ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA SULLA DERIVAZIONE

Derivare le seguenti funzioni (nei punti del loro dominio in cui sono derivabili!):

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}, \quad 5\sin x + 4\tan x, \quad (\sin x)^5 + (\tan x)^4, \quad x\log x - x, \quad \cos(\pi x + \pi^2),$$

$$x^2e^{2x}, \quad xe^{x^2}, \quad e^x\log x, \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{-2}{\sin x}, \quad \log(\cos x), \quad \tan(x^2+2x+2),$$

$$\frac{1+\cos x}{\cos x}, \quad \frac{\sin x - 1}{\cos x}, \quad \sin(2x), \quad 2\sin x\cos x, \quad \log|x|, \quad \sin(\cos(x^2)),$$

$$|\cos x|, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt{\sin x}, \quad \sqrt[4]{\log x}, \quad \frac{x^8-5x^3+1}{x^3}, \quad \frac{x^e+e^x}{x}, \quad \tan x - x,$$

$$\frac{x+2}{x^3-1}, \quad \frac{3}{x\log x}, \quad 2^x \text{ (usare il cambio di base!)}, \quad \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad \frac{-12}{x^2}\left(\frac{3}{x}+1\right)^3,$$

$$\arctan\left(\frac{3x+1}{2}\right), \quad 2\arctan\left(\frac{x}{3}\right), \quad e^{2|x|}, \quad x+\frac{1}{x}, \quad x^2-\frac{2}{x^2}, \quad \sqrt{x+\sin x},$$

$$\log_x 2 \text{ (!)}, \quad x^{\sin x}, \quad ,e^{\cos x} \quad \frac{1}{2}\log(1+x^2), \quad \arctan(\cos x+1), \quad \log(\sin^2(2x)),$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \frac{1}{6}\left(\log(x^2-x+1) - 2\log(x+1) + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\text{(lungo ma il risultato è semplicissimo!)}, \quad x^2-6x+9, \quad (x-3)^2, \quad e^{\sqrt{\frac{x}{x-1}}},$$

$$\log\left(\frac{2}{x+2}\right), \quad \log\left(\frac{x^2}{x+1}\right), \quad \sin\left(\frac{1}{x+1}\right), \quad \tan\left(\frac{1}{x+1}\right),$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(x)}, \quad \frac{2\log x+1}{2\sqrt{\log x}}, \quad \frac{-e^x\sin(e^x)}{\sqrt{\cos(e^x)}}, \quad \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

(la terzultima e la penultima funzione si chiamano seno e coseno iperbolico ($\sinh$ e $\cosh$), rispettivamente, e la terza, cioè il loro rapporto, tangente iperbolica ($\tanh$).
Si ottengono esattamente come seno, coseno e tangente però partendo dall'iperbole equilatera invece che dalla circonferenza unitaria - vedete qui. Vedete l'analogia a livello di derivate?)

$$\log(x+\sqrt{x^2+1}), \quad \log(x+\sqrt{x^2-1}), \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

(queste invece sono le loro inverse. Notate la derivata dell'ultima, cioè dell'arcotangente iperbolica?)

Se i calcoli non sono impossibili, potete anche calcolare le derivate successive per esercitarvi...

Mi sono reso conto di non aver scritto in aula la formula per la composizione di tre (o più) funzioni:

$$\frac{d}{dx}(f(g(h(x)))) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

e si ottiene applicando due volte la formula della composizione. Per esempio, se avete la funzione

$$\sin(\cos(x^2))$$

che potete ottenere con la seguente composizione

$$x \xmapsto{x^2} x^2 \xmapsto{\cos y} \cos(x^2) \xmapsto{\sin y} \sin(\cos(x^2))$$

la sua derivata è

$$\cos(\cos(x^2)) \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x.$$