Test d'ipotesi

Laboratorio di Metodi Computazionali e Statistici (2023/2024)

Roberta Cardinale e Fabrizio Parodi

Dipartimento di Fisica - Università di Genova

18 Dicembre 2023

Test statistici: introduzione

- strumento per fare affermazioni sulla validità di un modello basandosi su una serie di dati raccolti (oppure tra due modelli in competizione, verificare quale è più consistente con i dati)
- strumento per classificazione di eventi (selezionare eventi) provenienti da due diversi tipi (tecniche multivariate)

Test statistici

- Supponiamo di aver effettuato un esperimento/misura, assumiamo che i dati siano un set di N osservabili (caratteristiche dell'esperimento/misura)

$$\mathbf{x} = (x_1, ...x_N)$$

- $\mathbf{x}$ seguono una distribuzione di probabilità congiunta
- Ipotesi: specifica la distribuzione di probabilità dei dati ($\mathbf{x}$)
- L'obiettivo è di effettuare una qualche affermazione basandosi sui dati osservati $\mathbf{x}$ sulla validità di una possibile ipotesi
- Il test può essere effettuato su una grandezza osservata nell'esperimento o su qualsiasi funzione di una o più grandezze osservate nell'esperimento
- Spesso si costruisce una variabile $t(\mathbf{x})$ dall'insieme delle osservabili/misure detta "statistica di test"
- Statistica di test: è una variabile funzione dei dati che fornisce un metodo per fare un test delle ipotesi (che ha cioè un potere discriminante tra diverse ipotesi)

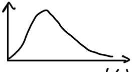
Ipotesi

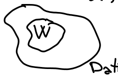
Se t cade in W $\alpha = 1\%$ rigetto l'ipotesi con significanza dell'1%

- Vogliamo determinare la validitá di una ipotesi sulla base del $t(\mathbf{x})$ osservato (che dipende solo dai dati): possiamo rigettare l'ipotesi dai dati che abbiamo?
- La statistica $t(\mathbf{x})$ avrà una distribuzione di probabilità per l'ipotesi H_0 (ipotesi nulla): $f(t(\mathbf{x})|H_0)$ quella da verificare
- Un test di ipotesi H_0 è definito specificando una regione critica W (detta anche regione di rigetto dell'ipotesi H_0) dello spazio dei dati S, tale che, assumendo H_0 sia corretta, la probabilità di osservare t in tale regione sia uguale o minore di α:

$$P(t \in W|H_0) \leq \alpha$$

$f(t(x)|H_0)$ "data H_0"





- α è la significanza del test (ed è un valore scelto da noi).
- Se il valore ottenuto dai dati di t è in W, l'ipotesi H_0 è rigettata.
- La regione complementare a W è detta regione di accettanza (non possiamo rigettare l'ipotesi H_0). NB Non sto dicendo che H_0 è vera

α (piccolo che scelgo io) $\boxed{\begin{matrix}\alpha = 1\% \\ \alpha = 5\%\end{matrix}}$ di solito

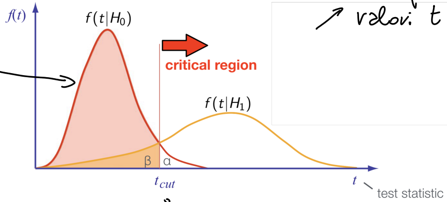
Errori di Tipo I e Tipo II

H_0 = nulla H_1 = alternativa

test statistico

- Considieriamo un'ipotesi alternativa rispetto a H_0: H_1

mi aspetto che H_1 abbia valori t più grandi di Ho



- Errore di tipo I: rigettare l'ipotesi H_0 se è vera. La massima probabilità per questo errore è

$$P(t \in W|H_0) \leq \alpha \quad \text{dove} \quad \alpha = \int_{t_{cut}}^{\infty} f(t|H_0)dt$$

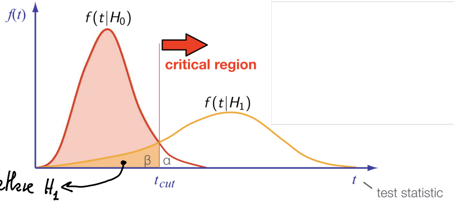
α è il livello di significanza del test, ed è definito come la probabilità di t di essere nella regione W in cui rigetto H_0, quando H_0 è vera

Non è detto che se t in W Ho sia davvero da rigettare

Ho vera ma la rigetto, perchè ho un errore α

Errori di Tipo I e Tipo II

- Considieriamo un'ipotesi alternativa rispetto a H_0: H_1



errore nel rigettare H_1

- Errore di tipo II: rigettare l'ipotesi alternativa H_1 se è vera

$$P(t \in S - W|H_1) \leq \beta \quad \text{dove} \quad \beta = \int_{-\infty}^{t_{cut}} f(t|H_1)dt$$

β è la probabilità che t cada nella regione di accettanza per H_0 se H_1 è vera

  - L'utilità di un test dipende dalla sua capacità di discriminare l'ipotesi alternativa H_1.
  - Per misurare l'utilità di un test si usa la potenza del test definita come la probabilità 1 - β cioè la probabilità che t cada nella regione critica se H_1 è vera $P(t \in W|H_1) \leq 1 - \beta$ (potenza del test)
  - cioè di rigettare H_0 se H_1 è vera

Errori di tipo I o II

		hp iniziale H_0 TRUE	hp alternativa H_1 TRUE
$X \notin w$	ACCEPT H_0	Acceptance good $\text{Prob} = 1 - \alpha$	Contamination Error of the second kind $\text{Prob} = \beta$
$X \in w$ (critical region)	REJECT H_0	Loss Error of the first kind $\text{Prob} = \alpha$	Rejection good potenza del test $\text{Prob} = 1 - \beta$

Se considero evento di H_0 che è in realtà evento di H_1 sto contaminando

Se ho eventi di H_0 e li considero di H_1 sto perdendo degli eventi

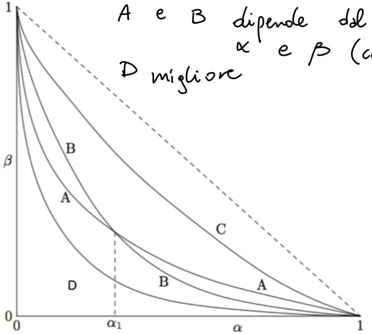
Scelta del test statistico (I)

- Come si effettua la scelta di un test statistico?
- Dato un esperimento/una serie di dati, posso determinare più test statistici
- Ma quale è il migliore?

C è il peggiore xk β maggiore ad α fisso

A e B dipende dal test di significanza α e β (che sono vincolati)

D migliore



- Il miglior test è quello per cui fissato α, β sia il più piccolo possibile

Scelta del test statistico (II)

Il lemma di Neyman-Pearson afferma che in un test d'ipotesi tra due ipotesi H_0 e H_1, la statistica di test ottimale, cioè quella che ha la potenza massima tra tutti i test (cioè quella con il più piccolo valore di β) con significatività α,la regione critica W deve essere tale che per tutti i valori $\mathbf{x}$ nella regione critica si ha:

$$\frac{f(\mathbf{x}|H_1)}{f(\mathbf{x}|H_0)} > c \quad \text{in } W \quad \text{e} \leq c \text{ fuori}$$

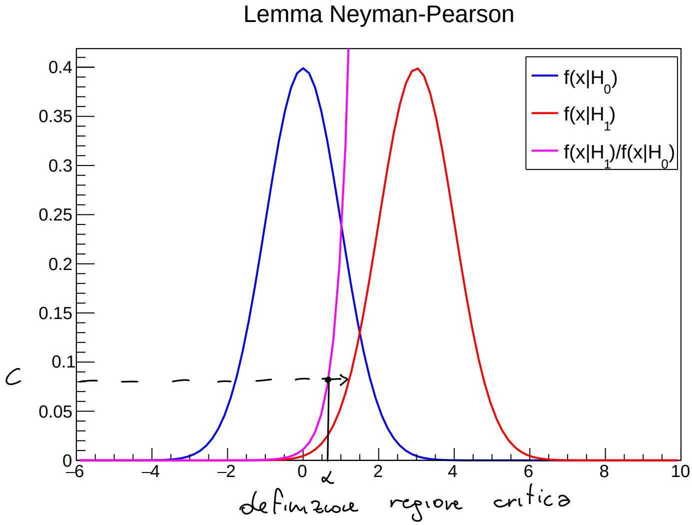
all'interno di W e $\leq c$ fuori dalla regione, dove c è una costante scelta per avere un test con un determinato livello di significanza desiderato

