ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA PER PREPARAZIONE AL COMPITINO

LIMITI DI SUCCESSIONI

Si calcolino (se esistono) i limiti (alcuni semplici, alcuni di difficoltà media $(^*)$, alcuni difficili $(^{**})$, alcuni difficilissimi!) per $n \to \infty$ delle seguenti successioni:

$$-1 + 2^n - 3^n + 4^n - 5^n + 6^n - 7^n + 8^n - 9^n + 10^n$$

$$\sqrt[n]{n!} \qquad n^{1/\sqrt{n}} \qquad \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}(^*) \qquad \frac{n!}{n^{\sqrt[4]{n}}}(^*)$$

$$\left(1+\frac{3}{n^4}\right)^{-n^4} \qquad \left(e^n \sin(e^{-n})\right)^{e^n(\sin(e^{-n})-e^{-n})} \qquad \frac{n^{10^{10}}}{(1+10^{-10})^n}$$

$$\frac{1-\cos(1/n!)}{n^{-n}} \qquad \frac{n^{3/2}-e^n}{1+7^n} \qquad \sqrt[n]{(-1)^n+2^n}$$

$$\frac{\sin n + \cos(e^n) + n}{\ln n} \qquad (\cos(1/\ln n) - 1)[\ln(n+1)]^2(^*) \qquad \frac{n^2 - \sin n}{-n + \cos n}$$

$$(-1)^n \frac{n+1}{n^2+1} \qquad (-1)^n \frac{n^2+1}{n+1} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)(^*)$$

$$\sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2-1}} \qquad \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\pi^{-n}$$

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)(^*) \qquad n^3 - n! + 10^{-n} - 2^{-n^n} \qquad \log_{1/e}(n)(^*)$$

$$e^{(n\sin(1/n))^{n!}} \qquad \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad \frac{(4n)!}{((2n)!)^2}(^*) \qquad 2^{\cos(n\pi/4)}(^*)$$

$$\frac{\log(n^n)}{n^{3/2}} \qquad e^n\pi^{-n} \qquad e^{-n^3}\pi^{n^3} \qquad e^{1-n^4(1-\cos(\pi n^{-2}))}$$

$$\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n(^*) \qquad n^n - n^{\sqrt{n}} \qquad n^{\sqrt{n}} - 2^n \qquad (-2)^n 2^{-n}$$

$$\frac{(n+3)! - n^3}{n^2(n+1)!} \qquad (-2)^n 2^{-n^2} \qquad \cos\left(\frac{1}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(1/n)-1}{n^{-2}}\right) \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \qquad \frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}$$

$$\sqrt{2^n-1}-\sqrt{3^n-1} \qquad \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \qquad \frac{1}{(n!)^3}-\frac{1}{(n!)^7}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sqrt{n}-1}}(^*) \qquad \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n^{1/2}-1}}-\frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^{3/2}-1}}(^*) \qquad (n^3+\sin n)\sin\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad \frac{\sqrt{n^2-n+3}}{n+\cos n} \qquad \frac{2^n+4^n}{3^n} \qquad \frac{1}{(n!)}-\frac{1}{((2n)!)}(^*)$$

$$\frac{(3+\sin n)^n+n^4}{(n-2)!-5^n} \qquad e^{n\sin(1/n)} \qquad \frac{(2n)!}{2n!} \qquad \cos\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$$

$$n^4-4^n \qquad \frac{\log n^4}{(\log n)^4} \qquad 2^{3n}-2^{2n}+2 \qquad \frac{(n!)^2-2n!+1}{n!+2}$$

$$\frac{3^{2n}+3^n}{9^n} \qquad \log n-\log\sqrt{n} \qquad \frac{\log n-\log\sqrt{n}+(\log n)^{1/3}}{\sqrt[1/8]{n}}$$

$$\frac{n!}{n^{n-1}} \qquad \sqrt{9^n+3^n}-3^n \qquad \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} \qquad \frac{n!-(n+1)!}{n^2e^n}$$

$$\frac{\sin(1/n)}{\sin(3/n)} \qquad \frac{\cos(1/n)-1}{\cos(3/n)-1} \qquad \sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}(^*)$$

$$\frac{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}{\log n} \qquad \frac{e^{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}}{n^2+1}(^{**}) \qquad \frac{2^{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}}{n^2+1}(^{**})$$

$$\frac{10^{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}}{n^2+1}(^{***}).$$

Alcuni suggerimenti:

- se fate i limiti delle successioni della seconda e della penultima riga (in cui la radice compare all'esponente, rispettivamente, di e e 2) nel loro ordine, è più facile;
- gli ultimi due limiti sono *veramente difficili*: li ho messi quasi solo per curiosità, ma non preoccupatevi, non ci saranno assolutamente cose di questo genere nel compitino!;
- se $a_n \to 1$, allora $a_n = 1 + b_n$ con $b_n \to 0$ (basta prendere $b_n = a_n - 1$);
- se A, B sono due numeri positivi, allora $A^B = e^{B\log A}$;
- ricordate che se una successioni ha due sottosuccessioni con limiti diversi, allora tale successione non ha limite...;
- ricordate che se una successioni ha limite, allora ogni sua sottosuccessione tende allo stesso limite;
- ricordate che $\log n = \log_e n$ e il cambio di base per i logaritmi (nota: quando ho detto in classe che $\log n/n \to 0$ e non dipende da che base ci mettete, sono stato

poco preciso: **la base del logaritmo deve essere $a > 1$ affinché**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(n)}{n} = 0.$$

In ogni caso vi ricordo che $\log$ indica il logaritmo naturale in base $e = 2.71828... > 1$;

- $(2n)! = 2n{\cdot}(2n-1){\cdot}(2n-2)\cdots 3{\cdot}2{\cdot}1$, mentre $2n! = 2{\cdot}n{\cdot}(n-1){\cdot}(n-2)\cdots 3{\cdot}2{\cdot}1$

Quali delle precedenti successioni sono limitate?