Expresiones regulares

Universidad Nacional de Quilmes

Emanuel Alvaredo, Federico Lochbaum

Recordamos...

Un lenguaje L’ es **regular** si existe un AFD M que lo acepta. Es decir, L(M) = L’. De esto concluimos que los lenguajes aceptados por los AFDs forman la familia de los **lenguajes regulares**

Si $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ entonces, 1) { a_1 }, { a_2 }, .. son lenguajes regulares. 2) {} es un lenguaje regular y 3) el conjunto que solo tiene a lambda, es también un lenguaje regular

También sabemos que dado dos lenguajes regulares L_1 y L_2,

La **unión**, **concatenación**, la cláusula de **Kleene**, la operación de **reversa**, el **complemento** y la **intersección** preservan la propiedad de ser Lenguajes regulares

Definición inductiva de Lenguajes regulares

Sea $\boldsymbol{\Sigma = \{ a_1, a_2, \dots a_m \}}$, un lenguaje regular sobre Σ es cualquier conjunto que pueda formarse por una secuencia finita de aplicaciones de las siguientes reglas:

- $\{ a_1 \}, \{ a_2 \}, \dots, \{ a_m \}$ son lenguajes regulares
- {} es un lenguaje regular
- el conjunto que solo contiene a lambda es un lenguaje regular
- Dado L_1 y L_2 regulares, L_1L_2 es un lenguaje regular
- Dado L_1 y L_2 regulares, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular
- Dado L_1 y L_2 regulares, $L_1 \cap L_2$ es un lenguaje regular
- Dado L_1 regular, L_1^* es un lenguaje regular

Expresiones regulares

Dado un alfabeto **Σ**

- **ø** (el conjunto vacío), **ϵ** (epsilon) y cualquier **a** ∈ **Σ**, son expresiones regulares

- sea r_1 y r_2, dos expresiones regulares:
  - $r_1 + r_2$ (**suma**) es una expresión regular
  - $r_1 . r_2$ (**concatenación**) es una expresión regular
  - r_1* (**cláusula de kleene**)es una expresión regular
  - (r_1) (**paréntesis**) es una expresión regular

Esto **NO** es una RE

$$(a+b+)$$

Ejemplos:

$$(a+b\cdot c)^{*}\cdot(c+\varnothing) \qquad (a+b)^{*}\cdot(a+b\cdot b)$$

$$(a+b)\cdot a* \qquad (0+1)^{*}\cdot 0\cdot 0\cdot(0+1)^{*}$$

Función de interpretación

Notar que necesitamos alguna forma de interpretar una expresión r. La llamaremos **función de interpretación, L(r)**

- **Casos primitivos**
  - $L(\varnothing) = \{\}$
  - $L(\epsilon) = \{ \lambda \}$
  - $L(a) = \{ a \}$ para cualquier $a \in \Sigma$

- **Casos inductivos**
  - $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$
  - $L(r_1 . r_2) = L(r_1) . L(r_2)$
  - $L(r_1^*) = (L(r_1))^*$
  - $L((r_1)) = L(r_1)$

$L((a + b) . a^*) \Rightarrow L (a + b) . L (a^*) \Rightarrow L(a) \cup L(b) . (L (a))^* \Rightarrow$

$\Rightarrow (\{ a \} \cup \{ b \}) . (\{ a \})^* \Rightarrow \{ a, b \} . \{ \lambda, a, aa, aaa, ... \} \Rightarrow$ **$\{ a, aa, aaa, ..., b, ba, baaa, ... \}$**

Notar que las expresiones regulares describen **Lenguajes regulares**

Ejemplos

$r_1 = (a . a)^* . (a . b)^* . b$

$L(r_1) = \{ a^{2n} b^{2m} b, n,m >= 0\}$

$r_2 = (1 + (0 . 1))^* . (0 + \epsilon)$

$L(r_2) = \{ x \in \{0, 1\}^* : |x|_{00} = 0 \}$

Equivalencia entre expresiones regulares

Sea r_1 y r_2, dos expresiones regulares, r_1 y r_2 son equivalentes si **$L(r_1) = L(r_2)$**

