_n^2}$$
ossia, definendo $\beta = \frac{\left|L\alpha^2 - \alpha\right|}{(x_0 - \overline{x})^2} > 0$,
$$\Delta_{n+1} \leq \Delta_n - \beta \Delta_n^2 \tag{9.13}$$

(vii) Consideriamo l'equazione (9.13). Notiamo innanzitutto che questa implica che
$$\Delta_{n+1} \leq \Delta_n$$
Effettuiamo ora le seguenti manipolazioni algebriche: innanzitutto, notiamo che poiché $\overline{x}$ è punto di minimo globale abbiamo che $\Delta_n \geq 0$ per ogni n; in particolare se $\Delta_n = 0$ abbiamo che $f(x_n) = f(\overline{x})$, ossia x_n è punto di minimo globale per f e la successione $(x_n)_n$ definita per ricorsione sarà definitivamente uguale a x_n, e la stima nell'asserto del teorema vale. Supponiamo quindi che $\Delta_n > 0$, e che lo stesso valga per Δ_{n+1}: dividendo ambo i membri della (9.13) per $\frac{1}{\Delta_n \Delta_{n+1}}$ otteniamo
$$\beta \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \leq \frac{1}{\Delta_{n+1}} - \frac{1}{\Delta_n}$$
Notando che $\Delta_{n+1} \leq \Delta_n$ possiamo ulteriormente scrivere
$$\beta \leq \frac{1}{\Delta_{n+1}} - \frac{1}{\Delta_n}$$
A questo punto se consideriamo
$$N\beta = \sum_{n=0}^{N-1} \beta \leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta_{n+1}} - \frac{1}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_N} - \frac{1}{\Delta_0} \leq \frac{1}{\Delta_N}$$

abbiamo che

$$\Delta_N \leq \frac{1}{\beta N} = \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{N} \frac{1}{\left|L\alpha^2 - \alpha\right|}$$

Ricordando che $\Delta_N = f(x_N) - f(\overline{x})$ abbiamo quindi che

$$f(x_N) - f(\overline{x}) \leq \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{N} \frac{1}{\left|L\alpha^2 - \alpha\right|}$$

come sancito dall'asserto.

□

Osservazione. Notiamo che in generale non possiamo dire che $x_n \to \overline{x}$, in quanto potrebbero esistere un altro punto $\overline{y} \in (a, b)$ tale che $f(\overline{y}) = f(\overline{x})$. Notiamo inoltre che poiché $\overline{x}$ è punto di minimo globale per f e poiché f è convessa deve valere che

$$f(\lambda\overline{x} + (1 - \lambda)\overline{y}) = f(\overline{x}) = f(\overline{y})$$

ossia tutti i punti del segmento congiungete $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono punti di minimo globale. Ai fini dell'ottimizzazione però questo non importa: infatti in generale ciò che ci interessa non è trovare lo specifico punto di minimo globale $\overline{x}$, bensì un punto in cui si realizza il minimo (globale) di f perché ci interessa il valore che f assume in quel minimo; quindi che la procedura iterativa converga verso $\overline{x}$, $\overline{y}$ o un punto del segmento congiungente i due non influisce in pratica sul raggiungimento del risultato desiderato.
Ad esempio, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ 0 & x \in [-1, 0] \\ (x + 1)^4 & x < -1 \end{cases}$$

Questa è una funzione convessa, differenziabile e con derivata Lipschitz continua su $[-2, 1]$; se prendiamo $x_0 = -2$ la successione fornita dalla discesa del gradiente convergerà a -1, se prendiamo $x_0 = 1$ convergerà a 0 e se prendiamo un qualsiasi punto $x_0 \in [-1, 0]$ la successione sarà identicamente uguale a x_0.

10 Lezione 10

10.1 Ripasso e approfondimento: teoria dell'integrazione secondo Riemann

Definizione 10.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione **limitata definita su** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Una *partizione* $\mathscr{P}$ di $[a,b]$ è una collezione di punti $\{x_0,\dots,x_n\} \subset [a,b]$ tale che

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

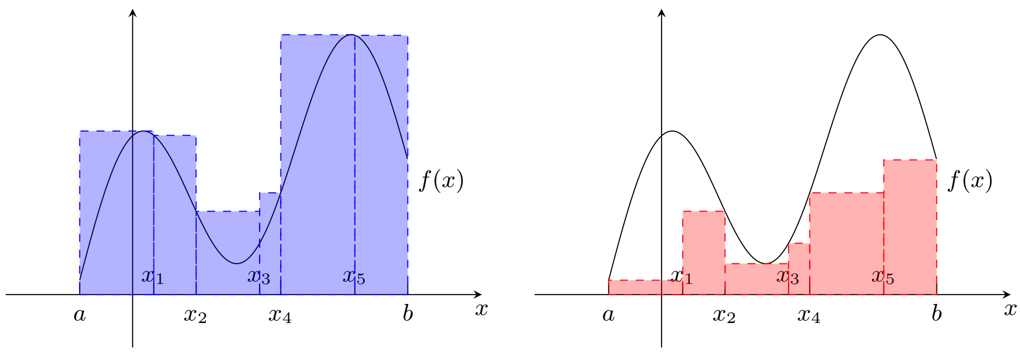
Data una partizione $\mathscr{P}$ di $[a,b]$ e la funzione f, definiamo le quantità

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1} \qquad M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x) \qquad m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x) \tag{10.1}$$

con cui definiamo la somma di Darboux superiore $U(\mathscr{P},f)$ e inferiore $L(\mathscr{P},f)$

$$\underbrace{U(\mathscr{P},f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i}_{(10.2)} \qquad \underbrace{L(\mathscr{P},f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i}_{(10.3)}$$

Osservazione. Notiamo che somma superiore ed inferiore ammettono un'interessante interpretazione grafica. Nei grafici successivi riportiamo, data una generica funzione f e una partizione $\mathscr{P} = \{x_0,\dots,x_6\}$ di $[a,b]$, la somma superiore $U(\mathscr{P},f)$ e inferiore $L(\mathscr{P},f)$:



Come si può osservare, $U(\mathscr{P},f)$ approssima l'area sottesa dal grafico di f dall'alto, mentre $L(\mathscr{P},f)$ la approssima dal basso. Notiamo inoltre come queste due quantità dipendano sia dalla funzione f considerata, sia dalla scelta della partizione $\mathscr{P}$, e che

$$\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x)\right)(b-a) \geq U(\mathscr{P},f) \geq L(\mathscr{P},f) \geq \left(\inf_{x\in[a,b]} f(x)\right)(b-a) \text{ per ogni } \mathscr{P} \tag{10.4}$$

Definizione 10.2. Chiamiamo *integrale inferiore* di f su $[a,b]$ la quantità

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{\mathscr{P}} L(\mathscr{P},f)$$

ossia l'estremo superiore, preso su tutte le possibili partizioni $\mathscr{P}$ di $[a,b]$, dell'insieme delle somme inferiori. Analogamente, chiamiamo *integrale superiore* di f su $[a,b]$ la quantità

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{\mathscr{P}} U(\mathscr{P}, f)$$

ossia l'estremo inferiore, preso su tutte le possibili partizioni $\mathscr{P}$ di $[a,b]$, dell'insieme delle somme superiori. Notiamo che queste due quantità sono sempre ben definite per una funzione limitata, in quanto vale la (10.4) (e ci ricordiamo il teorema 2.1 e il corollario 2.1). Diremo che f è *Riemann-integrabile* su $[a,b]$ ($f \in \mathscr{R}([a,b])$) se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

è in tal caso il valore comune verrà denotato con

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

e verrà detto *integrale di f su $[a,b]$*.

Osservazione. Notiamo che in generale vale che

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Per mostrare la validità della disuguaglianza, procediamo come di seguito:

(i) Data una partizione $\mathscr{P}$ di $[a,b]$, un suo *raffinamento* $\mathscr{Q}$ è una partizione tale che $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$. Date due partizioni $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$, il loro raffinamento comune sarà dato da $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$.

(ii) Se $\mathscr{Q}$ è un raffinamento di $\mathscr{P}$, allora vale che

$$L(\mathscr{P}, f) \leq L(\mathscr{Q}, f) \qquad U(\mathscr{Q}, f) \leq U(\mathscr{P}, f)$$

Per mostrare che valgono queste due disuguaglianze, consideriamo il caso base in cui $\mathscr{Q} = \mathscr{P} \cup \{\overline{x}\}$, $x_{i-1} < \overline{x} < x_i$ per qualche i. Definiamo

$$\overline{m}_1 = \inf_{x \in [x_{i-1}, \overline{x}]} f(x) \qquad \overline{m}_2 = \inf_{x \in [\overline{x}, x_i]} f(x)$$

e notiamo che

$$\overline{m}_1 \geq m_i \qquad \overline{m}_2 \geq m_i$$

A questo punto vale che

$$\begin{aligned} L(\mathscr{Q}, f) - L(\mathscr{P}, f) &= \sum_{k=1}^{i-1} m_k \Delta_k + \overline{m}_1(\overline{x} - x_{i-1}) + \overline{m}_2(x_i - \overline{x}) + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \Delta_k - \\ &- \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k = \overline{m}_1(\overline{x} - x_{i-1}) + \overline{m}_2(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \\ &\geq m_i(\overline{x} - x_{i-1}) + m_i(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \end{aligned}$$

Il risultato si dimostra analogamente per $U(\mathscr{Q}, f) \leq U(\mathscr{P}, f)$.

(iii) Per il punto precedente vale che, date due generiche partizioni $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ e indicando con $\mathscr{Q}$ il loro raffinamento comune,

$$L(\mathscr{P}_1, f) \leq L(\mathscr{Q}, f) \leq U(\mathscr{Q}, f) \leq U(\mathscr{P}_2, f)$$

ossia

$$L(\mathscr{P}_1, f) \leq U(\mathscr{P}_2, f) \text{ per ogni } \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \tag{10.5}$$

Fissiamo a questo punto $\mathscr{P}_1$; vale che

$$L(\mathscr{P}_1, f) \leq U(\mathscr{P}_2, f)\ \forall \mathscr{P}_2 \implies L(\mathscr{P}_1, f) \leq \overline{\int_a^b} f$$

Poiché la partizione $\mathscr{P}_1$ che avevamo fissato era generica, allo stesso modo vale che

$$L(\mathscr{P}_1, f) \leq \overline{\int_a^b} f\ \forall \mathscr{P}_1 \implies \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Teorema 10.1 (Criterio di Riemann)**.** *Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ è Riemann-integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ di $[a,b]$ tale che*

$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni.

(i) Supponiamo che $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Notiamo che per ogni partizione $\mathscr{P}$ di $[a,b]$ vale che

$$L(\mathscr{P}, f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(\mathscr{P}, f)$$

Per definizione (cfr. definizione 2.2) di estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathscr{P}_1$ tale che

$$L(\mathscr{P}_1, f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} \iff L(\mathscr{P}_1, f) + \frac{\varepsilon}{2} > \underline{\int_a^b} f$$

e allo stesso modo per definizione di estremo inferiore per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathscr{P}_2$ tale che

$$U(\mathscr{P}_2, f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} \iff U(\mathscr{P}_2, f) - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f$$

Definiamo $\mathscr{P}_\varepsilon = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$; vale che

$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) \leq U(\mathscr{P}_2, f) < \underbrace{\underline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon}_{\text{Definizione 10.2}} < L(\mathscr{P}_1, f) + \varepsilon \leq L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) + \varepsilon$$

ossia abbiamo trovato, per ogni $\varepsilon > 0$, una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ tale che

$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) < L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) + \varepsilon \iff U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

(ii) Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ tale che

$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Sappiamo che $U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) \geq \overline{\int_a^b} f$ e che $L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) \leq \underline{\int_a^b} f$; quindi

$$\varepsilon > U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) \geq \overline{\int_a^b} f - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) \geq \underbrace{\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \geq 0}_{\text{Osservazione precedente}}$$

ossia per ogni $\varepsilon > 0$,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

Ma questo significa che

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 0 \iff \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

e quindi f soddisfa la definizione 10.2. □

Corollario 10.1. *Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}([a,b])$ se soddisfa una delle seguenti proprietà:*

(i) f è continua su $[a,b]$;

(ii) f è monotona su $[a,b]$;

(iii) f è limitata su $[a,b]$ ed ha al più un numero finito di discontinuità.

Inoltre, se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ vale che

(i) $f + g \in \mathscr{R}([a,b])$ e

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(ii) $\lambda f \in \mathscr{R}([a,b])$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

(iii) $fg \in \mathscr{R}([a,b])$;

(iv) $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$ e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

(v) Se $a < c < b$, allora $f \in \mathscr{R}([a,c])$ e $f \in \mathscr{R}([c,b])$ e

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Corollario 10.2. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann-integrabile su $[a,b]$, e sia $\widehat{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \overline{x} \\ k \neq f(\overline{x}) & x = \overline{x} \end{cases}$$

per qualche $\overline{x} \in [a,b]$. Allora $\widehat{f} \in \mathscr{R}([a,b])$ e

$$\int_a^b f = \int_a^b \widehat{f}$$

Dimostrazione. Consideriamo come primo caso $f \equiv 0$ su $[a,b]$, e quindi

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \overline{x} \\ M & x = \overline{x} \end{cases}$$

con $M > 0$ per semplicità. Data la forma di f, sappiamo che se consideriamo la partizione $\mathscr{P} = \{x_0 = a, x_1 = b\}$ vale che

$$U(\mathscr{P}, f) - L(\mathscr{P}, f) < \varepsilon$$

per ogni possibile scelta di $\varepsilon > 0$.
Consideriamo ora un $\varepsilon > 0$ fissato; vogliamo utilizzare il criterio di Riemann 10.1 per dimostrare che $\widehat{f} \in \mathscr{R}([a,b])$. A questo scopo, definiamo la partizione

$$\mathscr{P}_\varepsilon = \left\{x_0, \overline{x} - \frac{\varepsilon}{4M}, \overline{x} + \frac{\varepsilon}{4M}, x_1\right\}$$

e calcoliamo $U(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f})$ e $L(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f})$: vale che

$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f}) = \sup_{x \in \left[\overline{x} - \frac{\varepsilon}{4M}, \overline{x} + \frac{\varepsilon}{4M}\right]} \widehat{f}(x) \frac{\varepsilon}{2M} = M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e che

$$L(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f}) = 0$$

Di conseguenza

$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f}) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f}) < \varepsilon$$

e quindi $\widehat{f} \in \mathscr{R}([a,b])$. Per dimostrare che

$$\int_a^b \widehat{f} = \int_a^b f = 0$$

notiamo che, seguendo il ragionamento visto prima, per ogni $\varepsilon > 0$ riusciamo a trovare una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ tale che

$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f}) < \varepsilon$$

Di conseguenza, poiché

$$0 = L(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f}) \leq \underline{\int_a^b} \widehat{f} = \overline{\int_a^b} \widehat{f} \leq U(\mathscr{P}_\varepsilon, \widehat{f}) < \varepsilon$$

possiamo dire che

$$0 \leq \int_a^b \widehat{f} < \varepsilon \text{ per ogni } \varepsilon > 0$$

ossia $\int_a^b \widehat{f} = 0$. Analogo risultato vale se $\widehat{f}(\overline{x}) < 0$.
Per quanto riguarda invece il nostro asserto originario, notiamo che data una generica funzione $f \in \mathscr{R}([a,b])$ possiamo scrivere

$$\widehat{f} = f + \underbrace{\widehat{f} - f}_{g}$$

$g(x)$ è una funzione con le proprietà sopra descritte; pertanto $g \in \mathscr{R}([a,b])$ e $\int_a^b g = 0$. Usando il corollario 10.1 abbiamo quindi che $f + g = \widehat{f} \in \mathscr{R}([a,b])$ e che

$$\int_a^b f = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g) = \int_a^b \widehat{f}$$

□

Osservazione. Il corollario 10.2 ci dice che l'integrazione secondo Riemann non dipende dal valore di una funzione in un numero n arbitrario (ma finito!) di punti.

