Misura della diffusività termica di un solido

F. Fontanelli

Marzo 2022

1 TEORIA

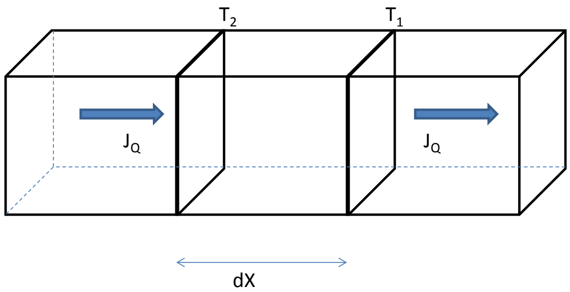
La misura della della diffusione del calore è legata principalmente a 2 contributi: il moto degli elettroni (nei metalli) e le oscillazioni del reticolo cristallino (fononi), quindi la sua misura al variare della temperatura fornisce un importante strumento di indagine nella fisica dello stato solido.
Vediamo dunque come sia possibile descrivere matematicamente il fenomeno e successivamente sviluppare un apparato che ne permetta la misura.
Dal punto di vista fenomenologico la propagazione del calore in un materiale è governata dalla legge di Fourier, essa afferma che il calore che passa attraverso una sottile lastra omogenea di area S e spessore d durante un tempo Δt è proporzionale alla differenza di temperatura fra le due facce:

$$Q = kS\frac{T_2 - T_1}{d}\Delta t \tag{1}$$

ossia, supponendo che la lastra abbia spessore infinitesimo dx e introducendo la densità di flusso di calore (calore che passa attraverso una superficie unitaria nell'unità di tempo), possiamo scrivere la legge precedente in forma differenziale:

$$\overrightarrow{J_Q} = -k\vec{\nabla}T \tag{2}$$

Se teniamo conto che la differenza tra il calore entrante nella lastra e quello uscente ne provoca la variazione di



temperatura otteniamo:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \tag{3}$$

dove c è il calore specifico e ρ la densità.
Limitiamoci d'ora in poi al caso unidimensionale. Risolveremo questa equazione nel caso di una sbarretta di sezione parallelepipeda come mostrato in figura, di lunghezza l, sezione S con le seguenti condizioni al contorno:

- l'estremo destro è mantenuto a temperatura costante T_0
- all'estremo sinistro viene fornita una quantità di calore finita durante un tempo molto piccolo da una sorgente avente larghezza d
- supponiamo inoltre che questa estremità possa scambiare calore solo con la parte restante della sbarretta e che quindi non vi sia flusso di calore verso sinistra, cioè che il gradiente di temperatura sia nullo in quel punto per la legge di Fourier.

Trascuriamo inoltre le perdite di calore verso l'esterno dalle superfici della sbarretta (se la sbarretta si trova sospesa in aria, senza correnti convettive, questa è una buona approssimazione).
Ponendo $k/(\rho c) = D$ (coefficiente di diffusione, espresso in $[m^2/s]$ nel S.I.) dovremo quindi risolvere l'equazione:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\nabla^2 T(x,t) \tag{4}$$

con le condizioni al contorno: $T(l,t) = T_0 \quad \forall t, \quad T(x,0) = T_0$ per $x > d$ e $\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \forall t.$
La soluzione di questa equazione in modo analitico è possibile nel caso di sbarra infinitamente lunga se D è costante, il rilascio di energia è istantaneo e puntiforme.
Si dimostra che:

$$T(x,t) = \frac{C}{\sqrt{Dt}} \exp{(-\frac{x^2}{4Dt})} + T_0 \tag{5}$$

dove C è una costante proporzionale al calore ceduto alla sbarretta. Si noti come la funzione sia fortemente patologica per $t \to 0$. Naturalmente la nostra sbarretta non sarà infinitamente lunga (e sarebbe poco pratico anche farla soltanto "molto lunga"), perciò, se vogliamo tenere conto della lunghezza finita della sbarretta dobbiamo cercare la soluzione attraverso uno sviluppo in serie. Applichiamo il metodo della separazione delle variabili e cerchiamo una soluzione della forma:

$$T(x,t) = T_0 + F(x)G(t) \tag{6}$$

si noti l'aggiunta del termine costante T_0, ovviamente legata alla necessità di soddisfare le condizioni iniziali, poichè la funzione T non compare direttamente nell'equazione l'aggiunta di un termine costante è sempre possibile.
Sostituendo 6 in 4 otteniamo

