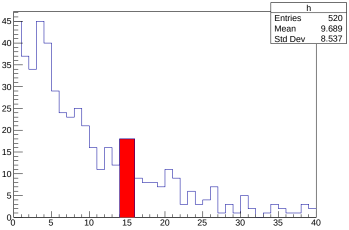
Introduzione Hands-on test d'ipotesi

Laboratorio di Metodi Computazionali e Statistici (2023/2024)

F. Parodi,R. Cardinale

December 20, 2023

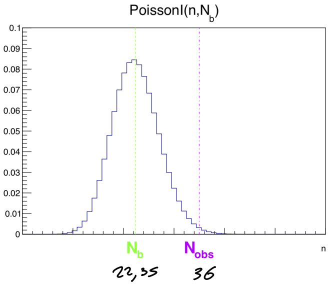
- Un esperimento ha preso dati di una certa variabile x
- Supponiamo che l'esperimento abbia raccolto prima un certo set di dati a bassa statistica (dati_lowstat.dat) e poi abbia successivamente raccolto ulteriori dati ad alta statistica (dati_highstat.dat)
- Fondo (generato da processi fisicamente noti) con distribuzione esponenziale
- Intervallo di dati interessanti (in cui potrebbe trovarsi del segnale interessante generato da processi mai osservati) individuato da considerazioni/motivazioni teoriche/sperimentali: $[14, 16]$
- Vogliamo capire se i dati osservati in quell'intervallo sono compatibili con gli eventi di fondo atteso oppure se si discostano da quanto ci aspettiamo

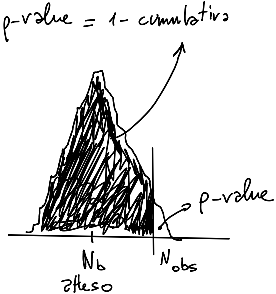


- Si analizzi il file a bassa statistica (dati_lowstat.dat)
- Supponiamo che il numero di eventi attesi (da eventi di fondo noti) sia $N_b = 22.35$
- Si calcoli il numero di eventi osservati nell'intervallo di interesse [14, 16]: N_{obs}
- Si calcoli la probabilità che il fondo aspettato ($N_b = 22.35$) possa fluttuare fino a raggiungere un valore maggiore o uguale rispetto al numero totale di eventi osservato N_{obs} nell'intervallo [14, 16]

bin [14,15] = 18
bin [15,16] = 18
$\Downarrow$
36
$\parallel$

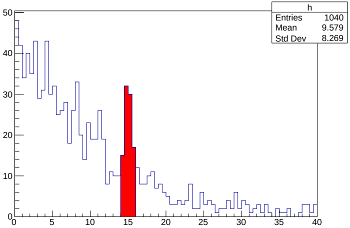
$p\left(N_b \geq N_{obs} = 36\right) = ?$





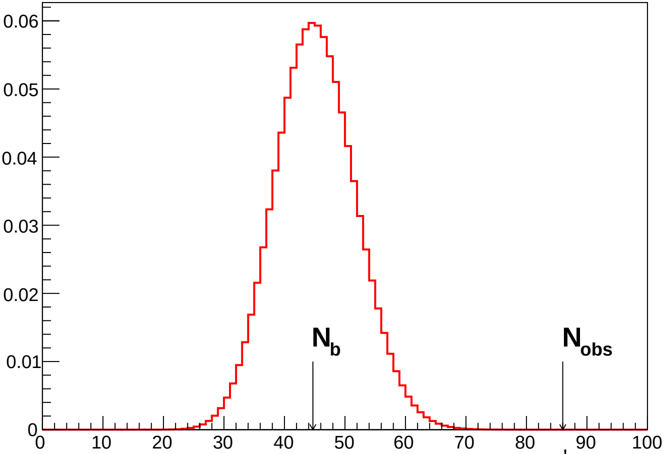
- I dati nell'intervallo sono distribuiti nell'ipotesi H_0 (che prevede solo fondo esponenziale) secondo una Poissoniana centrata su N_b
- Se contate N_{obs} otterrete un numero che è maggiore di N_b (si vede anche dal grafico) 36
- Dal numero di eventi attesi N_b e dal numero di eventi osservati N_{obs} posso escludere l'ipotesi H_0?
- Dovrò calcolare il p-value della Poissoniana: $P(N \geq N_{obs}|N_b)$
- Confrontare il p-value ottenuto con un certo valore di significanza del test (α)