Teorema 10.2. *Sia $f \colon \mathscr{R}([a,b])$, e $x \in [a,b]$; se definiamo*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{10.6}$$

F è continua in $[a,b]$; inoltre, se f è continua in $x_0 \in [a,b]$ allora F è differenziabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dimostrazione. Notiamo che F è ben definita per il corollario 10.1, punto (v).
Fissiamo $x \in [a,b]$; vogliamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\big|F(x) - F(y)\big| < \varepsilon \text{ se } |x-y| < \delta_\varepsilon$$

Possiamo supporre $y < x$; allora per il corollario 10.1 vale che

$$\big|F(x) - F(y)\big| = \left|\int_a^x f - \int_a^y f\right| \overset{\text{(v)}}{=} \left|\int_x^y f\right| \overset{\text{(iv)}}{\leq} \int_x^y |f|$$

Ricordiamo che f è una funzione limitata, ossia

$$\left|f(x)\right| \leq M \text{ per ogni } x \in [a,b]$$

Quindi

$$\left|F(x) - F(y)\right| \leq \int_x^y |f| \leq M(x-y)$$

Quindi se prendiamo $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2M}$ abbiamo che

$$\left|F(x) - F(y)\right| < \varepsilon \text{ se } |x-y| < \delta_\varepsilon$$

E di conseguenza F è continua in x; poiché $x \in [a,b]$ è generico, F è continua in $[a,b]$. Supponiamo ora che f sia continua in $x_0 \in [a,b]$; allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left|f(x_0) - f(t)\right| < \varepsilon \text{ se } |x_0 - t| < \delta_\varepsilon \tag{10.7}$$

Vogliamo mostrare che F è differenziabile in x_0, ossia (cfr. definizione 6.2) che

$$\lim_{t \to x_0} \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} = f(x_0)$$

Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$, e consideriamo

$$\left|\frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t - x_0}\int_{x_0}^t f - \frac{t - x_0}{t - x_0} f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t - x_0}\int_{x_0}^t f - \frac{f(x_0)}{t - x_0}\int_{x_0}^t\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{t - x_0}\int_{x_0}^t (f - f(x_0))\right| \leq \frac{1}{|t - x_0|}\int_{x_0}^t \left|f(u) - f(x_0)\right| du \overset{(10.7)}{<} \frac{1}{|t - x_0|}\int_{x_0}^t \varepsilon = \varepsilon$$

se $|t - x_0| < \delta_\varepsilon$, in quanto in questo caso $|u - x_0| < \delta_\varepsilon$ per ogni $u \in [x_0, t]$. Quindi dato $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato δ_ε tale che

$$\left|\frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon \text{ se } |t - x_0| < \delta_\varepsilon$$

ossia vale, come richiesto,

$$\lim_{t \to x_0} \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} = f(x_0)$$

□

Osservazione. La funzione F definita nell'equazione (10.6) è detta *funzione integrale* di f.

Teorema 10.3 (Teorema fondamentale del calcolo)**.** *Sia $f \in \mathscr{R}([a,b])$; se esiste una funzione $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $F' = f$, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione. Per il criterio di Riemann 10.1 sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathscr{P}_\varepsilon$ tale che
$$U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$
Tale partizione è data da $\mathscr{P}_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$. Consideriamo ora $F\Big|_{[x_{i-1}, x_i]}$; poiché F è differenziabile su (un aperto contenente) $[a, b]$, lo è in (x_{i-1}, x_i), ed è inoltre continua in $[x_{i-1}, x_i]$. Pertanto possiamo applicare il teorema di Lagrange 8.2: esiste $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tale che
$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$
Notiamo quindi che
$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$
Consideriamo
$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i$$
Notiamo che $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$, e di conseguenza
$$L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) \leq F(b) - F(a) \leq U(\mathscr{P}_\varepsilon, f)$$
Ricordando che
$$L(\mathscr{P}, f) \leq \int_a^b f \leq U(\mathscr{P}, f) \text{ per ogni partizione } \mathscr{P}$$
possiamo scrivere
$$\big(F(b) - F(a)\big) - \int_a^b f \leq \big(F(b) - F(a)\big) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) \leq U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$
e
$$\int_a^b f - \big(F(b) - F(a)\big) \leq U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - \big(F(b) - F(a)\big) \leq U(\mathscr{P}_\varepsilon, f) - L(\mathscr{P}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$
ossia
$$\left|\big(F(b) - F(a)\big) - \int_a^b f\right| < \varepsilon$$
per ogni $\varepsilon > 0$; ciò implica che
$$\left|\big(F(b) - F(a)\big) - \int_a^b f\right| = 0 \iff F(b) - F(a) = \int_a^b f$$
$\square$

Osservazione. Una funzione F avente le proprietà descritte dall'enunciato del teorema 10.3 è detta *primitiva* di f. Chiaramente, se f ammette una primitiva ne ammette in realtà infinite, in quanto $(F+c)' = f$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Notiamo che il teorema 10.2 dice che ogni funzione continua ammette una primitiva; questa non è però necessariamente scrivibile in termini di funzioni elementari.
Il teorema fondamentale del calcolo 10.3 è la ragione per cui si ricercano le primitive delle funzioni per calcolare gli integrali.

10.2 Esercizi: ricerca delle primitive

Esercizio 10.1. *Data la funzione* $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x}$*, determinarne una primitiva.*

Soluzione. Ricordiamo che una primitiva di f è una funzione $F\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Sappiamo che se consideriamo $\log(\cdot)\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, questa è tale per cui

$$\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}$$

Tuttavia, questa non è una primitiva di f, poiché è definita su di un dominio diverso. Possiamo però considerare la funzione

$$\log(-\cdot)\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$$

che è tale che

$$\frac{d}{dx} \log(-x) \overset{(6.11)}{=} \frac{1}{-x} \frac{d}{dx}(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Pertanto abbiamo che la funzione $\log|\cdot| : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f. $\square$

Osservazione. In generale, trovare delle primitive non è facile; possiamo aiutarci scrivendo una primitiva *formalmente* come

$$\int f(x)\, dx$$

e usando formalmente i teoremi validi nella teoria dell'integrazione.

Esercizio 10.2. *Data la funzione* $f\colon (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1-x}$*, determinarne una primitiva.*

Soluzione. Scriviamo la primitiva di f come

$$\int x\sqrt{1-x}\, dx$$

e ricordiamo il seguente risultato:

Teorema 10.4 (Cambiamento di variabile). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a,b]$, e sia $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ una funzione differenziabile su $[c,d]$ con $\varphi' \in \mathscr{R}([c,d])$ e tale che $\varphi([c,d]) \subseteq [a,b]$; allora $f \circ \varphi \in \mathscr{R}([c,d])$ e*

$$\int_c^d (f \circ \varphi)(y)\varphi'(y)\,dy = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx$$

Vorremmo quindi applicarlo formalmente alla scrittura precedente. Per farlo, dobbiamo scegliere in maniera oculata la funzione φ, in modo tale che ci aiuti effettivamente a trovare una primitiva.
Ricordiamo che

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ per ogni } \theta \in \mathbb{R}$$

e notiamo che $\sin^2(\cdot)\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ è una funzione differenziabile e con derivata continua; inoltre è e biiettiva, e quindi se $x \in [0,1]$ lo possiamo scrivere come $\sin^2(\theta_x)$ per qualche $\theta_x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Come nel caso precedente, restringiamo quindi f all'intervallo $[0,1]$ e verifichiamo poi se riusciamo a ricondurre la primitiva trovata ad una funzione definita su tutto $(-\infty, 1]$. Per il teorema 10.4, applicato formalmente, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx = \int f(x)\,dx = \int (f \circ \sin^2)(\theta)\frac{d}{d\theta}\sin^2(\theta)\,d\theta = \\ = \int 2\sin^3(\theta)\cos(\theta)\sqrt{1-\sin^2(\theta)}\,d\theta = \int 2\sin^3(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

ove $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$ poiché su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ il coseno assume valori positivi.
In generale, possiamo trovare le primitive di funzioni del tipo $\sin^n(\theta)\cos^m(\theta)$ sfruttando il fatto che

$$\frac{d}{d\theta}\sin^n(\theta) = n\sin^{n-1}(\theta)\cos(\theta) \quad \frac{d}{d\theta}\cos^n(\theta) = -n\cos^{n-1}(\theta)\sin(\theta) \quad \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Nel nostro caso, abbiamo

$$\begin{aligned}&\int 2\sin^3(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta = 2\int \sin(\theta)(1-\cos^2(\theta))\cos^2(\theta)\,d\theta = \\ &= 2\int \sin(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta - 2\int \sin(\theta)\cos^4(\theta)\,d\theta = \\ &= -\frac{2}{3}\int \frac{d}{d\theta}(\cos^3(\theta))\,d\theta + \frac{2}{5}\int \frac{d}{d\theta}(\cos^5(\theta)) = -\frac{2}{3}\cos^3(\theta) + \frac{2}{5}\cos^5(\theta)\end{aligned}$$

Per trovare una primitiva di $f(x)$, è ora necessario scrivere θ in funzione di x, sapendo che vale la biiezione

$$[0,1] \ni x \mapsto \sin^2(\theta),\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Possiamo quindi scrivere $\theta = \arcsin(\sqrt{x})$; a questo punto

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx &= -\frac{2}{3}\cos^3(\arcsin(\sqrt{x})) + \frac{2}{5}\cos^5(\arcsin\sqrt{x}) = \\ &= -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} = F(x)\end{aligned}$$

Ricordiamo che abbiamo trovato la primitiva restringendo il dominio della funzione a $[0,1]$; quindi a priori la funzione F ottenuta è definita su $[0,1]$. Tuttavia, notiamo che F è in realtà la restrizione a $[0,1]$ di una funzione definita su $(-\infty, 1]$, e inoltre

$$\frac{d}{dx}F(x) = -\sqrt{1-x}(-1) + (\sqrt{1-x})^3(-1) = \sqrt{1-x}\left(1 - (\sqrt{1-x})^2\right) = x\sqrt{1-x}$$

Di conseguenza la funzione F che abbiamo trovato è definita su tutto $(-\infty, 1]$ e soddisfa $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (-\infty, 1]$. $\square$

Osservazione. In questo caso la primitiva poteva essere ottenuta anche tramite un'integrazione per parti (cfr. teorema 10.5): infatti scrivendo

$$F(x) = x \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$$

e notando che $G(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ abbiamo che

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{1-x}\,dx = \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}x + \\ &+ \frac{2}{3}\int (1-x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}x - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}(1-x-1) - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}} = \\ &= -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\right)(1-x)^{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

In questo caso avremmo quindi potuto ottenere l'integrale con altri mezzi, senza passare per la procedura di restrizione e sostituzione con $\sin^2(\theta)$. Ci sono casi in cui questo non è possibile: ad esempio se volessimo trovare una primitiva di $\sqrt{1-x^2}$ o di $(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ l'integrazione per parti non è uno strumento utile per trovare una primitiva. In questo caso la sostituzione $x = \sin(\theta)$ fornisce invece la primitiva.
La sostituzione fatta nell'esercizio precedente torna inoltre utile anche nel caso in cui l'integrazione per parti conduca ad un integrale, ma dopo molti passaggi, come ad esempio nel caso di $f(x) = x^5\sqrt{1-x}$.

Esercizio 10.3. *Data la funzione* $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a \neq 0$, *determinarne una primitiva.*

Soluzione. Anche in questo caso, scriviamo la sua primitiva come

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}}\,dx = \int \frac{1}{|a|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\,dx = \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\frac{1}{a}\,dx$$

Possiamo considerare la funzione $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}$ come la composizione di due funzioni,

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\cdot)^2}} \circ \frac{1}{a} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e di conseguenza possiamo applicare il teorema 10.4, notando che

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}x\right) = \frac{1}{a}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\frac{1}{a}\,dx = \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$$

Vogliamo riapplicare il teorema 10.4, come fatto nell'esercizio 10.2. Dobbiamo quindi trovare una funzione φ che ci aiuti a trovare una primitiva. A questo scopo, ricordiamo che

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e che $\sinh(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione biiettiva, differenziabile e con derivata continua. Applichiamo quindi il teorema 10.4:

$$\frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\xi)}}\cosh(\xi)\,d\xi = \frac{a}{|a|}\int \frac{\cosh(\xi)}{\cosh(\xi)}\,d\xi = \frac{a}{|a|}\xi$$

dove abbiamo usato il fatto che il coseno iperbolico assume sempre valori positivi.
Come nell'esercizio precedente, per trovare l'effettiva primitiva di $f(x)$, è necessario esprimere ξ in funzione di x, sapendo che vale la biiezione

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto \sinh(\xi) \in \mathbb{R}$$

Vale che

$$y = \sinh(\xi) = \frac{1}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}) \iff 2y = e^{\xi} - e^{-\xi} \iff (e^{\xi})^2 - 2ye^{\xi} - 1 = 0$$

Sostituendo $t = e^{\xi}$ abbiamo

$$t^2 - 2yt - 1 = 0 \iff t = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Poiché $t = e^{\xi} > 0$, vale che $t = y + \sqrt{y^2+1}$; di conseguenza

$$e^{\xi} = y + \sqrt{y^2+1} \iff \xi = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

Ricordando che $y = \frac{x}{a}$ abbiamo infine che

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{a}{|a|}\xi = \frac{a}{|a|}\log(y+\sqrt{y^2+1}) = \frac{a}{|a|}\log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right) = F(x)$$

Notiamo che F è definita su tutto $\mathbb{R}$, e che

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{a}{|a|}\frac{1}{\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}\left(\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}+\frac{x}{a}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}$$
$$= \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

□

Esercizio 10.4. *Data la funzione* $f\colon \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \sqrt{x}\log(x)$ *determinarne una primitiva.*

Soluzione. Ricordiamo il seguente risultato:

> **Teorema 10.5** (Integrazione per parti)**.** *Siano* $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni differenziabili in* $[a,b]$ *con* $F' = f$ *e* $G' = g$, $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$. *Allora*
>
> $$\int_a^b Fg\,dx = \big(F(b)G(b) - F(a)G(a)\big) - \int_a^b fG\,dx$$

In generale quando si ha a che fare con il logaritmo l'integrazione per parti torna molto utile perché sappiamo che

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$$

Quindi in questo caso $F(x) = \log(x)$ e $g(x) = \sqrt{x}$, e sappiamo che

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Quindi applicando il teorema 10.5 abbiamo che

$$\int \sqrt{x}\log(x)\,dx = \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx =$$
$$= \frac{2}{3}\log(x)x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{x}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log(x) - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} = F(x)$$

Notiamo che F è definita su $\mathbb{R}^+$ come f, e che

$$\frac{d}{dx}F(x) \overset{(6.10)}{=} \sqrt{x}\log(x) + \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x}\log(x)$$

□

Esercizio 10.5. *Data* $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-a,a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$, *determinarne una primitiva.*

Soluzione. Sappiamo trovare agilmente le primitive di funzioni del tipo $x \mapsto \frac{1}{x+a}$,

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| = \log|x+a|$$

Notiamo che possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)}$$

e quindi ci chiediamo se esistano due coefficienti $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{k_1}{x+a} + \frac{k_2}{x-a}$$

Effettuando esplicitamente la somma di frazioni otteniamo

$$\frac{k_1}{x+a} + \frac{k_2}{x-a} = \frac{k_1(x-a)+k_2(x+a)}{x^2-a^2} = \frac{(k_1+k_2)x+(k_2-k_1)a}{x^2-a^2}$$

e affinché valga l'uguaglianza

$$f(x) = \frac{k_1}{x+a} + \frac{k_2}{x-a}$$

per l'indipendenza lineare dei polinomi di diverso grado i coefficienti k_1, k_2 devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ (k_2-k_1)a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = -k_2 \\ (k_2-k_1)a = 1 \end{cases} \iff k_2 = \frac{1}{2a}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx &= \int \frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}\,dx = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx = \\ &= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = F(x)\end{aligned}$$

Notiamo che F è definita su tutto $\mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ e che

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a} = \frac{1}{2a}\frac{x+a-x+a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

□

Esercizio 10.6. *Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x+2}$, determinarne una primitiva.*

Soluzione. f è definita su tutto $\mathbb{R}$, infatti il discriminante del denominatore è $\Delta = 4-8 < 0$ e di conseguenza è sempre positivo. Non possiamo quindi agire come nell'esercizio 10.5; notiamo però che

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$$

e che

$$\frac{d}{dx}(x+1)^2 = 2x + 2 = 2x - 1 + 3$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{2x-1}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(x+1)^2 - 3}{(x+1)^2+1}\,dx = \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\frac{d}{dx}(x+1)^2\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \\
&= \int \frac{1}{y+1}\,dy - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\frac{d}{dx}(x+1)\,dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \\
&= \log|y+1| - 3\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \log|y+1| - 3\arctan(z) = \\
&= \log\Big|(x+1)^2+1\Big| - 3\arctan(x+1) = F(x)
\end{aligned}$$

Notiamo che F è definita su tutto $\mathbb{R}$ come f, e che

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1} - 3\frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{2x-1}{x^2+2x+2}$$

□

Esercizio 10.7. *Data* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cos(x)+2}$, *determinarne una primitiva.*

Soluzione. In questo caso conviene usare le formule parametriche per scrivere

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \iff x = 2\arctan(t) \text{ per } x \in (-\pi, \pi)$$

Notiamo però che se scriviamo effettuiamo la sostituzione sopra descritta, f non sarà più definita su $\mathbb{R}$, bensì su un $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Poiché conviene restringersi ad intervalli connessi, scegliamo $(-\pi, \pi)$ come intervallo di definizione di f. Notando che se consideriamo $\cos\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ vale che

$$\cos \circ (2\arctan(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

come dalle formule parametriche e usando il teorema 10.4 abbiamo che

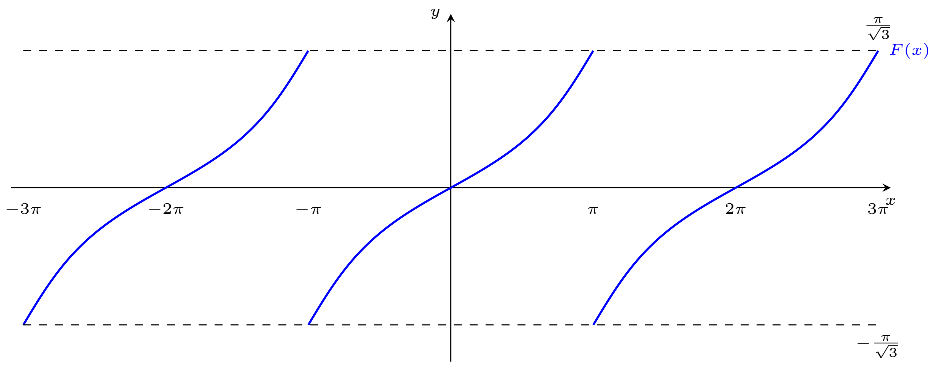
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)+2}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2+2+2t^2}\frac{d}{dt}(2\arctan(t))\,dt = \\ &= \int \frac{1+t^2}{t^2+3}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{t^2+3}\,dt = \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,dt \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = F(x)\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso F è definita in $\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, e di conseguenza non è una primitiva di f, che è invece definita su tutto $\mathbb{R}$. Come possiamo fare a determinare un'effettiva primitiva di f?
Innanzitutto, notiamo che F ammette limite destro e sinistro finiti per $x\to\pi+2k\pi$: infatti,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^-} F(x) &= \lim_{x\to(\pi+2k\pi)^-}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \overset{y=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^+} F(x) &= \lim_{x\to(\pi+2k\pi)^+}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \overset{y=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \\ &= \lim_{y\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$