$$\frac{\dot{G}}{G} = D\frac{d^2F/dx^2}{F} = costante = -\lambda^2 \tag{7}$$

Le due equazioni sono facilmente risolubili:

$$G(t) = cost \exp(-\lambda^2 t) \tag{8}$$

$$F(x) = A\cos(\sqrt{(\lambda^2/D)}x) + B\sin(\sqrt{(\lambda^2/D)}x) \tag{9}$$

Poichè sappiamo che $\partial F/\partial x$ deve annullarsi per x=0, solo il termine in coseno è accettabile nella precedente equazione 9, mentre la condizione che F si annulli per x=l implica che

$$A\cos(\sqrt{(\lambda^2/D)}l) = 0 \tag{10}$$

ossia sono accettabili solo i λ definiti da

$$\lambda = (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{D}}{l} \tag{11}$$

e quindi potremo scrivere la soluzione completa dell'equazione come una somma dei termini appena trovati:

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)\exp(-\frac{(2n+1)^2\pi^2 D}{4l^2}t) \tag{12}$$

Naturalmente la stessa equazione calcolata per $t = 0$ deve soddisfare le nostre condizioni al contorno, ossia per t=0 deve ridursi ad un impulso molto stretto (non una δ, la nostra sorgente ha comunque dimensioni fisiche finite, dell'ordine del millimetro), questo ci permette di trovare gli A_n.

$$T(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x) \tag{13}$$

Assumiamo dunque che la temperatura iniziale della sbarra per t=0 sia quella mostrata in figura 1, dobbiamo scrivere questa distribuzione iniziale come una somma di coseni come in 13, si noti che al crescere di n le funzioni hanno periodo $4l$ per n=0, $\frac{4}{3}l$ per n=1, $\frac{4}{5}l$ per n=2, ecc. perciò l'intervallo su cui sviluppare $T(x,0)$ in serie di Fourier è costituito da un segmento lungo 4 l e non l come sembra intuitivo, ciò implica che anche $T(x,0)$ deve essere estesa analiticamente su tale intervallo e che deve essere una funzione periodica.
Si noti come per x= 2l (e quindi in regione non fisica) si debba avere una poco intuitiva condizione iniziale con $T < 0$. Su questo intervallo abbiamo la seguente condizione di ortogonalità verificabile con le formule di prostaferesi:

$$\int_0^{4l} \cos\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]dx = 2l\delta_{n,m}$$

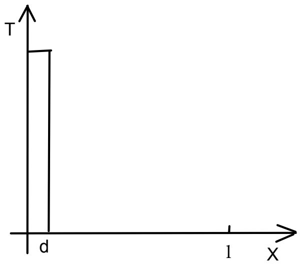


Figura 1: Distribuzione iniziale della temperatura

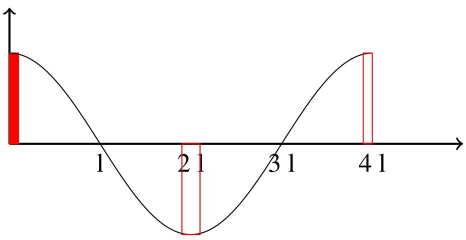


Figura 2: Estensione delle condizioni al contorno per la temperatura

Possiamo quindi calcolare i coefficienti A_n in 13 moltiplicando ambo i membri per la funzione

$$\cos\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\right]$$

e integrando tra 0 e 4l, otteniamo:

$$\int_0^{4l} T(x,0)\cos\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\right]dx = \int_0^{4l}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\cos\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\right]dx$$

Il primo membro è banale, dalla figura 2 vediamo che T(x,0) è sostanzialmente costituita da 3 rettangoli, il secondo membro, dopo avere portato il segno di integrale dentro la sommatoria può essere calcolato sfruttando la condizione di ortogonalità:

$$A_m = \frac{4\Delta T_M \sin[(2m+1)\pi d/(2l)}{(2m+1)\pi}$$

dove ΔT_M rappresenta la massima variazione di temperatura iniziale della sbarra. Mettendo insieme tutti i termini otteniamo:

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\Delta T_M}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi d}{2l}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right)\exp\left(-\frac{D\pi^2(2n+1)^2 t}{(4l^2)}\right)$$