Per cui dobbiamo richiedere che per tutti i punti $\mathbf{x}$ nella regione critica, il rapporto delle distribuzioni di probabilità sia maggiore di una costante c dove c corrisponde al valore di taglio dato il valore di significanza α scelto

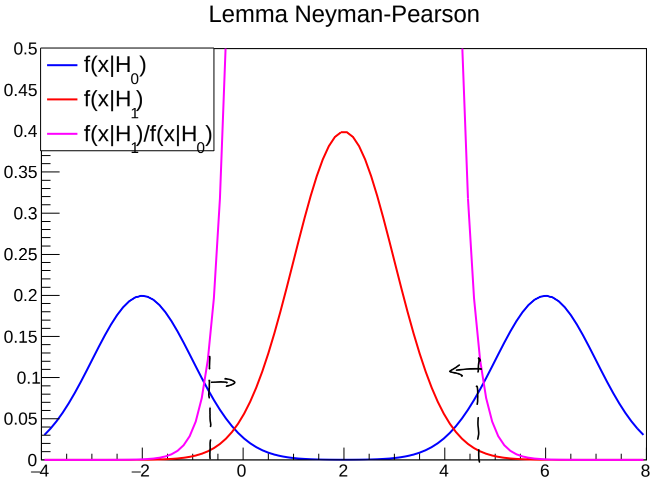
Equivalente a dire che il test statistico ottimale è dato da:

$$t(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|H_1)}{f(\mathbf{x}|H_0)}$$

Lemma NP: esempio (I)



Lemma NP: esempio (II)



p-value

- Spesso si vuole esprime il livello di accordo dei dati con un'ipotesi H cioè vogliamo quantificare il livello di compatibilità tra i dati ottenuti e quelli attesi secondo l'ipotesi H

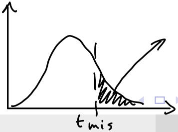
NB cerco una funzione che mi dice quanto i dati si avvicinano all'ipotesi, poi passo alla distribuzione di prob della funzione

- Si definisce una statistica di test $t(\mathbf{x})$
- Si ha la distribuzione della statistica di test $f(t|H)$ data l'ipotesi considerata H
- Si utilizza il p-value definito come probabilità di osservare, assumendo H vera, dati $\mathbf{x}$ (o $t(\mathbf{x})$) che hanno minore o uguale compatibilità con H rispetto ai dati che abbiamo osservato ($\mathbf{x}_{\text{oss}}$ o $t_{oss}(\mathbf{x})$)

p-value
prob di ottenere un t con compatibilità minore o uguale al t_{mis}

NB ottengo un valore di $t \to t_{mis}$ $\forall$ set di dati

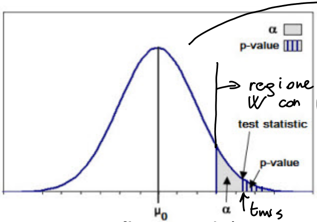
$$p = P(\mathbf{x} \in \omega \leq \mathbf{x}_{oss}|H)$$



p-value

- Si calcola dalla distribuzione della statistica di test tenendo conto dell'ipotesi considerata $f(\mathbf{x}|H)$

$p = \int_{\mathbf{x}:\mathbf{x} \geq \mathbf{x}_{obs}} f(\mathbf{x}|H)dx$ per distribuzioni continue
$p = \sum_{\mathbf{x}:\mathbf{x} \geq \mathbf{x}_{obs}} f(\mathbf{x}|H)dx$ per distribuzioni discrete



- distribuzione aspettata dei dati che verificano Ho (so che fondo segue una Poissoniana μ_0 centro)
- Se ottengo una misura che sta in W, evento non è di Ho, rigetto Ho

$$p = \int_{t_{obs}}^{+\infty} f(t|H)dt$$

si calcolato data una misura

Decisa una significanza del test α, l'ipotesi H è rigettata se $p < \alpha$.

scelto

p-value

(in approccio baesiano ho prob sulle hp)
Qui usiamo frequentista, baeysiano e freq convergono allo stesso risultato

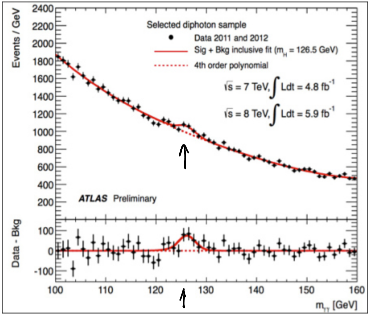
- Attenzione: p non è la probabilità che H sia vera dati i dati raccolti!
- Nell'approcio frequentista: non esiste la probabilità di H ma solo la probabilità di ottenere un altro set di valori $\mathbf{x}_{\text{oss}}$
- È la probabilità di ottenere dei dati incompatibili almeno tanto quanto i dati che abbiamo se l'ipotesi è vera.
- Noi ci concentreremo solo sull'approcio frequentista

ō Prob di ottene un set di dati più estremo (meno compatibile con H_0) di quello misurato, o estremo uguale (compatibile uguale)
Se p-value piccolo vuol dire che set di dati già molto estremo

Esempio: scoperta del bosone di Higgs (ATLAS e CMS)

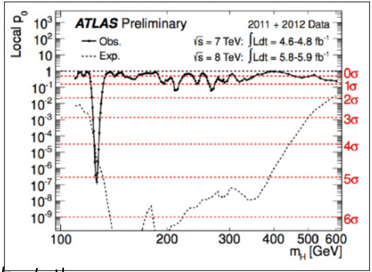
$H \to \gamma\gamma$ (2 fotoni) e calcolo massa invariante. Se $\gamma\gamma$ arrivano da decadimen di H
decade in
avranno energia in corrispondenza della massa invariante di H

Distribuzione di massa



picco in massa invariante di H

p-value in funzione della massa



Alla scoperta del bosone di Higgs molti quotidiani hanno tradotto l'informazione (corretta) "la probabilità di una tale fluttuazione nei dati se non esiste il bosone di Higgs è 3×10^{-7}" nell'affermazione (falsa e fuorviante) "la probabilità che non esista il bosone di Higgs, osservata quella fluttuazione nei dati, è 3×10^{-7}"

Una fluttuazione dei dati (dovuta al caso) così grande ha probabilità molto bassa ⇒ esiste Bosone xk fluttuazione generata da un nuovo fenomeno e non dal caso

p-value

- Il p-value non deve essere confuso con il livello di significanza α
  - il livello di significanza è un valore fisso scelto a priori
  - il p-value è una funzione dei dati e quindi è esso stesso una variabile aleatoria (con una data distribuzione)
- Un p-value piccolo è indice di una inconsistenza con l'ipotesi formulata
- L'ipotesi è rigettata se $p < \alpha$.

