ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA SUGLI INTEGRALI - 2

Integrazione per sostituzione:

(1)
$$3\int_0^{\pi} x\sin(x^2)\,dx$$

(2)
$$\int x^2 e^{2x^3}\,dx$$

(3)
$$\int_{1/\sqrt[6]{3}}^{\sqrt[6]{3}} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$$

(4)
$$\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$$

(5)
$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos^2(\log x)}{x}\,dx$$

(6)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

(7)
$$\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

(8)
$$\int_1^2 x\sqrt[4]{x-1}\,dx$$

(9)
$$\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}\,dx$$

(10)
$$\int_0^{(\log 3)/4} \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx$$

(11)
$$\int x^2(1+x^3)^4\,dx$$

Fratte (o fratte mascherate)

(12)
$$\int_{-1}^{0} \frac{2}{2+x^2}\,dx$$

(13)
$$\int \frac{1}{2+2x+x^2}\,dx$$

(14)
$$\int \frac{1}{4+4x+2x^2}\,dx$$
(15)
$$\int \frac{x^2-1}{x^2-16}\,dx$$
(16)
$$\int \frac{1}{2x^2+12x+68}\,dx$$
(17)
$$\int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx$$
(18)
$$\int \frac{x^4}{x^2-2x+1}\,dx$$
(19)
$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$
(20)
$$\int \frac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}\,dx$$
(21)
$$\int \frac{3-\log x}{x(3+\log x)}\,dx$$
(22)
$$\int_1^{\pi} \frac{1}{x^{2/3}-x^{1/3}}\,dx$$
(23)
$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$$
Integrali vari:
(24)
$$\int (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$$
(25)
$$\int_0^2 x^3 e^{x^2}\,dx$$
(osservazione curiosa: si riesce ad integrare esplicitamente (cioè usando combinazioni di funzioni elementari come polinomi, e^x, etc) $x^k e^{x^2}$ solo quando k è dispari. Se k è pari, invece, non c'è alcuna primitiva esplicita.
(26)
$$\int x^5 e^{x^2}\,dx$$

SUGGERIMENTI E RISOLUZIONI

2) Poniamo $t = 2x^3$, da cui $dt = 6x^2\,dx$:

$$\int x^2 e^{2x^3}\,dx = \frac{1}{6}\int 6x^2 e^{2x^3}\,dx = \frac{1}{6}\Big(\int e^t\,dt\Big)_{t=2x^3} = \frac{1}{6}e^{2x^3}.$$

4) Ponete $t = \log x$ e ricordatevi (o ricalcolatevi, per parti) la primitiva di $\log t$

6) Poniamo $t = \sqrt{x}$; avete $dt = dx/(2\sqrt{x})$. Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \Big(\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\Big)_{t=\sqrt{x}} = \dots$$

6) Ponete $t = \sin x$ (attenzione!).

8) Poniamo $t = \sqrt[4]{x-1}$, da cui $dt = \frac{1}{4}(x-1)^{-3/4}\,dx$; inoltre $x = t^4+1$ e quindi

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sqrt[4]{x-1}\,dx &= 4\int_1^2 x(x-1)\,\frac{1}{4}(x-1)^{-3/4}\,dx\\ &= 4\int_0^1 t^4(t^4+1)\,dt = 4\Big[\frac{t^9}{9}+\frac{t^5}{5}\Big]_{t=0}^1 = 4\,\frac{9+5}{45} = \frac{56}{45}.\end{aligned}$$

9) Ponete $t = 1+\sin^2 x$.

16) Intanto raccogliamo 2 al denominatore:

$$\int \frac{1}{2x^2+12x+68}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+6x+34}\,dx.$$

Ora analizziamo il polinomio al denominatore: il Δ è $36 - 4\cdot 34 < 0$, quindi dobbiamo riscrivere il polinomio in modo da poter integrare la fratta come arcotangente. Abbiamo due metodi: il primo consiste nel notare che, se voglio scrivere

$$x^2+6x+34 = (x-\bar{x})^2 + d, \tag{0.1}$$

allora il doppio prodotto dovrà essere 6. Quindi

$$x^2+6x+34 = x^2+6x+9+34-9 = (x+3)^2+25.$$

Altrimenti sviluppo il membro destro in (0.1):

$$(x-\bar{x})^2+d = x^2-2\bar{x}+\bar{x}^2+d.$$

Questo deve essere uguale a $x^2+6x+34$ e, per il principio d'identità dei polinomi, deve essere $-2\bar{x} = 6$ e $\bar{x}^2+d = 34$. Il risultato è lo stesso di prima. Quindi

$$\int \frac{1}{x^2+6x+34}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+25}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{((x+3)/5)^2+1}\,dx$$

