Lenguajes Formales y Autómatas

Universidad Nacional de Quilmes

Emanuel Alvaredo, Federico Lochbaum

Características de la cursada

Teóricas: Miércoles de 19 a 21 hs (Fede) Aula: 118

Prácticas: Lunes de 19 a 21 hs (Ema) Aula: 255

Tenemos un Discord :) !

Más burocracia

- Asistencia y entregas semanales (son importanchis, tienen nota :D)
- Evaluaciones (Estas también son importantes)
- Medios de comunicación y consultas

Bueno, al final todo era importante…

Cómo ~~sobrevivir~~ aprobar esta cursada

Habrá dos trabajos con un recuperatorio

Promoción: Entregar el **75%** de los ejercicios semanales y la obtención de un promedio mínimo de **7** (siete) puntos en las instancias parciales de evaluación y un mínimo de **6** (seis) puntos en cada una de ellas.

Entregar el **75%** (setenta y cinco por ciento) de los ejercicios semanales y la obtención de un mínimo de **4** (cuatro) puntos en cada instancia parcial de evaluación. Debe rendir examen final.

Las entregas constituyen un 10% de la nota final :)

Bibliografía de la materia

- Principal/Obligatoria
  - Michael Sipser. Introduction To The Theory Of Computation
- Auxiliar/Opcional
  - John E. Hopcroft,Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman. Introduction to automata theory, languages, and computation.
  - John Carroll and Darrell Long. Theory of Finite Automata with an Introduction to Formal Languages.

Calendario tentativo de la cursada

Miercoles	15/08 Teórica	1 Alfabeto, lenguajes cadenasalfabeto
Lunes	21/08 Feriado	
Miercoles	23/08 Teórica	2 Qué es un autómata, ejemplos
Lunes	28/08 Práctica	Practica lenguajes, cadenas, alfabeto
Miercoles	30/08 Teórica	3 Formalismo AFD
Lunes	04/09 Práctica	Práctica AFD
Miercoles	06/09 Teórica	4 Minimización/traductores
Lunes	11/09 Práctica	Practica Minimizacion
Miercoles	13/09 Teórica	5 AFND
Lunes	18/09 Práctica	Practica AFND
Miercoles	20/09 Teórica	6 Propiedades Lenguajes Regulares
Lunes	25/09 Práctica	Practica propiedades
Miercoles	27/09 Teórica	ER
Lunes	02/10 Práctica	Practica ER
Miercoles	04/10 Teórica	Pumping Lema
Lunes	09/10 Práctica	Practica Pumping Lema
Miercoles	11/10 Teórica	Repaso Envío de Parcial Domicilario

Lunes	16/10 Feriado	
Miercoles	18/10 Teórica	Gramaticas regulares
Lunes	23/10 Práctica	Practica GR
Miercoles	25/10 Teórica	Gramaticas GLC
Lunes	30/10 Práctica	Practica GLC
Miercoles	01/11 Teórica	AP
Lunes	06/11 Práctica	AP
Miercoles	08/11 Teórica	Equivalencia GLC AP
Lunes	13/11 Práctica	AP
Miercoles	15/11 Teórica	Turing
Lunes	20/11 Feriado	
Miercoles	22/11 Teórica	Practica Turing
Lunes	27/11 Práctica	Repaso Enviar 2do TP
Miercoles	29/11 Teórica	Consulta/TP
Lunes	04/12 Práctica	Rec 1 Ejercicio en pizarrón
Miercoles	06/12 Teórica	Rec 2 Ejercicio en pizarrón
Lunes	11/12 Práctica	Coloquio (menos de 4)
Miercoles	13/12 Teórica	

Bueno, ahora si :D

Lenguajes ? Formales ? Autómatas, What ?

Nuestro objetivo en la cursada va a ser estudiar ciertos **sistemas simbólicos**

- Conjuntos de secuencias de símbolos (strings/palabras/fórmulas)
- Maneras de definirlos, construirlos, procesarlos
- Reconocer si están bien formados

¿Por qué nos interesan estos sistemas simbólicos?