Poiché sono distinti, il limite

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)} F(x)$$

non esiste, e quindi non è possibile estendere F per continuità a tutto $\mathbb{R}$. Possiamo però agire nel modo seguente: innanzitutto definiamo

$$\widehat{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) & x \in (-\pi, \pi) \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & x = \pi \end{cases}$$

In questo modo abbiamo esteso F a $(-\pi, \pi]$ preservando la continuità da sinistra. Notiamo poi che per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

in quanto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi] = \mathbb{R} \quad (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \cap (-\pi + 2i\pi, \pi + 2i\pi] = \varnothing \text{ se } k \neq i$$

Ci ricordiamo, poi, come scritto nell'osservazione successiva al teorema 10.3, che le primitive di una funzione non sono uniche, bensì sono definite a meno di una costante additiva. In questo caso, possiamo sfruttare questa proprietà a nostro vantaggio per definire un'ulteriore estensione di F nel modo seguente:

$$\tilde{F}(x) = \widehat{F}(x - 2k\pi) + k\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \; k \text{ tale che } x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

In questo modo $\tilde{F}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$: infatti, $\tilde{F}$ è chiaramente continua su $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e vale che

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^-} \tilde{F}(x) = \lim_{x\to(\pi+2k\pi)^-} \widehat{F}(x - 2k\pi) + k\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^+} \tilde{F}(x) = \lim_{x\to(\pi+2k\pi)^+} \widehat{F}(x - 2(k+1)\pi) + (k+1)\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + (k+1)\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \\ = (2k+1)\frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Inoltre, $\tilde{F}$ è differenziabile su tutto $\mathbb{R}$: anche in questo caso $\tilde{F}$ è chiaramente differenziabile su $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e vale che

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^+} \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}(\pi + 2k\pi)}{x - \pi - 2k\pi} = \lim_{x\to(\pi+2k\pi)^+} \frac{\widehat{F}(x - 2(k+1)\pi) + (k+1)\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - k\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}{x - \pi - 2k\pi} =$$

$$\overset{t=x-2(k+1)\pi}{=} \lim_{t\to-\pi^+} \frac{\widehat{F}(t) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}}{t + \pi}$$

Per calcolare

$$\lim_{t\to-\pi^+}\frac{\widehat{F}(t)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{t+\pi}$$

proviamo ad usare il teorema di de l'Hôpital 7.1: sappiamo che $\widehat{F}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ e $t+\pi$ sono differenziabili in $(-\pi,\pi)$, e che $(t+\pi)'=1$ è diverso da 0 per ogni $t\in(-\pi,\pi)$; inoltre $(\widehat{F}+\frac{\pi}{\sqrt{3}})'(t)=\frac{1}{\cos(t)+2}$ per ogni $t\in(-\pi,\pi)$, e

$$\lim_{t\to-\pi^+}\frac{1}{\cos(t)+2}\overset{\text{continuità}}{=}1$$

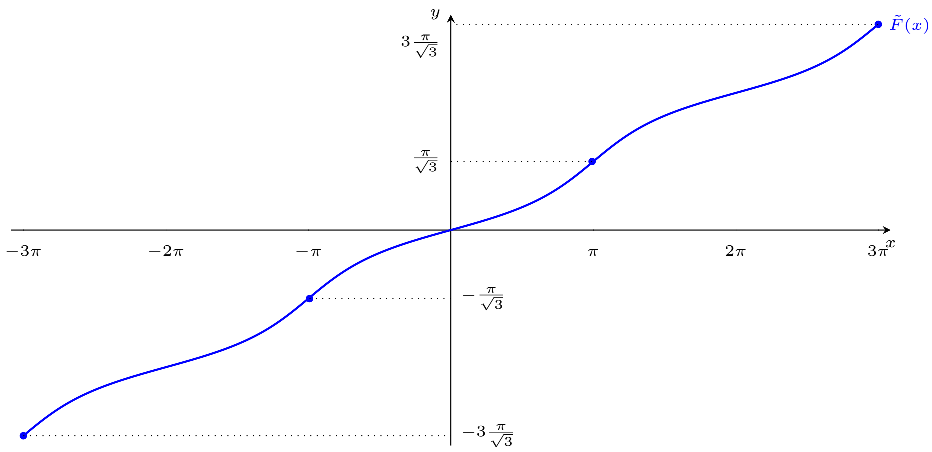
e quindi per il teorema di de l'Hôpital vale che

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^+}\frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(\pi+2k\pi)}{x-\pi-2k\pi}=1$$

Allo stesso modo si dimostra che

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^-}\frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(\pi+2k\pi)}{x-\pi-2k\pi}=\lim_{x\to(\pi+2k\pi)^-}\frac{\widehat{F}(x-2k\pi)+k\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-k\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}{x-\pi-2k\pi}=$$
$$\overset{t=x-2k\pi}{=}\lim_{t\to\pi^-}\frac{\widehat{F}(t)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{t-\pi}=1$$

Di conseguenza $\tilde{F}$ è derivabile anche in $\{\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$; quindi $\tilde{F}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, è differenziabile su tutto $\mathbb{R}$ e vale che $F'(x)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.



□

Osservazione. La primitiva $\tilde{F}$ trovata nel precedente esercizio è un esempio di primitiva non scrivibile in termini di funzioni elementari su tutto il dominio di definizione; ci sono molti altri esempi di questo tipo, come le primitive di e^{-x^2} e di $\frac{\sin(x)}{x}$.

Esercizio 10.8. *Calcolare*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)+\cos^2(x)+2}\,dx$$

Soluzione. In questo caso possiamo procedere in due modi:

(i) possiamo provare a risolvere direttamente l'integrale: notiamo che la funzione integranda

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)+\cos^2(x)+2}$$

può essere scritta come

$$f(x) = -\frac{1}{\cos^4(x)+\cos^2(x)+2}\frac{d}{dx}(\cos(x)) = (g\circ\cos(x))\frac{d}{dx}(\cos(x))$$

ove $g\colon x \mapsto -\frac{1}{x^4+x^2+2}$. Possiamo quindi applicare il teorema 10.4, e scrivere

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)+\cos^2(x)+2}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(g\circ\cos)(x)\frac{d}{dx}\sin(x)\,dx =$$
$$= \int_{\cos(-\pi)}^{\cos(\pi)} -\frac{1}{y^4+y^2+2}\,dy = -\int_{-1}^{-1}\frac{1}{y^4+y^2+2}\,dy = 0$$

(ii) Oppure possiamo usare il seguente risultato:

Proposizione 10.1. *Sia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione dispari tale che $f \in \mathscr{R}([-a,a])$, $a>0$; allora*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Dimostrazione. Sappiamo, per il corollario 10.1 (v), che $f\in\mathscr{R}([-a,0])$ e $f\in\mathscr{R}([0,a])$, e che

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Possiamo quindi considerare la funzione $\varphi\colon [-a,0]\ni x\mapsto -x \in [0,a]$, che è differenziabile e ammette derivata continua in $[-a,0]$, e applicare il teorema 10.4 al primo integrale: avremo

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(-a)} f(x)\,dx = \int_{0}^{-a}(f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{-a} f(-x)\,dx$$

Poiché f è dispari su $\mathbb{R}$ vale che $f(-x) = -f(x)$; di conseguenza

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{-a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

Quindi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx - \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = 0$$

□

Verifichiamo che la funzione integranda sia dispari:

$$\frac{\sin(-x)}{\cos^4(-x)+\cos^2(-x)+2} = \frac{-\sin(x)}{\cos^4(x)+\cos^2(x)+2} = -\frac{\sin(x)}{\cos^4(x)+\cos^2(x)+2}$$

Possiamo quindi applicare la proposizione 10.1, e concludere che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)+\cos^2(x)+2}\, dx = 0$$

$\square$

11 Lezione 11

11.1 Esercizi: funzioni integrali

Esercizio 11.1. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$*; verificare che*

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt$$

è ben definita su tutto $\mathbb{R}$*. Inoltre,*

(i) dimostrare che F *è pari e* $F(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*

(ii) calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^2}$$

Soluzione. Notiamo che f è continua su tutto $\mathbb{R}$; pertanto la sua restrizione ad un intervallo del tipo $[0, x]$ per $x \geq 0$ o $[x, 0]$ per $x < 0$ è continua e, per il corollario 10.1, integrabile su $[0, x]$ o $[x, 0]$ per ogni scelta di $x \in \mathbb{R}$. Quindi F è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Consideriamo ora i due punti:

(i) vogliamo mostrare che $F(-x) = F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo per semplicità $x \geq 0$ (il caso $x < 0$ è analogo) e

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt$$

Notiamo che possiamo definire la funzione $\varphi\colon [0, x] \ni t \mapsto -t \in [-x, 0]$, che è differenziabile e ammette derivata continua in $[0, x]$; inoltre vale che

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt$$

Possiamo quindi usare il teorema 10.4: vale che

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \frac{\sin(-t)}{1+(-t)^2}(-1)\,dt = -\int_0^x \frac{-\sin(t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt = \\ &= F(x) \end{aligned}$$

ove abbiamo usato il fatto che $\sin(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari.
Alla luce di questo, per verificare che $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, possiamo restringerci a $\mathbb{R}^+$. Purtroppo, $F(x)$ non ammette un'espressione in termini di funzioni elementari; per capire se $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ è quindi necessario agire in altro modo. Possiamo, per esempio, studiarne il comportamento, studiando la sua derivata prima. Innanzitutto, notiamo che f è continua su tutto $\mathbb{R}^+$, e di conseguenza per il teorema 10.2 F è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^+$; vale inoltre che

$$F'(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2} \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^+$$

Notiamo che, dato $k \in \mathbb{N}$,

$$F'(x) \geq 0 \text{ se } x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] \text{ e } F'(x) \leq 0 \text{ se } x \in (2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi]$$

ossia

	$2k\pi$		$2k\pi + \pi$		$2(k+1)\pi$		$2(k+1)\pi + \pi$
$F'(x) = f(x)$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Quindi F cresce da $2k\pi$ a $2k\pi + \pi$, decresce fino a $2(k+1)\pi$ e poi ripete il ciclo. Di conseguenza, per dimostrare che F è positiva è sufficiente mostrare che $F(2k\pi) \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, poiché dallo studio del segno di F' possiamo concludere che $F(x) \geq F(2k\pi)$ per ogni $x \in [2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$. Poiché al variare di $k \in \mathbb{N}$ questi intervalli costituiscono una partizione di $\mathbb{R}^+$ avremmo allora che $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Calcoliamo quindi $F(2k\pi)$ al variare di $k \in \mathbb{N}$: chiaramente per $k = 0$ abbiamo

$$F(0) = \int_0^0 \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt = 0$$

Per un k generico vale invece che

$$F(2k\pi) = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt$$

che possiamo scrivere come

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left(\underbrace{\int_{2i\pi}^{2i\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt}_{(11.1)} + \underbrace{\int_{2i\pi+\pi}^{2(i+1)\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt}_{(11.2)} \right)$$

Notiamo che se consideriamo la funzione $\varphi\colon [2i\pi, 2i\pi + \pi] \ni t \mapsto t + \pi$ abbiamo che l'integrale (11.2) può essere scritto come

$$\int_{2i\pi+\pi}^{2(i+1)\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt = \int_{\varphi(2i\pi)}^{\varphi(2i\pi+\pi)} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \int_{2i\pi}^{2i\pi+\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{1+(t+\pi)^2}\, dt =$$
$$= -\int_{2i\pi}^{2i\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{1+(t+\pi)^2}\, dt$$

Notiamo che

$$1 + t^2 \leq 1 + (t+\pi)^2 \implies \frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+(t+\pi)^2} \text{ per ogni } t \in [2i\pi, 2i\pi + \pi]$$

e, poiché $\sin(t) \geq 0$ in $[2i\pi, 2i\pi + \pi]$ vale che

$$\frac{\sin(t)}{1+t^2} \geq \frac{\sin(t)}{1+(t+\pi)^2} \iff \frac{\sin(t)}{1+t^2} - \frac{\sin(t)}{1+(t+\pi)^2} \geq 0 \text{ per ogni } t \in [2i\pi, 2i\pi + \pi]$$

Di conseguenza abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{2k\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt &= \sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{2i\pi}^{2i\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt + \int_{2i\pi+\pi}^{2(i+1)\pi} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{2i\pi}^{2i\pi+\pi} \underbrace{\frac{\sin(t)}{1+t^2} - \frac{\sin(t)}{1+(t+\pi)^2}}_{\geq 0}\,dt\right) \geq 0\end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato che $F(2k\pi) \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e di conseguenza $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Vogliamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^2}$$

Notiamo che il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$; possiamo quindi provare ad applicare il teorema di de l'Hôpital 7.1. Notiamo che $F(x)$ e x^2 sono entrambe differenziabili in $(0, +\infty)$, con

$$F'(x) = f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \neq 0 \text{ in } (0, +\infty)$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{2x}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$$

Di conseguenza per il teorema di de l'Hôpital abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

□

Esercizio 11.2. *Data* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(2t)\,dt$$

determinarne, se esistono, i punti critici e calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6}$$

Soluzione. Notiamo che g può essere scritta come la composizione di due funzioni,

$$g = F \circ h, \quad F(x) = \int_0^x \cos(2t)\,dt \quad h(x) = x^2$$

Dato che $\mathbb{R} \ni t \mapsto \cos(2t)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, ragionando come nell'esercizio 11.1 abbiamo che $F(x)$ è differenziabile su tutto $\mathbb{R}$, con $F'(x) = \cos(2x)$. Quindi g, essendo la composizione di due funzioni differenziabili su tutto $\mathbb{R}$, è differenziabile su tutto $\mathbb{R}$, e usando la (6.11) vale che che

$$g'(x) = (F \circ h)'(x) = F'(h(x))h'(x) = 2x\cos(2x^2)$$

I punti stazionari di g saranno dati dagli zeri di g'; questo accade se $x = 0$ o se $\cos(2x^2) = 0$, ossia se

$$x = 0 \vee 2x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}},\ k \in \mathbb{N}$$

Vogliamo capire se i punti critici in questione sono massimi o minimi locali; per fare questo, studiamo il segno della derivata: in prossimità di $x = 0$ vale che

	$-\sqrt{\frac{\pi}{4}}$		0		$\sqrt{\frac{\pi}{4}}$
$g'(x)$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

e di conseguenza $x = 0$ è un punto di minimo locale per g. Per quanto riguarda invece i punti $x = \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$ abbiamo che, per k pari,

	$\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$		$\sqrt{\frac{\pi}{4} + (k+1)\frac{\pi}{2}}$		$\sqrt{\frac{\pi}{4} + (k+2)\frac{\pi}{2}}$
$g'(x)$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ossia

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{4} + 2n\frac{\pi}{2}} \text{ massimi locali e } x = \sqrt{\frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}} \text{ minimi locali, } n \in \mathbb{N}$$

Per quanto riguarda invece $x = -\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$, abbiamo che, supponendo sempre k pari,

	$-\sqrt{\frac{\pi}{4} + (k+2)\frac{\pi}{2}}$		$-\sqrt{\frac{\pi}{4} + (k+1)\frac{\pi}{2}}$		$-\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$
$g'(x)$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ossia

$$x = -\sqrt{\frac{\pi}{4} + 2n\frac{\pi}{2}} \text{ massimi locali e } x = -\sqrt{\frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}} \text{ minimi locali, } n \in \mathbb{N}$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6}$$

Come nel caso dell'esercizio precedente, il limite è una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, e di conseguenza possiamo provare ad applicare il teorema di de l'Hôpital 7.1: vale che $g(x) - x^2$ e x^6 sono differenziabili su tutto $(0, +\infty)$, con $g'(x) - 2x = 2x(\cos(2x^2) - 1)$ e $(x^6)' = 6x^5 \neq 0$ per $x \in (0, +\infty)$, e inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g'(x) - 2x}{6x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x(\cos(2x^2) - 1)}{6x^5} \overset{(6.3)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x(1 - 2x^4 + o(x^4) - 1}{6x^5} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^5 + o(x^5)}{6x^5} = -\frac{2}{3}$$

Di conseguenza possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital e concludere che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6} = -\frac{2}{3}$$

□

Esercizio 11.3. *Data la funzione* $F \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{x^2+x}^{2x^2} \frac{1}{1 + t\log(t)}\, dt$$

calcolare i primi due termini dello sviluppo di Taylor di F *centrato in* $x_0 = 1$.

