

ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA 3

NOTA: GLI ESERCIZI ASTERISCATI SONO UN PO' PIÙ DIFFICILI DEGLI ALTRI.

- (1) Dimostrare che se $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente in X , allora $f^{-1} : \text{Imm}(f) \rightarrow X$ è strettamente crescente. Analogamente, se f è strettamente decrescente, allora f^{-1} è strettamente decrescente.
- (2) Dimostrare che se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, con $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$, sono suriettive, allora $X_0 = X$ e $g \circ f : X \rightarrow Z$ è suriettiva (X_0 è il dominio della composizione, come definito in aula).
- (3) Prima trovare il “dominio naturale”, poi usare il risultato del punto precedente per trovare l'immagine delle seguenti funzioni:

$$e^{\sin x}, \quad e^{\tan x}, \quad \log_{10}(\sqrt{x} + 1), \quad \arctan(\cos(x)), \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} \sin(x)\right).$$

- (4) * Dimostrare usando l'induzione che per ogni numero $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

- (5) Dimostrare usando (la piccola variante del) principio d'induzione che

$$n! > 3^{n-2}$$

per ogni $n \geq 2$.

- (6) Scrivere come composizione di funzioni elementari e trovare il “dominio naturale” delle seguenti funzioni di variabile reale:

$$\sqrt{|x+3|-1}, \quad \frac{1}{|x+1|}, \quad \log_{\frac{1}{2}}(2|\sin x| - 1), \quad \ln\left(\frac{|x-3|}{x^2 - 3x + 2}\right).$$

- (7) Trovare l'immagine delle prime due funzioni dell'esercizio precedente.
- (8) Mostrare con la definizione che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n-1} &= 2, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n+1} &= +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n^2} &= +\infty, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_3\left(\frac{1}{n}\right) &= -\infty. \end{aligned}$$