Nos interesa resolver problemas con computadoras

Programas y computadoras digitales: Manipuladores abstractos y concretos de símbolos (palabras de lenguajes de alto y bajo nivel)

¿Y por qué nos interesan estos símbolos?

Información digital: codificar y decodificar datos en símbolos (y al final en 0s y 1s)

Lenguajes: Conjuntos de cadenas/strings de símbolos

Entonces qué son los lenguajes?

Lenguajes: Se conforma de una **sintaxis** y una **semántica**

Lenguajes "naturales": producto del desarrollo histórico y social

Lenguajes formales: Sintaxis y significado definidos de antemano, antes de usarlo.

Tipos de lenguajes formales

Lenguajes regulares → Autómatas finitos

Lenguajes independientes del contexto → Autómatas de pila

Lenguajes sin restricciones → Máquinas de Turing

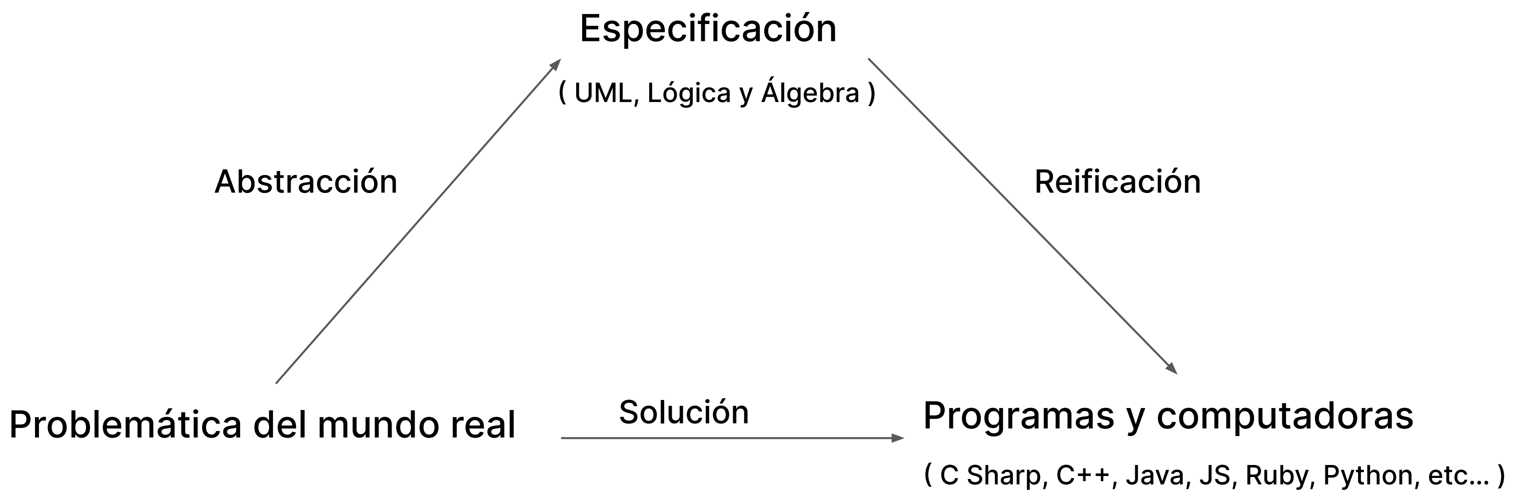
Por qué los queremos ?

- Queremos resolver problemas con computadoras (digitales)

- Donde tenemos entradas y salidas (cadenas de símbolos)

- Y un programa son... cadenas de símbolos que describen algoritmos para resolver problemas

Caso general



Algunas definiciones iniciales :)

- Alfabeto (Σ): un conjunto finito de símbolos — Ex: { a, b, c, …, z }
- String/Cadena: secuencia de símbolos de algún alfabeto — Ex: “gato”, “perro”, “casa”
- Lenguaje: un conjunto de cadenas — Ex: { “gato”, “perro”, “casa” }

Veamos algunos ejemplos

- Σ (Alfabeto) = { a, b }   u = ab, v = bbbaaa, w = abba

- Σ = { 1, 2, 3, ..., 9 }   u = 123, v = 42, w = 21212121...