Soluzione. Notiamo che la funzione F è ben definita su tutto $\mathbb{R}^+$: infatti, la funzione integranda $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \frac{1}{1+t\log(t)}$ è continua e ben definita su tutto $\mathbb{R}^+$. Per mostrarlo, possiamo considerare il seguente fatto: notiamo che $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto 1 + t\log(t)$ è sempre positiva, infatti abbiamo che

(i) $\lim_{t\to 0^+} 1 + t\log(t) = 1$;

(ii) $1 + t\log(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}^+$, e la sua derivata prima è $1 + \log(t)$. Questa si annulla solamente in $\frac{1}{e}$, ed è negativa in $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ e positiva in $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$; di conseguenza $\frac{1}{e}$ è un punto di minimo globale della funzione, e $1 + \frac{1}{e}\log\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{e} > 0$.

Di conseguenza $(1 + t\log(t))^{-1}$ è ben definita su tutto $\mathbb{R}^+$ ed è continua, essendo composizione di funzioni continue.
Dall'esercizio 11.2 sappiamo calcolare le derivate di oggetti del tipo

$$\int_a^{f(x)} g(t)\, dt$$

Dobbiamo pertanto ricondurci ad una forma simile. Sappiamo che la funzione integranda è definita in 1; possiamo pertanto scrivere

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{x^2+x}^{2x^2} \frac{1}{1+t\log(t)}\,dt = \int_1^{2x^2} \frac{1}{1+t\log(t)}\,dt + \int_{x^2+x}^{1} \frac{1}{1+t\log(t)}\,dt = \\ &= \int_1^{2x^2} \frac{1}{1+t\log(t)}\,dt - \int_1^{x^2+x} \frac{1}{1+t\log(t)}\,dt\end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che la funzione integranda è continua in $(0,+\infty)$, e di conseguenza, grazie al teorema 10.2, F è differenziabile in $(0,+\infty)$, essendo somma e composizione di funzioni differenziabili. Vale in particolare che

$$F'(x) \overset{(6.11)}{=} \frac{4x}{1+2x^2\log(2x^2)} - \frac{2x+1}{1+(x^2+x)\log(x^2+x)}$$

Ricordiamo che il polinomio di Taylor di una funzione ha la forma (7.1); di conseguenza è necessario calcolare $F(1)$, $F'(1)$ e $F''(1)$. Chiaramente vale che

$$F(1) = \int_2^2 \frac{1}{1+t\log(t)}\,dt = 0$$

mentre

$$F'(1) = \frac{4}{1+2\log(2)} - \frac{3}{1+2\log(2)} = \frac{1}{1+2\log(2)}$$

Dobbiamo ora calcolare $F''(x)$:

$$\begin{aligned}F''(x) = &\frac{4}{1+2x^2\log(2x^2)} - \frac{(4x)^2}{(1+2x^2\log(2x^2))^2}\Big(\log(2x^2)+1\Big) - \\ &- \frac{2}{1+(x^2+x)\log(x^2+x)} + \frac{(2x+1)^2}{(1+(x^2+x)\log(x^2+x))^2}\Big(\log(x^2+x)+1\Big)\end{aligned}$$

Se valutiamo l'espressione in $x_0 = 1$ otteniamo

$$\begin{aligned}F''(1) &= \frac{4}{1+2\log(2)} - \frac{16}{(1+2\log(2))^2}(\log(2)+1) - \\ &- \frac{2}{1+2\log(2)} + \frac{9}{(1+2\log(2))^2}(\log(2)+1) = \\ &= \frac{2}{1+2\log(2)} - \frac{7}{(1+2\log(2))^2}(1+\log(2)) = \\ &= \frac{-5-3\log(2)}{(1+2\log(2))^2}\end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$F(x) = 0 + \frac{1}{1+2\log(2)}(x-1) - \frac{5+3\log(2)}{(1+2\log(2))^2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

□

Esercizio 11.4. *Data la successione* $(a_n)_n$,

$$a_n = \int_0^1 ne^{-nx}\,dx$$

determinarne, se esiste, il limite per $n \to \infty$

Soluzione. Notiamo che se fissiamo $x_0 \in (0,1]$ la successione $b_n = ne^{-nx_0}$ tende a 0 per $n \to \infty$, mentre se consideriamo $x_0 = 0$ vale che $b_n = n$ diverge a $+\infty$. Se immaginiamo di poter fare lo scambio

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ne^{-nx}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} ne^{-nx}\,dx$$

possiamo pensare, alla luce del corollario 10.2, che

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} ne^{-nx}\,dx = 0$$

Tuttavia, se effettuiamo esplicitamente il calcolo vale che

$$a_n = \int_0^1 ne^{-nx}\,dx = -\int_0^1 e^{-nx}(-n)\,dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} -\int_0^{-n} e^y\,dy = 1 - e^{-n}$$

e di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-n} = 1$$

Abbiamo quindi verificato che, almeno in questo caso,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ne^{-nx}\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} ne^{-nx}\,dx$$

□

Esercizio 11.5. *Data la successione* $(a_n)_n$,

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx$$

determinarne, se esiste, il limite per $n \to \infty$.

Soluzione. Anche in questo caso la funzione integranda ha un comportamento simile alla funzione integranda dell'esercizio 11.5: infatti per $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ vale che $b_n = \tan^n(x_0) \to 0$ per $n \to \infty$, mentre per $x_0 = \frac{\pi}{4}$ vale che $b_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi, ragionando per analogia con il caso dell'esercizio 11.5, a priori non possiamo scambiare l'operazione di limite e l'integrazione. Calcoliamo quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx$$

Notiamo innanzitutto che, poiché $\tan(x) \leq 1$ per ogni $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, vale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\tan^{n+1}(x) \leq \tan^n(x) \text{ per ogni } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x)\,dx$$

ossia $a_n \geq a_{n+1}$, e quindi la successione è monotona decrescente. Vale inoltre che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\tan^n(x) \geq 0$; di conseguenza

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx \geq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

ossia $a_n \geq 0$. Quindi per il teorema 4.7 $a_n \to a$ per $n \to \infty$. Per determinare a, calcoliamo esplicitamente l'integrale: chiaramente per $n = 0$ vale che

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^0(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$$

mentre per $n = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} \frac{d}{dx}(\cos(x))\,dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \\ &= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t}\,dt = -\log|t| \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(2) \end{aligned}$$

Supponiamo ora che $n \geq 2$: possiamo scrivere

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(x)\tan^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(x)\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(x)\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(x)\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(x)\,dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(x)\frac{d}{dx}(\tan(x))\,dx - a_{n-2} \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \int_0^1 y^{n-2}\,dy - a_{n-2} = \\ &= \frac{1}{n-1} y^{n-1}\Big|_0^1 - a_{n-2} = \frac{1}{n-1} - a_{n-2} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n-1} - a_{n-2}\right) = -\lim_{n\to\infty} a_{n-2} = -a$$

ossia il limite della successione soddisfa $a = -a$; l'unico numero reale che verifica questa uguaglianza è 0, quindi $a = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx = 0$$

In questo caso vale che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lim_{n\to\infty}\tan^n(x)\,dx$$

□

Esercizio 11.6. *Data la funzione* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^4}{(t+x^2)^3}\,dt$$

determinare

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Soluzione. In generale, abbiamo visto negli esercizi 11.4 e 11.5 che lo scambio di limite ed integrazione non porta al giusto risultato. Per risolvere l'esercizio possiamo procedere in due modi:

(i) Calcoliamo esplicitamente l'integrale:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{t^4}{(t+x^2)^3}\,dt = \int_0^1 \frac{t^4}{x^6\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^3}\,dt = x^4\int_0^1 \frac{t^4}{x^8}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^3}\frac{1}{x^2}\,dt \overset{\text{Teorema 10.4}}{=}\\
&= x^4\int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{u^4}{(1+u)^3}\,du \overset{\text{Teorema 10.5}}{=} -\frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{x^4}{2}\int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{4u^3}{(1+u)^2}\,du \overset{\text{Teorema 10.5}}{=}\\
&= -\frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{2}{(x^2+1)} + 6x^4\int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{u^2}{u+1}\,du =\\
&= -\frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{2}{(x^2+1)} + 6\int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{u^2-1+1}{u+1}\,du =\\
&= -\frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{2}{(x^2+1)} + 6x^4\int_0^{\frac{1}{x^2}} u-1\,du + 6x^4\int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{u+1}\,du =\\
&= -\frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{6x^4}{2x^4} - \frac{6x^4}{x^2} + 6x^4\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =\\
&= 3 - \frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{2}{(x^2+1)} - 6x^2 + 6x^4\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Se effettuiamo il limite esplicitamente otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{t^4}{(t+x^2)^3}\,dt &= \lim_{x\to 0^+} 3 - \frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{2}{(x^2+1)} - 6x^2 + 6x^4\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =\\
&= 3 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(ii) Possiamo effettuare la seguente manipolazione, restringendo il dominio della funzione integranda a $(0,1]$ (che non comporta problemi all'integrazione, cfr. corollario 10.2):

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^4}{(t+x^2)^3}\, dt = \int_0^1 \frac{t^4}{t^3\left(1+\frac{x^2}{t}\right)^3}\, dt = \int_0^1 \frac{t}{\left(1+\frac{x^2}{t}\right)^3}$$

A questo punto, possiamo considerare lo sviluppo di Taylor di $\left(1+\frac{x^2}{t}\right)^{-3}$ in un intorno di 0:

$$\left(1+\frac{x^2}{t}\right)^{-3} = 1 - 3\frac{x^2}{t} + o(x^2)$$

e sostituire questa espressione nell'integrale, ottenendo

$$f(x) = \int_0^1 t\left(1+\frac{x^2}{t}\right)^{-3} = \int_0^1 t\left(1 - 3\frac{x^2}{t} + o(x^2)\right) dt = \int_0^1 t - 3x^2 + to(x^2)\, dt =$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} - 3x^2 t + o(x^2)\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 3x^2 + o(x^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - 3x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}$$

□

Osservazione. Come abbiamo visto in precedenza, in generale lo scambio dell'operazione di limite con l'operazione di integrazione non è consentito. Quindi ci chiediamo se la procedura risolutiva che abbiamo adottato nel punto (ii) sia o meno legittima.
In generale, i teoremi che regolano questa procedura sono tre: il teorema della convergenza monotona, il teorema della convergenza uniforme e il teorema della convergenza dominata[11]. Nel caso in esame, le richieste del teorema della convergenza dominata di Arzelà [1] sono soddisfatte: infatti,

(i) data una qualsiasi successione $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^+$ che converge a 0, abbiamo che la successione di funzioni $[0,1] \ni t \mapsto i_n(t) = t^4(t+x_n^2)^{-3}$ converge puntualmente a

$$\lim_{n\to\infty} i_n(t) = \lim_{n\to\infty} t^4(t+x_n^2)^{-3} = t$$

Chiaramente $t \in \mathscr{R}([0,1])$.

[11] Ne esistono diverse versioni: quella applicabile all'integrazione di Riemann è dovuta ad Arzelà, mentre la versione per l'integrazione di Lebesgue è detta convergenza dominata di Lebesgue. I due teoremi differiscono per un'ipotesi fondamentale: il primo assume che la successione di funzioni converga puntualmente ad una funzione integrabile secondo Riemann, mentre per il secondo è sufficiente che la successione converga puntualmente.

(ii) data una qualsiasi successione $(x_n)_n$ con $x_n \to 0^+$, abbiamo che

$$\left|i_n(t)\right| = \left|t^4(t + x_n^2)^{-3}\right| \leq |t| \leq 1$$

ossia $\left|i_n(t)\right| \leq 1$ per ogni $t \in [0, 1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi in questo caso la procedura di scambio è consentita, e abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^1 \frac{t^4}{(t + x^2)^3} \, dt = \int_0^1 \lim_{x \to 0^+} \frac{t^4}{(t + x^2)^3} \, dt$$

L'espansione di Taylor della funzione integranda è quindi giustificata. *Ai fini dell'esame, se vi troverete davanti un caso simile all'esercizio 11.6, le ipotesi del teorema della convergenza dominata di Arzelà saranno soddisfatte.*

12 Lezione 12

12.1 Ripasso: integrazione di Riemann impropria

Definizione 12.1. Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in \mathscr{R}([a,x])$ per ogni $x > a$. Diremo che la quantità

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

esiste se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

Allo stesso modo,

Definizione 12.2. Data una funzione $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathscr{R}([a,x])$ per ogni $x \in (a,b)$, diremo che la quantità

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

esiste se esiste finito

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x)$$

Osservazione. Notiamo che in questo secondo caso possono presentarsi due casi: la funzione $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ non è definita in b ma ammette limite finito per $x \to b^-$ (ad esempio se f fosse $[-1,0) \ni x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$), oppure f non è definita in b e non ammette limite finito per $x \to b^-$ (ad esempio, $[1,0) \ni x \mapsto \frac{1}{x}$). Nel primo caso possiamo agire nel modo seguente: possiamo definire per continuità una funzione $\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ che è definita su tutto $[a,b]$ ed è tale che $\tilde{f} \in \mathscr{R}([a,b])$. In virtù del corollario 10.2, poiché $\tilde{f}$ e f differiscono solamente in un punto, possiamo dire che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$$

Di conseguenza, nel primo caso il limite esiste sempre; di conseguenza, in generale quando si parla di integrazione di Riemann impropria si tende a considerare unicamente due casi:

(i) funzioni f **definite su un intervallo illimitato**;

(ii) funzioni f **definite su un intervallo limitato aventi immagine illimitata**.

Esempio. Consideriamo $f\colon [0,+\infty) \ni t \mapsto \sin(t) \in \mathbb{R}$; ci chiediamo se esiste

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt$$

Calcoliamo quindi

$$F(x) = \int_0^x \sin(t)\,dt = -\cos(t)\Big|_0^x = 1 - \cos(x)$$

Vogliamo determinare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

Ci ricordiamo che vale il teorema 5.1: consideriamo quindi due successioni,

$$(a_n = 2n\pi)_n \qquad (bn = \pi + 2n\pi)_n$$

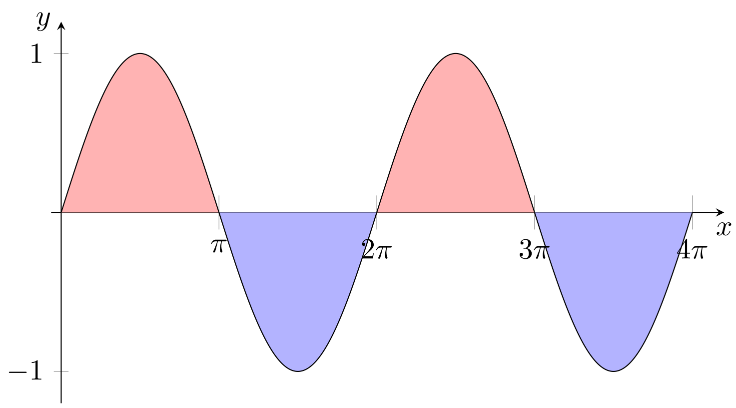
Entrambe divergono a $+\infty$ per $n \to \infty$, e possiamo considerare quindi

$$\lim_{n\to\infty} F(a_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \cos(2n\pi) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F(b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \cos(\pi + 2n\pi) = 2$$

Di conseguenza per il teorema 5.1 sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} F(x)$$

non esiste.
Questo esempio ammette un'interessante interpretazione grafica: se consideriamo infatti il grafico di $f(t) = \sin(t)$



sappiamo che $F(x)$ rappresenta l'area sottesa dal grafico di $\sin(t)$ da 0 a x. Per x che varia da 0 a π quest'area cresce fino a raggiungere il valore massimo di 2 per $x = \pi$; dopodiché decresce sino a raggiungere il valore minimo di 0 per $x = 2\pi$, e il processo si ripete ogni periodo. Poiché l'area sottesa dal grafico oscilla in questo modo, non tende a stabilizzarsi verso un valore predefinito per $x \to +\infty$, e di conseguenza l'integrale improprio non esiste.

Per capire se un integrale improprio esiste o meno, possiamo appellarci ai seguenti risultati:

Teorema 12.1. *Siano $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue (in modo tale da soddisfare le richieste di integrabilità) e tali che esista $M > 0$ tale che*

$$Mg(x) \geq f(x) \geq 0 \textit{ per ogni } x \in [a, +\infty)$$

Allora:

(i) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *esiste allora* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *esiste;*

(ii) Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge allora* $\int_a^{+\infty} g(x)$ *diverge.*

Teorema 12.2. *Siano* $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue tali che* $f(x), g(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a, +\infty)$ *e tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{ e } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

hanno lo stesso comportamento.

Analoghi risultati valgono per nel caso di integrali impropri nel senso della definizione 12.2.

12.2 Esercizi: integrazione di Riemann impropria

Esercizio 12.1. *Determinare se*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

esiste.

