

Soluzione numerica delle equazioni alle derivate parziali (PDE)

Laboratorio di Metodi Computazionali e statistici (2023/24)

Fabrizio Parodi

Dipartimento di Fisica

October 18, 2023

Equazioni differenziali alle derivate parziali

- Quantità come temperatura, pressione, campi em, etc.. variano in maniera continua nello spazio e nel tempo.
- Chiamiamo $U(x, y, z, t)$ un campo generico. Al variare del tempo il valore del campo $U(x, y, z, t)$ in una posizione influenza il campo nei punti vicini. Questo vuol dire che le equazioni dinamiche che descrivono la dipendenza di U dalle quattro variabili deve essere scritta in termini di derivate parziali (Partial Derivative Equation).
- Avendo definito

NOTAZIONE

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \equiv \partial_{xx} U \equiv U_{xx}} \quad \frac{\partial U}{\partial x} \equiv \partial_x U \equiv U_x$$

l'equazione più generale è (nelle variabili x e y):

$$A \partial_{xx} U + 2B \partial_{xy} U + C \partial_{yy} U + D \partial_x U + E \partial_y U = F$$

$$\partial_{xy} = \partial_{yx} \quad \text{2 volte}$$

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Equazione generale in $2D$

$$A\partial_{xx}U + 2B\partial_{xy}U + C\partial_{yy}U + D\partial_xU + E\partial_yU = F$$

<i>Ellittiche</i>	<i>Paraboliche</i>	<i>Iperboliche</i>
$d = B^2 - AC < 0$	$d = B^2 - AC = 0$	$d = B^2 - AC > 0$
Poisson	Calore/Schrodinger	Onde
$\nabla^2 U = \partial_{xx}U + \partial_{yy}U = f(x, y)$	$\partial_{xx}U = \alpha \partial_t U$	$v^2 \partial_{xx}U - \partial_{tt}U = 0$
$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$-\partial_{xx}U + VU = \partial_t U$	$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$

Equazioni differenziali alle derivate parziali (più variabili)

- Forma generale

$$\mathcal{L}U = \sum_i \sum_j a_{ij} \partial_{x_i x_j} U + \text{termini di ordine minore} = 0$$

- Ellittiche: tutti gli autovalori sono positivi o negativi
- Paraboliche: tutti gli autovalori sono positivi o negativi, salvo uno che è nullo
- Iperboliche: c'è un solo autovalore negativo (o positivo)

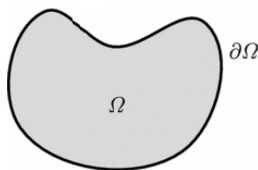
Condizioni al contorno

Differenze tra ODE e PDE:

- Molte variabili indipendenti correlate in maniera non banale, non si può applicare un metodo per ogni problema (vedi RK per ODE)
- Le condizioni al contorno sono più complesse (rispetto a ODE)

Condizioni al contorno:

- Dirichlet: le condizioni sono specificate come valore della soluzione sul contorno del dominio.
- Neumann: le condizioni sono specificate come valore della derivata normale della soluzione sul contorno del dominio.
- Cauchy: le condizioni sia sulla soluzione che sulla sua derivata normale.



Soluzioni analitiche e numeriche

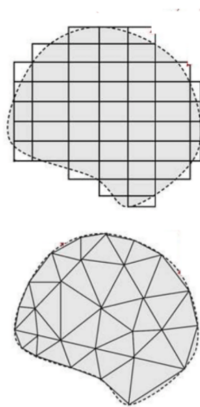
- Le equazioni differenziali alle derivate parziale possono essere risolte analiticamente con serie di funzioni (vedi Metodi Matematici della Fisica).
- Mentre molte proprietà possono essere studiate in termine della serie completa, non sempre per ottenere la soluzione per un problema dato la serie è l'approccio ottimale:
 - spesso la convergenza non è veloce, quindi la somma troncata può essere imprecisa o instabile;
 - per compensare il problema precedente occorre sommare un numero molto alto di termini: questa operazione spesso richiede più tempo delle soluzioni numeriche.

Metodo alle differenze finite

L'approccio numerico alle PDE è basato su diversi tipi di rappresentazioni o discretizzazioni.

Si può discretizzare per:

- **differenze finite**, cioè su griglie con direzioni di solito mutuamente ortogonali, con spacing opportuni nelle diverse dimensioni (è quel che faremo noi, usando di norma griglie quadrate in 2D con spacing uguali);
- **elementi finiti**, cioè suddividendo il dominio in elementi di forma e numero che variano localmente adattandosi al tipo di problema e di dominio.



Metodo alle differenze finite

- Supponiamo che il problema sia trovare $V(x,y)$, noto $\rho(x,y)$ su un dominio rettangolare con condizioni note su V al contorno (Dirichlet).