Para un alfabeto puede haber un número arbitrario de lenguajes, por ejemplo para Σ = { 1, 2, 3, ..., 9 }

Primos = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... }   Pares = { 2, 4, 6, 8, ... }

Los lenguajes se usan para estructurar información y describir problemas

Operaciones con cadenas/strings

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$v = b_1 b_2 \cdots b_m$$

Concatenación $wv = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$

Reversa $w^R = a_n \cdots a_2 a_1$

Longitud $|w| = n \qquad |uv| = |u| + |v|$

Ocurrencias $|w|_b = cantidad\ de\, b\, en\, w, \quad b \in \Sigma\ y\, w\, string\ sobre\, \Sigma$

Observaciones

$|\lambda| = 0 \qquad |\lambda|_a = 0$

$\lambda w = w\lambda = w$

$\lambda abba = abba\lambda = ab\lambda ba = abba$

- Un string sin símbolos es denotado **λ** o **ε** (cadena vacía)

- Un substring de un string es una subsecuencia de caracteres consecutivos

$abbab$	ab
$abbab$	$abba$
$abbab$	b
$abbab$	$bbab$

- Sea la cadena w = uv, decimos que u es *prefijo* y v es *sufijo* de w

$abbab$

λ	$abbab$
a	$bbab$
ab	bab
abb	ab
$abba$	b
$abbab$	λ

Más operaciones sobre cadenas

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$v = b_1 b_2 \cdots b_m$$

Potencia $w^n = \underbrace{ww \cdots w}_{n}$ $w^0 = \lambda$

Operación * → el conjunto de todos los posibles strings del alfabeto Σ

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$$

Operación + → el conjunto de todos los posibles strings del alfabeto Σ excepto λ

$$\Sigma^+ = \Sigma * - \lambda$$

$$\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$$

Hablemos de lenguajes

Un lenguaje sobre el alfabeto Σ es cualquier subconjunto de Σ*

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$$

Posibles lenguajes

$$\{\lambda\}$$

$$\{a, aa, aab\}$$

$$\{\lambda, abba, baba, aa, ab, aaaaaa\}$$

Lenguaje de números primos

Alfabeto

$$\Sigma = \{0,1,2,\ldots,9\}$$

Lenguaje

$$PRIMOS = \{x : x \in \Sigma^* \text{ y } x \text{ es primo}\}$$

$$PRIMOS = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}$$

Lenguaje de números pares e impares

Alfabeto $\Sigma = \{0,1,2,\ldots,9\}$

Lenguaje

$$PARES = \{x : x \in \Sigma^* \text{ y } x \text{ es par}\}$$

$$PARES = \{0,2,4,6,\ldots,328,...\}$$

$$IMPARES = \{x : x \in \Sigma^* \text{ y } x \text{ es impar}\}$$

$$IMPARES = \{1,3,5,7,\ldots,453,...\}$$

Lenguaje de suma unaria

Alfabeto

$$\Sigma = \{1, +, =\}$$

Lenguaje

$$ADICION = \{x + y = z \ : \mathrm{x} = 1^{\mathrm{n}}, \mathrm{y} = 1^{\mathrm{m}}, \mathrm{z} = 1^{k}, \mathrm{n} + m = k\}$$

$$11 + 111 = 11111 \in ADICION$$

$$111 + 111 = 111 \notin ADICION$$

Observaciones

$$\varnothing = \{\ \} \neq \{\lambda\}$$

$$\left|\{\ \}\right| = \left|\varnothing\right| = 0$$

$$\left|\{\lambda\}\right| = 1$$

$$\left|\lambda\right| = 0$$

Operaciones sobre lenguajes

Operaciones de conjuntos

$$\{a, ab, aaaa\} \cup \{bb, ab\} = \{a, ab, bb, aaaa\}$$

$$\{a, ab, aaaa\} \cap \{bb, ab\} = \{ab\}$$

$$\{a, ab, aaaa\} - \{bb, ab\} = \{a, aaaa\}$$

$$\overline{L} = \Sigma^* - L \qquad \Sigma = \{a, b\}$$

$$\overline{\{a, ba\}} = \{\lambda, b, aa, ab, bb, aaa, \ldots\}$$

Operaciones sobre lenguajes

Reversa $L^R = \{w^R : w \in L\}$ $\{ab, aab, baba\}^R = \{ba, baa, abab\}$

Concatenación $L_1 L_2 = \{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$