Soluzione. Notiamo che la funzione integranda $f\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$ può essere scritta come

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}$$

e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Pertanto l'integrale che stiamo considerando è un integrale di Riemann improprio; per determinare se questo esiste, conviene usare uno dei teoremi 12.1 e 12.2.
Notiamo che per la definizione 12.2 vale che

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}\,dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \\ &= \lim_{u\to 0^+} -\int_1^u \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}\sqrt{1+(1-y)^2}}\,dy = \\ &= \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}\sqrt{1+(1-y)^2}}\,dy\end{aligned}$$

A questo punto possiamo provare a sviluppare con Taylor (cfr. teorema 7.2) parte del denominatore per provare a trovare una funzione $g(y)$ che soddisfi il teorema 12.2:

$$\frac{1}{\sqrt{2-y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}y + o(y) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+(1-y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}y + o(y)$$

La funzione integranda può essere quindi sviluppata in un intorno di $y = 0$ come

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}y+o(y)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}y+o(y)\right) &= \\ = \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}y+o(y)\right) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{3}{8}\sqrt{y}+o(\sqrt{y})\end{aligned}$$

Se consideriamo $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ abbiamo che

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{3}{8}\sqrt{y}+o(\sqrt{y})\right)2\sqrt{y} = \lim_{y\to 0^+} 1+\frac{3}{4}y+o(y) = 1$$

Notiamo che $f(y)$ e $g(y)$ sono continue in $(0, 1]$ e positive; quindi per il teorema 12.2 vale che

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \text{ e } \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$$

hanno lo stesso comportamento. Sappiamo che $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ esiste se $\alpha < 1$; pertanto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

esiste. $\square$

Esercizio 12.2. *Determinare i valori di $\alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\int_0^\pi \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\,dx$$

esiste.

Soluzione. Innanzitutto, osserviamo che la funzione è continua su $(0, \pi)$, e di conseguenza è Riemann-integrabile su $[x_1, x_2]$ per ogni scelta di $0 < x_1 < x_2 < \pi$. Notiamo inoltre che in questo caso i punti problematici sono due: infatti, per ogni scelta di $\alpha, \beta > 0$ vale che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to \pi^-}\frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)} = +\infty$$

Poiché sappiamo trattare funzioni con eventualmente un solo punto problematico, possiamo appellarci al punto (i) della seconda parte del corollario 10.1 per scrivere

$$\int_0^\pi \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\,dx$$

Questa scrittura è possibile solamente se esistono separatamente

$$\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\,dx}_{(12.1)} \qquad \underbrace{\lim_{z\to \pi^-}\int_{\frac{\pi}{2}}^z \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\,dx}_{(12.2)}$$

Consideriamo quindi i due limiti:

(i) per quanto riguarda (12.1), operiamo come nella soluzione dell'esercizio 12.1, ossia sviluppiamo con Taylor la funzione integranda in un intorno di $x_0 = 0$, notando che $\cos(x) \geq 0$ per ogni $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\left|\cos(x)\right|^{2\alpha} = (\cos(x))^{2\alpha} = (1 + o(x))^{2\alpha} \qquad \sin^\beta(x) = \left(x + o(x)\right)^\beta = x^\beta \left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)^\beta$$

Quindi abbiamo che

$$\frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)} = \frac{(1 + o(x))^{2\alpha}}{x^\beta \left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)^\beta}$$

Se consideriamo $g(x) = \frac{1}{x^\beta}$ vale che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1 + o(x))^{2\alpha}}{x^\beta \left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)^\beta} x^\beta = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1 + o(x))^{2\alpha}}{\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)^\beta} = 1$$

Entrambe le funzioni sono continue e positive su $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, e per il teorema 12.2 abbiamo che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\, dx \text{ e } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^\beta}\, dx$$

hanno lo stesso comportamento. Come prima, sappiamo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^\beta}\, dx$ esiste se $\beta < 1$.

(ii) Consideriamo ora il limite (12.2): notiamo innanzitutto che $\cos(x) \leq 0$ per ogni $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e quindi

$$\left|\cos(x)\right|^{2\alpha} = (-\cos(x))^{2\alpha}$$

Procedendo come prima e sviluppando numeratore e denominatore della funzione integranda in un intorno di $x_0 = \pi$ abbiamo

$$(-\cos(x))^{2\alpha} = (1 + o(x - \pi))^{2\alpha}$$

e

$$\sin^\beta(x) = \left(-(x - \pi) + o((x - \pi))\right)^\beta = (\pi - x)^\beta \left(1 + \frac{o(\pi - x)}{\pi - x}\right)^\beta$$

e se consideriamo $g(x) = \frac{1}{(\pi - x)^\beta}$ vale che

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{(1 + o(x - \pi))^{2\alpha}}{(\pi - x)^\beta \left(1 + \frac{o(\pi - x)}{\pi - x}\right)^\beta} (\pi - x)^\beta = \lim_{x\to \pi^-} \frac{(1 + o(x - \pi))^{2\alpha}}{\left(1 + \frac{o(\pi - x)}{\pi - x}\right)^\beta} = 1$$

con $g(x), f(x)$ continue e positive in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Quindi per il teorema 12.2

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\, dx \text{ e } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(\pi - x)^\beta}\, dx$$

hanno lo stesso comportamento. Notiamo che

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(\pi - x)^\beta}\, dx = \lim_{z \to \pi^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \frac{1}{(\pi - x)^\beta}\, dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \lim_{u \to 0^+} \int_{u}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y^\beta}\, dy$$

che esiste finito per $\beta < 1$.

Quindi entrambi i limiti (12.1) e (12.2) esistono finiti se $\beta < 1$ e per ogni α; quindi l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{\left|\cos(x)\right|^{2\alpha}}{\sin^\beta(x)}\, dx$$

esiste se $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$. □

Esercizio 12.3. *Calcolare, se esiste,*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

Soluzione. Notiamo che $e^x + e^{-x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; pertanto l'unica criticità dell'integrale improprio è il dominio di integrazione illimitato. Procediamo quindi secondo la definizione 12.1, ossia

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

Notiamo che

$$\int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\, dx = \int_0^t \frac{1}{(e^x)^2 + 1} e^x\, dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \int_1^{e^t} \frac{1}{y^2 + 1}\, dy$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^{e^t} \frac{1}{y^2 + 1}\, dy = \lim_{t \to +\infty} \Big(\arctan(e^t) - \arctan(1)\Big) = \\ = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

□

Esercizio 12.4. *Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri*

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-\alpha} \arctan\left(\frac{x}{x^4 + 1}\right) dx$$

(i) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio esiste;

(ii) per questi α, calcolare I_α.

Soluzione. Innanzitutto, detta $f(x)$ la funzione

$$f(x) = |x|^{-\alpha} \arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right)$$

notiamo che per $\alpha \leq 0$ la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$, mentre per $\alpha > 0$ la funzione è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In entrambi i casi, notiamo che

$$f(-x) = |-x|^{-\alpha} \arctan\left(\frac{-x}{(-x)^4+1}\right) = -|x|^{-\alpha} \arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right) = -f(x)$$

ossia f è dispari sul proprio dominio di definizione. Consideriamo quindi I_α: questo integrale improprio consiste in realtà, come nel caso dell'esercizio 12.2, nella somma di 4 integrali impropri "di base", ossia

$$I_\alpha = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx}_{(12.3)} + \underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx}_{(12.4)} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}_{(12.5)} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx}_{(12.6)}$$

Quindi affinché I_α esista devono esistere questi singolarmente questi 4 integrali. Consideriamo ora i fatti seguenti:

(i) se consideriamo gli integrali (12.3) e (12.6), che esplicitamente sono rispettivamente

$$\lim_{y\to-\infty} \int_y^{-1} f(x)\,dx \text{ e } \lim_{u\to+\infty} \int_1^{u} f(x)\,dx$$

notiamo che

$$\lim_{y\to-\infty} \int_y^{-1} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{-(1)} f(x)\,dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \lim_{u\to+\infty} \int_u^{1} -f(-x)\,dx =$$
$$= \lim_{u\to+\infty} \int_1^{u} f(-x)\,dx = -\lim_{u\to+\infty} \int_1^{u} f(x)\,dx$$

Quindi se esiste (12.6) automaticamente esiste (12.3). Possiamo quindi studiare unicamente il limite (12.6). Un analogo risultato vale per i limiti (12.4) e (12.5).

(ii) In virtù del punto (i), notiamo che se (12.5) e (12.6) esistono allora I_α esiste e vale che

$$I_\alpha = 0$$

Di conseguenza quando I_α esiste, questo vale 0.

Determiniamo ora i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che (12.5) e (12.6) esistono finiti.

(i) Consideriamo (12.5), ossia

$$\lim_{y\to0^+} \int_y^{1} f(x)\,dx$$

Per determinare se esiste, procediamo come nel caso degli esercizi 12.1 e 12.2, ossia proviamo ad applicare il teorema 12.2 sfruttando l'espansione di Taylor di $f(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$:

$$\arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right) = x + o(x) = x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)$$

quindi

$$f(x) = |x|^{-\alpha} \arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right) = x^{-\alpha} x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)$$

Di conseguenza, se consideriamo $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right) x^{\alpha-1} = \lim_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right) = 1$$

e poiché f e g sono entrambe continue e positive in $(0, 1]$ abbiamo che

$$\int_0^1 f(x)\, dx \text{ e } \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, dx$$

hanno lo stesso comportamento alla luce del teorema 12.2. Poiché sappiamo che $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, dx$ esiste se $\alpha < 2$, lo stesso vale per (12.5).

(ii) Se consideriamo (12.6),

$$\lim_{y\to+\infty} \int_1^y f(x)\, dx$$

per operare come prima bisogna stimare il comportamento di $\arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right)$ per grandi x; chiaramente

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right) = 0$$

però per decidere se l'integrale esiste o meno dobbiamo stimare la velocità di decadimento della funzione. Per fare questo dobbiamo fare uno "sviluppo all'∞" della funzione. A questo scopo, consideriamo i seguenti passaggi:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}\right) \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0^+} \arctan\left(\frac{y^3}{1+y^4}\right)$$

Quindi il comportamento all'infinito di $\arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right)$ è analogo al comportamento in un intorno di 0 di $\arctan\left(\frac{y^3}{y^4+1}\right)$. Consideriamone quindi lo sviluppo di Taylor in un intorno di $x_0 = 0$:

$$\arctan\left(\frac{y^3}{y^4+1}\right) = y^3 + o(y^3)$$

e di conseguenza

$$\arctan\left(\frac{x}{x^4+1}\right) = \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{per } x \to +\infty$$

Quindi

$$f(x) = |x|^{-\alpha} \frac{1}{x^3}\left(1 + x^3 o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{x^{3+\alpha}}\left(1 + x^3 o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

e se definiamo $g(x) = \frac{1}{x^{3+\alpha}}$ abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{3+\alpha}}\left(1 + x^3 o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) x^{3+\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + x^3 o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = 1$$

Dato che f e g sono continue e positive su $[1, +\infty)$, per il teorema 12.2 abbiamo che

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ e } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+3}}\,dx$$

hanno lo stesso comportamento. Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+3}}\,dx$ esiste se $\alpha > -2$, lo stesso vale per (12.6).

Possiamo quindi concludere dicendo che I_α esiste per $\alpha \in (-2, 2)$ e che per α in questo intervallo $I_\alpha = 0$. □

Esercizio 12.5. *Determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha (x-1)^\beta}\,dx$$

esiste.

Soluzione. Come nel caso dell'esercizio 12.4, i problemi di questo integrale improprio sono due: la singolarità della funzione integranda

$$f(x) = \frac{\log(x)e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha (x-1)^\beta}$$

in $x = 1$ e l'illimitatezza del dominio di integrazione. È quindi necessario considerare separatamente i due casi

$$I = \underbrace{\int_1^{e} f(x)\,dx}_{(12.7)} + \underbrace{\int_e^{+\infty} f(x)\,dx}_{(12.8)}$$

(i) Consideriamo l'integrale improprio (12.7), che possiamo scrivere come

$$\lim_{y\to 1^+}\int_y^e f(x)\,dx$$

Per poter applicare il teorema 12.2 dobbiamo, come nei casi precedenti, determinare il comportamento in un intorno di $x_0 = 1$ di $f(x)$ sfruttando l'espansione in serie di Taylor:

$$\log(x) = \log(1 + (x-1)) = (x-1) + o(x-1) \qquad e^{-x^2} = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-1) + o(x-1)$$

e

$$\frac{1}{(x+1)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} - \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}}(x-1) + o(x-1)$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{(x-1)^{1-\beta}}{2^\alpha e}\left(1 + \frac{o(x-1)}{x-1}\right)\big(1 - 2(x-1) + o(x-1)\big) \times \\ & \times \left(1 - \frac{\alpha}{2}(x-1) + o(x-1)\right) \end{aligned}$$

e definendo $g(x) = \frac{(x-1)^{1-\beta}}{2^\alpha e}$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Dato che f e g sono positive e continue in $(1, e]$ per il teorema 12.2

$$\int_1^e \frac{\log(x)e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha(x-1)^\beta}\,dx \text{ e } \int_1^e \frac{(x-1)^{1-\beta}}{2^\alpha e}\,dx$$

hanno lo stesso comportamento; effettuando passaggi simili a quelli dell'esercizio 12.2 possiamo quindi dire che (12.7) esiste se $\beta < 2$.

(ii) Per quanto riguarda l'integrale (12.8), notiamo innanzitutto che

$$\frac{\log(x)e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha(x-1)^\beta} \le \frac{xe^{-x^2}}{(x+1)^\alpha(x-1)^\beta} \text{ per ogni } x \in [e, +\infty) \tag{12.9}$$

e, se consideriamo $g(x) = x^{1-\beta-\alpha}e^{-x^2}$, abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x^2}}{(x+1)^\alpha(x-1)^\beta}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{(x+1)^\alpha}\frac{x^\beta}{(x-1)^\beta} = 1$$

e di conseguenza $\frac{xe^{-x^2}}{(x+1)^\alpha(x-1)^\beta}$ e g hanno lo stesso comportamento per il teorema 12.2. Determiniamo quindi per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_e^{+\infty} x^{1-\alpha-\beta}e^{-x^2}$$

esiste. A questo scopo, consideriamo separatamente i casi $1-\alpha-\beta \leq 0$ e $1-\alpha-\beta > 0$. Nel caso $1-\alpha-\beta = 0$ il risultato segue dal fatto che l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ esiste finito, mentre nel caso $1-\alpha-\beta < 0$ possiamo ragionare come segue: la funzione

$$[e,+\infty) \ni x \mapsto x^{1-\alpha-\beta}$$

è monotona decrescente, e quindi

$$x^{1-\alpha-\beta}e^{-x^2} \leq e^{1-\alpha-\beta}e^{-x^2} \quad \forall x \in [e,+\infty)$$

Dato che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ esiste, grazie al teorema 12.1 abbiamo che

$$\int_e^{+\infty} x^{1-\alpha-\beta}e^{-x^2}\,dx$$

esiste finito; per il teorema 12.2 segue che

$$\int_e^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{(x+1)^\alpha(x-1)^\beta}\,dx$$

esiste e quindi grazie al teorema 12.1 e alla stima (12.9) possiamo concludere che

$$\int_e^{+\infty} \frac{\log(x)e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha(x-1)^\beta}\,dx$$

esiste finito; quindi l'integrale improprio esiste se $\alpha+\beta \geq 1$.
Se invece $1-\alpha-\beta > 0$, bisogna operare diversamente. Vogliamo mostrare che

$$\int_e^{+\infty} x^{1-\alpha-\beta}e^{-x^2}\,dx$$

esiste. A questo scopo, restringiamoci inizialmente al caso $1-\alpha-\beta \in \mathbb{N}$ e procediamo per induzione:

(a) *caso base* $n=1$: vale che

$$\begin{aligned}\int_e^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx &= \lim_{y\to+\infty}\int_e^y xe^{-x^2}\,dx = \lim_{y\to+\infty} -\frac{1}{2}\int_e^y e^{-x^2}\frac{d}{dx}(-x^2)\,dx \overset{\text{Teorema 10.4}}{=} \\ &= \lim_{y\to+\infty} -\frac{1}{2}\int_{-e^2}^{-t^2} e^z\,dz = \frac{1}{2}e^{-e^2} - \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t^2}}{2} = \frac{1}{2}e^{-e^2}\end{aligned}$$

(b) *passo induttivo*: supponiamo che valga per $n \geq 1$, e mostriamo che vale per $n+1$. Consideriamo quindi

$$\begin{aligned}&\int_e^{+\infty} x^{n+1}e^{-x^2}\,dx = \lim_{y\to+\infty} -\frac{1}{2}\int_e^y x^n\frac{d}{dx}(e^{-x^2})\,dx \overset{\text{Teorema 10.5}}{=} \\ &= \frac{1}{2}e^ne^{-e^2} - \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{2}y^ne^{-y^2} - \frac{n}{2}\int_e^y x^{n-1}e^{-x^2}\,dx\right)\end{aligned}$$

Notiamo che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2} y^n e^{-y^2} = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e che

$$\lim_{y\to+\infty} -\frac{n}{2}\int_e^y x^{n-1} e^{-x^2}\, dx$$

esiste finito per l'ipotesi induttiva[12]. Quindi possiamo applicare il teorema 4.2 e concludere che

$$\int_e^{+\infty} x^{n+1} e^{-x^2}\, dx$$

esiste finito.