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Divido il rettangolo in un reticolo con spaziatura Δ
- Definisco una griglia di $(n_x + 1) \times (n_y + 1)$ punti (di ampiezza $n_x\Delta$ e $n_y\Delta$)¹:

$$\begin{aligned}x_i &= x_0 + (i - 1)\Delta & y_j &= y_0 + (j - 1)\Delta \\V_{i,j} &\equiv V(x_i, y_j) & V_{i\pm 1,j} &\equiv V(x_i \pm \Delta, y_j) & V_{i,j\pm 1} &\equiv V(x_i, y_j \pm \Delta)\end{aligned}$$

- Allora, riprendendo la definizione di derivata seconda:

$$\begin{aligned}\partial_{xx} V_{i,j} &= \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} - 2V_{i,j}}{\Delta^2} \\ \partial_{yy} V_{i,j} &= \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta^2} \\ \partial_{xx} V_{i,j} + \partial_{yy} V_{i,j} &= -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

¹Gli indici, per coerenza con il software che useremo (Matlab), vanno da 1 a n_x e da 1 a n_y .

Metodo alle differenze finite

- Raccogliendo i termini si ottiene:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} [V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}] + \frac{1}{4\varepsilon_0} \rho_{i,j} \Delta^2$$

La funzione nel punto (i,j) è ottenuto in un punto come media su primi vicini

- Non è la soluzione ma un relazione iterativa. Si parte da una stima iniziale e si itera finchè il potenziale non cambia più. Si dice che la stima iniziale si è “rilassata” nella soluzione
- È facile verificare che in 3D si ottiene:

$$V_{i,j,k} = \frac{1}{6} [V_{i+1,j,k} + V_{i-1,j,k} + V_{i,j+1,k} + V_{i,j-1,k} + V_{i,j,k+1} + V_{i,j,k-1}] + \frac{1}{6\varepsilon_0} \rho_{i,j,k} \Delta^2$$

Metodo alle differenze finite

- Il problema è partito dall'espressione del ∇ in coordinate cartesiane. In caso di soluzione di problemi a simmetria sferica o cilindrica è opportuno scrivere prima il Laplaciano nelle rispettive coordinate.
- La convergenza non è un problema in assoluto, piuttosto lo è il numero di iterazioni necessarie per avere una soluzione con precisione data.

Rilassamento

La soluzione può essere raggiunta in vari modi

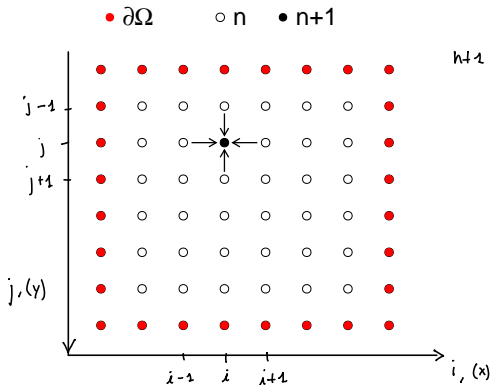
- Metodo di Jacobi: il potenziale non è modificato finché non si fa un giro completo su tutta la mappa

nel ciclo, passo successivo nel ciclo è passo precedente

$$V_{i,j}^{new} = \frac{1}{4} [V_{i+1,j}^{old} + V_{i-1,j}^{old} + V_{i,j+1}^{old} + V_{i,j-1}^{old}] + \frac{1}{4\epsilon_0} \rho_{i,j} \Delta^2$$

Prima calcolo V (matrice) su tutti i punti, poi ricalcolo tutti i punti, finché non sono sotto l'errore cercato

$n+1$ (●) deriva da 4 punti vecchi (○)

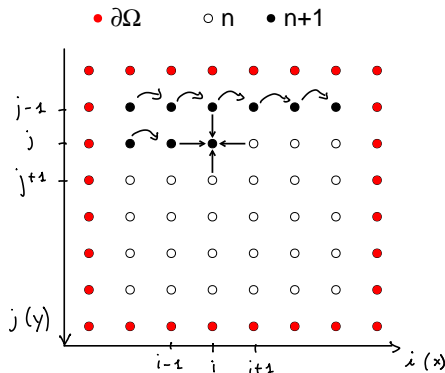


Rilassamento

La soluzione può essere raggiunta in vari modi

- Metodo di Gauss-Seidel: il nuovo valore del potenziale è utilizzato non appena calcolato. Ad esempio partendo da sinistra in alto

$$V_{i,j}^{new} = \frac{1}{4} [V_{i+1,j}^{old} + V_{i-1,j}^{new} + V_{i,j+1}^{old} + V_{i,j-1}^{new}] + \frac{1}{4\epsilon_0} \rho_{i,j} \Delta^2$$



Svantaggio: le condizioni iniziali non sono più trattate in maniera simmetrica.