Ejemplo: $r_1 = (1 + (0 \cdot 1))^* \cdot (0 + \varepsilon)$ y $r_2 = ((1^* \cdot (0 \cdot 1)^*)^* \cdot (0 + \varepsilon)) + (1^* \cdot (0 + \varepsilon))$ son **equivalentes**

Para probar que dos expresiones regulares son equivalentes debemos mostrar que describen el mismo lenguaje, **buscamos otra manera…**

Propiedades algebraicas de las expresiones regulares

Sea el alfabeto Σ y tres expresiones regulares r_1, r_2 y r_3 entonces:

1. $r_1 + \wedge = r_1$
2. $r_1 . \epsilon = r_1 = \epsilon . r_1$
3. $r_1 . \wedge = \wedge = \wedge . r_1$
4. $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$
5. $r_1 + r_1 = r_1$
6. $r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$
7. $r_1 . (r_2 . r_3) = (r_1 . r_2) . r_3$
8. $r_1 . (r_2 + r_3) = (r_1 . r_2) + (r_1 . r_3)$
9. $\epsilon^* = \epsilon$
10. $\wedge^* = \epsilon$
11. $(r_1 + r_2)^* = (r_1^* + r_2^*)^*$
12. $(r_1 . r_2)^* = (r_1^* . r_2^*)^*$
13. $(r_1^*)^* = r_1^*$
14. $(r_1)^* . (r_1^*) = r_1^*$
15. $r_1 + (r_1)^* = r_1^*$

Observaciones

- Las ecuaciones (a) - (o) son reglas de un cálculo ecuacional, es decir, sustitución de iguales
- Cada paso de sustitución establece una igualdad válida entre lenguajes regulares

Aclaración

- A fin de facilitar la lectura y escritura de las ER, no escribimos los "." y los paréntesis. Asumimos la precedencia: + < * < .

Ej: $((1^* \cdot (0 \cdot 1)^*)^* \cdot (0+\varepsilon)) + (1^* \cdot (0+\varepsilon)) \longrightarrow (1^* (01)^*)^* (0+\varepsilon) + 1^* (0+\varepsilon)$

Lema: sea $\mathbf{r_1}$ = $(1 + 01)^* (0 + \epsilon)$ y $\mathbf{r_2}$ = $(1^* (01)^*)^* (0 + \epsilon) + 1^* (0 + \epsilon)$ entonces $\mathbf{r_1 = r_2}$

Definición: $r \subseteq s \Leftrightarrow r + s = s$

Propiedad 1: $r + s = t \Rightarrow r + t = t \wedge s + t = t$

Teorema 2: $r \subseteq s \Rightarrow r^* \subseteq s^*$

Lema 3: $(1+01)^* + 1^* = (1+01)^*$

Expresiones y Lenguajes Regulares

Teorema: Los lenguajes generados por expresiones regulares es la familia de lenguajes regulares

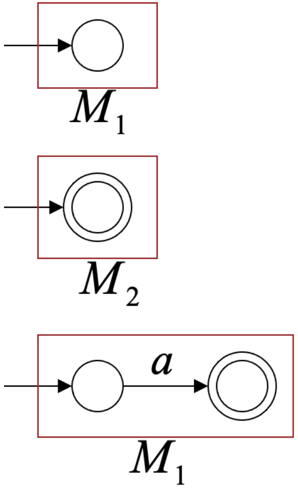
Demo: Mostramos la doble inclusión

1. { Lenguajes generados por ER } $\subseteq$ { Lenguajes regulares }
2. { Lenguajes regulares } $\subseteq$ { Lenguajes generados por ER }

Parte 1: Para cualquier expresión regular r, el lenguaje L(r) es regular.

