

ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA SUI LIMITI

Come spero abbiate notato, c'è un forte parallelo tra molti limiti di successione e “corrispondenti” limiti di funzione (vedete il Teorema-ponte, difatti). Quindi, pur in vista di un esame in cui *sicuramente* ci saranno limiti di funzione e *forse* limiti di successione, ho ampliato la dispensa di limiti sulle successioni inserendone nuovi. Vi lascio pure risultati e traccia della strategia risolutiva (anche se potrebbe non essere l'unica!).

Considerate il limite per $n \rightarrow \infty$ delle seguenti successioni. **Prima individuate di che forma indeterminata si tratta, poi calcolate, se esiste, il valore di tale limite.**

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (1) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ | $[\sqrt{e}; g]$ |
| (2) $\left(\frac{1+3n}{3n}\right)^{2n}$ | $[e^{2/3}; g \text{ oppure } f, n]$ |
| (3) $\sqrt[n]{n!}$ | $[+\infty; c]$ |
| (4) $n^{1/\sqrt{n}}$ | $[1; f, n]$ |
| (5) $\frac{n!}{n\sqrt{n}}$ | $[+\infty; e]$ |
| (6) $\frac{n!}{n^{\frac{4}{\sqrt{n}}}}$ | $[+\infty; e]$ |
| (7) $n^{1/\sqrt{n}}$ | $[1; f, n]$ |
| (8) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ | $[e; c]$ |
| (9) $\frac{n^7 - 2n^3 + 2}{n^3 + n + 2}$ | $[+\infty; b]$ |
| (10) $\frac{n+2}{n^3 - 1}$ | $[0; b]$ |
| (11) $\frac{n! - 3}{n! - n^3}$ | $[1; b]$ |
| (12) $\left(1 + \frac{3}{n^4}\right)^{-n^4}$ | $[e^{-3}; g]$ |
| (13) $\frac{(1 + 10^{-10})^n}{n^{10^{10}}}$ | $[0]$ |
| (14) $\frac{1 - \cos(1/n!)}{n^{-n}}$ | $[0; i, 2]$ |
| (15) $\frac{3^{n+1}}{3^n + 1}$ | $[3; b]$ |
| (16) $\frac{n^{3/2} - e^n}{1 + 7^n}$ | $[0; b]$ |
| (17) $\frac{\sqrt[n]{(-1)^n + 2^n}}{\sqrt[n]{3^n + 2^n}}$ | $[2; c, p \text{ oppure } a, p]$ |
| (18) $\frac{\sqrt[n]{3^n + 2^n}}{\sqrt[n]{3^n + 4^n}}$ | $[2; a]$ |
| (19) $\log\left(\frac{n^2}{n^2 - 2}\right)$ | $[0; b, n]$ |
| (20) $n \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ | $[-1; l]$ |

- (22) $\frac{\sin n + \cos(e^n) + n}{\ln n}$ [$+\infty$; b]
- (23) $(\cos(1/\ln n) - 1)[\ln(n+1)]^2$ [$-1/2$; i.2]
- (24) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ [0; f,n]
- (25) $\frac{n^2 - \sin n}{-n + \cos n}$ [$-\infty$; b,p]
- (26) $(-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ [0; b,p]
- (27) $(-1)^n \frac{n^2+1}{n+1}$ [\nexists]
- (28) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ [0]
- (29) $\sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2-1}}$ [1; c (Attenzione! “0⁰” è forma indeterminata!)]
- (30) $\frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2}$ [0; b]
- (31) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\pi^{-n}$ [0; p]
- (32) $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ [\nexists]
- (33) $n^3 - n! + 10^{-n} - 2^{-n^n}$ [$-\infty$; a]
- (34) $\log_{1/e}(n)$ [$-\infty$; m]
- (35) $e^{(n \sin(1/n))^{n!}}$ [1; ,n]
- (36) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ [$+\infty$; d]
- (37) $\frac{(4n)!}{((2n)!)^2}$ [$+\infty$; d]
- (38) $(-1)^{n^2+n}$ [1; attenzione... $n^2 + n$ quando è pari/dispari?]
- (39) $2^{\cos(n\pi/4)}$ [\nexists]
- (40) $\frac{\log(n^n)}{n^{3/2}}$ [0; m,b]
- (41) $\frac{n!\sqrt{4n^2+1}}{(n+1)!}$ [2; b]
- (42) $e^n \pi^{-n}$ [0; m]
- (43) $e^{-n^3} \pi^{n^3}$ [$+\infty$; m]
- (44) $e^{1-n^4(1-\cos(\pi n^{-2}))}$ [$e^{1-\pi^2}$; i.2,n]
- (45) $\left(\sqrt[n]{3} - 1\right)^n$ [0]
- (46) $n^n - n^{\sqrt{n}}$ [$+\infty$; a]
- (47) $n^{\sqrt{n}} - 2^n$ [$-\infty$; n,m,a]
- (48) $(-2)^n 2^{-n}$ [\nexists ; m]
- (49) $(-2)^n 2^{-n^2}$ [0; m,p]
- (50) $\frac{(n+3)! - n^3}{n^2(n+1)!}$ [1; b]
- (51) $\cos\left(\frac{1}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ [1; n]
- (52) $\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(1/n)-1}{n^{-2}}\right)$ [0; i.2,n]
- (53) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ [e; g]
- (54) $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}$ [0; raccogliere n^{-2}]
- (55) $\sqrt{2^n-1} - \sqrt{3^n-1}$ [$-\infty$; o oppure raccogliere 2^n]
- (56) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ [1; o]