Quindi

$$\int_e^{+\infty} x^n e^{-x^2}\, dx$$

esiste finito per ogni $n \in \mathbb{N}$. Noi vogliamo mostrare che

$$\int_e^{+\infty} x^{1-\alpha-\beta} e^{-x^2}\, dx$$

converge per ogni scelta di α, β tali che $1-\alpha-\beta > 0$. Ma questo segue dalla proprietà archimedea dei numeri reali e dal teorema 12.1: infatti, per ogni scelta di α, β tali che $1-\alpha-\beta > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > 1-\alpha-\beta$$

e ne consegue che possiamo trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$x^n e^{-x^2} \geq x^{1-\alpha-\beta} e^{-x^2} \text{ per ogni } x \in [e, +\infty)$$

Per il teorema 12.1 vale quindi che

$$\int_e^{+\infty} x^{1-\alpha-\beta} e^{-x^2}\, dx$$

esiste finito per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; il teorema 12.2 a questo punto ci dice che

$$\int_e^{+\infty} \frac{x e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha (x-1)^\beta}\, dx$$

esiste finito per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi concludere, grazie alla stima (12.9) e al teorema 12.2, che

$$\int_e^{+\infty} \frac{\log(x) e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha (x-1)^\beta}\, dx$$

esiste finito per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[12] $x^n \geq x^{n-1}$ per ogni scelta di $x \in [e, +\infty)$ per $n \geq 1$; di conseguenza l'asserzione segue dal teorema 12.1.

Quindi per il punto (i) sappiamo che (12.7) esiste se $\beta < 2$, mentre per il punto (ii) l'integrale (12.8) esiste per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Quindi l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)e^{-x^2}}{(x+1)^\alpha (x-1)^\beta}\,dx$$

esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta < 2$. □

Esercizio 12.6. *Determinare per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ l'integrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

esiste finito.

Soluzione. Consideriamo un generico $x \in \mathbb{R}$, con $x \geq 1$; possiamo scrivere

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y t^{x-1}e^{-t}\,dt = \lim_{y\to+\infty}\int_{0^2}^{(\sqrt{y})^2} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \lim_{y\to+\infty} 2\int_0^{\sqrt{y}} u^{2x-1}e^{-u^2}\,du$$

Nell'esercizio precedente avevamo già mostrato che, nel caso $2x-1>0$, l'ultimo limite della catena di uguaglianze esiste; pertanto

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

esiste sicuramente per $x \geq 1$.
Se $x < 1$, abbiamo un potenziale problema in $x = 0$; dobbiamo pertanto considerare

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \underbrace{\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt}_{(12.10)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt}_{(12.11)}$$

Seguendo una procedura analoga a quella dell'esercizio 12.5, è possibile dimostrare che l'integrale (12.11) esiste per ogni scelta di $x < 1$. Concentriamoci quindi su (12.10): possiamo sviluppare con Taylor la funzione integranda per provare ad applicare il teorema 12.2. In particolare abbiamo che

$$e^{-t} = 1 - t + o(t)$$

e quindi

$$\frac{e^{-t}}{t^{1-x}} = \frac{1}{t^{1-x}}(1 - t + o(t))$$

Se definiamo $g(t) = \frac{1}{t^{1-x}}$ abbiamo che

$$\lim_{t\to0^+}\frac{e^{-t}}{t^{1-x}}t^{1-x} = \lim_{t\to0^+} e^{-t} = 1$$

e per il teorema 12.2
$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}\,dt \text{ e } \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$$
hanno lo stesso comportamento. Sappiamo che $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ esiste se $x > 0$, e pertanto anche (12.10) esiste se $x > 0$. Di conseguenza, $\Gamma(x)$ è definita per $x > 0$. □

Osservazione. La funzione $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \Gamma(x)$ è la *funzione Gamma di Eulero*, e ha un'interessante proprietà: infatti, valutandola sui naturali $\mathbb{N}$ e procedendo per induzione:

(i) *caso base* $n = 1$: abbiamo che
$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 1$$

(ii) *passo induttivo*: supponiamo che $\Gamma(n)$ sia finito, e mostriamo che anche $\Gamma(n+1)$ lo è. Consideriamo
$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} -\int_0^x t^n \frac{d}{dt}(e^{-t})\,dt \overset{\text{Teorema 10.5}}{=} \\ &= -\lim_{x\to\infty}\left(x^n e^{-x}\right) + \lim_{x\to+\infty} n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt = n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt = n\Gamma(n)\end{aligned}$$

Di conseguenza
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

ossia $\Gamma(n+1) = n!$. Quindi in quest'ottica la funzione Gamma di Eulero costituisce una generalizzazione del fattoriale ai numeri reali positivi.

13 Lezione 13

13.1 Ripasso: equazioni differenziali ordinarie

Definizione 13.1. Un'*equazione differenziale ordinaria* di ordine n è un'equazione del tipo

$$F(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)) = 0$$

con $F\colon D_F \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ una data funzione, definita su di un certo dominio D_F.
Diremo che un'equazione differenziale ordinaria di ordine n è scritta *in forma normale* se è scritta come

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), \ldots, u^{(n-1)}(t))$$

Osservazione. In generale, data un'equazione differenziale di ordine n

$$F(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)) = 0$$

non è sempre possibile ricondursi ad un'equazione in forma normale: ci sono però delle condizioni sufficienti che la funzione F deve soddisfare affinché ciò sia possibile (teorema della funzione implicita per funzioni scalari, in particolare $\partial_{n+2} F \neq 0$).

Definizione 13.2. Data un'equazione differenziale ordinaria di ordine n, diremo che la funzione $\phi\colon I \to \mathbb{R}$, definita sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, è una *soluzione* se:

(i) $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ è differenziabile n volte in I;

(ii) $(t, \phi(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)) \in D_F$ per ogni $t \in I$;

(iii) $F(t, \phi(t), \ldots, \phi^{(n)}(t)) = 0$ per ogni $t \in I$.

Osservazione. In generale, la proprietà di essere soluzione di un'equazione differenziale è una proprietà locale: ad esempio, consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t) = \frac{1}{\cos(t) + 2}$$

La funzione $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è definita su tutto $\mathbb{R}^3$; tuttavia sappiamo che la soluzione che è possibile trovare (cfr. esercizio 10.7) è data da

$$u(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

e di conseguenza $u(t)$ è definita su $\mathbb{R}\backslash\{\pi{+}2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Poiché vogliamo che la soluzione sia definita su di un intervallo, u sarà definita su di un intervallo del tipo $(\pi{+}2k\pi, \pi{+}2(k{+}1)\pi)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. La scelta di $k \in \mathbb{Z}$ e del valore di $c \in \mathbb{R}$ dipendono dalle *condizioni iniziali.*

Definizione 13.3. Data un'equazione differenziale ordinaria scritta in forma normale

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), \ldots, u^{(n-1)}(t))$$

un *problema di Cauchy* ad essa associato è un sistema

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = f(t, u(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \ldots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

ove $(u(t_0), u'(t_0), \ldots, u^{(n-1)}(t_0)) = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ è detta *condizione iniziale.*

Osservazione. La soluzione $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ deve chiaramente essere compatibile con la condizione iniziale: deve valere che $t_0 \in I$ e che $(t_0, \phi(t_0), \ldots, \phi^{(n)}(t_0)) \in D_F$. Ad esempio, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{\cos(t) + 2} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione generale dell'equazione differenziale è data da

$$u(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

definita su $(\pi + 2k\pi, \pi + 2(k+1)\pi)$. Poiché in questo caso l'istante iniziale $t_0 = 0$, l'intervallo del tipo precedente che contiene 0 è quello per $k = -1$, ossia $(-\pi, \pi)$; pertanto u sarà definita su $(-\pi, \pi)$. Inoltre, poiché $u(0) = 0$, vale che

$$0 = u(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{0}{2}\right)\right) + c = c$$

Quindi la soluzione sarà data da

$$u\colon (-\pi, \pi) \ni t \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

In generale, questo è il massimo che possiamo fare: possiamo cioè trovare una soluzione di un problema di Cauchy solo localmente, ossia in un intorno aperto della condizione iniziale. Talvolta però possiamo "incollare" soluzioni locali ed ottenere una soluzione globale: è il caso dello svolgimento dell'esercizio 10.7.

13.2 Diverse tipologie di equazioni differenziali ordinarie di ordine 1

Definizione 13.4. Un'equazione differenziale lineare non-omogenea a coefficienti non-costanti è un'equazione differenziale del tipo

$$u'(t) = P(t)u(t) + Q(t)$$

con $P, Q \in \mathscr{C}(I)$. La soluzione generale è una funzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ data da

$$u(t) = e^{\int P(t)\,dt}\left(c + \int Q(t)e^{-\int P(t)\,dt}\,dt\right) \tag{13.1}$$

ove con $\int P(t)\,dt$ denotiamo una generica primitiva di P.

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t}u(t) + 3t^3 \\ u(-1) = 2 \end{cases}$$

In questo caso $P(t) = \frac{1}{t}$ e $Q(t) = 3t^3$. Notiamo che P non è definita in 0; pertanto, dato che vogliamo che P e Q siano continue sull'intervallo I di definizione, dobbiamo restringerci a $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$. Dato che l'istante iniziale $t_0 = -1$ appartiene al primo insieme, ci restringiamo a $(-\infty, 0)$. In questo caso, le primitive saranno

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log(-t)$$

e

$$\int Q(t)e^{-\int P(t)\,dt}\,dt = \int 3t^3 e^{-\log(-t)}\,dt = -\int 3t^2\,dt = -t^3$$

Inserendo i risultati in (13.1) otteniamo che la soluzione generale dell'equazione differenziale nell'intervallo $(-\infty, 0)$ è

$$u(t) = e^{\log(-t)}(c - t^3) = t(t^3 - c)$$

Fissiamo ora la costante $c \in \mathbb{R}$ imponendo le condizioni iniziali:

$$2 = u(-1) = (-1)((-1)^3 - c) = (c + 1) \iff c = 1$$

La soluzione del problema di Cauchy sarà quindi

$$u\colon (-\infty, 0) \ni t \mapsto t(t^3 - 1)$$

Definizione 13.5. Un'equazione differenziale non-lineare esatta è un'equazione differenziale del tipo

$$u'(t) = -\frac{P(t, u)}{Q(t, u)}$$

con $P, Q\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove A è un sottoinsieme semplicemente connesso[13] di $\mathbb{R}^2$, $Q \neq 0$ su A, P, Q sono sufficientemente regolari su A e sono tali[14] che

$$\partial_u P(t,u) = \partial_t Q(t,u)$$

Dato un punto $(\tau, \varepsilon) \in A$ esiste una funzione definita su di un intorno aperto U di (τ, ε), $F\colon U \to \mathbb{R}$, data da

$$F(t,u) = \int_\tau^t P(s,u)\,ds + \int_\varepsilon^u Q(\tau,s)\,ds \tag{13.2}$$

tale che una soluzione generica dell'equazione differenziale esatta è data in forma *implicita* da $F(t,u) = c$.
Se stiamo considerando un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = -\dfrac{P(t,u)}{Q(t,u)} \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

allora è possibile scegliere $(\tau, \varepsilon) = (t_0, u_0)$, e in quel caso le soluzioni saranno date in forma implicita da $F(t,u) = 0$.

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = -\dfrac{t+u}{t-3u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Notiamo innanzitutto che la funzione a denominatore si annulla se $t = 3u$; dobbiamo pertanto considerare uno dei due insiemi

$$\Big\{(t,u) \in \mathbb{R}^2 \colon t < 3u\Big\} \qquad \Big\{(t,u) \in \mathbb{R}^2 \colon t > 3u\Big\}$$

Poiché la condizione iniziale $(t_0, u_0) = (0,1)$ appartiene al primo insieme, scegliamo quello come dominio A (che è semplicemente connesso). Notiamo inoltre che se definiamo

$$P(t) = t + u \qquad Q(t) = t - 3u$$

abbiamo che

$$\partial_u P(t,u) = \partial_u(t+u) = 1 \qquad \partial_t Q(t,u) = \partial_t(t-3u) = 1$$

L'equazione differenziale è quindi un'equazione differenziale esatta (cfr. 13.5), e la soluzione è data in forma implicita da $F(t,u) = 0$, con $F(t,u)$ data dalla (13.2):

$$F(t,u) = \int_0^t (s+u)\,ds - \int_1^u 3s\,ds = \frac{t^2}{2} + ut + \frac{3}{2}u^2 - \frac{3}{2}$$

[13] Vuol dire "senza buchi".

[14] Le notazioni ∂_t e ∂_u denotano le derivate parziali rispetto a t e u; all'atto pratico dovete derivare nel primo caso rispetto a t trattando i termini in u come costanti, e nel secondo caso i termini in u trattando come costanti i termini dipendenti da t.

ossia l'equazione implicita è

$$\frac{t^2}{2} + ut - \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2} = 0 \iff t^2 + 2ut - 3u^2 + 3 = 0$$

In questo caso è possibile esplicitare la soluzione $u(t)$: consideriamo infatti

$$u(t) = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 + 3t^2 + 9}}{-3} = \frac{t \pm \sqrt{4t^2 + 9}}{3}$$

Per capire quale fra i due segni prima della radice è opportuno tenere, consideriamo la condizione iniziale: abbiamo che

$$1 = u(0) = \frac{\pm\sqrt{9}}{3}$$

La soluzione corretta dell'equazione è quella con il segno positivo; pertanto la soluzione dell'equazione differenziale è data da

$$u(t) = \frac{t + \sqrt{4t^2 + 9}}{3}$$

Definizione 13.6. Un'equazione differenziale a variabili separabili è un'equazione del tipo

$$u'(t) = f(t)g(u)$$

con $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolari, e $g \neq 0$ su J. Poiché $g(u) \neq 0$ per ogni $u \in J$, possiamo definire

$$P(t,u) = f(t) \qquad Q(t,u) = -\frac{1}{g(u)}$$

con $P, Q\colon I \times J \to \mathbb{R}$. Notiamo che

(i) P e Q sono definite sul rettangolo $I \times J$ che è semplicemente connesso;

(ii) $\partial_u P(t,u) = \partial_u f(t) = 0$ e $\partial_t Q(t,u) = \partial_t g(u)^{-1} = 0$;

(iii) $u'(t) = f(t)g(u) = -\frac{P(t,u)}{Q(t,u)}$.

Di conseguenza, possiamo dire che le equazioni differenziali a variabili separabili sono un sottocaso di quelle esatte; pertanto dato un punto $(t_0, u_0) \in I \times J$ la soluzione generale è data in forma implicita da $F(t,u) = c$, con $F(t,u)$ definita dalla (13.2) come

$$F(t,u) = \int_{t_0}^{t} P(s,u)\,ds + \int_{u_0}^{u} Q(t_0,s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s) - \int_{u_0}^{u} \frac{1}{g(s)}\,ds \tag{13.3}$$

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = 2t\sqrt{1-u^2} \\ u(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Notiamo che in questo caso abbiamo

$$f(t) = 2t \qquad g(u) = \sqrt{1-u^2}$$

con $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^+$. Chiaramente $g(u) \geq 0$ per ogni $u \in [-1,1]$, e $g(u) = 0$ se e solo se $u = \pm 1$. Poiché dobbiamo necessariamente avere $g(u) \neq 0$, dobbiamo restringerci all'intervallo aperto $(-1,1)$. f è invece definita su tutto $\mathbb{R}$; pertanto il dominio di definizione dell'equazione a variabili separabili, intesa come equazione differenziale esatta, è $\mathbb{R} \times (-1,1)$, e la soluzione è data da (13.3):

$$0 = F(t,u) = \int_0^t 2s\,ds - \int_{\frac{1}{2}}^u \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = t^2 - \arcsin(u) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = t^2 - \arcsin(u) + \frac{\pi}{6}$$

L'equazione che da la soluzione del problema in forma implicita è quindi

$$t^2 + \frac{\pi}{6} = \arcsin(u)$$

Dato che l'immagine di $\arcsin(u)$ per $u \in (-1,1)$ è $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, anche $t^2 + \frac{\pi}{6}$ appartiene a questo insieme; pertanto dobbiamo restringere il dominio di t a $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$.
Anche in questo caso possiamo esprimere u in forma esplicita come

$$u(t) = \sin\left(t^2 + \frac{\pi}{6}\right), \quad t \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$$

Osservazione. Per risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili, è possibile effettuare delle manipolazioni algebriche informali per facilitarne la risoluzione. Innanzitutto, possiamo scrivere

$$u'(t) = \frac{du}{dt}$$

L'equazione differenziale a questo punto può essere scritta come

$$\frac{du}{dt} = 2t\sqrt{1-u^2}$$

Se immaginiamo di trattare $\frac{du}{dt}$ come una frazione otteniamo, supponendo $u \neq \pm 1$,

$$\frac{du}{dt} = 2t\sqrt{1-u^2} \iff \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = (2t)dt$$

A questo punto possiamo immaginare di poter scrivere

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int 2t\,dt$$

ossia

$$\arcsin(u) = t^2 + c$$

La soluzione a cui siamo giunti è quindi fondamentalmente la stessa di prima.