Prueba: Por inducción sobre el tamaño de r

- Casos base, $\varnothing$, ε, $a \in \Sigma$



$$\left.\begin{array}{l} L(M_1) = \{\} = L(\varnothing) \\ L(M_2) = \{\lambda\} = L(\varepsilon) \\ L(M_3) = \{a\} = L(a) \end{array}\right\} \text{lenguajes regulares}$$

Parte 1: Para cualquier expresión regular r, el lenguaje L(r) es regular.

Prueba: Por inducción sobre el tamaño de r

- Casos inductivos, $r_1 + r_2$, $r_1 . r_2$, r_1* y $((r_1))$

$$L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$$

$$L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1)\, L(r_2)$$

$$L(r_1^*) = (L(r_1))^*$$

$$L((r_1)) = L(r_1)$$

Parte 1: Para cualquier expresión regular r, el lenguaje L(r) es regular.

Prueba: Por inducción sobre el tamaño de r

- Casos inductivos, $r_1 + r_2$, $r_1 . r_2$, r_1* y $((r_1))$

Por HI: $L(r_1)$ y $L(r_2)$ son lenguajes regulares

También sabemos que los lenguajes regulares son cerrados bajo la unión, la concatenación y la clausura

$$L(r_1) \cup L(r_2)$$
$$L(r_1) L(r_2)$$
$$(L(r_1))^*$$

Parte 1: Para cualquier expresión regular r, el lenguaje L(r) es regular.

Prueba: Por inducción sobre el tamaño de r

- Casos inductivos, $r_1 + r_2$, $r_1 . r_2$, r_1* y $((r_1))$

$$L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$$

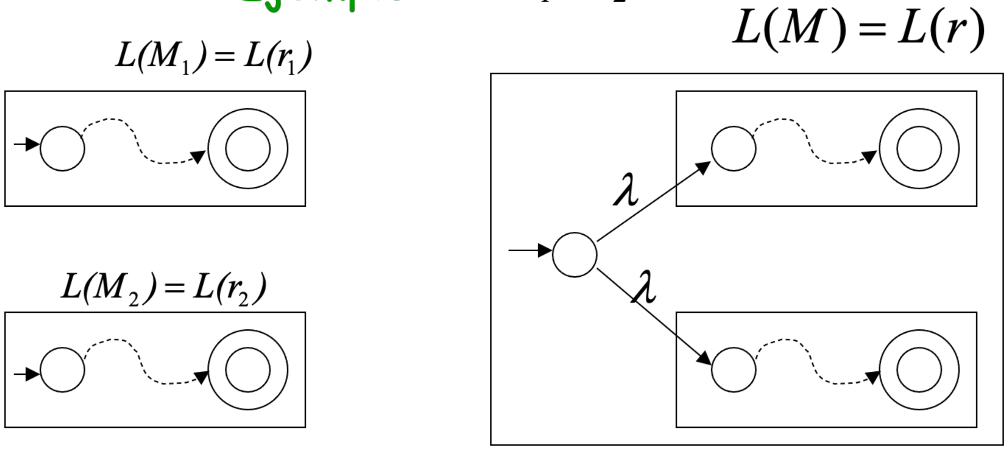
$$L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1)\, L(r_2)$$

$$L(r_1^*) = (L(r_1))^*$$

Son lenguajes regulares

Usando las propiedades de clausura de estas operaciones, podemos construir recursivamente el AFND M que acepta L(M) = L(r)