In figura 3 sono mostrate le 2 soluzioni analitiche ottenute nel caso di sbarrette di bronzo, infinita con sorgente infinitamente sottile nel primo caso (soluzione blu tratteggiata) e con sbarretta finita lunga 63 mm e sorgente larga 1.6 mm (linea continua rossa). Le due soluzioni sono state normalizzate in modo da assumere lo stesso valore massimo. Si noti come la parte iniziale corrispondente all'aumento di temperatura è pressochè coincidente, mentre la soluzione numerica scende piu' rapidamente a zero, evidentemente una sbarretta di lunghezza limitata dissipa più rapidamente il calore. Ulteriori esperimenti numerici sono possibili: si può variare la larghezza della sorgente termica (con effetti quasi impercettibili) o si può variare la lunghezza della sbarretta, allungandola si nota che la "coda" si alza ed assomiglia maggiormente al caso analitico con sbarretta infinita.
Notate che entrambe le soluzioni assumono un rilascio di energia termica istantaneo, evidentemente così non può essere, l'impulso di calore durerà probabilmente almeno qualche decimo di secondo, bisognerebbe tenerne conto ricordando che il sistema in oggetto è lineare e quindi la sua risposta può essere calcolata convolvendo la risposta all'impulso del sistema (cioè che cosa ?) con l'impulso di calore in ingresso (scrivete la formula dell'integrale nel caso analitico...)

2 LABORATORIO

Il sistema di misura è mostrato in fig. 4. La misura è totalmente controllata dal calcolatore attraverso il software

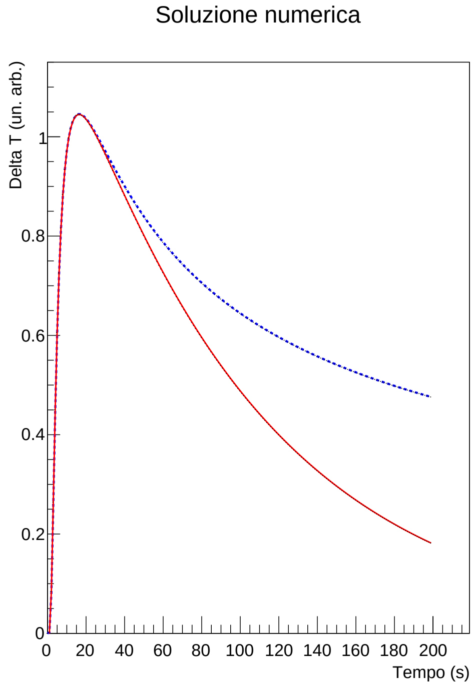


Figura 3: le due soluzioni analitiche:linea tratteggiata per sbarretta infinitamente lunga, linea continua per l=63mm.

Labview, vengono utilizzati 2 canali di output e 2 di input:

- un canale di output alimenta per un breve intervallo di tempo una resistenza (circa 100 Ω) posta ad una estremità della sbarretta, per avere un aumento di temperatura misurabile occorre fornire una tensione di almeno 10 V, la corrente richiesta è troppo elevata per essere fornita direttamente dalla scheda di acquisizione, è perciò necessario utilizzare l'alimentatore programmabile.

  Attenzione che il riscaldatore è piuttosto **FRAGILE** e si rompe facilmente se il riscaldamento dura più di 2 s con 10 V applicati!!

- il secondo output dell'alimentatore fornisce una tensione costante al sensore di temperatura (PT100) attraverso una opportuna resistenza al fine di avere una corrente circolante dell'ordine del mA.

  Nota 1: il valore della corrente deve essere limitato al fine di evitare effetti di autoriscaldamento del sensore, il suo valore preciso non è importante (purchè sia noto con buona precisione).

- il primo ingresso dell'acquisizione legge la tensione ai capi del sensore PT100, come ben sapete la variazione percentuale di temperatura di questo tipo di sensori è piccola e quindi occorre una opportuna amplificazione per sfruttare al massimo la risoluzione dell'ADC. Scegliete un opportuno fondo scala del canale (non il default 10V !).

- il secondo ingresso legge la tensione fornita dalla termocoppia in un punto intermedio della sbarretta, naturalmente la tensione è molto piccola, occorre inserire un amplificatore esterno con guadagno molto elevato, lo potete trovare già montato e pronto all'uso. Naturalmente anche in questo caso c'è un piccolo offset di tensione che dovrà essere annullato in fase di analisi.

3 Elettronica

Ci occorrono: l'alimentatore programmabile, un amplificatore per leggere la termocoppia.