Rilassamento

La soluzione può essere raggiunta in vari modi

- Sopra-rilassamento iterativo (SOR). Si esprime il nuovo valor del campo in termini di residuo.

$$\begin{aligned} V_{i,j}^{new} &= V_{i,j}^{old} + r_{i,j} \\ r_{i,j} &= \frac{1}{4} \left[V_{i+1,j}^{old} + V_{i-1,j}^{new} + V_{i,j+1}^{old} + V_{i,j-1}^{new} \right] + \\ &\quad \frac{1}{4\epsilon_0} \rho_{i,j} \Delta^2 - V_{i,j}^{old} \end{aligned}$$

Convergenze più rapida può essere ottenuta imponendo

$$V_{i,j}^{new} = V_{i,j}^{old} + \omega r_{i,j}$$

aggiunge un fattore moltiplicativo

Provare vari ω (normalmente $\omega \in [1, 2]$ funziona bene)

Criterio di convergenza

- Siccome non conosciamo la soluzione dobbiamo darci un criterio di convergenza.
- Possiamo calcolare la differenza tra un iterazione e l'altra

$$\Delta_{ij} = |V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n|$$

e chiedere che tutti i valori della matrice Δ siano all'interno di una certa tolleranza.

- È conveniente chiedere che la tolleranza sia espressa in termini assoluti e relativi

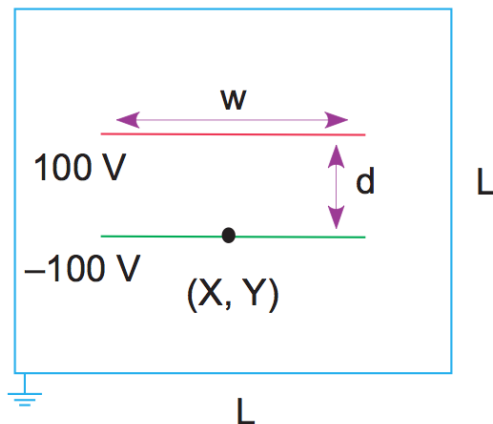
$$\Delta_{ij} < \varepsilon_a + |V_{ij}^n| \varepsilon_r$$

dove ε_a e ε_r rappresentano l'errore assoluto e relativo.

- In questo modo, ponendo ad esempio $\varepsilon_r = \varepsilon_a = 0.01$ si impone errore assoluto di 0.01 dove V_{ij} è zero e un errore relativo leggermente maggiore di 0.01 per valore di $V_{ij} > 10$.

Differenze finite: elettrostatica

Prima applicazione: il condensatore 2D



Propagazione del calore

- Come si propaga il calore o, se volete come cambia con il tempo il campo di temperature ?

$$J = -K \nabla T \quad \text{Legge di Fick}$$

$$- \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla J \quad \text{equazione di continuità e uso } dU = CdT$$

$$- C \frac{\partial T}{\partial t} = -K \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{C} \nabla^2 T$$

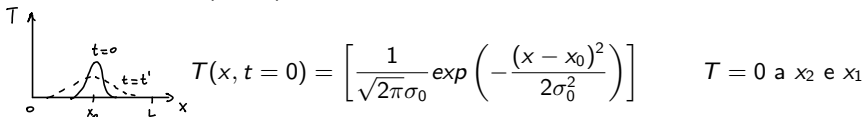
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

$$T_t = \kappa T_{xx} \quad \text{in } 1D$$

$$\Delta t = \frac{\eta}{\kappa} \Delta x^2$$

Propagazione del calore

- Considero il caso di un impulso di calore al centro di una barra conduttrice con estremi (x_1, x_2)



- La soluzione, nel caso “ideale” $x_1 = -\infty, x_2 = \infty$), è

$$T(x, t) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \quad \sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + 2\kappa t}$$

La “spike” si allarga con il tempo.

- Attenzione:
 - la soluzione si riferisce ad un picco di temperatura con integrale 1 (il valore di temperatura a $x = x_0$ è $1/\sqrt{2\pi}\sigma$), con temperatura 0 agli estremi;
 - se le condizioni sono diverse bisogna modificare la normalizzazione e/o la temperatura minima;
 - pensate a come modificare l'impulso di calore in modo che dia una temperatura al picco di $T_0 + \Delta T$ con temperatura agli estremi (termostato) pari a T_0 (utile per l'esperienza in lab).

Propagazione del calore

- Potremmo impostare lo stesso metodo già usato per il potenziale. Ma in questo caso il sistema dell'aggiornamento del campo non funziona.. Il campo è noto solo per $t < t_{\text{presente}}$
- Discretizzazione

$$\partial_t T(x, t) \simeq \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t}$$

$$\partial_{xx} T(x, t) \simeq \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \simeq \kappa \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)}{\Delta x^2}$$