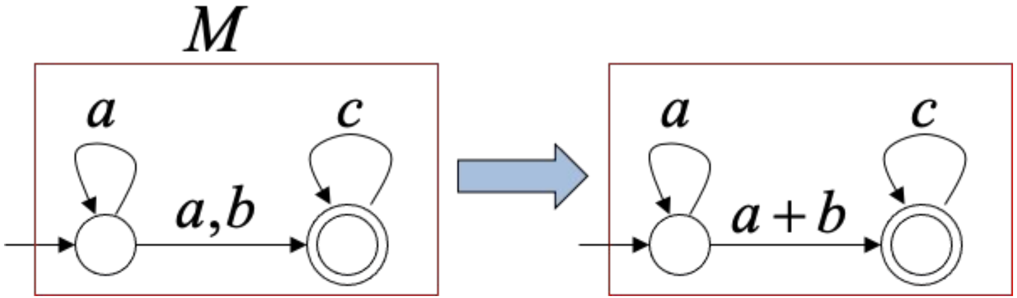
Ejemplo: $r = r_1 + r_2$

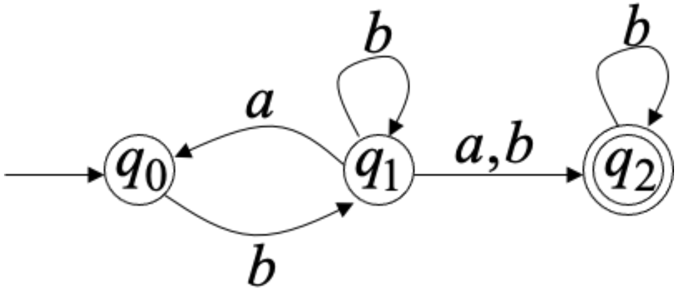


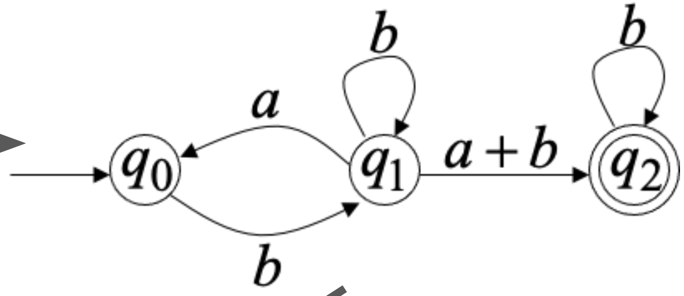
Parte 2: Para cualquier lenguaje regular L, existe una expresión regular r con L(r) = L

Prueba: Convertimos un AFND que acepta L a una expresión regular

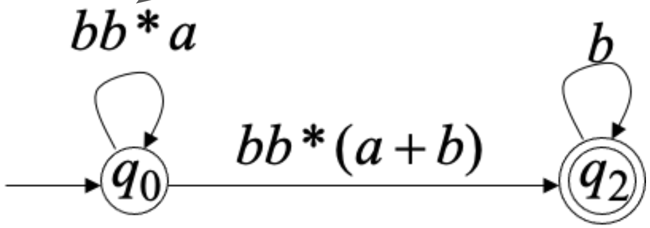
- Dado que L es regular, existe un AFND M que lo acepta
- A partir de M construimos el grafo de transición generalizado equivalente en el cual las etiquetas de transición son expresiones regulares



