ESERCIZI PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

CORSO DI LAURA IN INFORMATICA, A.A. 2017/18

DISPENSA DI PREPARAZIONE AL COMPITINO
NUMERI COMPLESSI

CAVEAT: A VOLTE DOVRETE ESSERE COSTRETTI A LASCIARE INDICATO L'ARGOMENTO DI z, $\mathrm{Arg}\,(z)$, CIOÈ AD ESPRIMERE IL NUMERO COMPLESSO SOLAMENTE IN FORMA TRIGONOMETRICA/ESPONENZIALE. SE GLI ANGOLI IN GIOCO SARANNO PERÒ

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathrm{etc}$$

DOVRETE INDICARLO ANCHE IN FORMA CARTESIANA.

- Scrivere in forma cartesiana, trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

$$\frac{2}{1-i}, \qquad -1-i, \qquad \frac{4i}{\sqrt{3}+i}, \qquad \frac{2}{\sqrt{3}-i}+\frac{1}{i}, \qquad \frac{1+i}{2-2i}, \qquad i+\frac{1}{i}.$$

- Si risolvano le seguenti equazioni di secondo grado; dette z_1 e z_2 le radici, si calcolino inoltre le espressioni tra parentesi.
  - $z^2+z+1=0;\qquad \Big(z_1+z_2, z_1z_2, \mathrm{Arg}\,(z_1+z_2)\Big);$
  - $z+\dfrac{1}{z}=i\qquad \Big(z_1+z_2+z_1z_2, \dfrac{1}{(z_1)^2}+\dfrac{1}{(z_2)^2}\Big);$
  - $z^2+3iz+4=0\qquad \Big(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}, |z_1|+|z_2|-|z_1+z_2|\Big);$
  - $z^2+2z+1-i=0\qquad \Big((z_1)^2z_2+z_1(z_2)^2, \overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\Big);$
  - $iz^2-2z+3i=0\qquad \Big(\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}+\dfrac{z_2}{\overline{z_1}}, (z_1)^2+(z_2)^2+2z_1z_2\Big).$
- Si risolvano le seguenti equazioni biquadratiche: ricordo che si risolvono in due step, prima scrivendo $w=z^2$ e risolvendo l'equazione in secondo grado in w (che ha due soluzioni in $\mathbb{C}$, w_1 e w_2), poi risolvendo $z^2=w_1$ e $z^2=w_2$.
  - $z^4-(1+i)z^2+i=0$,
  - $z^4+2z^2+2=0$,
  - $z^4+2z^2+4=0$,
  - $z^4+1=0$.
- Si risolvano le seguenti equazioni utilizzando la legge di annullamento del prodotto (eventualmente sarà necessario effettuare un raccoglimento parziale):
  - $z^4+iz=0$;
  - $z^6-iz^4+z^2-i=0$;
  - $z^5+(1+i)z=0$;
  - $z^5+2z^3-z^2-2=0$.
- Calcolare le potenze z^2, z^6, z^{22} dei numeri complessi

$$z=\frac{2}{\sqrt{3}-i}+\frac{1}{i};\qquad z=\frac{1+i}{2-2i}.$$

- Calcolare le soluzioni delle seguenti equazioni e rappresentarle nel piano complesso:

$$z^2 = 1 - i\sqrt{3}, \qquad z^4 + 2 = 0, \qquad z^5 + i = 0,$$

$$z^3 = 1 + i, \qquad z^4 + \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} = 0, \qquad z^4 = \frac{1+i}{1-i}.$$