Propagazione degli errori in misure correlate e simulazione di esperimento: Spettrometro a prisma

Laboratorio di Metodi Computazionali e statistici (2023/24)

R. Cardinale, F. Parodi, S. Passaggio

Dipartimento di Fisica

November 14, 2023

Obiettivi dell'esperienza

- Esempio concreto di propagazione degli errori in presenza di correlazioni e con una funzione di trasferimento non banale
  - Simulazione MC
  - Variazione delle grandezze derivate conseguente a variazioni $\pm 1\sigma$ delle osservabili misurate direttamente (primarie)
- Verifica dell'insorgere di correlazione tra coppie di grandezze derivate a partire da un insieme di osservabili primarie scorrelate
- Utilizzo delle strumento virtuale caratterizzato durante l'esperienza (spettrometro) per l'elaborazione di un compito "aperto" (senza una guida pre-definita).

L'esperimento

- Attraverso la misura dei minimi angoli di rifrazione di un prisma

$$\delta_{m1} = \theta_1 - \theta_0 \rightarrow \text{non angolo}$$
$$\delta_{m2} = \theta_2 - \theta_0$$

  in corrispondenza di due lunghezze d'onda assegnate ($\lambda_1 = 579.1\ nm$, $\lambda_2 = 404.7\ nm$) si vogliono misurare i primi due coefficienti di Cauchy del materiale costitutivo del prisma

- Equazione (empirica) di Cauchy
  - Relazione tra l'indice di rifrazione $n(\lambda)$ di un mezzo trasparente e la lunghezza d'onda λ della luce

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots$$

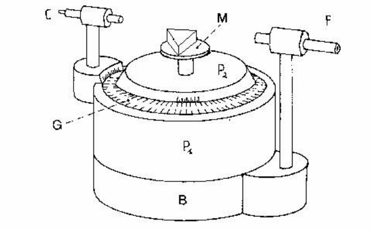
  - Dalla misura di $n(\lambda)$ in corrispondenza di due lunghezze d'onda λ_1, λ_2 posso ricavare i valori dei primi due coefficienti A, B (a meno di correzioni di ordine $1/\lambda^4$)

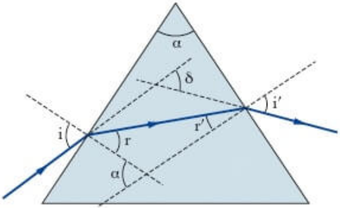
Tecnica sperimentale: spettrometro ottico

Gli indici di rifrazione $n_i = n(\lambda_i)$ $i = 1,2$ vengono ricavati attraverso la misura del minimo angolo di rifrazione di un prisma in corrispondenza di ciascuna delle due lunghezze d'onda λ_i

La misura è effettuata mediante uno spettrometro ottico

- δ_{mi} valore minimo della differenza θ_i–θ_0
- θ_0 angolo misurato dallo spettrometro in assenza del prisma
- θ_i angolo misurato dallo spettrometro in presenza del prisma
- $\Delta\theta_i$=0.5 mrad (errore massimo)





Tecnica sperimentale: spettrometro ottico

dati iniziali

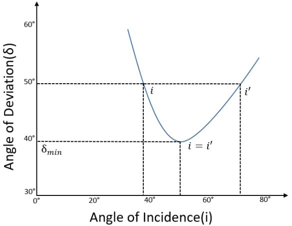
$\theta_0 \;\; \theta_1 \;\; \theta_2 \;\; \underset{det}{\rightsquigarrow} \;\; \delta_{m1} \;\; \delta_{m2} \;\; \rightsquigarrow \;\; n_1, n_2 \;\; \rightsquigarrow \;\; A, B$

tutte correlate ⇒ prop errori esterna complicata xk porto dietro cov
meglio esprimere A e $B(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ e una prop errore

La relazione attraverso cui si ricava l'indice di rifrazione ni del prisma a partire dalla misura di θ_i e di θ_0 è quella che mette in relazione l'angolo minimo di rifrazione δ_{mi} con n_i per un prisma di geometria data:

$$n_i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\delta_{mi} + \alpha}{2}\right)$$

dove α è l'angolo di apertura del prisma (che consideriamo noto senza errore e pari a 60°)



Sostituendo al posto di n_i l'espressione $n_i = n(\delta_{mi})$ nell'espressione di Cauchy si ottengono i coefficienti A e B. nel min se mi sposto mis. cambia poco

$$\begin{cases} n_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\delta_{mi} + \alpha}{2}\right) \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} \\ n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2} \end{cases}$$

Esercitazione

$\sigma^2(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}^2 \sigma_i^2$ $\qquad f(x_i + \sigma) = f(x_i) + \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i$

non calcolo derivate ma faccio delle variazioni $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i = f(x_i+\sigma) - f(x_i) \rightarrow$ si nota anche se f è lineare