(57)	$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$	[1/2; o]
(58)	$\frac{1}{(n!)^3} - \frac{1}{(n!)^7}$	[0; raccogliere $(n!)^{-3}$]
(59)	$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sqrt{n} - 1}}$	[+∞; b]
(60)	$\frac{n^{1/2}}{\sqrt{n^{1/2} - 1}} - \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^{3/2} - 1}}$	[−∞; p]
(61)	$(n^3 + \sin n) \sin\left(\frac{2}{n}\right)$	[+∞; i,p]
(62)	$n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$	[2π; i]
(63)	$\frac{\sqrt{n^2 - n + 3}}{2^n + 4^n}$	[1; b]
(64)	$\frac{3^n}{2^n + 4^n}$	[+∞; b]
(65)	$\frac{(3 + \sin n)^n + n^4}{(n - 2)! - 5^n}$	[0; b]
(66)	$e^{n \sin(1/n)}$	[e; i,n]
(67)	$\frac{(2n)!}{2n!}$	[+∞; calcolo diretto oppure d]
(68)	$\cos\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$	[1; i,n]
(69)	$\frac{\log(2 - \cos(e^{-n}))}{e^{-n}}$	[0; i.2,l]
(70)	$n^4 - 4^n$	[−∞, a]
(71)	$\frac{\log n^4}{(\log n)^4}$	[0, m]
(72)	$2^{3n} - 2^{2n} + 2$	[+∞; a]
(73)	$2^{3n} - 3^{2n}$	[−∞; a]
(74)	$\frac{(n!)^2 - 2n! + 1}{n! + 2}$	[+∞; b]
(75)	$\frac{3^{2n} + 3^n}{9^n}$	[1; b]
(76)	$\log n - \log \sqrt{n}$	[+∞; m,n]
(77)	$\frac{\log n - \log \sqrt{n} + (\log n)^{1/3}}{\sqrt[8]{n}}$	[0; b]
(78)	$\frac{n!}{n^{n-1}}$	[0; d]
(79)	$\sqrt{9^n + 3^n} - 3^n$	[1/2; a,o]
(80)	$\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$	[1; b,p]
(81)	$\frac{n! - (n + 1)!}{n^2 e^n}$	[−∞; raccogliere $n!$ poi b]
(82)	$\frac{\sin(1/\sqrt{n})}{\sin(3/\sqrt{n})}$	[1/3; i]
(83)	$\frac{\tan(2^{-n})}{2^{-n-1}}$	[2; i]
(84)	$\frac{\cos(1/n) - 1}{\cos(3/n) - 1}$	[1/9; i.2]
(85)	$\frac{e^{-3/n} - 1}{e^{2/n} - 1}$	[-3/2; h]
(86)	$\frac{\log(n^3)}{\log(n^5)}$	[3/5; attenzione...]

- (87) $\frac{\log(n^3)}{\log(2n^5)}$ [3/5; m]
- (88) $\frac{\log(n^3 + 1)}{\log(4n^5 + n^2 - 1)}$ [3/5; b,m]
- (89) $\frac{\log(\frac{n+1}{n+2})}{\log(\frac{n+2}{n+1})}$ [1; l]
- (90) $\sqrt{n^2 + 1} - \frac{n^2 + 1}{n + 1}$ [1; o dopo aver raccolto $n + 1$]
- (91) $\arctan\left(\frac{n^2 + 1}{1 - n}\right)$ $[-\pi/2; b,n]$
- (92) $n^2 - n^2 \arctan n$ $[-\infty; a]$
- (93) $\frac{\log(1 + 1/n^2)}{\sin(1/n^2)}$ [1; i,l]
- (94) $n\left(e^{\frac{2n+1}{n^2+2}} - 1\right)$ [2; h]
- (95) $\frac{(2e)^{-1/n} - 2^{-1/n}}{1/n}$ [0; h]
- (96) $\frac{\log((1 + 1/n^2)^2)}{\sqrt{1 - \cos(1/n^2)}}$ [2; i.2,l]
- (97) $\frac{\sqrt{(\log n)^2 + \log(n^2)}}{\log n}$ [1; m,b]
- (98) $\frac{e^{\sqrt{(\log n)^2 + \log(n^2)}}}{n^2 + 1}$ [0; usare il limite precedente e m,b]
- (99) $\frac{2\sqrt{(\log n)^2 + \log(n^2)}}{n^2 + 1}$ [0; usare il limite precedente]

- a) Raccogliere il termine che va all'infinito più velocemente
- b) Raccogliere il termine che va all'infinito più velocemente al numeratore e denominatore
- c) Criterio rapporto-radice
- d) Criterio del rapporto
- e) Criterio della radice
- f) Trucchetto $a^b = e^{b \log a}$
- g) Manipolazioni sul tema $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{1/a_n}$ se $a_n \rightarrow 0$
- h) Uso del limite notevole $\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \rightarrow 1$ se $a_n \rightarrow 0$
- i) Uso del limite notevole $\frac{\sin(a_n)}{a_n} \rightarrow 1$ se $a_n \rightarrow 0$
- i.2) Uso del limite notevole $\frac{1 - \cos(a_n)}{a_n^2} \rightarrow 1$ se $a_n \rightarrow 0$
- l) Uso del limite notevole $\frac{\log(1 + a_n)}{a_n} \rightarrow 1$ se $a_n \rightarrow 0$
- m) Proprietà di potenze e/o logaritmi
- n) Continuità delle funzioni elementari
- o) Usare la proprietà $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$, dopo aver moltiplicato per la somma
- p) Prodotto di successione infinitesima per successione limitata è infinitesima