Ora sostituisco $t = (x+3)/5$, quindi $dt = dx/5$; concludiamo con

$$\int \frac{1}{((x+3)/5)^2+1}\,dx = 5\Big(\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\Big)_{t=(x+3)/5} = 5\arctan\Big(\frac{x+3}{5}\Big)+c$$

e quindi

$$\int \frac{1}{2x^2+12x+68}\,dx = \frac{1}{10}\arctan\Big(\frac{x+3}{5}\Big)+c.$$

18) Per calcolare
$$\int \frac{x^4}{x^2-2x+1}\,dx$$
dobbiamo innanzitutto far calare il grado del polinomio del denominatore. Vogliamo cioè scrivere
$$\frac{x^4}{x^2-2x+1} = p(x) + \frac{ax+b}{x^2-2x+1} \tag{0.2}$$
con $p(x)$ polinomio (non razionale fratta!). Quindi, dato che il rapporto tra il termine di grado più alto al numeratore (x^4) e quello di grado più alto al denominatore (x^2) è x^2, cerchiamo innanzitutto di scrivere
$$\frac{x^4}{x^2-2x+1} = x^2 + \frac{q(x)}{x^2-2x+1}$$
con $q(x)$ di grado 3. Abbiamo (come visto in aula), facendo i calcoli
$$\frac{x^4}{x^2-2x+1} = x^2 + \frac{x^4}{x^2-2x+1} - x^2 = x^2 + \frac{2x^3-x^2}{x^2-2x+1}.$$
Ripetiamo il procedimento per il rimanente $\frac{2x^3-x^2}{x^2-2x+1}$: dato che il rapporto tra il termine di grado più alto al numeratore ($2x^3$) e quello di grado più alto al denominatore (x^2) è $2x$, scriviamo
$$\frac{2x^3-x^2}{x^2-2x+1} = 2x + \frac{2x^3-x^2}{x^2-2x+1} - 2x = 2x + \frac{3x^2-2x}{x^2-2x+1}.$$
Nuovamente,
$$\frac{3x^2-2x}{x^2-2x+1} = 3 + \frac{3x^2-2x}{x^2-2x+1} - 3 = 3 + \frac{4x-3}{x^2-2x+1}.$$
Siamo finalmente riusciti ad ottenere (0.2) (unendo tutte le uguaglianze scritte sopra):
$$\frac{x^4}{x^2-2x+1} = x^2 + 2x + 3 + \frac{4x-3}{x^2-2x+1}$$
(potevamo giungere allo stesso risultato effettuando la divisione tra polinomi, per chi l'ha vista). Ora
$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^2-2x+1}\,dx &= \int \left[x^2+2x+3\right] dx + \int \frac{4x-3}{x^2-2x+1}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + \int \frac{4x-3}{x^2-2x+1}\,dx.\end{aligned}$$
Calcoliamo l'ultimo integrale: dobbiamo ricondurci a integrare $\frac{1}{x^2-2x+1}$, e per fare ciò osserviamo che la derivata del denominatore x^2-2x+1 è $2x-2$: per poter effettuare la sostituzione $t = x^2-2x+1$ (ed ottenere la primitiva di tipo logaritmo), dobbiamo quindi prima sistemare il coefficiente della x al numeratore, poi sistemare il termine noto. In pratica:
$$\frac{4x-3}{x^2-2x+1} = 2\frac{2x-3/2}{x^2-2x+1} = 2\frac{2x-2+1/2}{x^2-2x+1}$$
(fortunatamente, il coefficiente della x era già corretto. Abbiamo dovuto solamente aggiungere e togliere un mezzo al numeratore). Quindi
$$\int \frac{4x-3}{x^2-2x+1}\,dx = 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$$
Effettuando la sostituzione suggerita, si vede che
$$2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+1}\,dx = 2\log(x^2-2x+1)^2 + c = 4\log(|x-1|) + c$$

(fate attenzione. Perchè i moduli appaiono e scompaiono?). Infine, per calcolare

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\, dx$$

studiamo quante soluzioni ha il polinomio di secondo grado al denominatore. Dato che $\Delta = 0$, cioè $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, abbiamo

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\, dx = \int (x-1)^{-2}\, dx = \frac{1}{1-x} + c.$$

Quindi

$$\int \frac{x^4}{x^2 - 2x + 1}\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\log(|x-1|) + \frac{1}{1-x} + c.$$

19) Sostituire $t = \sqrt{x}$ e ...

22) Sostituire $t = x^{1/3}$.

23) Porre il denominatore uguale a t.

24) Per risolvere, notiamo che $x + 2 = x + 1 + 1$, quindi

$$\begin{aligned}\int (x+2)\sqrt{x+1}\, dx &= \int \left[(x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}\right] dx \\ &= \int \left[(x+1)^{3/2} + (x+1)^{1/2}\right] dx \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

25) Integrare per parti usando $g'(x) = xe^{x^2}$ (serve trovare g prima di procedere!)