Esempio

- Supponiamo di effettuare un esperimento di conteggi
- Ci aspettiamo un certo numero di eventi b che conosciamo
- Osserviamo n eventi
- Immaginiamo di voler capire se il numero di eventi osservati è compatibile con il numero di eventi attesi b
- Nel caso avessimo non solo gli eventi non interessanti b ma anche eventi interessanti mai visti prima s? segnale nuovo
- Contiamo solo il numero totale di eventi (s+b) ho solo 1 esperimento dare conto sia s che b

$$P(n|s,b) = \frac{(s+b)^n}{n!} e^{-(s+b)}$$

Poissoniana di s+b eventi

- s = numero medio di eventi interessanti (nuovi, mai osservati oppure possono essere fluttuazioni dal val medio dei b)
- b = numero medio di eventi non interessanti (di cui conosco distrib teorica)
- Vogliamo testare l'ipotesi $H_0(s=0)$ (rigettare l'ipotesi H_0: c'è un tipo di eventi mai visti prima)
- Testare oppure $H_0(s \neq 0)$: intervalli di confidenza

Esempio

n° atteso di eventi

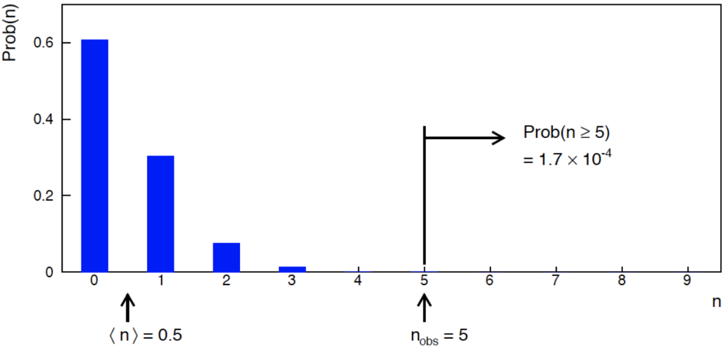
è fluttuazione statistica da 0,5 oppure nuovo evento?

- Supponiamo noto $b = 0.5$ e osserviamo $n_{oss} = 5$
- Cosa possiamo dire di H_0?
- Calcoliamo il p-value per $H_0(s = 0)$

$$p = P(n \geq 5; b = 0.5, s = 0) = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{b^n}{n!} e^{-b} = 1 - \sum_{n=0}^{4} \frac{b^n}{n!} e^{-b} = 1.7 \times 10^{-4}$$

distrib. dei conteggi attesi

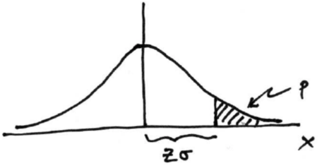
Poisson (0,5)



Quantile

Di quante σ mi sono spostato rispetto al medio ?

- Spesso si converte il p-value in una probabilità equivalente (chiamata significanza o equivalente significanza Gaussiana o quantile)



$(\bar{x}=0 \text{ e } \sigma=1)$ Gauss

$$p = \int_Z^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - \Phi(Z)$$

$$Z = \Phi^{-1}(1-p)$$

In ROOT

$\int_{-\infty}^{z} G(I)$

```
p = 1 - TMath::Freq(Z)
Z = TMath::NormQuantile(1-p)
```

In python (scipy.stats)

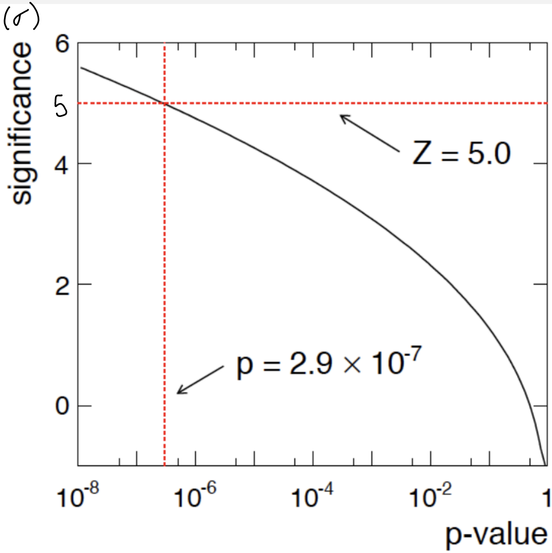
cumulative density function

```
p = 1 - norm.cdf(Z) = norm.sf(Z)
Z = norm.ppf(1-p)
```

- Z è il numero di deviazioni standard che una variabile Gaussiana fluttuerebbe (in una direzione) per dare lo stesso p-value
- Per esempio Z= 5 (σ) equivale a 2.9×10^{-7}

$Z = 2.4 (\sigma) \rightarrow 0{,}01 \quad (1\%)$

Quantile (II)

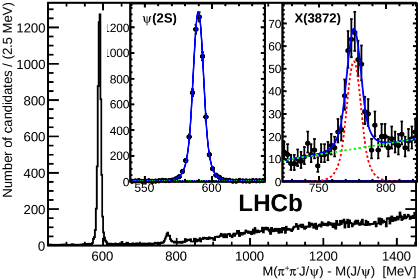


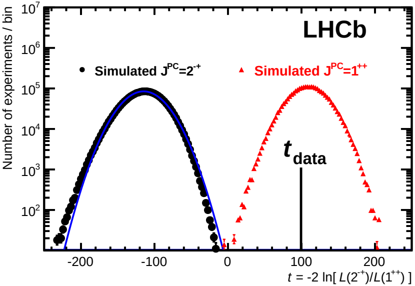
Come procede il processo di test?

utile per def. regione critica

- Definiamo un'ipotesi nulla H_0 e possibili ipotesi alternative
- Selezioniamo un test statistico t
- Determiniamo la distribuzione attesa per t nel caso di ipotesi nulla $f(t|H_0)$
- Scegliamo il valore di α tenendo in conto degli errori di tipo I e di tipo II e definiamo la regione critica
- Determiniamo dai dati il valore di t
- Confrontiamo se il valore di t misurato si trova nella regione critica: se è nella regione critica, rigettiamo l'ipotesi nulla, altrimenti concludiamo che non c'è evidenza per rigettare l'ipotesi nulla

Determinazione spin particella esotica





$t \rightarrow$ può essere confronto fra compatibilità dei dati

oppure rapporto modello e dati, Likehod, χ^2, ecc

Test parametrici e non-parametrici

I test di ipotesi si possono suddividere in:

- Test parametrici: riguardano ipotesi sul valore di un parametro della distribuzione (occorre assumere una distribuzione) come la media/la deviazione standard
- Non Parametrici: riguardano il tipo di distribuzione ipotizzabile. Non richiedono la conoscenza a priori della distribuzione dei dati
  - Test di bontà del fit o detti test di bontà dell'adattamento

$\forall$ tipo di distribuzione

Test parametrici: il problema dei due campioni

- Vogliamo confrontare due campioni di dati e vedere se sono compatibili (se provengono dalla stessa popolazione)
- Anche se provengono dalla stessa popolazione, avranno delle differenze dovute a fluttuazioni statistiche
  - Due campioni gaussiani con σ nota, la media dei due campioni è la stessa?
  - Due campioni gaussiani con stessa (non nota) σ, la media dei due campioni è la stessa?
  - Due campioni gaussiani, σ_1 è compatible con σ_2?

Due gaussiane, σ nota, stessa media ?

Supponiamo di avere dei campioni indipendenti $(x_1, \ldots x_n)$ e $(y_1, \ldots y_n)$ (Lab 1)
provenienti da due popolazioni normali di varianze note σ_x^2 e σ_y^2
Calcoliamo le medie dei due campioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$. Sono uguali ?

Ci chiediamo se i due campioni hanno la stessa media oppure no? Riformulazione: $\bar{x} - \bar{y}$ è compatibile con 0? cioè la differenza tra le medie è significativa? O dipende solo da fluttuazioni casuali dovute alla dimensione dei campioni di dati?

