BLUE, GLS, OLS e loro applicazioni

Laboratorio di Metodi Computazionali e Statistici (2023/2024)

R. Cardinale, F. Parodi, S. Passaggio
(con contributo per la conversion in Latex di S. Traverso e A. Sciaccaluga)

November 14, 2023

Gruppi di laboratorio diversi fanno misure, per mettere insieme con media pesata ma se dati non correlati

Combinazione di misure: BLUE

Il migliore stimatore

Si consideri il problema di combinare N misure della stessa grandezza Y in modo da determinare $\bar{y}$, miglior stima di Y. In generale le misure possono essere correlate (ad es. possono avere incertezze derivanti da parametri comuni o da una comune procedura di estrazione/analisi).

Si abbiano quindi N misure $y_1, y_2, ..., y_N$ della grandezza Y, il cui valore vero è μ. Come costruisco $\bar{y}$, miglior stima di Y ?

Best **L**inear **U**nbiased **E**stimator

stimatore generico

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = \boldsymbol{\alpha y} \qquad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$$

- è lineare
- è unbiased: $E[\bar{y}] = \mu$

$$E\left[\sum \alpha_i y_i\right] = \sum E\left[\alpha_i y_i\right] = \sum \alpha_i E\left[y_i\right] =$$

$$= \sum \alpha_i \mu = \mu$$

se voglio stim. unbiased $\Rightarrow \sum \alpha_i = 1$

come media pesata

è media pesata se misure scorrelate

- ha varianza $\sigma_{\bar{y}}^2(\boldsymbol{\alpha})$ minima (best)

BLUE: minima varianza

Scriviamo la varianza in termini degli α_i

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = Cov[\bar{y}, \bar{y}] = Cov\left[\sum_i \alpha_i y_i , \sum_j \alpha_j y_j\right] = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \; cov[y_i, y_j]$$

$Y(\ )$ $\alpha($

che corrisponde, in termini matriciali, a:

$$\sigma^2(\bar{y}) = \boldsymbol{\alpha} V \boldsymbol{\alpha}^T$$

La richiesta di varianza minima determina $\boldsymbol{\alpha}$ e, di conseguenza, l'estimatore migliore.

BLUE: caso 2D

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \qquad \alpha = (\alpha_1, 1-\alpha_1)$$

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1-\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \text{Impongo } \frac{\partial \sigma_{\bar{y}}^2}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\sigma_1^2 + (1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 & \alpha_1\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha)\sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_1(1-\alpha_1)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha_1)\alpha_1\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-\alpha_1)^2\sigma_2^2$$

$$\frac{\partial \sigma_{\bar{y}}^2}{\partial \alpha_1} = 0 \Rightarrow 2\alpha_1\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 4\alpha_1\rho\sigma_1\sigma_2 - 2(1-\alpha_1)\sigma_2^2 = 0$$

$$\alpha_1(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \qquad \alpha_2 = \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

BLUE: caso 2D con misure sono non correlate ($\rho = 0$)

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \qquad \alpha_2 = \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{''} \qquad \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

$\rho = 0$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad \alpha_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

divido per $\sigma_1^2\sigma_2^2$

$$\alpha_1 = \frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} \qquad \alpha_2 = \frac{1/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} \qquad \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_1^2}}$$

BLUE: caso 2D con misure correlate ($\rho \neq 0$)

Per fissare le idee consideriamo $\sigma_2 \leq \sigma_1$ e scriviamo tutto in funzione del rapporto $\eta = \sigma_2/\sigma_1$ (dividendo numeratore e denominatore per σ_1^2):

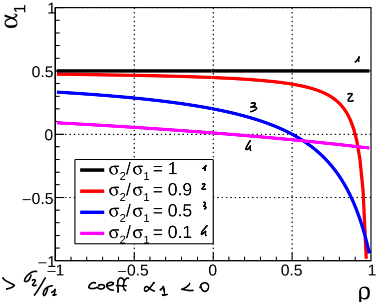
$$\alpha_1 = \frac{\eta^2 + \rho\eta}{1 - 2\rho\eta + \eta^2} \qquad \sigma^2_{\bar{y}} = \frac{(1-\rho^2)\,\sigma_2^2}{1 - 2\rho\eta + \eta^2} \rightsquigarrow \text{disegno} \quad \frac{\sigma^2_{\bar{y}}}{\sigma_2^2}$$

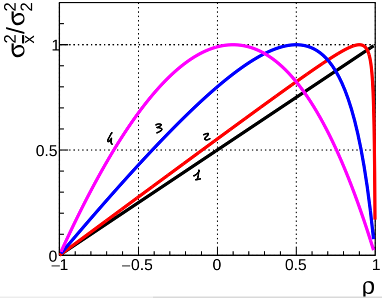
varianza miglior stima

varianza risultato più preciso

Studiamo l'andamento di $\hat{\alpha}_1$ e $\sigma^2_{\bar{y}}/\sigma_1^2$ in funzione di ρ

Se non conosco la correlazione non è buona cosa considerare





Correl > σ_2/σ_1 coeff $\alpha_1 < 0$

BLUE: caso 2D con misure correlate ($\rho \neq 0$)

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1^2}{(\qquad)^2} + 2\rho\,\frac{(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\sigma_1\sigma_2}{(\qquad)^2} + \frac{(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_2^2}{(\qquad)^2}$$

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{(1-\rho^2)\,\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

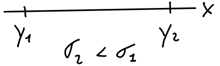
se non correlate torna media pes?

- se ρ incerto, provo diversi ρ nell'intervallo ed usare la massima variazione ottenuta

α_1 diventa neg

$$\bar{y} = \alpha_1 y_1 + (1-\alpha_1) y_2 = y_2 + \alpha_1 (y_1 - y_2) = \underset{>0}{y_2} + \underset{>0}{|\alpha_1|}\,\underset{>0}{(y_2 - y_1)}$$

sta qua se



- Se due mis molto correlate $\Rightarrow$ si muovono dalla stessa parte rispetto $\bar{y}$ ma con errore grande e piccolo
- Stima molto sensibile alla correlazione
- Media di mis correlate se molto correlate cade fuori intervallo, va bene ma devo avere abbasta precisione per accorgermene