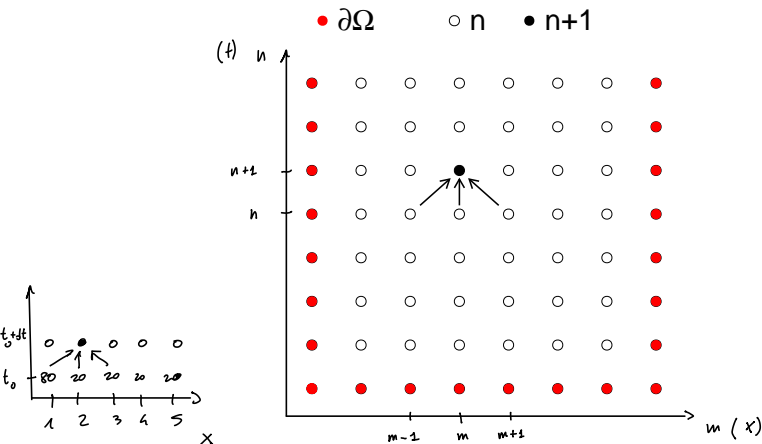
$$\begin{array}{lcl} T_{m,n+1} & = & T_{m,n} + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} [T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}] \\ \swarrow \downarrow & & \\ x \quad t & = & T_{m,n} + \eta [T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}] \end{array}$$

- Metodo esplicito: fornisce una soluzione in termini di valori della temperatura a istanti precedenti.

$$\Delta t = \frac{\eta}{\kappa} \Delta x^2$$

Schema di soluzione

Metodo esplicito



$$T_{m,n+1} = T_{m,n} + \eta [T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}]$$

Propagazione calore lungo una sbarra: condizioni di Cauchy

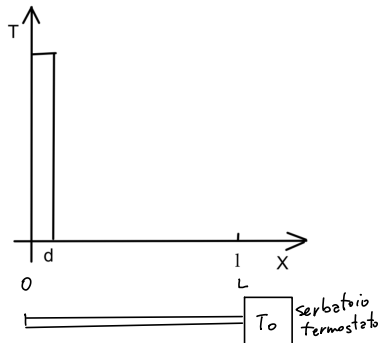
- La sbarra è isolata
- L'impulso di temperatura è applicato ad un'estremità
- La temperatura è campionata in uno/due punti lungo la sbarra. Misura: $T(x, t)$ con x fissato.

Condizioni:

$$T(x, t_0)$$

$$T(L, t) = T_0 \quad \forall t$$

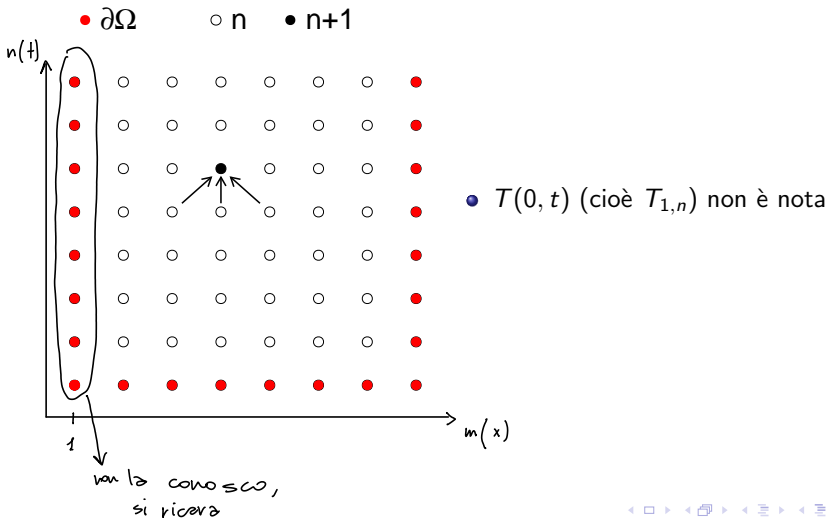
$$\partial_x T(0, t) = 0 \quad \forall t \rightarrow \text{impulso iniziale ha derivata nulla in } 0$$



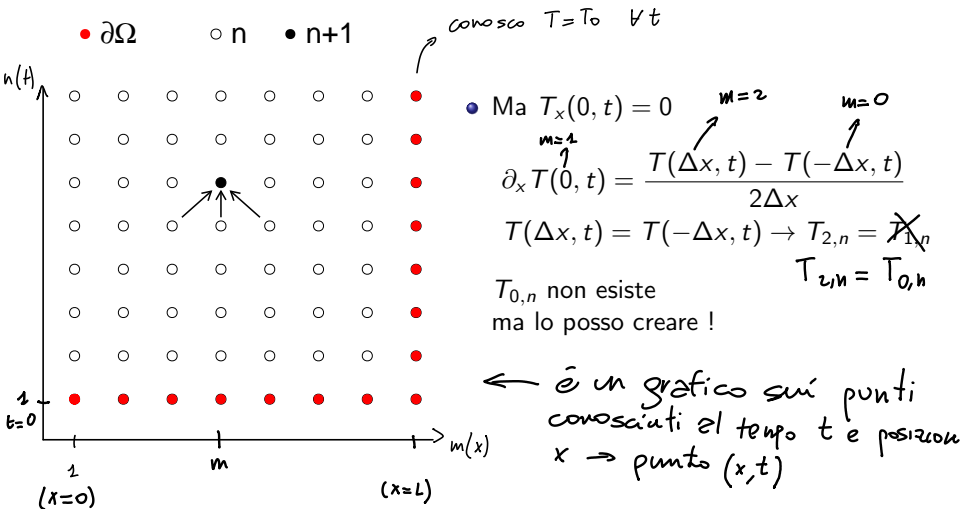
- La temperatura è campionata in uno/due punti lungo la sbarra. Misura: $T(x, t)$ con x fissato.

