ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA 1

NOTA: GLI ESERCIZI ASTERISCATI SONO UN PO' PIÙ DIFFICILI DEGLI ALTRI.

(1) Date due proposizioni p e q, verificare che le due proposizioni $p \Rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ hanno la stessa tavola di verità, cioè che

$$p \Rightarrow q \;\sim\; \neg p \vee q.$$

(2) Scrivere un'espressione equivalente (cioè che abbia la stessa tavola di verità) di $\Longleftrightarrow$ utilizzando solo i simboli $\vee, \wedge$ e $\neg$ (e le parentesi).

(3) Dimostrare le regole che legano complementazione, unione ed intersezione: per ogni $A, B \subset U$,

$$\big(A \cap B\big)^c = A^c \cup B^c, \qquad \big(A \cup B\big)^c = A^c \cap B^c.$$

(4) Siano A, C due insiemi finiti, e denotiamo con $\#A, \#B$, rispettivamente, le loro cardinalità. Quando vale che

$$\#\big(A \times C\big) = \#A \cdot \#C?$$

(5) * Dimostrare che, se A è un insieme finito,

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^{\#A}.$$

(Suggerimento: trovare una maniera appropriata per descrivere i sottoinsiemi di A).

(6) * (QUESTA È UNA CURIOSITÀ PIÙ CHE UN ESERCIZIO) Abbiamo detto a lezione che, con la nostra trattazione "intuitiva" della teoria degli insiemi, si può cadere in contraddizione. Abbiamo visto che, per esempio, si può considerare l'insieme di tutti gli insiemi

$$\mathscr{U} := \big\{U : U \text{ è un insieme}\big\}$$

che gode della proprietà di appartenere a se stesso: $\mathscr{U} \in \mathscr{U}$. Nulla a questo punto vieta di considerare l'insieme $\mathscr{S}$ degli insiemi che contengono se stessi

$$\mathscr{S} := \big\{V \text{ insieme} : V \in V\big\}$$

tale insieme non è vuoto, dato che in particolare $\mathscr{U} \in \mathscr{S}$. Inoltre possiamo definire l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi

$$\mathscr{N} := \big\{V \text{ insieme} : V \notin V\big\} :$$

provate a scrivere qualche elemento di $\mathscr{N}$. Ora, quale delle due alternative

$$\mathscr{N} \in \mathscr{N}, \qquad \mathscr{N} \notin \mathscr{N}$$

è vera?[1]

(7) * Dimostrare che i numeri

$$\sqrt{5}, \qquad \sqrt[3]{7}$$

non appartengono a $\mathbb{Q}$. (Suggerimento: Può essere utile ricordare la proprietà di fattorizzazione unica dei numeri naturali, accenntata in aula: ogni numero $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, può essere scritto, *in maniera unica* - eccetto alpiù l'ordine dei fattori - come prodotto di numeri primi elevati a potenze naturali. Ad esempio,

$$16 = 2^4, \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11, \quad 10000 = 2^4 \cdot 5^4.$$

Un numero primo è un numero naturale divisibile solo per 1 e per se stesso: 7 è primo, mentre $10 = 2 \cdot 5$ e $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ non lo sono, ad esempio).

(8) Completare la dimostrazione del fatto che in $\mathbb{Q}$ non vale l'Assioma di Completezza.

(9) Scrivere inverso, coniugato e norma dei seguenti numeri complessi

$$-i, \qquad -2, \qquad 1+i, \qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{2}i, \qquad 1 + \sqrt{\pi}i.$$

(10) Dimostrare le seguenti relazioni, valide per ogni $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ con $z_3 \neq 0$:

$$|\overline{z_1}| = |z_1| = \overline{|z_1|}^2, \quad \overline{\frac{1}{z_3}} = \frac{1}{\overline{z_3}}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

[1]Il paradosso è stato fornito da Bertrand Russell all'inizio del '900, ed ha avuto una profonda influenza nello sviluppo della matematica moderna. Chi fosse interessato può vedere qui; la teoria rigorosa utilizzata larghissimamente in matematica non è quella intuitiva-ingenua, ma è quella di Zermelo-Fraenkel ZF, in cui "insieme" è un oggetto soddisfacente certi assiomi. (NOTA: I LINK SONO TRATTI DA WIKIPEDIA SOLO PERCHÉ SONO FORNITI PER SODDISFARE CURIOSITÀ PERSONALI. Per trattazioni più esaurienti e corrette, per chi fosse interessato, posso fornire referenze appropriate).

[2]Attenzione!