Esempio: due misure effettuate con apparati diversi con risoluzione σ_x e σ_y

Due gaussiane, σ nota

Test a una coda destro:

$\theta = \bar{x} - \bar{y}$

$\epsilon_{x-y} = \sqrt{\sigma_x^2/N_x + \sigma_y^2/N_y}$

$\theta_0 = 0$

Quanto si discosta val mis da val medio (contando errore) è N° σ di dist dal val medi

diff =0   diff sia >0   statistica di test

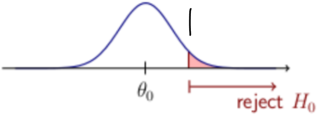
H_0	H_1	test
$\theta = \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$(\theta - \theta_0)/\epsilon$

$t = (\theta - \theta_0)/\epsilon = Z$

in numero di deviazioni standard

Caso in cui H_1 mi dice di scegliere W per $\theta > 0$

$\mapsto$ W



Due gaussiane, σ nota

Test a una coda sinistro:

$\theta = \bar{x} - \bar{y}$

$\epsilon_{x-y} = \sqrt{\sigma_x^2/N_x + \sigma_y^2/N_y}$

$\theta_0 = 0$

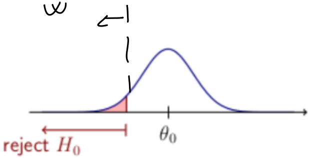
H_0	H_1	test
$\theta = \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$(\theta - \theta_0)/\epsilon$

$t = (\theta - \theta_0)/\epsilon = Z$

in numero di deviazioni standard

Caso in cui
H_1 mi dice di prendere W
in $\theta < 0$

w

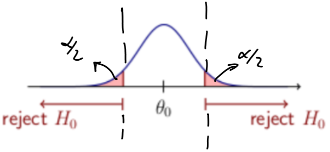


Due gaussiane, σ nota

Test a due code:
$\theta = \bar{x} - \bar{y}$, $\epsilon_{x-y} = \sqrt{\sigma_x^2/N_x + \sigma_y^2/N_y}$, $\theta_0 = 0$

H_0	H_1	test a 2 code
$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$\lvert\theta - \theta_0\rvert/\epsilon$ → n° σ di scostamento

$t = (\theta - \theta_0)/\epsilon = Z$
in numero di deviazioni standard



La questione si riduce al calcolo di quante σ la differenza è distante rispetto a zero. E si confronta il livello di significatività del test voluto con la tabella dell'integrale della Gaussiana.
Tipo criterio del 3σ

Due gaussiane, σ ignota, σ uguale, stessa media?

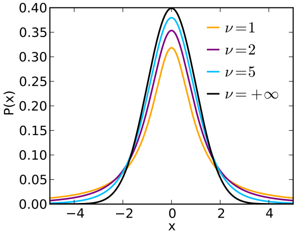
- Se non conosciamo la varianza della popolazione, possiamo stimarla con la varianza campionaria $s_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N_x - 1}}$ e $s_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{N_y - 1}}$
- La statistica di test

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S\sqrt{(1/N_x) + (1/N_y)}}$$

con $S^2 = \frac{(N_x - 1)s_x^2 + (N_y - 1)s_y^2}{N_x + N_y - 2}$

- è distribuita secondo la distribuzione di Student con numero di gradi di libertà $n = N_x + N_y - 2$

contributo code maggiore della Gaussiana
significanza minore rispetto Gaussiana



La significanza di una deviazione tra x e y è inferiore (la distribuzione ha code più lunghe) rispetto al caso precedente.

Distribuzione di Student

- Dati n campioni casuali provenienti da una popolazione normale con valor medio μ la variabile:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

dove $\bar{x}$=media campionaria e S= deviazione standard campionaria

- PDF della distribuzione di Student (distribuzione t) campione piccolo e dev. std. pop piccola

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}(1 + \frac{t^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2}$$

con ν=numero di gradi di libertà e Γ è la funzione Gamma.

- Si utilizza in situazioni in cui la dimensione del campione è piccola e la deviazione standard della popolazione non è nota
- Forma a campana come la Gaussiana ma con code più importanti
- Per $\nu \geq 30$: approssimabile ad una Gaussiana
- Sviluppata da uno statistico inglese William Gosset con lo pseudonimo di Student che lavorava nella fabbrica della Guinnes sviluppando metodi statistici per l'elaborazione dei dati

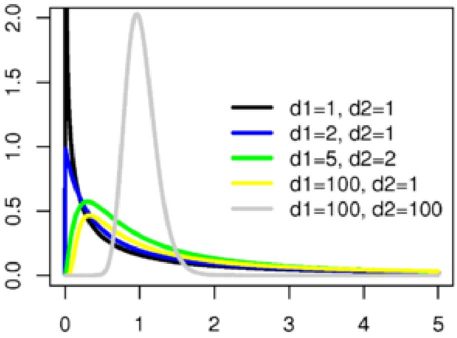
Test di Fisher F-test: test della varianza

Due gaussiane, σ_1^2 è compatibile con σ_2^2 ?

Prendiamo il rapporto tra gli stimatori delle varianze osservate:

$$F = \frac{V_1}{V_2} \qquad\qquad V = \sum_i \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

segue la distribuzione di Fisher di parametri $F(d1 = n-1, d2 = m-1)$



Distribuzione di Fisher

$$f(x; d_1, d_2) = \frac{1}{B(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2})} (\frac{d_1}{d_2})^{\frac{d_1}{2}} x^{d_1/2-1} (1 + \frac{d_1}{d_2} x)^{-(d1+d2)/2}$$

per $x > 0$, con B=funzione beta e d_1 e d_2 gradi di libertà della distribuzione $x = \frac{X_1/d_1}{X_2/d_2}$ con X_1 e X_2 variabili aleatorie che seguono una distribuzione di χ^2 con gradi di libertà d_1 e d_2 rispettivamente.

Analisi della varianza (sociologia)

Alcune caratteristiche dip dal gruppo in cui studiate?
Suddivido in gruppi il campione e guardo dati nel gruppo e tra i gruppi

- La più importante applicazione del test di Fisher consiste nell'analisi della varianza (ANOVA, Analysis of Variance)
- Nelle scienze sociali l'analisi della varianza si usa per studiare caratteristiche simili in gruppi diversi
- Confronta G campioni confrontando la varianza interna ai gruppi con la varianza tra i gruppi
- Ipotesi nulla prevede che tutti i campioni provengano dalla stessa popolazione
- Test su G campioni sono compatibili con avere lo stesso valore atteso, nell'ipotesi di normalità con σ fissata ma non nota. Il test è utile in particolare per sapere se il valore atteso di una variabile x possa dipendere da una variabile categoriale in base alla quale è possibile suddividere il campione.

Analisi della varianza

- Si calcola la varianza tra i gruppi $\sigma^2_{between\ groups}$ e la varianza interna ai gruppi $\sigma^2_{within\ groups}$

→ n° gruppi → val medio tot campione

$$\sigma^2_{between\ groups} = \sum_{i=1}^{G} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \frac{n_i}{n-1}$$

→ valori nel gruppo

$$\sigma^2_{within\ groups} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{G} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_g)^2 = \sum_{i=1}^{G} \sigma^2_g \frac{n_i - 1}{n-1}$$

all'interno calcolo varianza

Statistica del test:

$$t = \frac{(\sigma^2_{between\ groups}(n-1)/(G-1))}{(\sigma^2_{withingroups}(n-1)/(n-G))}$$

da confrontare con la distribuzione di Fisher di parametri $F(G-1, n-G)$

Test di bontà del fit (test non parametrici)

- Sono un'importante tipo di test d'ipotesi
- Si ha un campione di dati e una distribuzione e la domanda che ci si pone è: quanto un campione di dati è descritto da una certa pdf? → funzione che si accorda ai dati
- I test di bontà del fit confrontano i dati sperimentali con la pdf associata all'ipotesi nulla (oppure confrontano due set di dati sperimentali)
- Ipotesi H_0: i dati seguono la funzione ipotizzata e le differenze sono solo fluttuazioni
- Si costruisce anche in questo caso un test statistico es χ^2 e likehood
- Si calcola la probabilità di ottenere un valore del test statistico almeno grande quanto quello misurato, cioè di ottenere dati almeno compatibili con l'ipotesi come quelli misurati o compatibilità minore
- I test che vedremo hanno il vantaggio che sono indipendenti dal tipo di distribuzione (il test è lo stesso sia che i dati seguano per esempio una gaussiana o una distribuzione lineare)

Test di bontà del fit

Se mi chiedo: dati seguono un exp (non serve fit)? con che parametro? (serve fit)

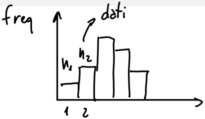
- Il nome "test di bontà del fit" è una classificazione fuorviante: potrebbero anche non avere a che fare direttamente con una procedura di fit
- I test di bontà del fit confrontano la distribuzione dei dati sperimentali con la pdf associata all'ipotesi nulla (oppure confrontano due set di dati sperimentali)
- Della pdf associata potrebbero essere noti a priori tutti i parametri
- Nel caso in cui non fossero noti (e l'ipotesi nulla non specificasse tali parametri), per alcuni test di bontà del fit è possibile determinarli dai dati, per esempio utilizzando una procedura di fit
- In questo caso se il test statistico segue una certa di distribuzione (a seconda del test statistico) a *ndf* numero di gradi di libertà, seguirà la stessa distribuzione a *ndf*-*r* dove *r* è il numero di parametri determinati direttamente dai dati/fit