Come impostare condizioni di Cauchy ($T(L, t)$ e $T_x(0, t)$)

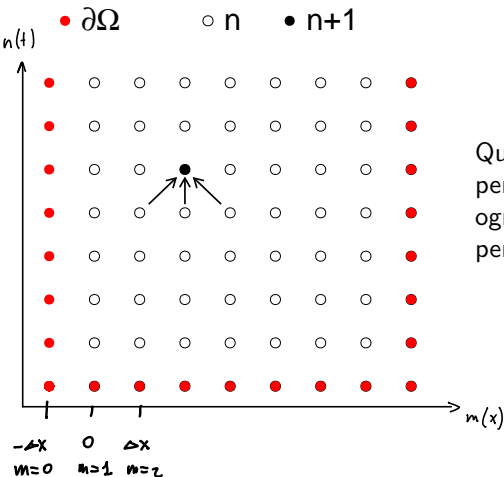
$$\begin{matrix} \parallel \\ T_0 \quad \forall t \end{matrix}$$



Come impostare condizioni di Cauchy ($T(L, t)$ e $T_x(0, t)$)



Come impostare condizioni di Cauchy ($T(L, t)$ e $T_x(0, t)$)



Quindi creo una nuova colonna a sinistra per $x = -\Delta x$ (che viene ricalcolata ad ogni turno sulla base di $x = \Delta x$) e la uso per iterare il metodo di risoluzione scelto.

Criterio di stabilità di Von Neumann

Nella soluzione numerica delle equazioni alle derivate parziali è importante assicurarsi che la soluzione non diverga (a seguito dell'evoluzione temporale)

- Una qualsiasi soluzione può, a tempo fissato, essere sviluppata secondo Fourier:

$$T_{m,n} = \sum_i \alpha(k_i) e^{ik_i m \Delta x}$$

- Inoltre, poiché le equazioni sono lineari, si ha, nel tempo:

$$T_{m,n+1} = \xi T_{m,n}$$

quindi, partendo da $n=1$, il fattore di amplificazione sarà, ξ^n . Lo sviluppo precedente si può quindi scrivere:

$$T_{m,n} = \sum_i \xi^n(k_i) e^{ik_i m \Delta x}$$

- Criterio di Von Neumann: per verificare che la soluzione sia stabile basta verificare che lo sia una base generica con k qualsiasi

$$T_{m,n}^{test} = \xi(k)^n e^{ikm \Delta x}$$

imponendo che $\xi(k)^n$ non diverga cioè che $|\xi(k)| < 1$.

- Si noti che questo è sempre vero per la soluzione analitica. La soluzione numerica, pur avendo la stessa forma, può deviare e divergere, per problemi di approssimazione numerica, in funzione dei campionamenti Δx o Δt scelti.

Criterio di stabilità di Von Neumann

- Applicazione al metodo esplicito per l'equazione del calore:

$$T_{m,n+1} = T_{m,n} + \eta [T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}]$$

$$\xi^{n+1} e^{ikm\Delta x} = \xi^n e^{ikm\Delta x} + \eta \left[\xi^n e^{ik(m+1)\Delta x} + \xi^n e^{ik(m-1)\Delta x} - 2\xi^n e^{ikm\Delta x} \right]$$

da cui

$$\xi = 1 + 2\eta [\cos(k\Delta x) - 1]$$

la richiesta $|\xi| < 1$ dà:

$$\eta = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$$

- Cosa ci dice ? Δt piccolo ok ma Δx piccolo solo se contemporaneamente Δt "quadraticamente" piccolo.

Metodo di Crank-Nicolson

- riscrivo la discretizzazione per $(x, t + \Delta t/2)$ ricalcolando la derivata temporale (come rapp. incrementale centrato) e ricalcolando la derivata seconda spaziale come media di quella in t ed in $t + \Delta t$

$$\partial_t T \left(x, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \simeq \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} & 2(\Delta x)^2 \partial_{xx} T \left(x, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ & \simeq [T(x - \Delta x, t + \Delta t) - 2T(x, t + \Delta t) + T(x + \Delta x, t + \Delta t)] \\ & + [T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x + \Delta x, t)] + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned}$$

