ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA 4

NOTA: GLI ESERCIZI ASTERISCATI SONO UN PO' PIÙ DIFFICILI DEGLI ALTRI.

(1) (Facilissimo, usato spesso in classe) Dimostrate che se una successione è costante, cioè $a_n = \ell \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a_n \to \ell$.

(2) Dimostrare che una successione è limitata (che, ricordo, significa che esistono due numeri reali $M_1 \leq M_2$ tali che $M_1 \leq a_n \leq M_2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) se e solo se esiste $M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M$ (Suggerimento: per un'implicazione, dati M_1, M_2, definite $M := \max\{|M_1|, |M_2|\}$).

(3) * Dimostrare che se $a_n \to \ell_1$ e $b_n \to \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, allora $a_n b_n \to \ell_1 \ell_2$ (Suggerimento: usate il fatto che se a_n converge, allora è limitata e che

$$a_n b_n - \ell_1 \ell_2 = a_n b_n - a_n \ell_2 + -a_n \ell_2 + \ell_1 \ell_2).$$

(4) Provate a dimostrare le regole algebriche delle successioni quando una delle due è divergente: ad esempio, se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to \ell_2 < 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$).

(5) Usando l'esercizio 4 della Dispensa 3, dimostrare che

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2,$$

cioè che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

e che

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{3}{2}.$$

(6) Per ciascuna delle successioni

$$\frac{n}{2^n}, \qquad \frac{4^n}{n!}, \qquad \frac{n}{n+2}, \qquad \frac{n^2}{n^3+1}\ (^*)$$

si dica se è monotona, strettamente monotona, definitivamente monotona e si specifichi la monotonia (suggerimento: farsi un'idea della monotonia calcolando i primi termini, e poi *dimostrare rigorosamente* la monotonia. Non basta scrivere i primi elementi della successione!).

(7) Per convincervi dell'affermazione tra parentesi nell'esercizio precedente, provate a dimostrare che le successioni

$$a_n = \frac{(n-6)^2}{n+1}, \qquad b_n = \frac{(n-10)^2}{n+6}$$

sono definitivamente (strettamente) *crescenti*, anche se i loro primi termini sono rispettivamente

$$a_0 = 36 > a_1 = \frac{25}{2} > a_2 = \frac{16}{3} > a_3 = \frac{9}{4} > a_4 = \frac{4}{5} > a_5 = \frac{1}{5} > a_6 = 0$$

e

$$b_0 = \frac{50}{3} > b_1 = \frac{81}{7} > b_2 = 8 > b_3 = \frac{49}{9} > b_4 = \frac{18}{5} > b_5 = \frac{25}{11}$$
$$> b_6 = \frac{4}{3} > b_7 = \frac{9}{13} > b_8 = \frac{2}{7} > b_9 = \frac{1}{15} > b_{10} = 0.$$