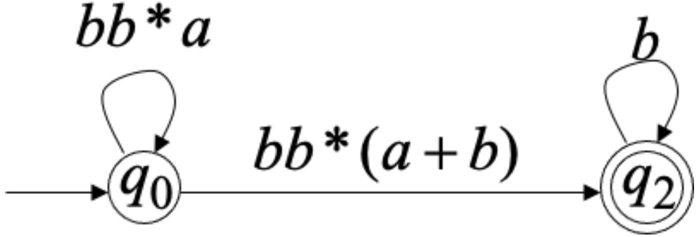




Reducir los estados



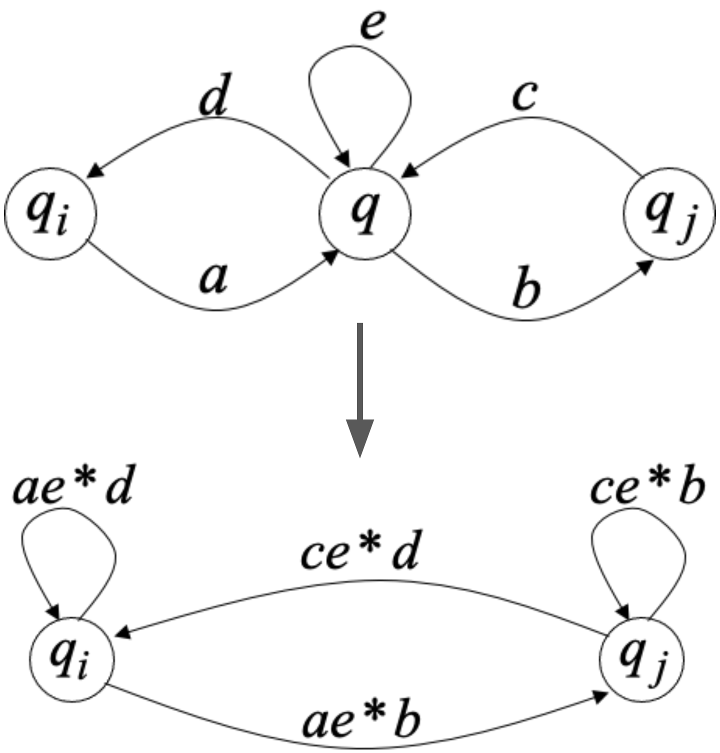
Las etiquetas
son expresiones
regulares



$$r = (bb^*a)^*bb^*(a+b)b^*$$

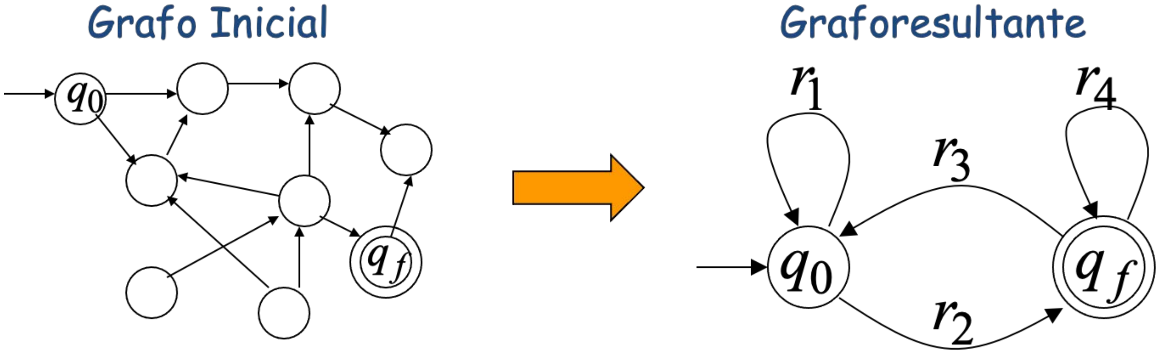
$$L(r) = L(M) = L$$

En general



En general

Repitiendo el proceso hasta que queden dos estados, el grafo resultante es



$$r = r_1{}^* r_2 (r_4 + r_3 r_1{}^* r_2)^*$$

$$L(r) = L(M) = L$$

Método de eliminación de estados

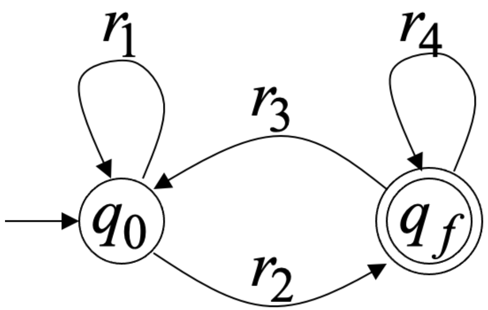
Supongamos que deseamos eliminar el estado s

- Se eliminan todos los arcos que incluyen a "s"
- Se introducen, para cada predecesor q_i de s y cada sucesor p_j de s, una expresión regular que representa todas las rutas que inician en q_i , van a s, quizás hacen un loop en s (cero o más veces, y finalmente van a p_j . La expresión para estas rutas es Q_iS*P_j . Esta expresión se suma al arco que va de q_i a p_j . Si este arco no existe, se añade primero uno con la expresión ⌀

Estrategia para construir una RE equivalente

1 - Para cada estado final q_f, aplicar el proceso de reducción para producir un autómata equivalente con expresiones regulares como etiquetas en los arcos. Eliminar todos los estados excepto q_f y el estado inicial q_0.