- Si ottiene

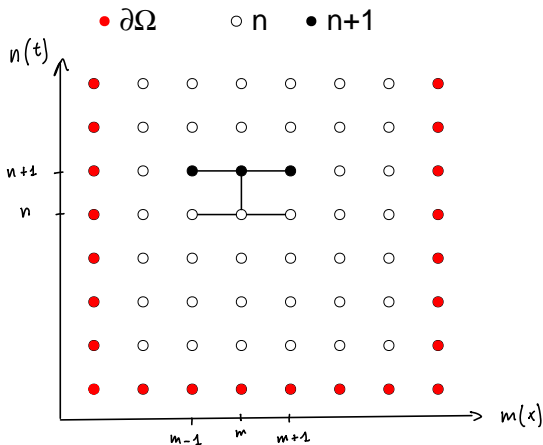
$$\begin{aligned} T_{m,n+1} - T_{m,n} = & \frac{\eta}{2} [T_{m-1,n+1} - 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n+1} \\ & + T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}] \end{aligned}$$

e raccogliendo termini con stessa temperatura

$$-T_{m-1,n+1} + \left(\frac{2}{\eta} + 2 \right) T_{m,n+1} - T_{m+1,n+1} = T_{m-1,n} + \left(\frac{2}{\eta} - 2 \right) T_{m,n} + T_{m+1,n}$$

Schema di soluzione

Cranck-Nicholson



$$-T_{m-1,n+1} + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T_{m,n+1} - T_{m+1,n+1} = T_{m-1,n} + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T_{m,n} + T_{m+1,n}$$

$$\nwarrow n+1 \quad n \nearrow$$

Metodo di Crank-Nicolson

- Non solo il metodo di Crank-Nicolson è più preciso ma si verifica che è stabile per ogni valore di Δt e Δx .

$$\xi^n (\xi - 1) e^{ikm\Delta x} = \frac{\eta}{2} \xi^n e^{ikm\Delta x} \left[\xi (e^{-ik\Delta x} + e^{+ik\Delta x} - 2) + (e^{-ik\Delta x} + e^{+ik\Delta x} - 2) \right]$$

$$(\xi - 1) = \frac{\eta}{2} [\xi (2 \cos(k\Delta x) - 2) + (2 \cos(k\Delta x) - 2)]$$

$$\xi (1 + \eta(1 - \cos(k\Delta x))) = 1 - \eta(1 - \cos(k\Delta x))$$

$$\xi = \frac{1 - \eta(1 - \cos(k\Delta x))}{1 + \eta(1 - \cos(k\Delta x))}$$

$$\xi = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

con $\alpha > 0 \longrightarrow |\xi| < 1$ sempre.

Metodo di Crank-Nicolson

- Metodo implicito (più termini nel futuro)
- Cosa conosciamo ?
 - $T_{m,1}$ (funzioni all'istante iniziale)
 - $T_{1,n}$ e $T_{N,n}$ (condizioni al contorno)
- Deriviamo l'equazione matriciale

$$-T_{m-1,n+1} + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T_{m,n+1} - T_{m+1,n+1} = T_{m-1,n} + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T_{m,n} + T_{m+1,n}$$

Metodo di Crank-Nicolson

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2,n+1} \\ T_{3,n+1} \\ T_{4,n+1} \\ \cdots \\ T_{N-1,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,n+1} + T_{1,n} + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T_{2,n} + T_{3,n} \\ T_{2,n} + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T_{3,n} + T_{4,n} \\ T_{3,n} + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T_{4,n} + T_{5,n} \\ \cdots \\ T_{N,n+1} + T_{N,n} + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T_{N-1,n} + T_{N-2,n} \end{bmatrix}$$

- Partiamo con $T_{i,n=0}$ risolviamo l'equazione matriciale per trovare $T_{i,n=1}$. E così via.. È possibile perchè nel membro di destra gli unici termini a $n+1$ sono agli estremi e sono quindi determinati dalle condizioni al contorno.

Metodo di Crank-Nicolson

- La soluzione dell'equazione matriciale (tridiagonale) può essere affrontata con metodi ad hoc (più efficienti).
- Manipoliamo la matrice fino a farla diventare triangolare superiore.
- Matrice tri-diagonale

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_N & d_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix}$$

Metodo di Crank-Nicolson

- Divido la prima riga per d_1 , quindi sottraggo a_2 volte la prima equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{c_1}{d_1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_2 - \frac{a_2 c_1}{d_1} & c_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & d_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{d_1} \\ b_2 - \frac{a_2 b_1}{d_1} \\ b_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix}$$

Metodo di Crank-Nicolson

- Divido la seconda riga per l'elemento diagonale la prima equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{c_1}{d_1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c_2}{d_2 - a_2 \frac{c_1}{d_1}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a_{N-1} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & d_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{d_1} \\ \frac{b_2 - a_2 \frac{b_1}{d_1}}{d_2 - a_2 \frac{c_1}{d_1}} \\ b_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix}$$

Metodo di Crank-Nicolson

- ...ottenendo alla fine

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ p_N \end{pmatrix}$$

dove

$$h_i = \frac{c_i}{d_i - a_i h_{i-1}} \quad p_i = \frac{b_i - a_i p_{i-1}}{d_i - a_i h_{i-1}}$$