Test binned e unbinned

perdo info dentro al bin (se bin largo rispetto risoluzione dati)

- Combinando gli eventi in bin di istogrammi, abbiamo già visto che si perde informazione sui nostri dati
- La scelta di un binning implica infatti necessariamente perdita di informazioni e arbitrarietà nella scelta del binning
- La perdita di informazione sarà trascurabile se la larghezza del bin è piccola rispetto alla risoluzione sperimentale
- Ma in generale, i test binned hanno un potere inferiore rispetto ai test unbinned.
- Per alcuni test binnati è inoltre importante che il numero di eventi per bin sia sufficientemente grande da giustificare alcune assunzioni fatte

Test binnati

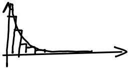


Modello teorico : nel bin i-esimo ν_i conteggi

Ho misurato n_i nel bin i

N° tot eventi fissato → Binomiale

- Supponiamo che il set di dati misurati sia un set di numeri che possiamo rappresentare con un istogramma (conteggi)
- cioè abbiamo ottenuto un set di numeri $\mathbf{n} = (n_1, .., n_n)$ con cui posso riempire un istogramma
- $\mathbf{n} = (n_1, .., n_n)$ sono il numero di entries per ognuno dei bin dell'istogramma
- Voglio testare un'ipotesi che predice dei valori attesi in ogni bin dell'istogramma $\nu = (\nu_1, .., \nu_n)$ es exp negativo



- Test statistico che mi permette di confrontare i valori osservati in ogni bin dell'istogramma con i valori predetti da un certo modello/teoria (confronto una distribuzione osservata con una attesa)

Consideriamo tre casi: i indice del bin, N n° bin totali

1) - Se $n_{tot} = \sum n_i$ è fissato la probabilità in ogni bin è descritta da una multinomiale: $\mathbf{n} \sim Multinomiale(n_{tot}, \mathbf{n})$ con $n_{tot} = \sum_i n_i$ e $\mathbf{p} = \mathbf{nu}/n_{tot}$ $(p_i = \nu_i/n_{tot})$

$$P(\mathbf{n}|\nu) = \frac{n_{tot}!}{n_1!...n_N!} p_1^{n_1}...p_N^{n_N}$$

2) - $n_i \sim Poisson(\nu_i)$, bin indipendenti (Ogni conteggio dei bin è distrib. secondo Poisson)
   - ν_i valore atteso (valore medio di eventi per intervallo di tempo)
   - n_i numero di eventi misurati in intervallo di tempo nel bin

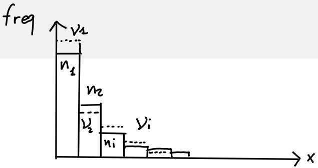
$$P(\underbrace{\mathbf{n}}_{\text{vettore delle freq misurate}}|\underbrace{\nu}_{\text{valore atteso fra tutte le freq (teorico)}}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\nu_i^{n_i}}{n_i!} e^{-\nu_i}$$

Distrib Poisson
- lo stimatore media dei valori misurati n_i è privo di bias e stima ν_i correttamente

3) - Il numero di entries in ogni bin dell'istogramma è sufficientemente grande e bin indipendenti: $n_i \sim Gauss(\nu_i, \sigma_i)$ (di solito se $\nu_i > 1000$ si usa Gaussiana)

$$p(\mathbf{n}|\nu) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-(n_i-\nu_i)^2/2\sigma_i^2}$$

Statistica di χ^2 di Pearson



1) Statistica di χ^2 di Pearson:
N bin

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\sigma_i^2} \qquad \text{dove} \qquad \sigma_i^2 = V(\nu_i)$$

valore atteso sotto H_0

χ^2 è la somma dei quadrati delle deviazioni del numero di entries misurate nel bin i-esimo dal valor medio atteso nel bin i-esimo divise per la varianza teorica

2) Statistica di χ^2 di Neyman:
N bin

varianza eventi misurati

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\sigma_i^2} \qquad \text{dove} \qquad \sigma_i^2 = V(n_i)$$

χ^2 è la somma dei quadrati delle deviazioni del numero di entries misurate nel bin i-esimo dal valor medio atteso nel bin i-esimo divise per la varianza teorica

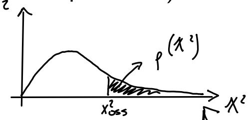
Ai fini del test non importa il metodo usato

Statistica di χ^2 di Pearson

ottenuto dalle formule di prima su un histogramma

Si può calcolare un p=value tenendo conto che $\chi^2 \geq \chi^2_{oss}$ definisce la regione a "uguale o minore compatibilità" (χ^2 elevato significa minor compatibilità):

$$p(\chi^2) = \int_{\chi^2_{oss}}^{+\infty} f(\chi^2)d\chi^2$$



densità di prob

dove $f(\chi^2)$= pdf della statistica di test sotto l'ipotesi che stiamo testando

- Se le misure n_i sono distribuite secondo una Gaussiana: il χ^2 di Pearson segue la distribuzione di χ^2 con N gradi di libertà
- Se r parametri fossero determinati dai dati/fit seguirebbe la distribuzione di χ^2 con N-r gradi di libertà

caso in cui devo anche ricavare i parametri della pdf

Distribuzione di χ^2 [distribuzione di prob della somma di variabili aleatorie al quadrato]

(normali e indipendenti)

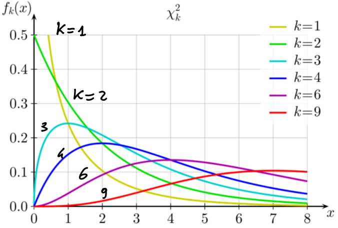
variabile aleatoria chi quadro $\chi^2_k = x^2_1 + \ldots + x^2_k$

ndf

var aleatoria

$$f_{\chi^2}(\chi^2, \mathrm{ndf}) = \frac{1}{2^{\mathrm{ndf}/2}\Gamma(\mathrm{ndf}/2)}((\chi^2)^{\mathrm{ndf}/2-1})\mathrm{e}^{-\chi^2/2} \quad \text{dove} \quad \Gamma(\mathrm{x}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{t}^{\mathrm{x}-1}\mathrm{dt}$$

funzione densità di probabilità



- La distribuzione ha valor medio $E[\chi^2] = \mathrm{ndf}$ e varianza $V[\chi^2] = 2\mathrm{ndf}$
- Spesso si riporta il χ^2 diviso i gradi di libertà come stima della bontà dell'accordo dati/valori aspettati

$\frac{\chi^2}{\mathrm{ndf}} \simeq 1$ Lab 1 Meglio usare p-value

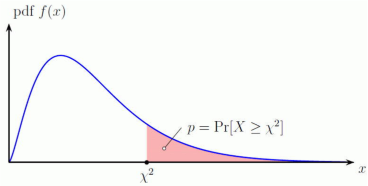
dati in accordo con modello H_0

χ^2

- In realtà è preferibile utilizzare il p-value
- La probabilità di χ^2 misura la probabilità che, data l'ipotesi nulla, un set di misure fornisce un χ^2 elevato quanto, o più elevato di quello ottenuto (set di dati in disaccordo con Ho) o più in disaccordo

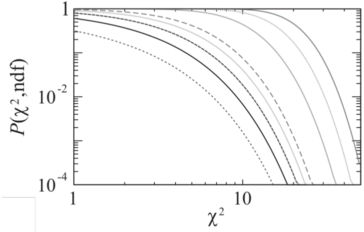
$$P(\chi^2) = \int_{\chi^2}^{+\infty} f_{\chi^2}(z)dz$$

- Un valore piccolo del p-value: cattivo accordo dei dati con l'ipotesi testata → perché mi trovo in regione critica di rispetto Ho
- χ^2=TF1::GetChisquare() ndf=TF1::GetNDF() p=TF1::GetProb()



$\chi^2 = 15$ $\quad N = 10 \quad p = 0.13$

$\chi^2 = 150$ $\quad N = 100 \quad p = 9 \times 10^{-4}$



ndf = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20

Lo stesso valore di χ^2/N corrisponde a p-value molto diversi al variare di N !