$\{a, ab, ba\}\{b, aa\}$

$= \{ab, aaa, abb, abaa, bab, baaa\}$

Potencia $L^n = \underbrace{LL \cdots L}_{n}$ $L^0 = \{\lambda\}$

$\{a, bba, aaa\}^0 = \{\lambda\}$

$\{a,b\}^3 = \{a,b\}\{a,b\}\{a,b\} =$

$\{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$

Clausura de Kleene * y $^+$

Todas las cadenas (strings) que pueden construirse a partir de L

$$L^* = L^0 \bigcup L^1 \bigcup L^2 \cdots$$

$$\{a,bb\}^* = \begin{Bmatrix} \lambda, \\ a,bb, \\ aa,abb,bba,bbbb, \\ aaa,aabb,abba,abbbb,\ldots \end{Bmatrix}$$

Todas las cadenas que pueden construirse a partir de L menos el string vacío

$$L^+ = L^* - \{\lambda\}$$

$$L^+ = L^1 \bigcup L^2 \bigcup \cdots$$

$$\{a,bb\}^+ = \begin{Bmatrix} a,bb, \\ aa,abb,bba,bbbb, \\ aaa,aabb,abba,abbbb,\ldots \end{Bmatrix}$$

Problema fundamental

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

$$\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

$$L = PARES = \{x : x \in \Sigma^* \text{ y } x \text{ es par}\}$$

$$L = IMPARES = \{x : x \in \Sigma^* \text{ y } x \text{ es impar}\}$$

Cómo podemos saber si algún x $\in$ L ?

Necesitamos métodos que solamente manipulando símbolos respondan la pregunta

Gramáticas

Las Gramáticas especifican lenguajes a través de reglas

$$\langle oración \rangle \to \langle sujeto \rangle \ \langle predicado \rangle$$
$$\langle sujeto \rangle \to \langle artículo \rangle \ \langle nombre \rangle$$
$$\langle predicado \rangle \to \langle verbo \rangle$$

$$\langle artículo \rangle \to un$$
$$\langle artículo \rangle \to el$$

$$\langle nombre \rangle \to gato$$
$$\langle nombre \rangle \to perro$$

$$\langle verbo \rangle \to corre$$
$$\langle verbo \rangle \to salta$$

una derivación de "el perro corre"

$$\begin{aligned} \langle oración \rangle &\Rightarrow \langle sujeto \rangle \ \langle predicado \rangle \\ &\Rightarrow \langle sujeto \rangle \ \langle verbo \rangle \\ &\Rightarrow \langle artículo \rangle \ \langle nombre \rangle \ \langle verbo \rangle \\ &\Rightarrow el \ \ \langle nombre \rangle \ \langle verbo \rangle \\ &\Rightarrow el \ \ perro \ \ \langle verbo \rangle \\ &\Rightarrow el \ \ perro \ \ corre \end{aligned}$$

Cuál es el lenguaje que acepta la gramática ?

L = {

“un gato salta”, “un gato corre”, “el gato salta”,

“el gato corre”, “un perro salta”, “un perro corre”,

“el perro salta”, “el perro corre”

}

$$\langle oración \rangle \rightarrow \langle sujeto \rangle \ \langle predicado \rangle$$
$$\langle sujeto \rangle \rightarrow \langle artículo \rangle \ \langle nombre \rangle$$
$$\langle predicado \rangle \rightarrow \langle verbo \rangle$$

$$\langle artículo \rangle \rightarrow un$$
$$\langle artículo \rangle \rightarrow el$$

$$\langle nombre \rangle \rightarrow gato$$
$$\langle nombre \rangle \rightarrow perro$$

$$\langle verbo \rangle \rightarrow corre$$
$$\langle verbo \rangle \rightarrow salta$$