Definizione 13.7. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione di Bernoulli se è un'equazione del tipo

$$u'(t) = P(t)u(t) + Q(t)(u(t))^\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ un parametro reale e P, Q continue su I. Notiamo che se $\alpha \notin \mathbb{Z}$, allora necessariamente $u(t) \geq 0$ sul proprio dominio di definizione.
In questo caso, chiaramente $u(t) \equiv 0$ è una soluzione banale dell'equazione. Supponiamo ora $u(t) \neq 0$ nel dominio di definizione della soluzione; possiamo moltiplicare ambo i membri per $u(t)^{-\alpha}$, ottenendo

$$u(t)^{-\alpha}u'(t) = P(t)u(t)^{1-\alpha} + Q(t)$$

Notiamo inoltre che

$$\frac{d}{dt}(u(t))^{1-\alpha} \overset{(6.11)}{=} (1-\alpha)u(t)^{-\alpha}u'(t)$$

Quindi

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}(u(t)^{1-\alpha}) = P(t)u(t)^{1-\alpha} + Q(t)$$

Se definiamo $\varphi(t) = u(t)^{1-\alpha}$ abbiamo quindi che l'equazione differenziale risulta essere

$$\varphi'(t) = (1-\alpha)P(t)\varphi(t) + (1-\alpha)Q(t)$$

L'equazione che abbiamo ottenuto è descritta dalla definizione 13.4, e la soluzione è data da (13.1):

$$\varphi(t) = e^{\int (1-\alpha)P(t)\,dt}\left(c + \int (1-\alpha)Q(t)e^{-\int (1-\alpha)P(t)\,dt}\right)$$

Una volta trovata $\varphi(t)$, è possibile ricondursi a $u(t)$ considerando

$$u(t) = \varphi(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ove ben definita.

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = -tu(t) + t^3u(t)^2 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Questa è un'equazione di Bernoulli in cui l'esponente α è 2, con $P(t) = -t$ e $Q(t) = t^3$ definite e continue su tutto $\mathbb{R}$. Di conseguenza, consideriamo $\varphi(t) = u(t)^{1-\alpha} = u(t)^{-1}$; l'equazione differenziale diventa quindi

$$\varphi'(t) = t\varphi(t) - t^3$$

La soluzione è data dalla (13.1): consideriamo quindi

$$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} \qquad -\int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int t^2 \frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \overset{\text{Teorema 10.5}}{=} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2\int e^{-\frac{t^2}{2}} t\,dt = t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + 2e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Di conseguenza

$$\varphi(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(c + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + 2e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = ce^{\frac{t^2}{2}} + t^2 + 2$$

Poiché $u(t) = \varphi(t)^{-1}$ abbiamo che la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(t) = \frac{1}{t^2 + 2 + ce^{\frac{t^2}{2}}}$$

Imponendo la condizione iniziale abbiamo

$$1 = u(1) = \frac{1}{1 + 2 + ce^{\frac{1}{2}}} \iff c = -2e^{-\frac{1}{2}}$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$u(t) = \frac{1}{t^2 + 2 - 2e^{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}}}$$

Notiamo che in questo caso abbiamo che il denominatore è

$$q(t) = t^2 + 2 - 2e^{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}}$$

e questa funzione è tale per cui $q(0) > 0$ e $\lim_{t\to\pm\infty} q(t) = -\infty$. Pertanto esistono almeno due punti $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tali che $t_0 < 0$, $t_1 > 0$ e $q(t_0) = q(t_1) = 0$. Studiando la derivata di q è possibile mostrare che $t_1 > 1$; di conseguenza $u(t)$ sarà definita su (t_0, t_1).

13.3 Esercizi: equazioni differenziali ordinarie e problemi di Cauchy

Esercizio 13.1. *Sia $u\colon I \to \mathbb{R}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u'(t)e^t + \sin(t)u(t) = \cos(u(t)) \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{13.4}$$

Determinare il comportamento locale della soluzione u in un intorno di $t_0 = 0$.

Soluzione. Ricordiamo che per determinare il comportamento locale di u dobbiamo capire se è crescente o decrescente e concava o convessa in un intorno di $t_0 = 0$. Dobbiamo quindi determinare $u'(0)$ e $u''(0)$. Poiché $u'(t)$ è determinato dall'equazione differenziale in (13.4), possiamo valutare ambo i membri dell'equazione in $t_0 = 0$ ottenendo

$$u'(0)e^0 + \sin(0)u(0) = \cos(u(0)) \iff u'(0) = \cos(0) \iff u'(0) = 1$$

Di conseguenza $u'(0) > 0$, e quindi la funzione u è crescente in un intorno di $t_0 = 0$.
Per calcolare $u''(0)$, possiamo sfruttare l'equazione differenziale in (13.4) nel modo seguente: possiamo derivare ambo i membri dell'equazione ottenendo così

$$u''(t)e^t + u'(t)e^t + \cos(t)u(t) + \sin(t)u'(t) = -\sin(u(t))u'(t)$$

Se valutiamo l'equazione precedente in $t_0 = 0$ otteniamo

$$u''(0)e^0 + u'(0)e^0 + \cos(0)u(0) + \sin(0)u'(0) = -\sin(u(0))u'(0)$$

ossia

$$u''(0) + 1 = 0 \iff u''(0) = -1$$

Quindi $u''(0) < 0$, e di conseguenza u è concava in un intorno di $t_0 = 0$. □

Esercizio 13.2. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} n'(t) = rn(t)\left(1 - \dfrac{n(t)}{k}\right) \\ n(0) = n_0 \end{cases} \tag{13.5}$$

determinarne la soluzione $n(t)$ in funzione dei parametri $r > 0$ e $k > 0$ e della condizione iniziale $n_0 \geq 0$.

Soluzione. Notiamo che possiamo scrivere l'equazione differenziale come

$$n'(t) = \frac{r}{k}n(t)(k - n(t))$$

Notiamo che la funzione $n(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema di Cauhcy se $n_0 = 0$; supponiamo quindi $n_0 > 0$. L'equazione differenziale scritta come prima è un'equazione differenziale a variabili separabili (cfr. definizione 13.6), con

$$f(t) = \frac{r}{k} \qquad g(n) = n(k - n)$$

Notiamo che $g(n) \neq 0$ se $n \neq k$ e $n \neq 0$; quindi dobbiamo restringerci ad uno degli insiemi

$$\{n \in \mathbb{R} \colon n > k\} \qquad \{n \in \mathbb{R} \colon 0 < n < k\} \qquad \{n \in \mathbb{R} \colon n < 0\}$$

a seconda della condizione iniziale n_0. Chiaramente escludiamo l'ultimo insieme, visto che $n_0 > 0$.

(i) Caso $n_0 > k$: allora l'insieme a cui dobbiamo restringerci è $\{n \in \mathbb{R} \colon n > k\}$; il dominio in cui cerchiamo soluzioni è quindi $\mathbb{R} \times \{n \in \mathbb{R} \colon n > k\}$; applicando la formula risolutiva (13.3) otteniamo che la soluzione è data in forma implicita da

$$\begin{aligned} F(t,n) &= \int_0^t \frac{r}{k}\,ds - \int_{n_0}^n \frac{1}{s(k-s)}\,ds = \frac{r}{k}t - \int_{n_0}^n \frac{1}{k}\frac{1}{s} + \frac{1}{k}\frac{1}{k-s}\,ds = \\ &= \frac{r}{k}t - \frac{1}{k}\big(\log|n| - \log|n_0| - \log|k-n| + \log|k-n_0|\big) = \\ &= \frac{r}{k}t - \frac{1}{k}\log\left|\frac{n}{k-n}\right| - \frac{1}{k}\log\left|\frac{k-n_0}{n_0}\right| = \\ &= \frac{r}{k}t + \frac{1}{k}\log\left(\frac{n-k}{n}\right) - \frac{1}{k}\log\left(\frac{n_0-k}{n_0}\right) = 0 \end{aligned}$$

Possiamo esplicitare la soluzione scrivendo

$$-rt = \log\left(\frac{n-k}{n}\frac{n_0}{n_0-k}\right)$$

e quindi

$$n(t) = \frac{k}{1 - \frac{n_0-k}{n_0}e^{-rt}}$$

Notiamo che $n(t)$ è definita per $t \neq -\frac{1}{r}\log\left(\frac{n_0}{n_0-k}\right) < 0$; dato che $t_0 = 0$, l'intervallo di esistenza della soluzione è $\left(-\frac{1}{r}\log\left(\frac{n_0}{n_0-k}\right), +\infty\right)$.

(ii) Caso $n_0 < k$: in questo caso dobbiamo restringerci a $\{n \in \mathbb{R} \colon 0 < n < k\}$, e quindi il dominio in cui cerchiamo soluzioni è $\mathbb{R} \times \{n \in \mathbb{R} \colon 0 < n < k\}$. La funzione $F(t,n)$ si ottiene allo stesso modo, ma in questo caso abbiamo

$$F(t,n) = \frac{r}{k}t + \frac{1}{k}\log\left(\frac{k-n}{n}\right) - \frac{1}{k}\log\left(\frac{k-n_0}{n_0}\right) = 0$$

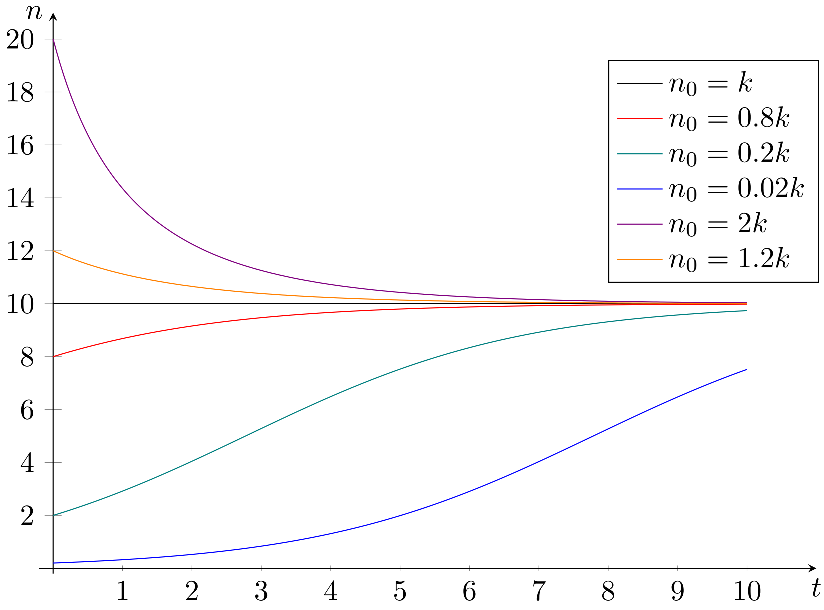
ossia, esplicitando $n(t)$,

$$n(t) = \frac{k}{1 + \frac{k-n_0}{n_0}e^{-rt}}$$

(iii) Infine, notiamo che per $n_0 = k$ l'equazione differenziale ammette una soluzione: infatti se $n(t) \equiv k$ allora n soddisfa il problema di Cauchy.

In tutti i casi, notiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} n(t) = k$$



□

Osservazione. L'equazione differenziale dell'esercizio 13.2 descrive una popolazione di individui che compete per un delle risorse limitate e che si riproduce ad un certo tasso r. k rappresenta il numero di individui che il dato insieme di risorse può sostenere stabilmente. Le sue soluzioni sono dette *curve logistiche*.

14 Lezione 14

14.1 Ripasso ed esercizi: equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti

Definizione 14.1. Un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti omogenea è un'equazione del tipo

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Per risolvere un'equazione differenziale del tipo presentato nella definizione 14.1, operiamo nel modo seguente: consideriamo il *polinomio caratteristico* associato all'equazione differenziale:

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda^1 + c\lambda^0 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Poiché $P(\lambda)$ è un polinomio di grado due a coefficienti reali, abbiamo le seguenti casistiche:

(i) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: in questo caso $P(\lambda)$ ammette due radici reali distinte, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. In questo caso la soluzione generale dell'equazione differenziale è data da

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{i\lambda_2 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: in questo caso $P(\lambda)$ ammette un'unica radice reale $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ con molteplicità algebrica 2. La soluzione è data da

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: in questo caso $P(\lambda)$ ammette due radici complesse $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ tali che $\omega_2 = \overline{\omega_1}$, ossia

$$\mathrm{Re}(\omega_1) = \mathrm{Re}(\omega_2) \qquad \mathrm{Im}(\omega_1) = -\mathrm{Im}(\omega_2)$$

In questo caso la soluzione sarà data da

$$u(t) = c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{\omega_2 t} = e^{\mathrm{Re}(\omega_1)t}\left(c_1 e^{i\mathrm{Im}(\omega_1)t} + c_2 e^{-i\mathrm{Im}(\omega_1)t}\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Osservazione. Le costanti c_1 e c_2 sono fissate tramite le condizioni iniziali del problema di Cauchy. Notiamo che nell'ultimo caso, l'equazione differenziale ha come soluzione una funzione $u(t)\colon I \to \mathbb{R}$; pertanto le due costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ devono essere tali per cui la soluzione avrà valori reali (in particolare sarà una combinazione lineare di $\sin(\mathrm{Im}(\omega_1)t)$ e $\cos(\mathrm{Im}(\omega_1)t)$).

Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - 4u'(t) + 13u(t) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 3 \end{cases}$$

Vogliamo determinarne la soluzione.
Come suggerito, consideriamo il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

e calcoliamone il discriminante $\Delta = 16 - 4 \times 13 < 0$. Pertanto ci troviamo nel caso (iii): le sue radici saranno due numeri complessi ω_1, ω_2 dati da

$$\omega_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm i3$$

Di conseguenza la soluzione generale dell'equazione differenziale è data da

$$u(t) = e^{2t}\left(c_1 e^{i3t} + c_2 e^{-i3t}\right)$$

Per determinare le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 0 = u(0) = e^0\left(c_1 e^0 + c_2 e^0\right) = c_1 + c_2 \\ 3 = u'(0) = \left(2e^{2t}\left(c_1 e^{i3t} + c_2 e^{-i3t}\right) + e^{2t}\left(i3c_1 e^{i3t} - i3c_2 e^{-i3t}\right)\right)\Big|_{t=0} = \\ \qquad = 2(c_1 + c_2) + i3(c_1 - c_2) \end{cases}$$

Dalla prima equazione sappiamo che $c_1 + c_2 = 0$, e quindi la seconda equazione si riduce a

$$3 = i3(c_1 - c_2) \iff 1 = i(c_1 - c_2) \iff (c_1 - c_2) = -i$$

e possiamo quindi riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = -i \end{cases} \iff c_1 = -\frac{i}{2} \quad c_2 = \frac{i}{2}$$

La soluzione sarà quindi

$$u(t) = e^{2t}\left(\frac{i}{2}e^{-i3t} - \frac{i}{2}e^{i3t}\right) = e^{2t}\sin(3t)$$

Definizione 14.2. Un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea è un'equazione del tipo

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = f(t) \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ f(t) \in \mathscr{C}(I)$$

In questo caso, la soluzione di un'equazione differenziale del tipo indicato dalla definizione 14.2 sarà

$$u(t) = u_0(t) + u_p(t)$$

ove $u_0(t)$ è una soluzione dell'equazione differenziale omogenea (cfr. definizione 14.1)

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$$

mentre $u_p(t)$ è una soluzione (detta *soluzione particolare*) dell'equazione differenziale non omogenea.

Osservazione. Possiamo trovare un'analogia con l'algebra lineare: sappiamo che dato un operatore lineare $A\colon V \to W$ che agisce sullo spazio vettoriale V a valori nello spazio vettoriale W, se $w \in A(V)$ esiste un elemento $v_w \in V$ tale che

$$Av_w = w$$

Se A non è iniettivo (ossia se $\ker A \neq \{0\}$) questo elemento v_w non è unico: infatti

$$A(v_w + v_0) = w$$

per ogni $v_0 \in \ker A$.