Test del Chi-Quadro (generale)

variabile di test $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - \nu_i)^2}{\nu_i}$

k misure osservate di un evento $\{o_i\}$ $i = 1 \dots k$

k misure attese dell'evento $\{\nu_i\}$

$\{o_i\}$ in accordo con H_0? che dice che O_i sono eventi che si discostano da $\{\nu_i\}$ solo per il caso

χ^2 per k fissato si distribuisce come χ^2 con ndf $= k-1$

χ^2 per k variabile aleatoria (es è una Poissoniana dovuta a conteggi) si distribuisce come χ^2 con ndf $= k$

- χ^2 funziona se nessun valore si presenta con freq < 5

Nel caso usare altri test come Fisher

Statistica di χ^2 di Pearson per Poisson (2)

(errore teorico)

- Se le misure n_i sono distribuite secondo Poisson allora

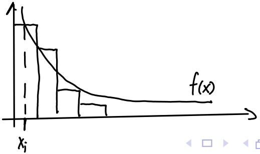
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \qquad \text{poiché} \qquad \sigma_i = \sqrt{\nu_i}$$

↘ metodo migliore è integrale di pdf tra x_{min}^{bin} x_{max}^{bin}

Il χ^2 di Pearson segue la distribuzione di χ^2 con N gradi di libertà se tutti i ν_i sono abbastanza grandi perché la distribuzione poissoniana sia approssimabile da una distribuzione gaussiana (in pratica $\nu_i \geq 5$ è sufficiente).

- Stesso discorso precedente nel caso r parametri fossero determinati da dati/fit ($N - r$ gradi di libertà)

NB $f(x)$ in x_i (centro bin) mi dà il valore medio ν_i
L'altezza del bin fluttua attorno a ν_i secondo una Poissoniana



χ^2 per multinomiale (1)

Pearson

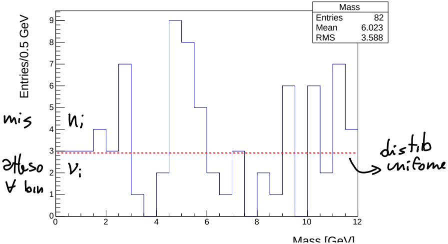
- Se $n_{tot} = \sum n_i$ è fissato (non distribuito Poissonianamente), il test controlla solo la forma della distribuzione e non la normalizzazione totale
- la probabilità in ogni bin è descritta dalla multinomiale: $n_i = p_i n_{tot}$ dove p_i è la probabilità per un evento di essere misurato nel bin i secondo l'ipotesi nulla
- In questo caso il test statistico del χ^2 di Pearson

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - p_i n_{tot})^2}{p_i n_{tot}}$$

- Da notare che il denominatore non è la varianza $V[n_i] = n_{tot} p_i (1 - p_i)$
- Se tutti $p_i n_{tot} \gg 1$ allora la distribuzione di χ^2 segue la distribuzione di χ^2 per $N - 1$ gradi di libertà.
- Se r parametri fossero determinati da dati/fit seguirebbe la distribuzione di χ^2 per $N - 1 - r$ gradi di libertà

χ^2 di Pearson: esempio

- Supponiamo di avere un leggero eccesso di eventi (conteggi) su un fondo noto a priori
- Supponiamo di considerare $n_i \sim Poisson(\nu_i)$



- Calcoliamo la statistica di test:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\nu_i}$$

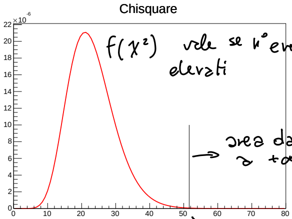
↘ var. teorica

- Ora vorremmo calcolare il p-value

- Ma il numero di eventi in molti bins è piccolo (non è soddisfatta la condizione $\nu_i \geq 5$) per cui ci aspettiamo che il χ^2 non segua la distribuzione di χ^2 (non so che distr χ^2 è)
- Non si avrà più una distribuzione della variabile in esame che segue quella del χ^2 con N gradi di libertà
- Tuttavia il χ^2 di Pearson resta un test statistico valido, <u>semplicemente non conosciamo la distribuzione</u> e non so calcolare p-value

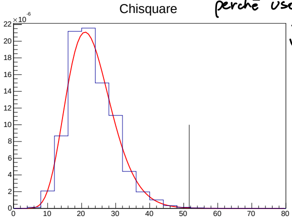
χ^2 se non conosco la sua distribuzione (es $\nu_i < 5$)

χ^2 di Pearson non segue distr χ^2



p = 0.00056 → errore perché uso distrib χ^2 che vale per Gauss

- Si può calcolare la distribuzione di χ^2 con metodi Montecarlo
  - Si generano le n_i poissoniane con valor medio ν_i
  - Si calcola il χ^2
  - Si ripete il processo N volte fino ad ottenere una distribuzione del χ^2 dal MonteCarlo
  - Si integra la distribuzione per ottenere il p-value



Costruisco con montecarlo dist χ^2

$\Rightarrow \forall$ processo 1 val $\chi^2 \Rightarrow$ N volte $\rightarrow$ dist $\chi^2 \Rightarrow \chi^2$ nei bin allungo

p = 0.0007 → corretto

Ipotesi H0 (distribuzione uniforme) esclusa al ‰

Binned Likelihood (Likelihood χ^2)

- Per test di bontà di adattamento per istogrammi possiamo anche usare la distribuzione nota di eventi in un bin (nel caso in cui non sia Gaussiana)
  - Poisson: se i contenuti del bin sono indipendenti (non c'e' vincolo sul numero totale di eventi, il numero totale di eventi non è fissato)
  - Multinomiale: se il numero totale di eventi dell'istogramma è fissato
- La statistica di test sarà data dal rapporto:

  $\Rightarrow \lambda = \cancel{-2ln} \frac{L(n_i;\nu_i)}{L(n_i;n_i)}$ → Likelihood / → Likhood saturata error slide $\lambda = \frac{L(n_i, \nu_i)}{L(n_i, n_i)}$ vedi riassunto in fondo per funzioni L

  usando l'approcio proposto da Baker-Cousin (modello saturato) dividendo per il valore della likelihood per cui $n_i = \nu_i$

  in letteratura
- Per il teorema di Wilks, il rapporto delle likelihood, si comporta come una distribuzione di χ^2 ($\chi^2_\lambda = -2ln\lambda$) con numero di gradi di libertà uguale a
  1) $N - r$ dove N è il numero di bin dell'istogramma, r numero di parametri da stimare sui dati nel caso di dati distribuiti secondo una Poissoniana e
  2) $N - r - 1$ nel caso di dati distribuiti secondo una Multinomiale
- Per cui si può usare la distribuzione di χ^2_λ per determinare un p-value che fornisce una misura di bontà del fit (come già discusso nella situazione in cui l'approssimazione Gaussiana è valida).