Risolvendo iterativamente si ottiene

$$x_i = p_i - h_i x_{i+1}$$

Equazione delle onde

L'equazione iperbolica più importante è quella delle onde:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Poichè l'equazione contiene due derivate seconde è necessario imporre le condizioni iniziali per la funzione e per la derivata prima temporale:

$$u(x, 0) = f(x) \qquad u_t(x, 0) = g(x)$$

Equazione delle onde

Si parte dalla scrittura della derivata seconda in termine di differenze finite:

$$f'' = \frac{\overset{f_{m+1}}{f(x + \Delta x)} + \overset{f_{m-1}}{f(x - \Delta x)} - \overset{f_m}{2f(x)}}{\Delta x^2}$$

Applicata all'equazione delle onde fornisce (detto $\overset{m}{m}$ l'indice spaziale e n quello temporale):

$$\frac{u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 2u_{m,n}}{\Delta t^2} = v^2 \left(\frac{u_{m+1,n} + \overset{m-1}{u_{m+1,n}} - 2u_{m,n}}{\Delta x^2} \right)$$

$$u_{m,n+1} = 2u_{m,n} - u_{m,n-1} + v^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{m+1,n} + \overset{m-1}{u_{m+1,n}} - 2u_{m,n})$$

$$u_{m,n+1} = 2u_{m,n} - u_{m,n-1} + \frac{v^2}{v'^2} (u_{m+1,n} + \overset{m-1}{u_{m+1,n}} - 2u_{m,n})$$

$\underset{t+\Delta t}{u_{m,n+1}} = 2 \underset{t}{u_{m,n}} - \underset{t-\Delta t}{u_{m,n-1}} + \frac{v^2}{v'^2} (\underset{x+\Delta x}{u_{m+1,n}} + \overset{m-1}{\underset{x+\Delta x}{u_{m+1,n}}} - 2 \underset{x}{u_{m,n}})$

La soluzione è condizionatamente stabile. La condizione è:

$$v' > v$$

cioè la “velocità” associata a Δx , Δt deve essere maggiore della velocità fisica.

Equazione delle onde

Problema:

- Per calcolare la funzione all'indice temporale $n + 1$ ($t + \Delta t$) serve non solo n (t) ma anche $n - 1$ ($t - \Delta t$).

Utilizziamo la condizione $u(x, 0) = f(x)$ e concentriamoci sul caso particolare $u(x, 0) = 0$. Esprimendo la condizione come derivata centrata ottengo:

$$u_{m,1} = \frac{u_{m,2} - u_{m,0}}{2\Delta x} = 0 \longrightarrow u_{m,0} = u_{m,2}$$

Quindi per il l'indice temporale $n = 2$ (il successivo al primo)

m indica spaziale



$$u_{m,2} = 2u_{m,1} - u_{m,0} + \frac{v^2}{v'^2} (u_{m+1,1} + u_{m-1,1} - 2u_{m,1})$$

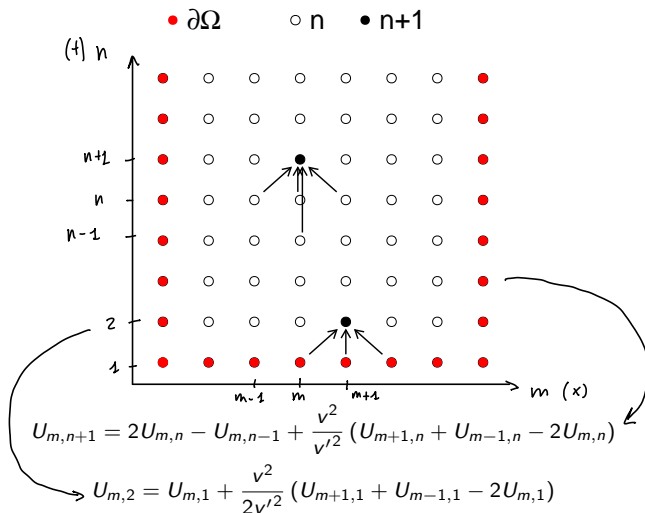
$$2u_{m,2} = 2u_{m,1} + \frac{v^2}{v'^2} (u_{m+1,1} + u_{m-1,1} - 2u_{m,1})$$

$$u_{m,2} = u_{m,1} + \frac{v^2}{2v'^2} (u_{m+1,1} + u_{m-1,1} - 2u_{m,1})$$

Nota $u(x, 0)$ si ricava $u(x, \Delta t)$ e quindi si itera l'algoritmo.