Da qui ottengo che: → rigetto H_0
→ non rigetto H_0 (non ottengo mai "accetto H_0")



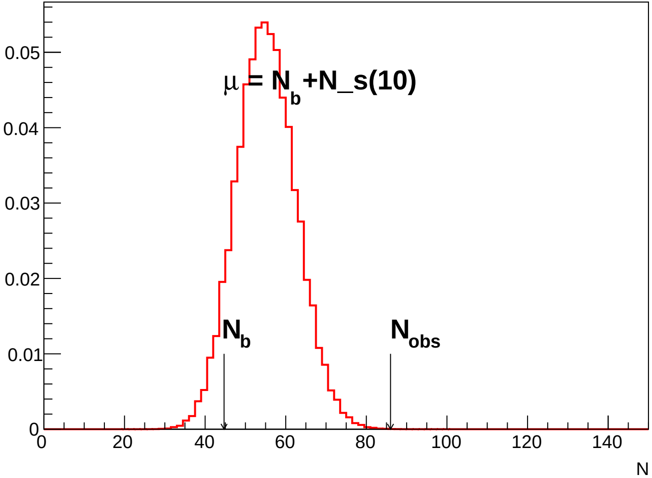
- Ora dovete analizzare il file ad alta statistica: si evidenzia un nuovo processo
- Dovete calcolare il limite superiore (al 95% C.L.) al numero di eventi di segnale (N_s) usando il numero di eventi totali osservati ($N_b + N_s$) nell'intervallo [14,16] e assumendo che il numero atteso di eventi di fondo (N_b) siano 44.7

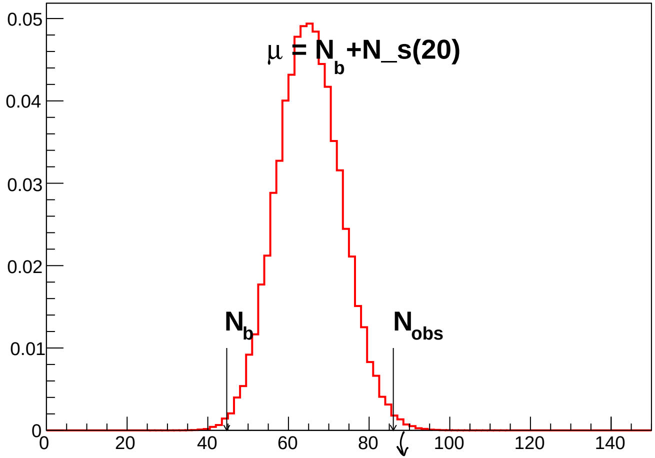
$N_s = 0$



Lower limite devo superare dove è già minore 5% xk già all'inizio N < 5%
⇒ Parto nel progr da n° alti

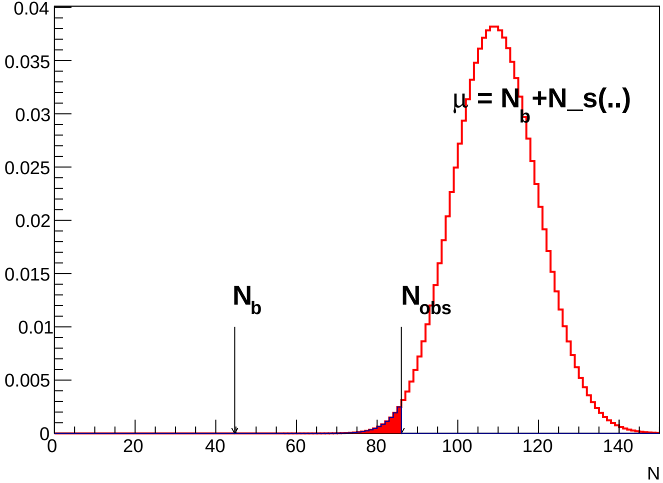
- Per calcolare il limite superiore al 95% di CL devo provare ad inserire un numero di eventi di segnale N_s variabile e vedere quale è il valore di N_s massimo che posso avere senza rigettare l'ipotesi $N_s + N_b$ visto il numero di eventi osservati N_{obs}
- Cioè vogliamo testare $N_s \neq 0$ e vedere se possiamo escluderli perchè predicono alti valori di $N_s + N_b$ e quindi avremmo una probabilità bassa di osservare un numero di eventi uguale o più basso di quelli osservati N_{obs}