Run test Complementare al χ^2

- Il test di χ^2 è insensibile al segno delle deviazioni
- Un test complementare al test del χ^2 che si basa sul segno delle deviazioni: Run test
- H_0=tutti i pattern di segno hanno uguale probabilità (se spostamento dal fit è dovuto al caso)
- Chiamiamo N_+ il numero di deviazioni positive e N_- il numero di deviazioni negative e R il numero di run, cioè una sequenza di bin consecutivi dove i dati mostrano deviazioni dello stesso segno (positivo/negativo) H_0 dice che N_+ N_- distribuiti uniformemente
- Il valore di aspettazione e la varianza di R sono dati:
  $E[R] = 1 + \frac{2N_+N_-}{N_+ + N_-}$ n° run attesi ↳ n° di Run, n° di pattern a spost pos e negativo
  $V[R] = \frac{2N_+N_-(2N_+N_- - N_+ - N_-)}{(N_+ + N_-)^2(N_+ + N_- - 1)} = \frac{(E[R]-1)(E[R]-2)}{N-1}$
- Il numero di run può essere approssimato da una distribuzione gaussiana per cui la significanza della deviazione di un numero di runs r osservato dal valore atteso è

$$Z = \frac{r - E[R]}{\sqrt{V[R]}}$$

Run test (esempio)

- Dal test del χ^2 fit ok... p-value accettabile
- Proviamo ad applicare il Run test che fornisce un'informazione aggiuntiva rispetto al test di χ^2

spost pos

$+++-------+++$

n° di dati → $N = N_+ + N_- = 12$ e $N_+ = 6$ e $N_- = 6$ → spost neg

2 "+" runs e 1 "-" run

Per cui se calcolo:

$E[R] = 1 + \frac{2N_+N_-}{N}$

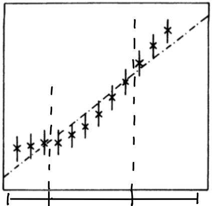
$V(R) = 2N_+N_- \frac{(2N_+N_- - N)}{N^2(N-1)}$

Ottengo:

$E[R] = 7$ e $V[R] = 2.73$ → mi aspetto 7 run

$Z = \frac{r - E[R]}{\sqrt{V[R]}} = \frac{7-3}{\sqrt{2.73}} = 2.4\sigma$ che equivale ad una significatività dell'1% se soglia scelta all'1%

Ipotesi nulla rigettata: fit non buono! ←



\+ − +

Run 1 = 3 dati | Run 2 = dati | Run 3 = 3 dati

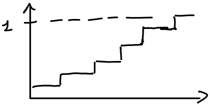
Usare se scostamenti dal fit non sono random

Test unbinned

non perdo info coi bin, idea base di tutti gli unbinned usano statistica d'ordine → criterio che ordina i dati (decrescente)

- Abbiamo N osservazioni indipendenti: x_1, ... x_N della variabile aleatoria x
- Riordiniamo le osservazioni in ordine crescente per cui $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant ... \leqslant x_{(N)}$
- Le osservazioni ordinate $x_{(i)}$ sono chiamate statistica d'ordine
- Si scrive la distribuzione cumulativa empirica $S_N(x)$ per N misure come

$$S_N(x) = \begin{cases} 0 & x < x_{(1)} \\ i/N & x_{(i)} \leq x < x_{i+1}, i = 1, ..., N-1 \\ 1 & x_n \leq x \end{cases}$$

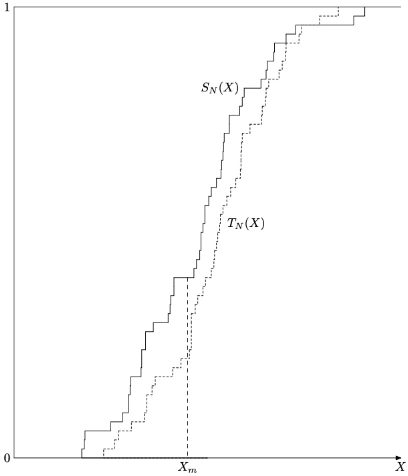


$$\left.\begin{array}{l} S_n(x) \text{ per set dati } x \\ T_n(x) \text{ per set dati } y \end{array}\right\} \text{confronto}$$

Test unbinned

- I test unbinned utilizzando si basano sul confronto tra la distribuzione cumulativa della distribuzione di probabilità $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x^{'})dx^{'}$ sotto l'ipotesi H_0 con l'equivalente distribuzione dei dati $S_N(x)$
- La statistica di test utilizza una qualche differenza tra la distribuzione cumulativa sperimentale e l'ipotetica distribuzione cumulativa: $S_N(x) - F(x)$ cioè misura la "distanza" tra le due funzioni cumulative
- Analogamente nel caso di confronto tra due distribuzioni sperimentali si può utilizzare $S_N(x) - T_N(x)$ dove $T_N(x)$ è la distribuzione cumulativa empirica di un campione di dati

Test unbinned: statistica ordinata



- In questo esempio, la distanza massima $S_N(x) - T_N(x)$ avviene a $x = x_m$
- A seconda di come si misura la “distanza” tra le due funzioni cumulative si hanno diversi tipi di test

Kolmogorov-Smirnov test

- Utilizza la deviazione massima tra la distribuzione osservata $S_N(x)$ e la distribuzione $F(x)$ attesa sotto l'ipotesi H_0
- È definita come: Massima distanza con o senza segno

$$D_n = max|S_n(x) - F(x)|$$

$$D_n^{\pm} = max\{\pm|S_n(x) - F(x)|\}$$

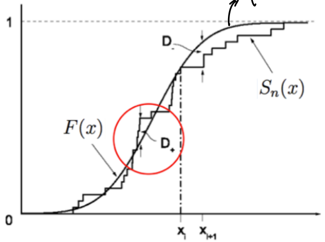
quando si considera test one-side

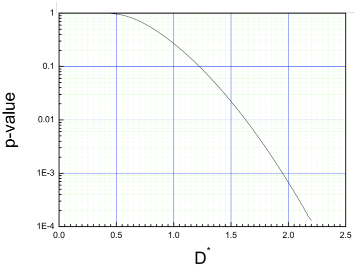
significanza

Test size α	Critical value of $\sqrt{N}D_N$
0.01	1.63
0.05	1.36
0.10	1.22
0.20	1.07

- Al 5%, il valore critico è $D = \frac{1.36}{\sqrt{N}}$ dove N è il numero di misure
- l'ipotesi nulla non è rigettata se $D < D_{\text{crit}}$

cumulativa pdf teorica





$$D^* = \sqrt{N}D$$

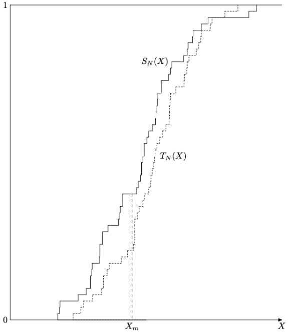
Kolmogorov-Smirnov test: 2 campioni

- Il test di KS può essere anche utilizzato per confrontare due campioni di dati $(x_1,...x_n)$ e $(y_1,...y_n)$ per verificare l'ipotesi che entrambi i campioni provengano dalla stessa distribuzione
- L'equivalente statistica per confrontare due distribuzioni cumulative empiriche $S_N(x)$ e $T_N(x)$ è:

$$D_{ST} = max|S_N(x) - T_N(x)|$$

$$D_{ST}^{\pm} = max\{\pm[S_N(x) - T_N(x)]\}$$

per il test one-side



Kolmogorov-Smirnov test: osservazioni

N dimensioni come ordino? Non banale

- I test unbinned basandosi sulla statistica d'ordine (per cui una distribuzione ha dei valori ordinabili secondo un qualche criterio), non sono facilmente estendibili a N dimensioni per cui sono applicabili a dati che dipendono da un'unica variabile aleatoria
- Se alcuni parametri della distribuzione $f(x)$ sono determinati dal campione di dati $x_1,...x_n$ (i.e. procedura di fit), il test non può essere applicato (non c'è un qualcosa di equivalente al numero di gradi di libertà come nel caso del test di χ^2)
- Ha d'altra parte tutti i vantaggi di un test unbinned: più potente rispetto ai test binned, possibile effettuarlo anche con un numero piccolo di dati

Se parametri noti a priori $\Rightarrow$ K-S banale
altrimenti no perché cambia rapporto $\propto \sqrt{N} D_N$ e devo fare montecarlo
Non c'è il modo di riscalare K-S come faccio χ^2/ndf ricalcola $\propto \sqrt{N} D$

Likelihood unbinned

- La likelihood unbinned non fornisce strumenti per la bontà del fit (al contrario del χ^2)
- Potremmo pensare che il valore di $-ln\mathcal{L}$ possa essere una buona statistica di test per il test di GOF: sappiamo che il massimo della likelihood fornisce la miglior stima dei parametri
- Ma nella stima di maximum likelihood, stiamo usando la likelihood per un set di dati fissi in funzione dei parametri, mentre i test di GOF, usiamo la likelihood per un'ipotesi fissa in funzione dei dati good of fit
- Vedremo un esempio in cui può essere visto facilmente che la likelihood non ha nessun poter come statistica di test per i test di GOF poichè tutti i campioni di dati presi in considerazione avrebbero lo stesso valore di likelihood, indipendentemente da quanto seguono la distribuzione sotto l'ipotesi H_0

Likelihood unbinned ? ln $\mathcal{L}$ su modelli diversi è uguale?