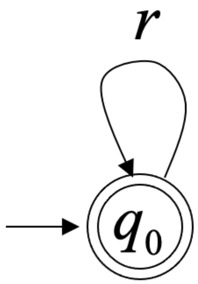
2 - Si q_f != q_0, se genera un autómata con 2 estados como el siguiente,



$$r = r_1 * r_2 (r_4 + r_3 r_1 * r_2)* = (r_1 + r_2 r_4 * r_3)* r_2 r_4 *$$

Estrategia para construir una RE equivalente

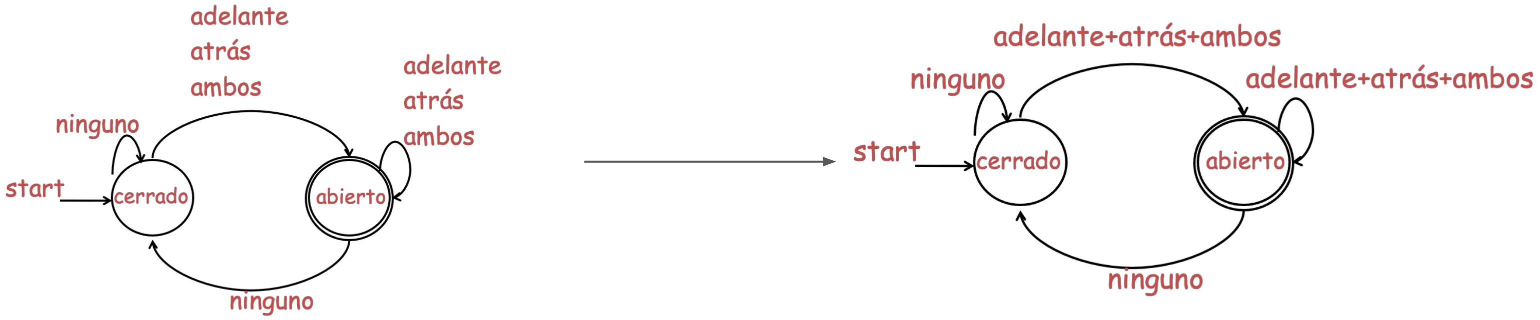
3 - Si el estado inicial es un estado final, también se debe hacer una eliminación de estados del autómata original que elimine todos los estados menos el inicial y dejamos un autómata como el siguiente:



4 - La expresión final es la suma de todas las expresiones derivadas del autómata reducido para cada estado de aceptación por las reglas 2 y 3

Ejemplo: Puerta

Transformamos el AFND del problema de la puerta en una RE

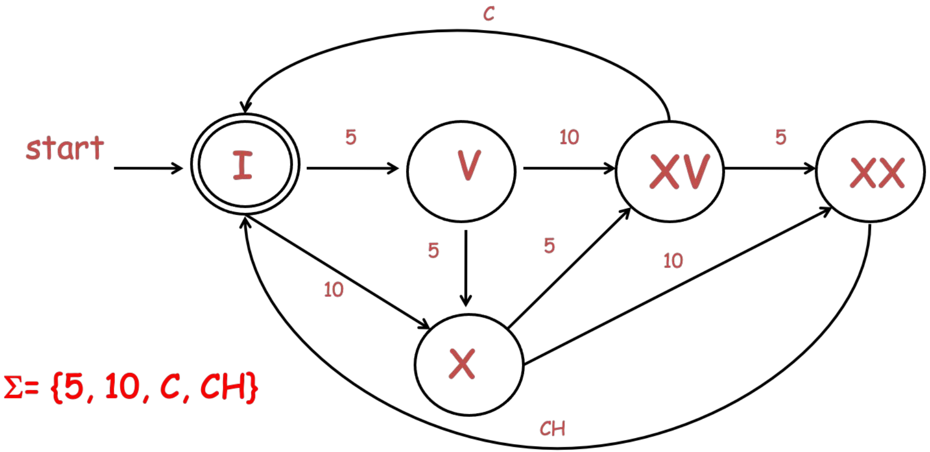


ninguno* (adelante+atrás+ambos) ((adelante+atrás+ambos) + ninguno ninguno*(adelante+atrás+ambos))* =

