ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA 2

NOTA: GLI ESERCIZI ASTERISCATI SONO UN PO' PIÙ DIFFICILI DEGLI ALTRI.

(1) Dimostrare le seguenti proprietà: per $z \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$,
- $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ (questa l'avete già dimostrata se avete fatto la scorsa scheda...).

(2) * Dimostrare la disuguaglianza triangolare usando le precedenti proprietà: per $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$
(Traccia-aiuto: dimostrate che $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$, che è equivalente dato che le quantità sono positive. Ricordate che $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$ per $w \in \mathbb{C}$ e cercate di completare i passaggi che mancano per giungere alla fine della dimostrazione usando le proprietà sopra.)

(3) Se $z = \rho e^{i\vartheta} \neq 0$, scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale $\bar{z}$, $-z$ e $1/z$.

(4) Mostrare che, dato $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ ed un naturale positivo $n \in \mathbb{N}_+$, i numeri
$$\begin{aligned} z_k &= |w|^{1/n} e^{i\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{n}} \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\} \\ &= \sqrt[n]{|w|}\Big(\cos\Big(\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\operatorname{Arg}(w)+2k\pi}{n}\Big)\Big) \end{aligned}$$
sono distinti e tali che $z_k^n = w$ per ogni $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(5) Scrivere in notazione cartesiana le radici seste dell'unità trovate in aula e verificare (con la notazione cartesiana!) che $z_2^6 = 1$ (osservando che
$$(x_2 + iy_2)^6 = \Big[(x_2 + iy_2)^3\Big]^2).$$

(6) Dimostrare che, dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, se il suo insieme dei minoranti $\mathfrak{m}(A)$ non è vuoto, allora ha massimo (suggerimento: seguire la dim. fatta in aula dell'enunciato corrispondente per $\mathfrak{M}(A)$).

(7) Dimostrare che se $M \in \mathfrak{M}(A)$, allora ogni $\tilde{M} \geq M$ appartiene a $\mathfrak{M}(A)$ (questo dimostra che se non è vuoto, allora $\mathfrak{M}(A)$ è una semiretta, cioè un intervallo superiormente limitato. In particolare, chiuso, dato che ha minimo. Analogamente per $\mathfrak{m}(A)$)

(8) Dimostrare che se $\sup(A) \in A$, allora $\max(A) = \sup(A)$ (analogamente, se $\inf(A) \in A$, allora $\min(A) = \inf(A)$).

(9) Trovare sup e inf e, se esistono, min e max dei seguenti insiemi:
$$\Big\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\Big\}, \qquad \Big\{2^t : t \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

(10) Dimostrare che se A è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$, allora ha massimo e minimo (Suggerimento: iniziate considerando il caso in cui $\#A = 2$).