Esempio: fit esponenziale (vita media)

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$\frac{d\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n)}{d\lambda} = n\lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum x_i} - \sum x_i \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = 0$$

$$n - (\sum x_i)\lambda = 0 \quad \rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum x_i}$$

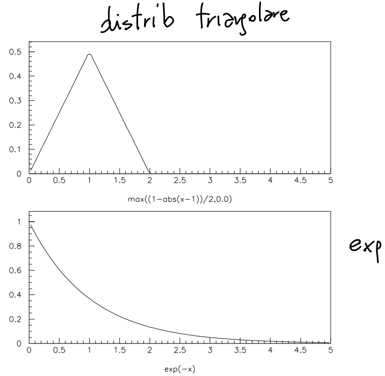
Sostituendo ottengo

Campione stesso n° dati e valor medio ⇒ ho stesso λ

$$-2\ln(\mathcal{L})_{min} = -2n\ln(\lambda) + 2\lambda \sum x_i$$
$$= -2n\ln(\lambda) + 2n = 2n(1 - \ln(\lambda)) = f(n, \lambda)$$

Siccome $-2\ln(\mathcal{L})$ è funzione unicamente di n e λ non può essere utilizzata come test di bontà del fit.
Quindi qualunque distribuzione con valor medio λ e stesso numero di eventi n danno lo stesso valore di likelihood

Likelihood unbinned



Poichè entrambe le distribuzioni hanno la stessa media forniscono lo stesso valore di $-2\ln(\mathcal{L})_{min}$ quando fittate con un'esponenziale.

Tutti i set di dati con stessa media $1/\lambda$ forniscono lo stesso valore di likelihood indipendentemente dalla distribuzione. Per il test di likelihood, significherebbe che entrambe le distribuzioni sono un buon fit con un'esponenziale!

```
Double_t TH1::Chi2Test ( const TH1 *  h2,
                         Option_t *   option = "UU",
                         Double_t *   res = 0
                       )              const
```

virtual

χ^2 test for comparing weighted and unweighted histograms   Se dati provengono dalla stessa distib.

Function: Returns p-value. Other return values are specified by the 3rd parameter

Parameters

[in] **h2** the second histogram

[in] **option**

- "UU" = experiment experiment comparison (unweighted-unweighted)
- "UW" = experiment MC comparison (unweighted-weighted). Note that the first histogram should be unweighted
- "WW" = MC MC comparison (weighted-weighted)
- "NORM" = to be used when one or both of the histograms is scaled but the histogram originally was unweighted
- by default underflows and overflows are not included:
  - "OF" = overflows included
  - "UF" = underflows included
- "P" = print chi2, ndf, p_value, igood
- "CHI2" = returns chi2 instead of p-value
- "CHI2/NDF" = returns χ^2/ndf

[in] **res** not empty - computes normalized residuals and returns them in this array

scipy.stats.ks_2samp

scipy.stats.ks_2samp(*data1*, *data2*) **[source]**
(http://github.com/scipy/scipy/blob/v0.15.1/scipy/stats/stats.py#L3966)

Computes the Kolmogorov-Smirnov statistic on 2 samples.

This is a two-sided test for the null hypothesis that 2 independent samples are drawn from the same continuous distribution.

Parameters:	**a, b** : *sequence of 1-D ndarrays*
	two arrays of sample observations assumed to be drawn from a continuous distribution, sample sizes can be different
Returns:	**D** : *float* valore della statistica
	KS statistic
	p-value : *float*
	two-tailed p-value

scipy.stats.kstest

scipy.stats.kstest(*rvs*, *cdf*, *args=()*, *N=20*, *alternative='two-sided'*, *mode='approx'*) **[source]**
(http://github.com/scipy/scipy/blob/v0.14.0/scipy/stats/stats.py#L3307)

Perform the Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit.

This performs a test of the distribution G(x) of an observed random variable against a given distribution F(x). Under the null hypothesis the two distributions are identical, G(x)=F(x). The alternative hypothesis can be either 'two-sided' (default), 'less' or 'greater'. The KS test is only valid for continuous distributions.

Parameters:

rvs : *str, array or callable*

If a string, it should be the name of a distribution in scipy.stats (../stats.html#module-scipy.stats). If an array, it should be a 1-D array of observations of random variables. If a callable, it should be a function to generate random variables; it is required to have a keyword argument *size*.

cdf : *str or callable*

If a string, it should be the name of a distribution in scipy.stats (../stats.html#module-scipy.stats). If *rvs* is a string then *cdf* can be False or the same as *rvs*. If a callable, that callable is used to calculate the cdf.

args : *tuple, sequence, optional*

Distribution parameters, used if *rvs* or *cdf* are strings.

N : *int, optional*

Sample size if *rvs* is string or callable. Default is 20.

alternative : *{'two-sided', 'less','greater'}, optional*

Defines the alternative hypothesis (see explanation above). Default is 'two-sided'.

mode : *'approx' (default) or 'asymp', optional*

Defines the distribution used for calculating the p-value.

- 'approx' : use approximation to exact distribution of test statistic
- 'asymp' : use asymptotic distribution of test statistic

Returns:

D : *float*

KS test statistic, either D, D+ or D-.

p-value : *float*

One-tailed or two-tailed p-value.

Riassunto GOF test: Binned

Dipendono dall'arbitrarietà del binning

- χ^2:
  - I dati devono essere distribuiti gaussianamente in ciascun bin (applicabile se il numero di eventi per ogni bin è maggiore di 5)
  - Segue la distribuzione di χ^2 con ndf = N gradi di libertà per la Poissoniana e ndf = N-1 per la multinomiale (N = numero di bin dell'istogramma)
  - Se la distribuzione dipende da *r* parametri da stimare sui dati: $\sim \chi^2(\mathrm{ndf} - \mathrm{r})$
- Likelihood binnata $(\chi^2 = -2\ln\mathcal{L})$ $\chi^2_{poisson} = 2\sum_i \nu_i - n_i + n_i \ln(n_i/\nu_i)$ Likehood
  - I dati non devono essere distribuiti gaussianamente in ciascun bin (minori di 5)
    - distribuiti Poissonianamente se il contenuto dei bin è indipendente (no vincoli sul numero totale di eventi)
    - distribuiti secondo una Multinomiale (se il numero totale degli eventi nell'istogramma è fissato) $\chi^2_{multi} = 2\sum_i n_i \ln(n_i/\nu_i)$ Likehood
- Per numero di eventi piccoli è sempre comunque consigliato utilizzare un metodo MC per ottenere la distribuzione di χ^2

Riassunto GOF test: Unbinned

- Kolmogorov-Smirnov test
  - Unbinned
  - Funziona anche con numeri piccoli di eventi
  - Implementazioni disponibili standard solo per distribuzioni continue (non discrete) [anche se il test è estendibile a distribuzioni discrete]
  - Non applicabile quando i parametri della distribuzione sono stimati dal campione di dati (è necessario modificare i valori critici D_{crit}, necessario MonteCarlo))
- Likelihood non binnata: non fornisce GoF intrinseca

Riassunto sui metodi di fit (GOF)

- χ^2:
  - GOF ok
  - Dipende dal binning
  - I dati devono essere distribuiti gaussianamente in ciascun bin (applicabile se i dati per ogni bin sono maggiori di 5)
- Likelihood binnata:
  - GOF ok (χ^2 modificato)
  - Dipende dal binning
  - I dati non devono essere per forza distribuiti gaussianamente in ciascun bin (minori di 5)
- Likelihood non binnata
  - Molto più performante, non richiede che i dati siano binnati
  - No GOF intrinseca
  - I dati devono essere binnati per confrontarli con la funzione

La Likelihood in generale non fornisce strumenti per la bontà del fit (al contrario del χ^2)