mi fermo quando è 5%

Calcolo upper limit, quando raggiungo 5% mi fermo e −5% e mi fermo



- p-value$=P(\mu \leq N_{obs}, N_s, N_b)$
- Cioè la probabilità di osservare un numero uguale o minore di eventi di quelli osservati N_{obs}

Compito a casa: fit della distribuzione

- Eseguire un fit (binned e unbinned) dei dati assumendo come pdf la distribuzione somma di quella di segnale e di quella di fondo
- Il fondo può essere descritto da una funzione esponenziale
- Il segnale può essere descritto da una gaussiana
- È utile definire una funzione di fit che possa essere usata sia per il fit extended che non-extended

$$f(x) = N\Delta w(\alpha Gaus(x, x_0, \sigma) + (1-\alpha)\frac{e^{-x/\tau}}{\tau})$$

- Nel caso dell'extended binned likelihood si fissi Δw alla larghezza del bin dell'istogramma e N si inizializza al numero totale di eventi
- Nel caso del fit unbinned/binned non extended entrambi i valori vengono fissati a 1 (in modo da ottenere una densità di probabiità)

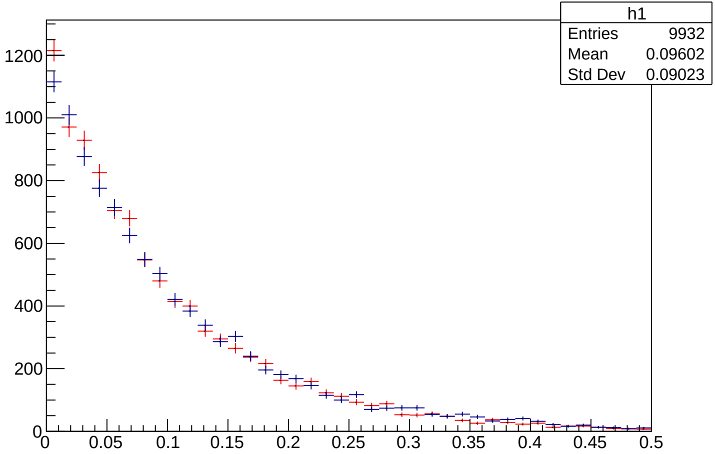
Riassunto metodi ROOT per fit di likelihood

- Utilizzare i metodi di ROOT per il fit alla distribuzione della variabile x

	Binned	Unbinned
Likelihood	Fit + opzione MULTI	TTree + UnbinnedFit
Extended Likelihood	Fit + opzione L	

Test di bontà del fit

- Abbiamo due campioni di dati s1.dat e s2.dat



- I due campioni di dati seguono la stessa distribuzione?

Test di bontà del fit

- I due campioni di dati seguono la stessa distribuzione?
- Il campione di dati s1.dat segue un'esponenziale (scipy.stats.expon con scale=$1/\lambda$) con $\lambda = 10$?
- Il campione di dati s1.dat segue un'esponenziale?

```
Double_t TH1::Chi2Test ( const TH1 *   h2,
                         Option_t *    option = "UU",
                         Double_t *    res = 0
                       )               const
```
virtual

χ^2 test for comparing weighted and unweighted histograms

Function: Returns p-value. Other return values are specified by the 3rd parameter

Parameters

[in] **h2** the second histogram

[in] **option**

- "UU" = experiment experiment comparison (unweighted-unweighted)
- "UW" = experiment MC comparison (unweighted-weighted). Note that the first histogram should be unweighted
- "WW" = MC MC comparison (weighted-weighted)
- "NORM" = to be used when one or both of the histograms is scaled but the histogram originally was unweighted
- by default underflows and overflows are not included:
  - "OF" = overflows included
  - "UF" = underflows included
- "P" = print chi2, ndf, p_value, igood
- "CHI2" = returns chi2 instead of p-value
- "CHI2/NDF" = returns χ^2/ndf

[in] **res** not empty - computes normalized residuals and returns them in this array

scipy.stats.ks_2samp

scipy.stats.ks_2samp(*data1*, *data2*) **[source]**
(http://github.com/scipy/scipy/blob/v0.15.1/scipy/stats/stats.py#L3966)

Computes the Kolmogorov-Smirnov statistic on 2 samples.