4 Analisi dati

Per ricavare il coefficiente di diffusione del materiale si può procedere in almeno 3 modi:

- Nell'approssimazione di sbarretta infinita, usando la 5, si trova facilmente che il massimo della distribuzione a x fissato si ha per $t_{max} = \frac{x^2}{2D}$, essendo noto t_{max} è facile ricavare D.

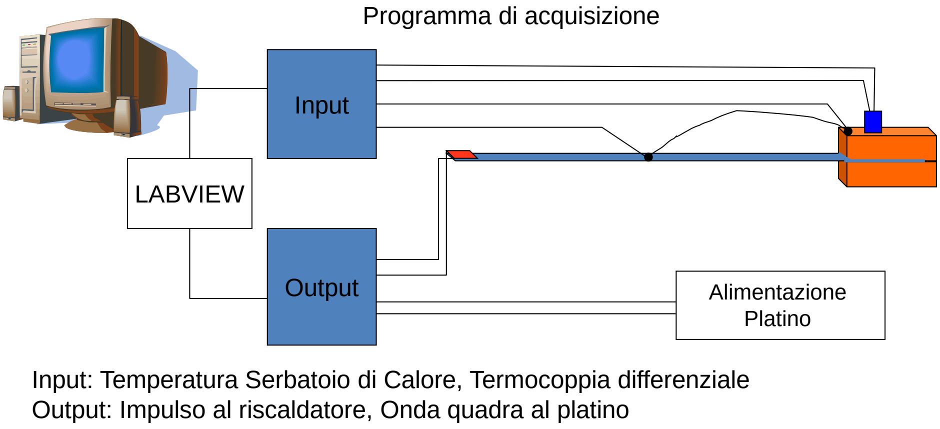


Figura 4: Apparato di misura

- Sempre nell'approssimazione di sbarretta infinita se moltiplico $T(x,t) - T_0$ per $\sqrt{t}$ e ne faccio il logaritmo ottengo:
$$\log\left((T(x,t) - T_0)\sqrt{t}\right) = \log\left(\frac{C}{\sqrt{D}}\right) - \frac{x^2}{4Dt}$$
Graficando il membro di sinistra in funzione di $1/t$ ottengo una retta la cui pendenza è data da $\alpha = -\frac{x^2}{4D}$. Ricordatevi che la soluzione approssimata è praticamente coincidente con quella esatta per t piccoli ossia $1/t$ grandi!
Dal valore dell'intercetta della retta è anche possibile ricavare il calore specifico per unità di volume, dobbiamo però calcolare la quantità di calore fornita alla sbarretta e assumere che non vi siano dispersioni per convezione, conduzione e irraggiamento.

- Il metodo più accurato è naturalmente quello del fit alla soluzione esatta o in seconda battuta alla soluzione analitica approssimata (che però, come avete visto, è abbastanza diversa da quella esatta per t grandi per cui è opportuno che sia limitato alla parte iniziale dei dati ossia salita iniziale, picco e la parte iniziale della discesa).

Il materiale utilizzato per la barretta è bronzo, la conducibilita' del bronzo è fortemente dipendente dalla specifica lega utilizzata, io ho trovato valori variabili tra 26 e 65 W/m/K.
Dimensioni della barretta: larghezza 5.0 mm, spessore 0.40 mm, lunghezza 63 mm, la termocoppia è stata fissata a circa 21 mm dalla sorgente di calore (che a sua volta ha una lunghezza di circa 2 mm.
La termocoppia è del tipo rame–costantana la cui sensibilità è pari a circa 41 $\mu V/^{\circ}C$ (la relazione non è proprio lineare ma per i nostri scopi è sufficiente).

5 Traccia dell'esperienza

La sbarretta metallica con il riscaldatore e i due sensori di temperatura viene fornita già montata e racchiusa in una scatola metallica per evitare l'introduzione di errori per fenomeni di convezione termica o interferenze elettromagnetiche (vedi figura 5), i due connettori BNC sul lato sinistro della scatola sono collegati in parallelo al sensore PT100, il connettore in alto a destra è collegato al riscaldatore ed il connettore in basso a destra è collegato alla termocoppia (vedi etichette sul coperchio). Il dettaglio del sistema è mostrato in figura 6, si notino i sottili e lunghi fili di rame smaltato per ridurre dispersioni di calore.

- Siccome il riscaldatore nella scatola è piuttosto **FRAGILE** inizialmente collegate una resistenza esterna di valore simile. Al solito dovete verificare con l'oscilloscopio che il tutto sia ragionevole...

