ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA SUGLI INTEGRALI - 1

Integrazione per parti (eventualmente riassorbendo):

(1)
$$\int \cos x \sin(2x)\, dx;$$

(2)
$$\int \sin x \cos(4x)\, dx$$

(3)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2x)\cos(x/2)\, dx$$

(4)
$$\int \cos^4 x\, dx$$

(5)
$$\int \sin^4 x\, dx$$

(6)
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(2x)\, dx$$

(7)
$$\int e^x \sin^2 x\, dx$$

(8)
$$\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, dx$$

(9)
$$\int (2x^2 - 3x + 5)\cos x\, dx$$

(10)
$$\int \log(\cos x)\sin x\, dx$$

(11)
$$\int_1^2 \frac{\log(x)}{x^2}\, dx$$

(12)
$$\int \frac{1}{x\,\log^2(x)}\, dx \Big(= \int \frac{1}{x\,(\log(x))^2}\, dx \Big)$$

(13)
$$\int_1^e \log^2 x\, dx$$

(14)
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$$
(15)
$$\int_1^2 x\arctan(x-1)\,dx$$
(16)
$$\int \frac{x^3}{(x^2+5)^2}\,dx$$
I numero 1 e 10 si possono pure fare per per sostituzione: provate! Provate pure
$$\int_{1+1/e}^{e} \frac{1}{x\log x}\,dx$$
per sostituzione (se no me lo scordo).

RISOLUZIONE DI ALCUNI DI QUESTI

1) Integro per parti con $f(x) = \sin(2x), g'(x) = \cos x$ (quindi $f'(x) = 2\cos(2x), g(x) = \sin x$)
$$\int \cos x \sin(2x)\,dx = \sin x \sin(2x) - 2\int \sin x \cos(2x)\,dx.$$
Integro nuovamente per parti con $f(x) = \cos(2x), g'(x) = \sin x$ ($f'(x) = -2\sin(2x)$, $g(x) = -\cos x$,) per ottenere
$$\int \sin x \cos(2x)\,dx = -\cos x\cos(2x) - 2\int \cos x \sin(2x)\,dx.$$
Unendo le due uguaglianze abbiamo
$$\int \cos x \sin(2x)\,dx = \sin x \sin(2x) + 2\cos x \cos(2x) + 4\int \cos x \sin(2x)\,dx$$
da cui
$$-3\int \cos x \sin(2x)\,dx = \sin x \sin(2x) + 2\cos x\cos(2x) + c;$$
quindi
$$\int \cos x \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{3}\sin x \sin(2x) - \frac{2}{3}\cos x \cos(2x) + c;$$
Notate che la sostituzione $g'(x) = \cos(2x), f(x) = \sin x$ nel secondo integrale non funziona, dato che vi darebbe un'identità. Altrimenti, dato che $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ (ma questo metodo non funziona sempre per questa classe di integrali)
$$\int \cos x \sin(2x)\,dx = 2\int \sin x \cos^2(x)\,dx = -2\Big(\int t^2\,dt\Big)_{t=\cos x}$$
dato che se $t = \cos x$, allora $dt = -\sin x\,dx$. Quindi
$$\int \cos x \sin(2x)\,dx = -\frac{2}{3}\big(t^3\big)_{t=\cos x} = -\frac{2}{3}\cos^3 x.$$
Notate che
$$\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$$
e
$$\frac{1}{2}\sin x \sin(2x) + \cos x\cos(2x) = \sin^2 x\cos x + \cos x(1-2\sin^2 x) = \cos x(1-\sin^2 x),$$
quindi i due risultati coincidono.

3) e 4) Integro per parti con $f(x) = \cos^3 x, g'(x) = \cos x$ ($f'(x) = -3\cos^2 x \sin x, g(x) = \sin x$): usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\,dx &= \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx\\ &= \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x\,dx - 3\int \cos^4 x\,dx;\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx + c\\ &= \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x \cos x\end{aligned}$$

ricordando che

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2\,dx &= x + \int \cos^4 x\,dx - 2\int \cos^2 x\,dx + c\\ &= x + \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x \cos x - x - \sin x \cos x + c\\ &= \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}x - \frac{5}{8}\sin x \cos x + c.\end{aligned}$$

7) Integro per parti con $f(x) = \sin^2 x, g'(x) = e^x$ (con $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x), g(x) = e^x$):

$$\int e^x \sin^2 x\,dx = e^x \sin^2 x - \int e^x \sin(2x)\,dx;$$

integro nuovamente con $f(x) = \sin(2x), g'(x) = e^x$ (con $f'(x) = 2\cos(2x) = 2(1 - 2\sin^2 x), g(x) = e^x$):

$$\begin{aligned}\int e^x \sin^2 x\,dx &= e^x \sin^2 x - \left[e^x \sin(2x) - 2\int e^x (1 - 2\sin^2 x)\,dx\right]\\ &= e^x\big(\sin^2 x - \sin(2x)\big) + 2e^x - 4\int e^x \sin^2 x\,dx;\end{aligned}$$

quindi

$$\int e^x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{5}e^x\big(\sin^2 x - \sin(2x)\big) + \frac{2}{5}e^x.$$

8) Qui uso chiaramente $f(x) = x^2, g'(x) = \sin x$ perchè derivando f scendo di grado: $f'(x) = 2x, g(x) = -\cos x$, quindi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\,dx &= \Big[-x^2\cos x\Big]_{x=0}^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4} x \cos x\,dx\\ &= -\frac{\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_{x=0}^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx\right]\\ &= -\frac{\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos(0)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[-\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} + 2\Big] - 2\end{aligned}$$

nel penultimo passaggio abbiamo preso $f(x) = x, g'(x) = \cos x, f'(x) = 1, g(x) = \sin x$.
11) Scegliamo $f(x) = \log x$, $g'(x) = x^{-2}$ così che $f'(x) = 1/x = x^{-1}$, $g(x) = -x^{-1}$. Abbiamo

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{\log x}{x}\Big]_{x=1}^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{\log 2}{2} + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{x=1}^2 = -\frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2}.$$

14) Prima integrate per parti con $g'(x) = 1/\sqrt{x-1}$ poi effettuate la sostituzione $t = \sqrt{x-1}$. **16)** Integrate per parti con $g'(x) = x/(x^2+5)^2$, quindi $g(x) = \dots$