Esempio. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - 2u'(t) - 3u(t) = \sin(t) \\ u(0) = -\dfrac{1}{2} \\ u'(0) = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

determinarne la soluzione sapendo che la soluzione particolare dell'equazione differenziale ha forma

$$u_p(t) = ae^{it} + be^{-it}$$

Dalla discussione successiva alla definizione 14.2, sappiamo che la soluzione $u(t)$ sarà data da

$$u(t) = u_0(t) + u_p(t)$$

(i) Determiniamo per prima cosa la soluzione particolare $u_p(t)$ andando ad inserire la forma proposta nell'equazione differenziale: abbiamo

$$u_p'(t) = iae^{it} - ibe^{-it} \qquad u_p''(t) = -ae^{it} - be^{-it}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sin(t) = u_p''(t) - 2u'(t) - 3u(t) &= -ae^{it} - be^{-it} - 2(iae^{it} - ibe^{-it}) - 3ae^{it} - 3be^{-it} = \\ &= e^{it}(-4a - 2ia) + e^{-it}(-4b + 2ib) \end{aligned}$$

Ricordiamo che $\sin(t) = \frac{1}{2i}e^{it} - \frac{1}{2i}e^{-it}$, e dato che e^{it} e e^{-it} sono linearmente indipendenti su I vale che la precedente equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -4a - 2ia = \dfrac{1}{2i} \\ -4b + 2ib = -\dfrac{1}{2i} \end{cases} \iff a = \frac{1}{2i}\frac{1}{-4-2i} = \frac{1}{20} + \frac{i}{10},\ b = -\frac{1}{2i}\frac{1}{-4+2i} = \frac{1}{20} - \frac{i}{10}$$

La soluzione particolare è quindi data da

$$u_p(t) = \frac{1}{20}\left(e^{it} + e^{-it}\right) + \frac{i}{10}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$$

(ii) Determiniamo ora la soluzione dell'equazione omogenea

$$u''(t) - 2u'(t) - 3u(t) = 0$$

Il polinomio caratteristico in questo caso è dato da

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. La soluzione sarà quindi data da

$$u_0(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

Di conseguenza la soluzione dell'equazione differenziale è data da

$$u(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$$

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy, dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} = u(0) = c_1 + c_2 + \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{5} = u'(0) = 3c_1 - c_2 - \dfrac{1}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = -\dfrac{3}{5} \\ 3c_1 - c_2 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $c_1 = -\frac{1}{20}$ e $c_2 = -\frac{11}{20}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{1}{20}e^{3t} - \frac{11}{20}e^{-t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$$

14.2 Approfondimento: introduzione ai metodi numerici per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

In generale, data un'equazione differenziale del tipo

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

non è sempre detto sia possibile trovare esplicitamene una soluzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ (anzi, in generale è normale *non* avere una soluzione scrivibile in termini di funzioni matematiche elementari). Si è quindi inevitabilmente portati a considerare soluzioni approssimate della soluzione, attraverso i metodi studiati dall'*analisi numerica*.
Supponiamo di considerare un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

con $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$, $u(I) \subseteq J$ e $I = [t_0, t_f]$. Per approssimare la soluzione dell'equazione differenziale, consideriamo una partizione $\mathscr{P} = \{t_0, \ldots, t_n = t_f\}$ di I e definiamo $u_i =$

$u(t_i)$. A questo punto, consideriamo, dato un tempo t_i, lo sviluppo di Taylor di $u(t_i+h)$, ove h va inteso come una variabile che assume valori molto piccoli, in un intorno di $h=0$:

$$u(t_i+h) = u(t_i) + u'(t_i)h + o(h)$$

Sappiamo che vale l'equazione differenziale

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

e di conseguenza possiamo scrivere

$$u(t_i+h) = u(t_i) + hf(t_i, u(t_i)) + o(h) = u_i + hf(t_i, u_i) + o(h)$$

Abbiamo quindi trovato un modo di scrivere u in prossimità di t_i in funzione della distanza da t_i, del valore di u_i e di f calcolata in t_i e u_i, modulo un errore $o(h)$ che viene detto *errore di troncamento locale.* In particolare, se scegliamo una partizione uniforme

$$\mathscr{P} = \{t_0, \dots, t_n\} \qquad t_i = t_0 + idt,\ dt = \frac{t_f - t_0}{n}$$

e se consideriamo $h = dt$ abbiamo che

$$u_i + dtf(t_i, u_i) + o(dt) = u(t_i + dt) = u(t_{i+1}) = u_{i+1}$$

Di conseguenza possiamo determinare il valore di u al tempo t_{i+1} conoscendo il valore di u al tempo t_i, calcolando

$$u_{i+1} = u_i + dtf(t_i, u_i) \tag{14.1}$$

Il metodo iterativo descritto prende il nome di *metodo di Eulero esplicito* (*forward Euler method*), perché u_{i+1} è descritto in forma esplicita utilizzando quantità note.

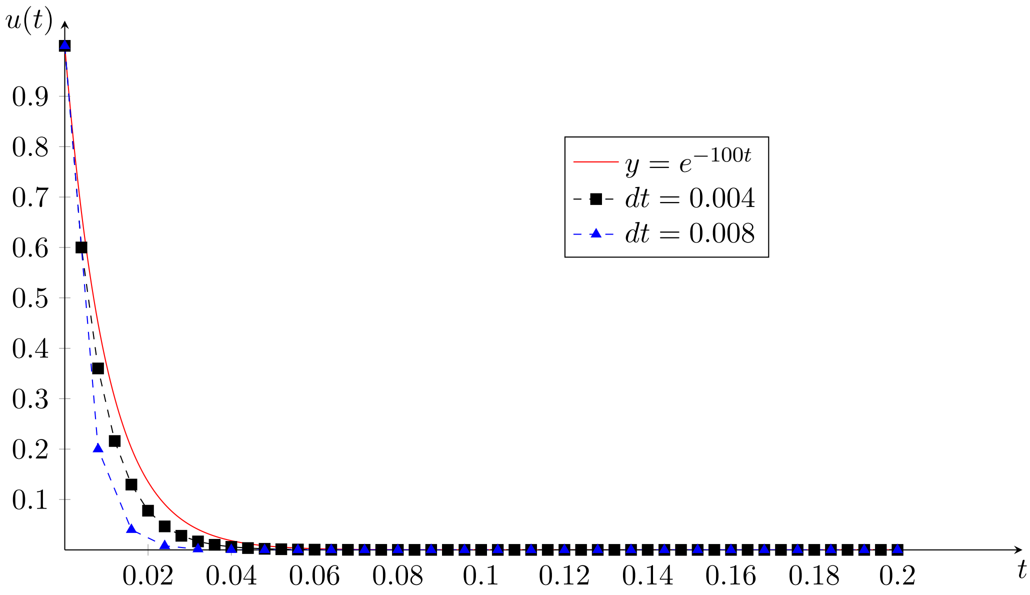
Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = -au(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

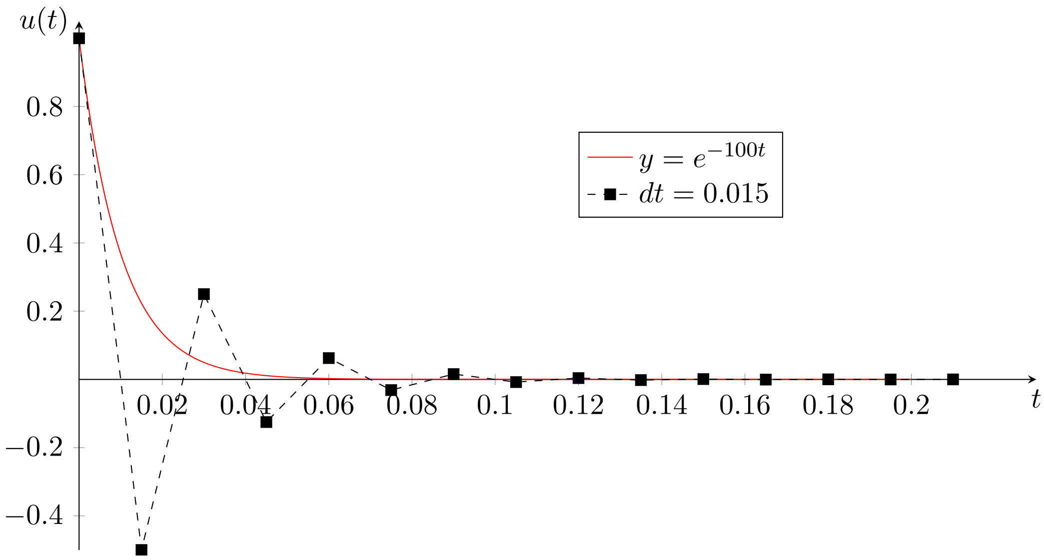
con $a > 0$. La sua soluzione esatta è data da $u_e(t) = e^{-at}$. Se consideriamo un intervallo $[0, t_f]$ partizionato in modo uniforme in $\{t_0, \dots, t_n\}$ secondo il passo dt e applichiamo il metodo di Eulero esplicito (14.1) per ottenere una soluzione approssimata otteniamo

$$u_{i+1} = u_i - dt(au_i) = u_i(1 - adt) = u_{i-1}(1 - adt)^2 = \cdots = u_0(1 - adt)^{i+1} = (1 - adt)^{i+1}$$

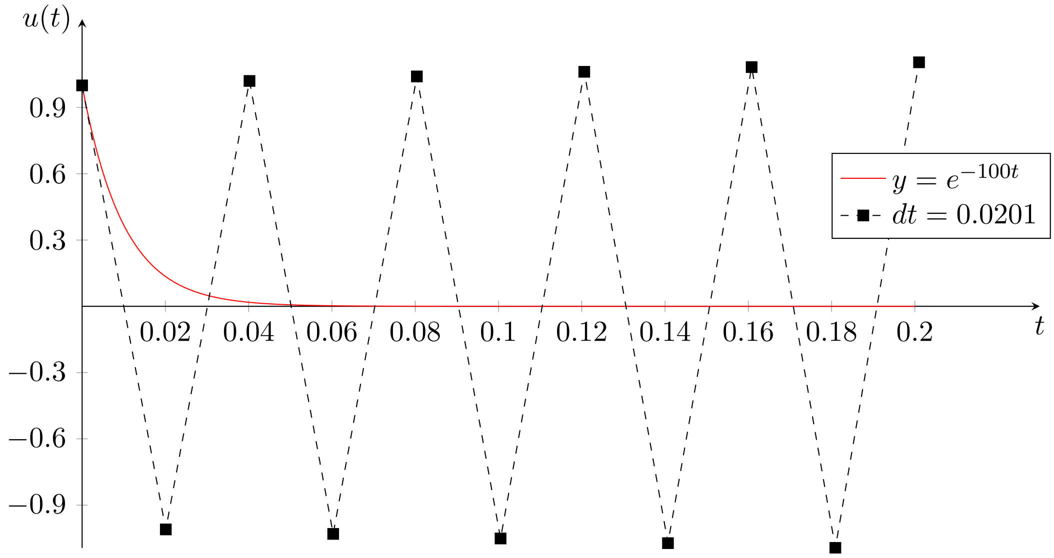
Di seguito riportiamo per diversi valori di dt la soluzione approssimata per $a = 100$.



Notiamo che otteniamo un buon accordo; in un'ottica di efficienza computazionale possiamo provare a ridurre un po' il passo dt, e vedere se l'approssimazione è comunque soddisfacente.



Il risultato è ancora più catastrofico se consideriamo dt ancora più grandi:



Perché succede? Notiamo che (14.1) restituisce

$$u_i = (1 - adt)^i$$

e di conseguenza, se $(1 - adt) < 0$, ossia se $dt > \frac{1}{a}$, vale che

$$u_i = (1 - adt)^i = (-1)^i (adt - 1)^i \text{ con } adt - 1 > 0$$

Quindi vediamo che il comportamento oscillatorio nel primo dei due grafici problematici è dovuto alla particolare scelta di dt operata.
Nel secondo caso, notiamo che dato $dt = 0.0201$ abbiamo che

$$(1 - adt) < -1$$

In questo caso il problema è quindi duplice:

(i) il comportamento oscillatorio rimane, dato che $(1 - adt) < 0$;

(ii) abbiamo inoltre un fenomeno di amplificazione degli errori: infatti,

$$u_i = (1 - adt)^{i-1} u_1 = (1 - adt)^{i-1} \big(1 - adt + o(dt)\big) = (1 - adt)^i + (1 - adt)^{i-1} o(dt)$$

e vediamo quindi che dato che $|1 - adt| > 1$ l'errore $o(dt)$ viene amplificato ad ogni step.

Capiamo quindi che per prevenire il comportamento oscillatorio dobbiamo richiedere

$$(1 - adt) > 0 \iff dt < \frac{1}{a}$$

e per prevenire l'amplificazione degli errori dobbiamo avere

$$|1 - adt| < 1 \iff dt < \frac{2}{a}$$

Queste condizioni dicono che il metodo di Eulero esplicito è *condizionatamente stabile*: abbiamo dei requisiti nella discretizzazione del problema che dobbiamo tenere a mente se vogliamo che l'approssimazione sia soddisfacente. Questa è una caratteristica generale dei metodi espliciti.

Esiste un'altra classe di metodi numerici che non presenta questi problemi, i metodi *impliciti.* Consideriamo, come prima, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

con $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$, $u(I) \subseteq J$ e $I = [t_0, t_f]$. Per approssimare la soluzione dell'equazione differenziale, consideriamo al pari del caso precedente una partizione $\mathscr{P} = \{t_0, \ldots, t_n = t_f\}$ di I e definiamo $u_i = u(t_i)$. A questo punto, consideriamo i passaggi seguenti:

$$u(t_i) = u(t_{i+1} - \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{h})$$

e se h è sufficientemente piccolo possiamo scrivere, sviluppando $u(t_{i+1} - h)$ in un intorno di $h = 0$,

$$u(t_i) = u(t_{i+1} - h) = u(t_{i+1}) - u'(t_{i+1})h + o(h) = u(t_{i+1}) - f(t_{i+1}, u_{i+1})h + o(h)$$

Quindi anche in questo caso se la partizione è una partizione uniforme

$$\mathscr{P} = \{t_0, \ldots, t_n\} \qquad t_i = t_0 + idt,\ dt = \frac{t_f - t_0}{n}$$

abbiamo che $h = t_{i+1} - t_i = dt$ e

$$u(t_i) = u(t_i + 1) - f(t_{i+1}, u_{i+1})dt + o(dt)$$

e trascurando l'errore abbiamo

$$u_i = u_{i+1} - f(t_{i+1}, u_{i+1})dt \tag{14.2}$$

Questo metodo viene detto *metodo di Eulero implicito*, poiché u_{i+1} è descritto implicitamente (non conosciamo u_{i+1}, e quindi non conosciamo $f(t_{i+1}, u_{i+1})$!) dall'equazione

$$u_i = u_{i+1} - f(t_{i+1}, u_{i+1})dt$$

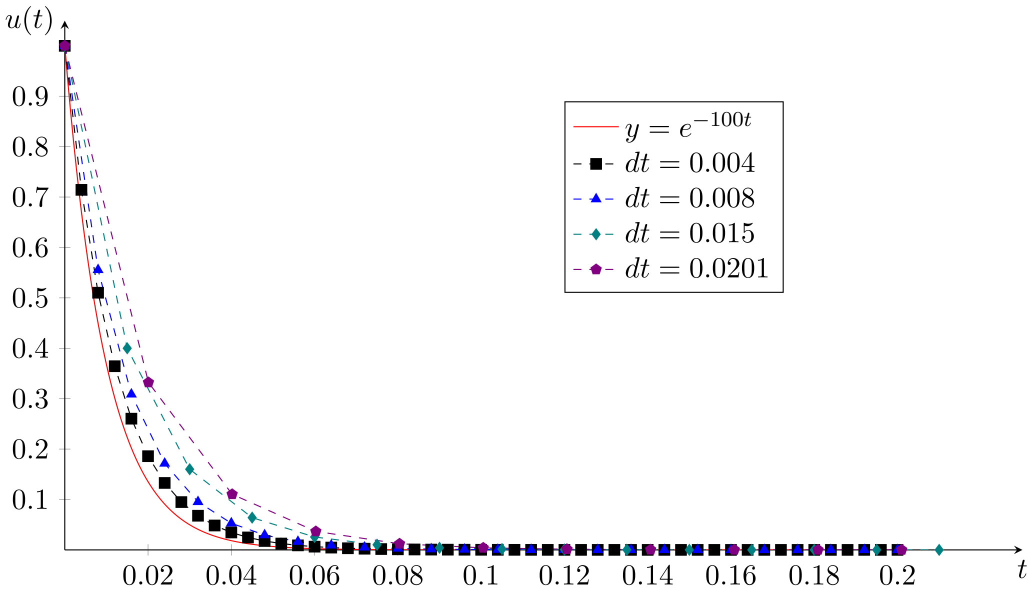
Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy dell'esempio precedente,

$$\begin{cases} u'(t) = -au(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

con $a > 0$. Se consideriamo il medesimo intervallo $[0, t_f]$ partizionato in modo uniforme in $\{t_0, \ldots, t_n\}$ secondo il passo dt e applichiamo il metodo di Eulero implicito (14.1) otteniamo

$$u_i = u_{i+1} - (-au_{i+1})dt = u_{i+1}\,(1 + adt) \iff u_{i+1} = \frac{u_i}{(1 + adt)} = \cdots = \frac{1}{(1 + adt)^{i+1}}$$

Riportiamo ora le approssimazioni della soluzione $u(t)$ per diverse scelte di dt.



Notiamo che in questo caso gli step dt che ci avevano dato problemi nel caso del metodo di Eulero esplicito si comportano bene: infatti,

(i) non abbiamo più il problema delle oscillazioni: infatti, dato che $dt > 0$ e $a > 0$, abbiamo che

$$(1 + adt) > 0 \text{ per ogni scelta di } dt \implies \frac{1}{(1 + adt)^i} > 0 \text{ per ogni scelta di } dt$$

(ii) non abbiamo più il problema dell'amplificazione dell'errore: infatti,

$$(1 + adt) > 1 \text{ per ogni scelta di } dt > 0 \implies \frac{1}{1 + adt} < 1$$

e di conseguenza non abbiamo più il fenomeno di amplificazione degli errori.

Osservazione. Osserviamo che in questo caso siamo stati fortunati, poiché siamo riusciti ad ottenere un'espressione esplicita di u_{i+1} a partire dalla (14.2). In generale, questo non è possibile, ed è quindi necessario utilizzare un metodo numerico (ad esempio il metodo di Newton) anche per determinare u_{i+1}. Per questo i metodo impliciti sono generalmente computazionalmente più intensi; si guadagna però la stabilità incondizionata del metodo.

Riferimenti bibliografici

[1] Cesare Arzelà. «Sulla integrazione per serie: matematica. Nota 1». In: *Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti.* 4^{a} ser. 1 (1885), pp. 532–537.

[2] Serge Lang. *Complex Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1999. ISBN: 978-1-4757-3083-8. DOI: 10.1007/978-1-4757-3083-8.

[3] Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa. *Analisi Matematica*. Vol. 1. Zanichelli, 2015. ISBN: 9788808151339.

[4] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco e Fausto Saleri. *Matematica Numerica*. Springer Milan, 2008. ISBN: 978-88-470-0818-2. DOI: 10.1007/978-88-470-0818-2.

[5] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied Mathematics. McGraw-Hill, 1976. ISBN: 9780070856134.