Schema di soluzione

Metodo esplicito



Equazione delle onde: convergenza

Studiamo la condizione per la convergenza:

$$\begin{aligned}\xi &= 2 - \frac{1}{\xi} + \frac{v^2}{v'^2} (e^{ikx} + e^{-ikx} - 2) \\ &= 2 - \frac{1}{\xi} + \alpha^2 (e^{ikx} + e^{-ikx} - 2)\end{aligned}$$

Che diventa:

$$\xi^2 - 2\xi + 1 - \xi\alpha^2 (2\cos(kx) - 2) = 0$$

$$\xi^2 - 2\xi + 1 + 4\xi\alpha^2 \sin^2\left(\frac{kx}{2}\right) = 0$$

$$\xi^2 - 2\beta\xi + 1 = 0 \quad \beta = 1 - 2\alpha^2 \sin^2\left(\frac{kx}{2}\right) \quad \xi = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$$

Studiamo le soluzioni:

$$\xi = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$|\xi| \leq 1$ se $|\beta| \leq 1$ (se $|\beta| \geq 1$ c'è almeno una soluzione di modulo > 1) ma allora ξ si può riscrivere come:

$$\xi = \beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2}$$

da cui:

$$|\xi| = 1$$

Equazione delle onde: convergenza

La condizione su α è

$$-1 \leq 1 - 2\alpha^2 \sin^2 \left(\frac{kx}{2} \right) \leq 1$$

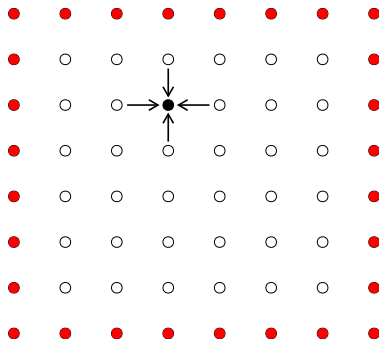
$$0 \leq \alpha^2 \sin^2 \left(\frac{kx}{2} \right) \leq 1$$

che implica $\alpha \leq 1$ e quindi $v^2 \leq v'^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2$. In altri termini, la “velocità” associata a Δx , Δt deve essere maggiore della velocità fisica.

Riassunto: equazioni ellittiche

Metodo di Jacobi

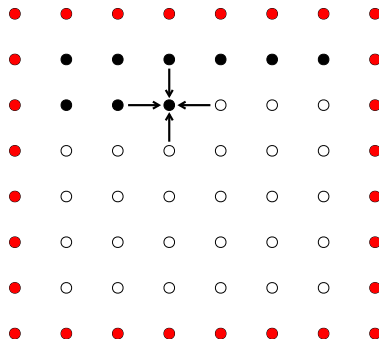
• $\partial\Omega$ \circ n • $n+1$



Riassunto: equazioni ellittiche

Metodo di Gauss-Seidel

• $\partial\Omega$ ○ n • $n+1$

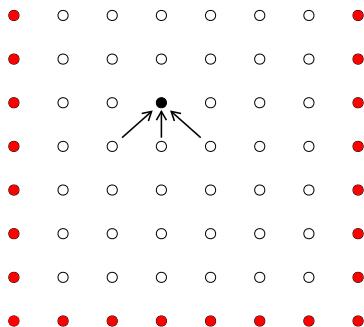


Il metodo di sovra-rilassamento semplicemente accelera il processo.

Riassunto: equazioni paraboliche

Metodo esplicito

• $\partial\Omega$ ○ n • n+1

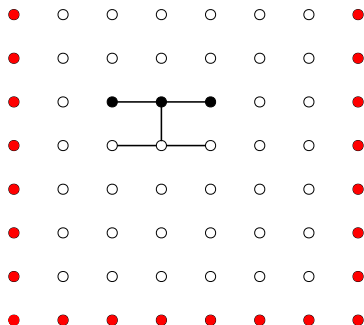


$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \eta [T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}]$$

Riassunto: equazioni paraboliche

Crank-Nicholson

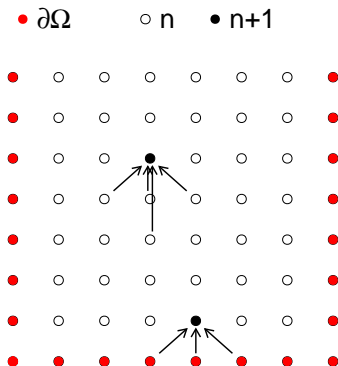
• $\partial\Omega$ ○ n • $n+1$



$$-T_{m-1,n+1} + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T_{m,n+1} - T_{m+1,n+1} = -T_{m-1,n} + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T_{m,n} - T_{m+1,n}$$

Riassunto: equazioni iperboliche

Metodo esplicito



$$U_{m,n+1} = 2U_{m,n} - U_{m,n-1} + \frac{v^2}{v'^2} (U_{m+1,n} + U_{m-1,n} - 2U_{m,n})$$

$$U_{m,2} = U_{m,1} + \frac{v^2}{2v'^2} (U_{m+1,1} + U_{m-1,1} - 2U_{m,1})$$

Esercitazione

Esercitazione:

- Propagazione del calore lungo una sbarra
 - esperimento di Lab3 (impulso di calore ad un estremo, termostato all'altro estremo): soluzione esplicita
 - Propagazione del calore su sbarra “simmetrica” (con impulso di calore al centro, termostati ai lati) con metodo Crank-Nicholson

Compito a casa, uno a scelta tra:

- Soluzione dell'equazione di Poisson per un condensatore 2D
- Corda vibrante 2D

Modalità:

- Implementazione e test dell'algoritmo in Matlab