Si sviluppi un programma che calcoli i miglior valori di A e B con i loro errori in base alle misure di λ_1, λ_2 (che si assume abbiano errore trascurabile) e dei tre angoli θ_0 (comune alle due misure), θ_1 e θ_2:

1. considerando $\sigma_\theta = \Delta\theta/\sqrt{3}$ e propagando gli errori con derivate o "variazione della funzione"
2. applicando il metodo Monte Carlo con θ_i ($i = 0, 1, 2$) distribuiti gaussianamente attorno ai valori misurati (dati) con deviazione standard $\sigma_\theta = \Delta\theta/\sqrt{3}$ e ricavando le distribuzioni di A, B (TH1D) e A vs B (TH2D). Da queste si deducano A, B e il coefficiente di correlazione (TH2D ha un metodo che ritorna il coefficiente di correlazione GetCorrelationFactor)
3. come al punto 2 ma considerando ciascun θ distribuito uniformemente tra $\theta - \Delta\theta$ e $\theta + \Delta\theta$
4. (facoltativo ma utile per capire meglio la correlazione): studiare la correlazione tra δ_1, δ_2, tra n_1, n_2, tra A, B numericamente e analiticamente (sfruttando la loro dipendenza da θ_0, θ_1, θ_2).

Matrice di covarianza tra grandezze derivate dalle stesse misure affette da errore

misure $x_i \dots x_n$ con val vero $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$

$V = E\left[(x-\bar{x}) \otimes (x-\bar{x})\right]$ = è scarto quadratico medio scritto vettoriale $= E\left[(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T\right]$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

al contrario è prodotto scalare

Grandezze derivate $f_{1 \dots n}$

$\vec{f} = A\vec{x} \qquad \vec{\bar{f}} = A\vec{\bar{x}}$

$V = E\left[\left(A(x-\bar{x})\right)\left(A(x-\bar{x})\right)^T\right] = E\left[A(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T A^T\right] = AVA^T$

Matrice di covarianza tra grandezze derivate dalle stesse misure affette da errore

se non lin sost coef A
con derivate

$$\delta = \begin{pmatrix}\theta_1-\theta_0\\ \theta_2-\theta_0\end{pmatrix} = \underset{=A}{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\theta_0\\ \theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

$$V_\delta = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_0^2 & & \\ & \sigma_1^2 & \\ & & \sigma_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sigma_0^2 & \sigma_1^2 & 0\\ -\sigma_0^2 & 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_0^2+\sigma_1^2 & \sigma_0^2\\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2+\sigma_1^2\end{pmatrix}$$

matrice cov di δ

diag mis indipendenti

$\sigma = \sqrt{2}\,\sigma$ $\quad \rho = 0.5$

$$\begin{pmatrix}2\sigma^2 & \sigma^2\\ \sigma^2 & 2\sigma^2\end{pmatrix}$$

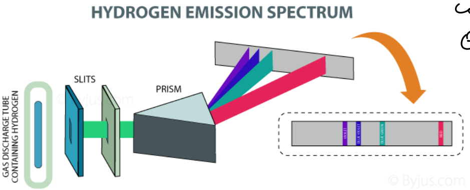
Osservazioni:

- se gli errori σ_1 e σ_2 sono nulli δ_{m1} e δ_{m1} sono massimamente correlati (100%)
- se l'errore σ_0 è nullo δ_{m1} e δ_{m1} sono scorrelati.
- se $\sigma = \sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2$ δ_{m1} e δ_{m1} hanno coefficiente di correlazione (ρ) pari a 0.5.
(stesso strumento)

Compito a casa

Si immagini di sfruttare il prisma precedentemente caratterizzato per misurare le righe di Balmer dell'idrogeno:

ottengo serie di λ correlate xké dip da θ_0 A e B
$\Rightarrow$ Fit tenendo conto correlazione



La formula di Balmer prevede:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Con R_H costante di Rydberg, n e m individuano i livelli energetici tra cui avviene la transizione. Nel caso dell'idrogeno con n=2 e m=3,4,5,6 si ottengono righe nel visibile.

Siano dati i valori di angoli θ_m misurati dallo spettrometro per le diverse righe colorate. Si vuole eseguire il fit di λ in funzione di m per determinare la costante di Rydberg R_H

Compito a casa

Vi chiediamo di elaborare una strategia combinata per fit e propagazione degli errori in modo da ottenere RH con il suo errore, tenendo conto di tutte le incertezze in gioco:

- *incertezze sugli angoli misurati (tra loro scorrelate)*
- *incertezze dovute ai parametri A, B e* θ_0 *dello spettrometro a prisma, comuni a tutte le* λ *(che introducono quindi una correlazione tra le lunghezza d'onda)*

Il problema è volutamente aperto. Non chiediamo di scrivere codice ma di descrivere in poche righe (max 2000 parole) il metodo da voi proposto.