- Collegate l'amplificatore alla termocoppia, collegate anche l'oscilloscopio, Cosa vi aspettate di vedere ? vi sembra ragionevole ?

- Preparate il programma in Labview per gestire l'esperimento, ricordate che la relazione tra resistenza e temperatura in gradi Kelvin per una PT100 è fornita da questa formula:
$$T = 14 \times 10^{-4}\, R^2 + 2.2959\, R + 29.77$$

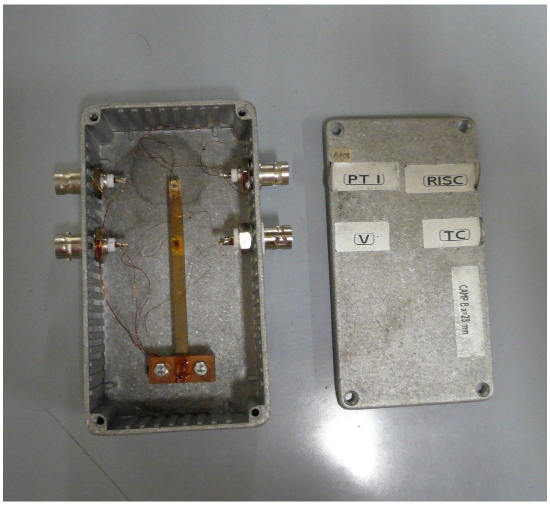


Figura 5: Scatoletta metallica con sbarretta metallica e sensori

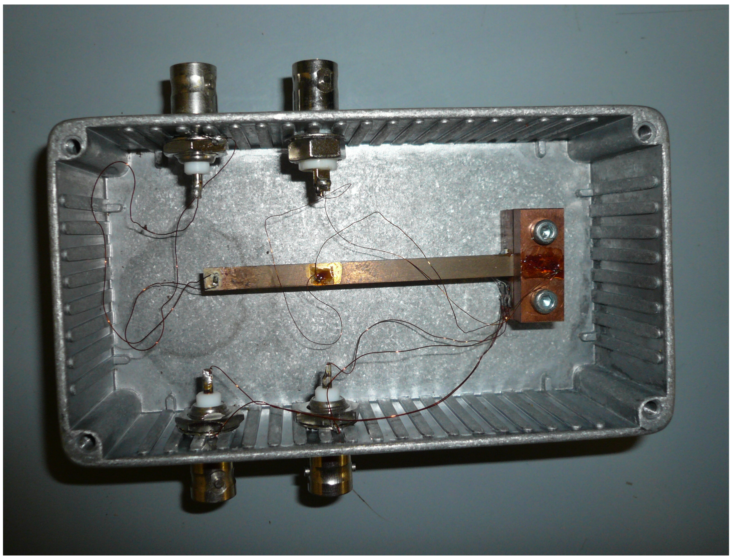


Figura 6: Dettaglio della scatoletta metallica con sbarretta metallica e sensori

Il programma dovrà iniziare l'acquisizione della temperatura dei 2 sensori, dopo qualche secondo inizierà il riscaldamento che durerà un intervallo di tempo programmabile, sempre inferiore ai 2 s. Il sistema continuerà ad acquisire le temperature per almeno un paio di minuti (verificate che la temperatura ritorni circa al valore iniziale ma è inutile tentare di estrarre informazioni dalla coda della funzione che è affetta sia da errori relativi considerevoli sulla misura della temperatura che da incertezze teoriche sulla forma della funzione per t grandi. Scegliete la frequenza di campionamento, è inutile che sia eccessivamente alta, avreste una mole di dati difficile da gestire ma dovete essere in grado di acquisire i dettagli del processo fisico. Al termine i dati dovranno essere scritti su disco in un file con un formato ragionevole (verificate durante le prime prove che i dati vengano scritti correttamente ed in un formato che poi possa facilmente essere riletto e analizzato).

È fortemente consigliato graficare la misura delle 2 temperature mentre vengono acquisite.
Potete aggiungere un filtro numerico passa basso per filtrare i dati prima di scriverli, ma salvate comunque anche i dati non filtrati per ovvie ragioni !!

Ricordatevi che una buona procedura per costruire un sistema abbastanza complicato come questo NON è quello di montare tutto, incrociare le dita e sperare che funzioni, ma quello di costruire un pezzo alla volta e verificarne subito l'efficienza. Chi non seguirà questa regola verrà abbandonato al suo triste destino . . .