(ninguno(adelante+atrás+ambos)(adelante+atrás+ambos)*ninguno)* (adelante+atrás+ambos)(adelante+atrás+ambos)*

Ejemplo 2: Máquina expendedora

Transformamos el AFND del problema de la máquina expendedora en una RE



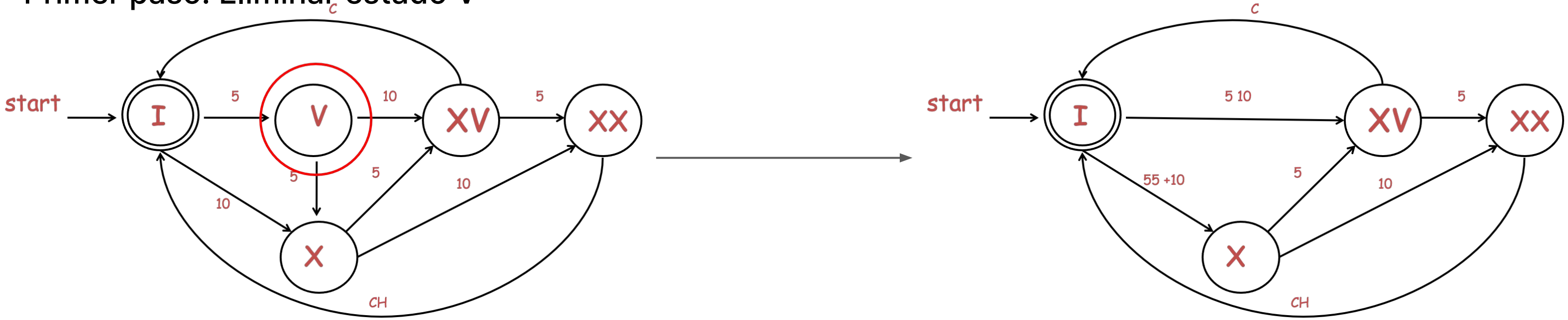
$\Sigma = \{5, 10, C, CH\}$

$L_0 = \{\lambda, 510C, 555C, 105C, 5105CH, 5555CH, 1055CH, 5510CH, 1010CH\}$

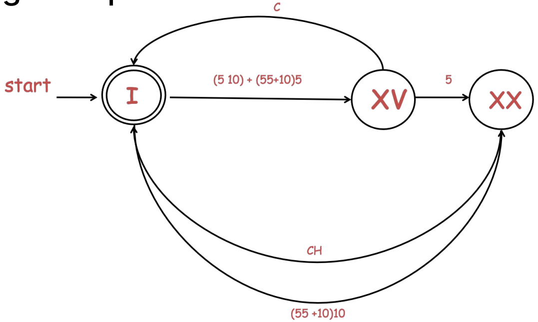
$L(M) = L_0^*$

Ejemplo 2: Máquina expendedora

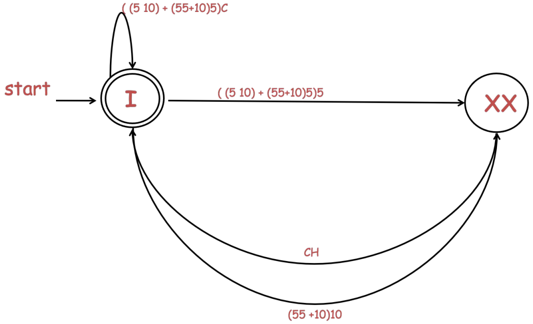
Primer paso: Eliminar estado V



Segundo paso: Eliminar estado X



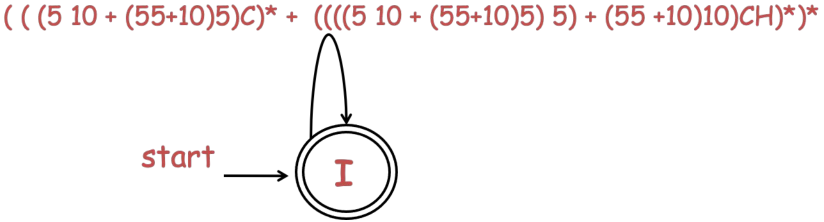
Tercer paso: Eliminar estado XV



