ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA 5

NOTA: GLI ESERCIZI ASTERISCATI SONO UN PO' PIÙ DIFFICILI DEGLI ALTRI.

(1) Se H è la funzione gradino di Heaviside, dimostrare utilizzando la definizione che
$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0.$$

(2) Se Sign è la funzione segno, dimostrare utilizzando la definizione che
$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{Sign}(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \mathrm{Sign}(x) = -1,$$
quindi
$$\lim_{x\to 0} \mathrm{Sign}(x)$$
non esiste. Notate tuttavia che $\mathrm{Sign}(0) = 0$.

(3) Dimostrate, come fatto in aula con la funzione seno, che
$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

(4) Calcolate tutte le derivate successive $f^{(k)}$ della funzione $f(x) = \sin(x)$ e verificate che $f^{(k+4)=f^{(k)}}$ per ogni k.

(5) Completare la dimostrazione che se f e g sono (definite in un intorno di ed inoltre) derivabili in x_0, allora pure $f+g$ lo è ed inoltre
$$\frac{d}{dx}(f+g)(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0) + \frac{d}{dx}g(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(6) Mostrare, utlizzando la regola per la derivazione del prodotto, che se f è derivabile in x_0 e $k \in \mathbb{R}$ una costante reale, allora
$$\frac{d}{dx}(k\,f)(x_0) = k\frac{d}{dx}f(x_0)$$
(vi ricordo che kf è la funzione che vale $kf(x_0)$ in x_0, così come $f+g$ è la funzione che vale $f(x_0)+g(x_0)$ in x_0).

(7) Utilizzando la formula di cambio di variabile del logaritmo ed il punto (6), scrivete
$$\frac{d}{dx}\log_a(x)$$
per $a > 0, a \neq 1$.

(8) Derivate la funzione
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$
Cosa potete dedurre?