Notación

Este conjunto de definiciones se llaman *reglas de producción/reducción*

$$\langle nombre \rangle \rightarrow gato$$

$$\langle nombre \rangle \rightarrow perro$$

No terminal/Variable ***Terminal***

$$\langle oración \rangle \rightarrow \langle sujeto \rangle \ \langle predicado \rangle$$

No terminal

Ejemplo

Gramática

$$S \to aSb$$

$$S \to \lambda$$

Lenguaje

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Derivación de la cadena "ab"

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

(S reduce en dos pasos a ab)

$$S \to aSb \qquad S \to \lambda$$

Derivación de la cadena "aabb"

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

$$S \to aSb \qquad S \to \lambda$$

Cómo definimos formalmente una gramática ?

$$G = (V, \Sigma, S, P)$$

V: Conjunto de no terminales

Σ: Conjunto de terminales

S: No terminal/variable **inicial**

P: Conjunto de reglas de producción/reescritura

Qué gramática acepta el lenguaje L ?

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Piensenlo 5 minutos :)

Qué gramática acepta el lenguaje L ?

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Damos **un** G **= <*V, Σ, S, P* >**

***V*:** { S } ***Σ*:** { a, b } ***S*:** S ***P*:** { S → aSb, S → λ }

Detalles...

- Un string que contiene No terminales/variables y terminales lo llamamos **Forma sentencial**

- Un string que contiene sólo terminales lo llamamos **Sentencia**

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$$

- Escribimos $S \overset{*}{\Rightarrow} aaabbb$ Para denotar $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$

Pequeño ejercicio

Sea G = <*V*, *Σ*, *S*, *P*>

$$S \rightarrow Ab$$
$$A \rightarrow aAb$$
$$A \rightarrow \lambda$$

Qué forma tienen *V*, *Σ*, *S*, *P* ?

Qué lenguaje acepta ?

Lenguaje generado

Dada una gramática G con símbolo inicial S, definimos L(G) como:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

Nota: Usamos una convención notacional para **A → aAb, A → λ** lo escribimos **A → aAb | λ**

Ejercicio

Dar una reducción de G

Sea G :

$S \rightarrow aSBC \mid \lambda$	$CB \rightarrow BC$
$aB \rightarrow ab$	$bB \rightarrow bb$
$bC \rightarrow bc$	$cC \rightarrow cc$

Clasificación de gramáticas

TIPO	GRAMATICA	
0	IRRESTRICTA $\alpha \to \beta$	$\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$
1	SENSIBLE AL CONTEXTO $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$ $\alpha \to \beta$	$\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ $\gamma \in (V \cup \Sigma)^+, A \in V$ $\lvert \alpha \rvert \leq \lvert \beta \rvert$
2	LIBRE DE CONTEXTO $A \to \alpha$	$\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ $A \in V$
3	LINEAL DERECHA O IZQUIERDA $A \to \alpha B$ $A \to B \alpha$	$\alpha \in \Sigma^*$ $A \in V$ $B \in (V \cup [\lambda\})$

Jerarquía de Chomsky

TIPO	GRAMATICA	AUTOMATA	LENGUAJE
0	IRRESTRICTA $\alpha \to \beta \quad \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$	MAQUINA DE TURING	TURING RECONOCIBLE
1	SENSIBLE AL CONTEXTO $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta \quad \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ $\gamma \in (V \cup \Sigma)^+, A \in V$ $\alpha \to \beta$	AUTOMATA LINEALMENTE LIMITADO	SENSIBLE AL CONTEXTO
2	LIBRE DE CONTEXTO $A \to \alpha \quad \alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ $A \in V$	AUTOMATA DE PILA	LIBRE DE CONTEXTO
3	LINEAL DERECHA O IZQUIERDA $A \to \alpha B \quad \alpha \in \Sigma^*$ $A \in V$ $A \to B\alpha \quad B \in (V \cup [\lambda\})$	AUTOMATA FINITO	REGULAR