Pumping Lemma

Emanuel Alvaredo, Federico Lochbaum

Definición formal

Dado un lenguaje **regular** finito *L*, existe un número entero *p* que llamaremos *longitud crítica* tal que

para cualquier cadena/string $w \in L$ con $|w| \geq p$ podemos escribir como $\mathbf{w = x . y . z}$ con $\mathbf{| x . y | \leq p}$ y $\mathbf{| y | \geq 1}$

TAL QUE $x . y^i . z \in L$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$

Lenguajes NO regulares

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : \; n, l \geq 0\}$$

Cómo mostramos que no son lenguajes regulares?

Lenguajes NO regulares

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : \ n, l \geq 0\}$$

Cómo mostramos que no son lenguajes regulares?

Vamos a usar el Pumping Lemma :)

Primer ejemplo

Tomemos como ejemplo L = { $a^n b^n$: $n \geq 0$ }

Una forma posible de pensar esta demostración es **asumir** que es regular y **por contradicción** mostrar que no lo es.

Dado que L es infinito, podemos aplicar el Pumping Lemma

Sea p la longitud crítica de L, tomamos un string w = x y z tal que $w \in L$ y $|w| \geq p$ con $|xy| <= p$ y $|y| \geq 1$ tal que $x y^i z \in L$.

1) Elegimos inteligentemente $w = a^p b^p$
2) Dividimos la cadena w como $\mathbf{w = a^q a^r a^{(p - r - q)} b^p}$, donde $\mathbf{a^q = x}$, $\mathbf{a^r = y}$ e $\mathbf{a^{(p - r - q)} b^p = z}$
    a) Notar que $|xy| >= q + r <= p$ y que $|y| = r >= 1$
    b) $q >= 0, r > 0, q + r <= p$
3) "Bombeamos" y (a^r), es decir, repetimos y una cantidad i de veces para supuestamente obtener una cadena de L

Primer ejemplo - “Bombeo”

Si repetimos la cadena y una cantidad i de veces, obtenemos w’ = x y^i z = $\mathbf{a^{q+ir}a^{(p - r - q)}b^p}$ que es igual a $\mathbf{a^{p(i - 1)r}\, b^p}$

NOTAR que como i > 1 y r > 0, la cantidad de as en la primera parte de la cadena será estrictamente mayor a la cantidad de bs de la segunda parte de la cadena. Por lo tanto esta cadena no estaría dentro de L y por lo tanto llegaríamos a una contradicción.

Entonces nuestra suposición sobre la regularidad de L era falsa y **concluimos que L no es un lenguaje regular**

Otro ejemplo

Tomemos como ejemplo $L = \{ a^n b^l c^{n+1} : n, l \geq 0 \}$

Una forma posible de pensar esta demostración es **asumir** que es regular y **por contradicción** mostrar que no lo es.

Dado que L es infinito, podemos aplicar el Pumping Lemma

Tomemos como ejemplo L = { $a^n b^l c^{n+1}$: n, l ≥ 0 }

Una forma posible de pensar esta demostración es **asumir** que es regular y **por contradicción** mostrar que no lo es.

Dado que L es infinito, podemos aplicar el Pumping Lemma

Sea p la longitud crítica de L, tomamos un string w tal que w $\in L$ y $|w| \geq p$, por ejemplo, elegimos **w = $a^p b^p c^{2p}$**

Por el Pumping Lemma, $w = a^p b^p c^{2p} = x\ y\ z$ donde $|x\ y| \leq p,\ \ |y| \geq 1$

Entonces podemos pensar la cadena w como

$$w = xyz = \overbrace{a\ldots aa\ldots aa\ldots a}^{p}\overbrace{b\ldots b}^{p}\overbrace{c\ldots cc\ldots c}^{2p}$$

$$= \underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots ab\ldots bc\ldots cc\ldots c}_{z}$$

$$y = a^k,\ \ 1 \leq k \leq p$$

Por el Pumping Lemma x y^i z $\in L$ para i = 0, 1, 2, ... (osea que puede extenderse infinito). Vemos que $xy^0z = xz \in L$

$$xz \in L$$

$$xz = \underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{\overbrace{a\ldots a}^{p-k}\overbrace{b\ldots b}^{p}\overbrace{c\ldots cc\ldots c}^{2p}}_{z} \in L$$

Esto significa que $a^{p-k}b^pc^{2p} \in L$ con $k \geq 1$

PERO siguiendo la definición de L, $L = \{a^nb^lc^{n+l} : n,l \geq 0\}$ vemos que $a^{p-k}b^pc^{2p} \notin L$

Lo que **es una contradicción**!

Como encontramos una contradicción asumiendo que L era regular (y por lo tanto, pudiendo aplicar el pumping lemma en el), nuestra asunción de que L es regular necesariamente tiene que ser FALSA.

En conclusión, **vemos que L NO es un lenguaje regular**

Otro ejemplito :D

Tomemos como ejemplo L = { $a^{n!}$: n ≥ 0 }, podemos sospechar que no es regular... $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$

Lo probamos usando el Pumping Lemma :)

Vamos a asumir que L es un lenguaje regular y, usado el Pumping lemma decimos, “sea p la longitud crítica de L”

Tomamos un w que nos sirva tal que |w| ≥ p, w = $a^{p!}$

Por el lema sabemos que $w = a^{p!} = x\ y\ z$ donde $|\,x\ y\,| \leq p, \quad |\,y\,| \geq 1$ y que se puede pensar así:

$$w = xyz = a^{p!} = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}a\ldots a}^{p}\overbrace{a\ldots aa\ldots a}^{p!-p}$$

where $z = a\ldots aa\ldots aa\ldots a$ (from the end of y to the end of w).

$$y = a^{k}, \quad 1 \leq k \leq p$$

Entonces como $x\,y\,z = a^{p!}$ e $y = a^k,\ \ 1 \le k \le p$ por el Pumping Lemma sabemos que $x\,y^i\,z \in L$

osea que $x\,y^2\,z \in L$ que puede pensarse como $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$xy^2z = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a}_{y}}^{p+k}\underbrace{a\ldots a\overbrace{a\ldots aa\ldots a}^{p!-p}}_{z} \in L$$

Entonces $a^{p!+k} \in L$ pero para que esto suceda **debería existir un z!** tal que $p!+k = z!$

Pero..

$$\begin{aligned} p!+k &\le p!+p \\ &\le p!+p! \\ &< p!\,p + p! \\ &= p!(p+1) \\ &= (p+1)! \longrightarrow p!+k < (p+1)! \end{aligned}$$

$$p!+k \ne z!$$

Por contradicción vemos que $a^{p!+k} \notin L$

Y por lo tanto, nuestra asunción de que L es un lenguaje regular necesariamente tiene que ser FALSA

Entonces **concluimos que L no es un lenguaje regular**