This is a two-sided test for the null hypothesis that 2 independent samples are drawn from the same continuous distribution.

Parameters:	**a, b** : *sequence of 1-D ndarrays*
	two arrays of sample observations assumed to be drawn from a continuous distribution, sample sizes can be different
Returns:	**D** : *float*
	KS statistic
	p-value : *float*
	two-tailed p-value

scipy.stats.kstest

scipy.stats.kstest(*rvs*, *cdf*, *args=()*, *N=20*, *alternative='two-sided'*, *mode='approx'*) **[source]**
(http://github.com/scipy/scipy/blob/v0.14.0/scipy/stats/stats.py#L3307)

Perform the Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit.

This performs a test of the distribution G(x) of an observed random variable against a given distribution F(x). Under the null hypothesis the two distributions are identical, G(x)=F(x). The alternative hypothesis can be either 'two-sided' (default), 'less' or 'greater'. The KS test is only valid for continuous distributions.

Parameters:

rvs : *str, array or callable*

If a string, it should be the name of a distribution in scipy.stats (../stats.html#module-scipy.stats). If an array, it should be a 1-D array of observations of random variables. If a callable, it should be a function to generate random variables; it is required to have a keyword argument *size*.

cdf : *str or callable*

If a string, it should be the name of a distribution in scipy.stats (../stats.html#module-scipy.stats). If *rvs* is a string then *cdf* can be False or the same as *rvs*. If a callable, that callable is used to calculate the cdf.

args : *tuple, sequence, optional*

Distribution parameters, used if *rvs* or *cdf* are strings.

N : *int, optional*

Sample size if *rvs* is string or callable. Default is 20.

alternative : *{'two-sided', 'less','greater'}, optional*

Defines the alternative hypothesis (see explanation above). Default is 'two-sided'.

mode : *'approx' (default) or 'asymp', optional*

Defines the distribution used for calculating the p-value.

- 'approx' : use approximation to exact distribution of test statistic
- 'asymp' : use asymptotic distribution of test statistic

Returns:

D : *float*

KS test statistic, either D, D+ or D-.

p-value : *float*

One-tailed or two-tailed p-value.

Esempio classificazione multivariata

- Consideriamo due variabili, x_1 e x_2, e supponiamo di conoscere l'espressione delle pdf congiunte per l'evento di tipo H_0 (segnale) e per l'evento di tipo H_1 (fondo)
- $f(x_1)$ è una Gaussiana con media μ_{H_0}
- $f(x_2)$ è una Gaussiana con media μ_{H_2}
- Stessa σ (dipendente da x_2)
- $f(x_2)$ è un'esponenziale uguale per H_0 e H_1

Due exp con larghezza che dip da x_2 ma larghezza x_2 dip x_1

$$f(x_1, x_2|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_2} e^{-(x_1-\mu_{H_0})^2/2\sigma^2(x_2)} \frac{1}{\lambda} e^{-x_2/\lambda}$$

$$f(x_1, x_2|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_2} e^{-(x_1-\mu_{H_1})^2/2\sigma^2(x_2)} \frac{1}{\lambda} e^{-x_2/\lambda}$$

Una var entra nella risoluz dell'altra $\rightarrow$ devo considerare x_1, x_2 per separare bene

$$\sigma(x_2) = \sigma_0 e^{-x_2/\xi}$$

In x_1 campioni diversi ma separazione modulata da σ che dip da x_2 se x_2 grande σ dimin e situa migliora

In x_1, x_2 sono due exp uguali

Esempio classificazione multivariata

Utilizzeremo

- likelihood ratio (1D) utilizzando solo la variabile x_1
- likelihood ratio (2D) utilizzando entrambe le variabili
- discriminante lineare di Fisher
- rete neurale (MLP)