Ejemplo 2: Máquina expendedora

Cuarto paso: Eliminar estado XX

Paso final



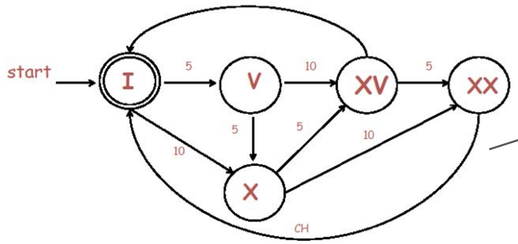
Vemos que: r = ((((510) + (55+10)5)C)* + ((((510 + (55+10)5)5 + (55 +10)10)CH)*)* = L(r) = L_0^*

Observación

Sintaxis

r = ((((510) + (55+10)5)C)* + ((((510 + (55+10)5)5 + (55 +10)10)CH)*)*

L



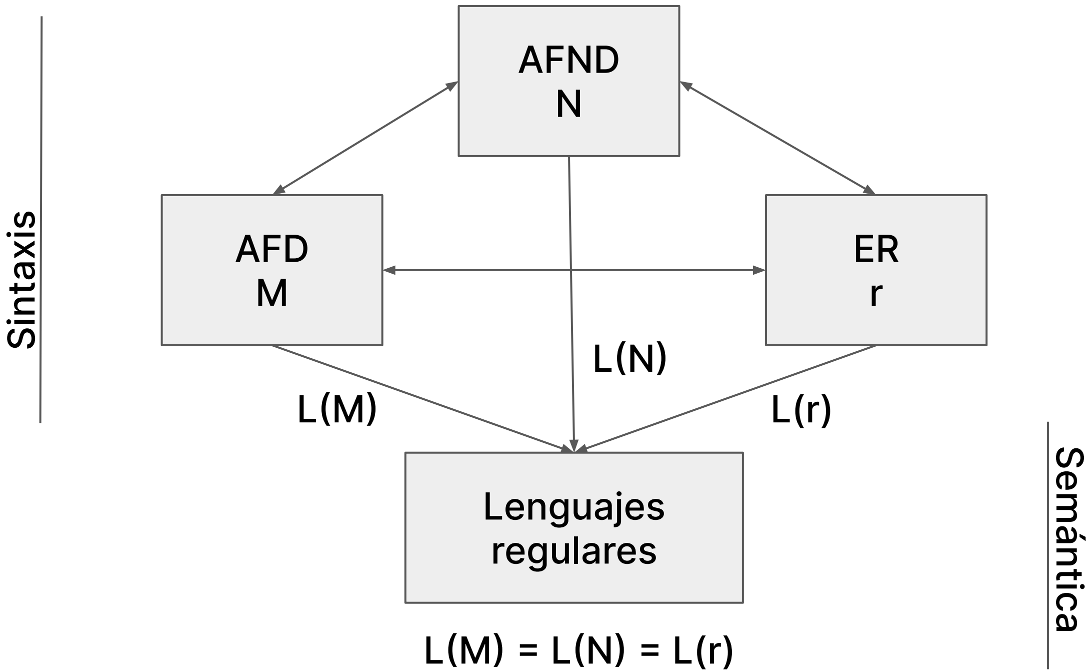
L

Semántica

$\mathbf{L_0^*}$

Universidad Nacional de Quilmes

Representación estándar de los Lenguajes Regulares



L(M) = L(N) = L(r)

Nota: Cuando decimos "*Tenemos un lenguaje regular L*" nos referimos a "*El lenguaje L está en una representación estándar*" (AFD, AFND, ER)